

Dreapta și planul în spațiu

Paul A. Blaga

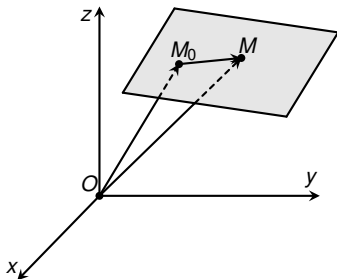
Universitatea "Babeș-Bolyai"

20 martie 2022

Planul

Ecuția vectorială a planului

Fie \mathbf{v} și \mathbf{w} doi vectori necoliniari din spațiu și M_0 un punct oarecare. Dacă atașăm vectorii punctului M_0 , atunci există două puncte, unic determinate, P și Q , astfel încât $\mathbf{v} = \overrightarrow{M_0P}$ și $\mathbf{w} = \overrightarrow{M_0Q}$. Cum vectorii \mathbf{v} și \mathbf{w} sunt necoliniari, punctele M_0 , P și Q , la rândul lor, sunt necoliniare, deci determină un plan Π . Intenționăm să descriem punctele acestui plan cu ajutorul punctului M_0 și al vectorilor \mathbf{v} și \mathbf{w} .



Planul

Ecuția vectorială a planului

Fie M un punct din spațiu. Notăm cu \mathbf{r}_0 vectorul de poziție al punctului M_0 și cu \mathbf{r} vectorul de poziție al punctului M . Punctul M , în mod clar, aparține planului dacă și numai dacă vectorul $\overrightarrow{M_0M}$ este coplanar cu vectorii $\overrightarrow{M_0P}$ și $\overrightarrow{M_0Q}$, adică cu vectorii \mathbf{v} și \mathbf{w} . Să presupunem că M aparține planului Π . Aceasta înseamnă, întrucât vectorii \mathbf{v} și \mathbf{w} sunt liniar independenți, că $\overrightarrow{M_0M}$ are o descompunere (unică) sub forma unei combinații liniare a vectorilor \mathbf{v} și \mathbf{w} , cu alte cuvinte, există (și sunt unice) două numere reale s și t astfel încât să avem

$$\overrightarrow{M_0M} = s\mathbf{v} + t\mathbf{w}. \quad (1)$$

Pe de altă parte, $\overrightarrow{M_0M} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$, deci ecuația precedentă se poate scrie

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + s\mathbf{v} + t\mathbf{w}, \quad (2)$$

ecuație care se numește *ecuația vectorială a planului* Π .

Planul

Ecuția vectorială a planului

Să presupunem acum că punctul M are coordonatele (x, y, z) , M_0 are coordonatele (x_0, y_0, z_0) , iar vectorii \mathbf{v} și \mathbf{w} au componentele (v_x, v_y, v_z) , respectiv (w_x, w_y, w_z) . Atunci ecuația vectorială (2) este echivalentă cu sistemul de ecuații scalare

$$\begin{cases} x = x_0 + sv_x + tw_x \\ y = y_0 + sv_y + tw_y \\ z = z_0 + sv_z + tw_z \end{cases}, \quad (3)$$

ecuații care se numesc *ecuațiile parametrice ale planului* Π . Ecuația planului se poate reprezenta sub formă vectorială și fără a utiliza parametrii. Într-adevăr, avem următorul rezultat:

Planul

Ecuția vectorială a planului

Teorema

Ecuția vectorială a unui plan care trece printr-un punct M_0 și este perpendicular pe un vector \mathbf{n} dat este

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (4)$$

Demonstrație.

Fie Π planul determinat de punct și de vectorul normal. Dacă M este un punct oarecare al planului, atunci $\overrightarrow{M_0M} \perp \mathbf{n}$, de unde rezultă că

$$\overrightarrow{M_0M} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (5)$$

sau

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{n} = 0.$$

Planul

Ecuția generală a planului

Definiție

Se numește *ecuație liniară (generală) relativ la necunoscutele x, y, z* o ecuație de forma

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad (6)$$

unde cel puțin unul dintre coeficienții A, B, C ai necunoscutelor este diferit de zero.

Teorema

Într-un sistem de coordonate carteziane rectangulare, un plan este definit de o ecuație liniară generală de forma (6).

Planul

Ecuția generală a planului

Demonstrație.

Considerăm un plan care trece prin punctul M_0 și are vectorul normal $\mathbf{n}(A, B, C)$. Atunci, pentru orice punct $M(x, y, z)$ din plan, avem

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{n} = 0$$

sau

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

sau, încă,

$$Ax + By + Cz - (Ax_0 + By_0 + Cz_0) = 0,$$

care este o ecuație liniară generală în x, y, z .



Planul

Ecuția generală a planului

Demonstrație.

Invers, fie $M(x, y, z)$ un punct din spațiu care verifică o ecuație de forma

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

cu $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

Să presupunem, de exemplu, că în ecuația de mai sus $A \neq 0$. Atunci, în mod evident, punctul $M_0(-D/A, 0, 0)$ verifică, de asemenea, această ecuație. Notăm cu \mathbf{n} vectorul de componente (A, B, C) . Cum

$$\overrightarrow{M_0M} \equiv \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = (x + D/A, y, z),$$

ecuația planului care trece prin M_0 și are vectorul normal \mathbf{n} este

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{n} = 0$$

Planul

Ecuția generală a planului

Demonstrație.

sau

$$A(x + D/A) + By + Cz = 0 \text{ sau } Ax + By + Cz + D = 0,$$

prin urmare, punctul M este situat în planul care trece prin M_0 și are pe \mathbf{n} ca vector normal. □

Planul

Cazuri particulare ale ecuației generale a planului

- a) Ecuația unui plan care trece prin origine este:

$$Ax + By + Cz = 0.$$

Într-adevăr, se observă imediat că ecuația de mai sus este verificată de originea $O(0, 0, 0)$.

- b) Ecuațiile planelor paralele cu axele de coordonate sunt

$$Ax + By + D = 0 \quad (\text{paralele cu axa } Oz),$$

$$Ax + Cz + D = 0 \quad (\text{paralele cu axa } Oy),$$

$$By + Cz + D = 0 \quad (\text{paralele cu axa } Ox).$$

Planul

Cazuri particulare ale ecuației generale a planului

Într-adevăr, dacă în ecuația generală a planului punem $C = 0$, ea devine

$$Ax + By + D = 0.$$

În acest caz, vectorul normal la plan, $\mathbf{n}(A, B, 0)$ are proiecția ortogonală pe axa Oz nulă, așadar vectorul este perpendicular pe axă, deci planul este paralel cu axa Oz . La fel stau lucrurile și în celelalte două cazuri. Dacă, în particular, și $D = 0$, atunci planele *trec* prin axe, nu sunt doar paralele cu ele.

③ Ecuațiile planelor paralele cu planele de coordonate sunt

$$Ax + D = 0 \quad (\text{paralele cu planul } yOz),$$

$$By + D = 0 \quad (\text{paralele cu planul } xOz),$$

$$Cz + D = 0 \quad (\text{paralele cu planul } xOy).$$

Planul

Cazuri particulare ale ecuației generale a planului

Într-adevăr, dacă, de exemplu, punem în ecuația planului $B = C = 0$, ea se transformă în

$$Ax + D = 0.$$

Vectorul normal la acest plan este $\mathbf{n}(A, 0, 0)$. Acest vector este perpendicular pe planul yOz , deci planul care îl are ca vector normal este *paralel* cu planul yOz . La fel se raționează și în cazul celorlalte două plane de coordonate.

Și aici, ca și mai sus, dacă punem și $D = 0$, obținem plane care sunt paralele cu planele de coordonate și trec prin origine, adică obținem ecuațiile *planelor de coordonate*, $x = 0$, $y = 0$, respectiv $z = 0$.

Planul

Altă formă a ecuației vectoriale a planului

Plecăm de la ecuația vectorială a planului care trece printr-un punct și este paralel cu doi vectori necoliniari:

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = s\mathbf{v} + t\mathbf{w},$$

adică vectorii $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$, \mathbf{v} sunt liniar dependenți sau

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0. \quad (7)$$

Această ecuație se numește, de regulă, pur și simplu, *ecuația planului care trece prin punctul M_0 și este paralel cu vectorii \mathbf{u} și \mathbf{v}* . Dacă dezvoltăm produsul mixt (7), se constată imediat că această ecuație este echivalentă cu ecuația

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (8)$$

Planul

Altă formă a ecuației vectoriale a planului

sau cu ecuația

$$\begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} (x - x_0) + \begin{vmatrix} v_3 & v_1 \\ w_3 & w_1 \end{vmatrix} (y - y_0) + \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} (z - z_0) = 0. \quad (9)$$

Planul

Ecuatia planului determinat de trei puncte necoliniare

Fie $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ trei puncte necoliniare din spațiu. Atunci cele trei puncte determină un plan. Pentru a obține ecuația sa, aplicăm metoda de la punctul precedent. Mai precis, fie

$$\mathbf{v} \equiv \overrightarrow{M_1 M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1),$$

$$\mathbf{w} \equiv \overrightarrow{M_1 M_3}(x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1).$$

Atunci acești doi vectori sunt, în mod evident, necoliniari și paraleli cu planul. Planul a cărui ecuație o căutăm este cel care trece prin M_1 și este paralel cu vectorii \mathbf{v} și \mathbf{w} . Prin urmare, ecuația sa este (vezi 8):

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (10)$$

Planul

Ecuția planului determinat de trei puncte necoliniare

Ecuția (10) se poate rescrie în forma de mai jos, mai ușor de memorat:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (11)$$

Planul

Condiția de coplanaritate a patru puncte

Din formula (11) rezultă imediat *condiția de coplanaritate a patru puncte*:

Patru puncte M_1, M_2, M_3, M_4 sunt coplanare dacă și numai dacă:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (12)$$

Desigur, ecuația este echivalentă cu condiția

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Planul

Ecuția planului prin tăieturi

- Π – plan care nu trece prin origine și prin nici una dintre axe. Atunci ecuația sa generală este

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

unde nici unul dintre cei patru coeficienți nu se anulează.

- Atunci
 - $\Pi \cap Ox = \{P(-D/A, 0, 0)\};$
 - $\Pi \cap Oy = \{Q(0, -D/B, 0)\};$
 - $\Pi \cap Oz = \{R(0, 0, -D/C)\}.$
- Dacă introducem notațiile

$$a = -\frac{D}{A}, \quad b = -\frac{D}{B}, \quad c = -\frac{D}{C},$$

ecuația planului care trece prin punctele P, Q, R se va scrie

Planul

Ecuția planului prin tăieturi

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 & 1 \\ 0 & 0 & c & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

- Dacă dezvoltăm ecuația de mai sus, obținem

$$bcx + cay + abz - abc = 0$$

sau, dacă împărțim cu abc ,

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0. \quad (13)$$

Ecuția (13) se numește *ecuația planului prin tăieturi*.

Planul

Ecuția planului prin tăieturi

Motivul este legat de faptul că lungimile cu semn a, b, c se numesc *tăieturile* planului pe axele de coordonate. Ele sunt lungimile cu semn ale segmentelor determinate de origine și de punctele de intersecție ale planului cu cele trei axe de coordonate.

Planul

Ecuția normală a unui plan

Fie Π un plan și OP – perpendiculara din origine pe plan. Dacă planul trece prin origine, atunci punctul P coincide cu originea, deci lungimea vectorului \overrightarrow{OP} este egală cu zero. În cazul general, însă, fie

$$p \equiv \|\overrightarrow{OP}\|$$

lungimea acestui vector (egală, de fapt, cu distanța de la origine la planul Π).

Fie $\mathbf{n}(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ versorul vectorului \overrightarrow{OP} (care este, în același timp, versorul normalei la plan). Atunci punctul P (piciorul perpendicularei pe plan din origine), va avea coordonatele

$$P(p \cos \alpha, p \cos \beta, p \cos \gamma),$$

Planul

Ecuatia normală a unui plan

Dacă $M(x, y, z)$ este un punct oarecare din planul Π , atunci componentele sale vor fi

$$\overrightarrow{PM}(x - p \cos \alpha, y - p \cos \beta, z - p \cos \gamma).$$

Cum vectorii \overrightarrow{PM} și \mathbf{n} sunt perpendiculari, avem

$$\overrightarrow{PM} \cdot \mathbf{n} = 0$$

sau

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p \underbrace{(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma)}_{=1} = 0$$

sau, în final,

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0. \quad (14)$$

Ecuatia (14) se numește *forma normală Hesse* sau, pur și simplu, *forma normală* a ecuației planului.

Planul

Ecuatia normală a unui plan

Forma normală a ecuației unui plan este utilă în anumite situații, de aceea, vom arăta cum se poate obține.

- Plecăm cu un plan scris sub forma generală,

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

- Acest plan are și o ecuație normală,

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0.$$

- Cum cele două ecuații trebuie să reprezinte același plan, coeficienții lor trebuie să fie proporționali:

$$\cos \alpha = \lambda A, \cos \beta = \lambda B, \cos \gamma = \lambda C, -p = \lambda D.$$

- Dacă ridicăm la pătrat primele trei egalități și le însumăm, obținem

$$\lambda^2 (A^2 + B^2 + C^2) = 1.$$

Planul

Ecuția normală a unui plan

- Așadar,

$$\lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (15)$$

- Semnul din (15) se alege astfel încât să fie opus semnului termenului liber D din ecuația generală.
- Dacă $D = 0$, atunci semnul lui λ se poate alege oricum.
- λ se numește, din motive evidente, *factor normalizator* al ecuației generale a planului.
- Planul Π împarte mulțimea tuturor punctelor din spațiu care nu aparțin lui Π în două submultimi, numite *semispații deschise*.
- Vom numi *semispațiu pozitiv* acel semispațiu înspre care este îndreptat vectorul \mathbf{n} . Celălalt se numește *semispațiu negativ*.
- originea spațiului se află întotdeauna fie în planul Π , fie în semispațiul negativ.

Planul

Distanța de la un punct la un plan

Definiție

Se numește *distanță* de la un punct $M_0(x_0, y_0, z_0)$ la planul Π lungimea d a perpendicularei coborâte din punctul M_0 pe planul Π . Se numește *abatere* (sau *deviere*) a punctului M_0 relativ la planul Π numărul δ definit astfel încât:

- a) $\delta = d$ dacă M_0 este în semispațiul pozitiv determinat de Π ;
- b) $\delta = 0$ dacă $M_0 \in \Pi$;
- c) $\delta = -d$ dacă M_0 este în semispațiul negativ.

Planul

Distanța de la un punct la un plan

Teorema

Dacă planul este dat prin ecuația normală

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0,$$

atunci au loc formulele

$$\delta = x_0 \cos \alpha + y_0 \cos \beta + z_0 \cos \gamma - p; \quad (16)$$

$$d = |x_0 \cos \alpha + y_0 \cos \beta + z_0 \cos \gamma - p|. \quad (17)$$

Planul

Distanța de la un punct la un plan

Teorema

Dacă planul este dat prin ecuația sa generală,

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

atunci au loc formulele

$$\delta = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad (18)$$

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (19)$$

Planul

Distanța de la un punct la un plan

Demonstrație.

Notăm cu P_0 proiecția ortogonală a lui M_0 pe dreapta OP . Atunci

$$\delta = (PP_0) = (OP_0) - (OP) = \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{OM_0} - p = x_0 \cos \alpha + y_0 \cos \beta + z_0 \cos \gamma - p.$$

Așadar, formula (16) este demonstrată. (17) rezultă din (16), pentru că, în mod evident, $d = |\delta|$. □

Planul

Unghiul a două plane

Prin *unghiul a două plane* înțelegem măsura unghiului plan asociat unghiului diedru format de cele două plane, adică măsura unghiului format de direcțiile normale la cele două plane.

Cele două plane formează, în fapt, nu unul ci *patru* unghiuri, două câte două opuse și egale și adiacente suplimentare.

Considerăm două plane

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad (20)$$

și

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \quad (21)$$

Vectorii normali la cele două plane sunt $\mathbf{n}_1(A_1, B_1, C_1)$ și $\mathbf{n}_2(A_2, B_2, C_2)$, prin urmare unghiurile sunt date de

$$\cos \alpha_{1,2} = \pm \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \quad (22)$$

Planul

Unghiul a două plane

- Dacă membrul drept este pozitiv, se obțin unghiurile ascuțite, dacă este negativ – unghiurile obtuze.
- Din formula (22), rezultă că cele două plane sunt perpendiculare dacă și numai dacă

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0. \quad (23)$$

- Pe de altă parte, planele sunt paralele exact atunci când cei doi vectori normali sunt paraleli, adică dacă și numai dacă

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \quad (24)$$

Dreapta în spațiu

Ecuția vectorială și ecuațiile parametrice ale dreptei

Fie Δ o dreaptă în spațiu.

- Un vector nenul \mathbf{a} se numește *vector director* al dreptei Δ dacă orice segment orientat din clasa lui \mathbf{a} este paralel cu dreapta Δ .
- Dacă $\mathbf{a}(l, m, n)$ este un vector director al dreptei Δ , iar $M_0(x_0, y_0, z_0)$ este un punct oarecare dreaptă, atunci un punct arbitrar din spațiu, $M(x, y, z)$, aparține dreptei dacă și numai dacă vectorul $\overrightarrow{M_0M}(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ este coliniar cu vectorul \mathbf{a} .
- Notăm cu \mathbf{r}_0 , respectiv \mathbf{r} vectorii de poziție $\overrightarrow{OM_0}$, \overrightarrow{OM} ai punctelor M_0 , respectiv M . Atunci

$$\overrightarrow{M_0M} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0,$$

prin urmare vectorii $\overrightarrow{M_0M}$ și \mathbf{a} sunt coliniari dacă și numai dacă există un număr real t astfel încât să avem

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = t\mathbf{a},$$

Dreapta în spațiu

Ecuția vectorială și ecuațiile parametrice ale dreptei

sau

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{a}. \quad (25)$$

Ecuția (25) se numește *ecuația vectorială* a dreptei Δ , care trece prin punctul M_0 și are ca vector director vectorul \mathbf{a} . Pe componente, avem

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}, \quad (26)$$

ecuații care se numesc *ecuațiile parametrice* ale dreptei care trece prin punctul $M_0(x_0, y_0)$ și are vectorul director $\mathbf{a}(l, m, n)$.

Într-un alt sistem de coordonate, ecuațiile parametrice își modifică forma.

Dreapta în spațiu

Ecuatiile canonice ale unei drepte în spațiu

Dacă fiecare dintre componentele l, m, n ale vectorului director \mathbf{a} este diferită de zero, atunci ecuațiile (26) sunt echivalente cu sistemul

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}, \quad \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}, \quad \frac{z - z_0}{n} = \frac{x - x_0}{l}, \quad (27)$$

sistem pe care îl vom scrie, de regulă, sub forma

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}. \quad (28)$$

Ecuatiile (28) se numesc *ecuațiile canonice* ale dreptei care trece prin punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ și are vectorul director $\mathbf{a}(l, m, n)$.

Dreapta în spațiu

Ecuatiile canonice ale unei drepte în spațiu

Observație

Din moment ce vectorul director **a** este diferit de zero, întotdeauna se poate găsi un sistem de coordonate în raport cu care toate componentele sale să fie nenule. Totuși, în anumite sisteme de coordonate, una sau două dintre componentele sale pot fi egale cu zero. Facem aceeași convenție ca și în cazul dreptei în plan. Astfel, sistemul

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{0}$$

este echivalent cu sistemul de ecuații

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}, \quad z = z_0, \quad l \neq 0, \quad m \neq 0,$$

în timp ce un sistem de ecuații de forma

Dreapta în spațiu

Ecuatiile canonice ale unei drepte în spațiu

Observație

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{0} = \frac{z - z_0}{0}, \quad l \neq 0,$$

este echivalent cu sistemul

$$y = y_0, \quad z = z_0.$$

Dreapta în spațiu

Dreapta ca intersecție de două plane

- O dreaptă în spațiu se poate reprezenta ca o intersecție de două plane distincte, care trec printr-o aceeași dreaptă:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \quad (29)$$

- Cum planele care definesc dreapta nu sunt paralele, coeficienții necunoscutelor din cele două ecuații ale sistemului (29) nu sunt proporționali. Altfel spus, rangul matricii acestui sistem de ecuații liniare este maxim (adică este egal cu doi).
- Ecuațiile sistemului (29) care definesc o dreaptă dată nu sunt unice.

Dreapta în spațiu

Ecuațiile canonice ale unei drepte în spațiu

- Fiecare dintre ele se poate înlocui cu o ecuație de forma

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0,$$

unde α și β sunt numere reale care nu se anulează simultan, astfel încât, firește, sistemul să aibă, în continuare, rang maxim.

- Și afirmația inversă este adevărată: orice sistem de ecuații de forma (29), de rang doi, descrie o dreaptă în spațiu.

De multe ori, trebuie să găsim vectorul director al unei drepte date ca intersecție de două plane. Considerăm dreapta (29) și fie $\mathbf{n}_1(A_1, B_1, C_1)$ și $\mathbf{n}_2(A_2, B_2, C_2)$ – vectorii normali la cele două plane care determină dreapta. Atunci produsul lor vectorial,

$$\mathbf{v} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$$

este, în mod evident, un vector director al dreptei.

Dreapta în spațiu

Ecuatiile canonice ale unei drepte în spațiu

Prin urmare:

$$\mathbf{v} = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} \mathbf{i} + \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}.$$

O altă modalitate de a găsi vectorul director este “forța brută”, de exemplu găsim două soluții distincte ale sistemului, iar diferența lor este un vector director.

Dreapta în spațiu

Ecuatiile dreptei care trece prin două puncte

Să presupunem că se dau două puncte distincte $M_1(x_1, y_1, z_1)$ și $M_2(x_2, y_2, z_2)$ ale unei drepte Δ . Atunci vectorul $\overrightarrow{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ este un vector director al dreptei, prin urmare dreapta Δ este dreapta care trece prin punctul M_1 și are ca vector director vectorul $\overrightarrow{M_1M_2}$. Așadar ecuațiile parametrice ale dreptei Δ (care trece prin punctul M_1 și are ca vector director pe $\overrightarrow{M_1M_2}$), vor fi

$$\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t, \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t, \\ z = z_1 + (z_2 - z_1)t. \end{cases} \quad (30)$$

Ecuatiile acestea se pot rescrie, firește, sub forma canonică:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \quad (31)$$

Dreapta în spațiu

Unghiul a două drepte în spațiu

- Prin definiție, unghiul a două drepte în spațiu este unghiul pe care îl formează *vectorii lor directori*.
- Nu este necesar ca cele două drepte să fie coplanare.
- Unghiul dintre drepte nu este unic determinat. El depinde de alegerea sensurilor vectorilor directori.
- Dacă vrem să determinăm unghiul *ascuțit* dintre cele două drepte, trebuie să ne asigurăm că unghiul respectiv are un cosinus pozitiv.

Fie, prin urmare,

$$(D_1) : \frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1} \quad (32)$$

și

$$(D_2) : \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}, \quad (33)$$

de vectori directori $\mathbf{v}_1(l_1, m_1, n_1)$, respectiv $\mathbf{v}_2(l_2, m_2, n_2)$.

Dreapta în spațiu

Unghiul a două drepte în spațiu

Atunci unghiul dintre cele două drepte este dat de

$$\cos \varphi_{1,2} = \pm \frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_1\| \cdot \|\mathbf{v}_2\|} = \pm \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}. \quad (34)$$

Unghiul *ascuțit* dintre cele două drepte este dat de

$$\cos \varphi = \frac{|l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2|}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}. \quad (35)$$

Dreptele (32) și (33) sunt *perpendiculare* dacă vectorii lor directori sunt perpendiculari, adică dacă

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 \equiv l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0. \quad (36)$$

Dreapta în spațiu

Unghiul a două drepte în spațiu

Dreptele (32) și (33) sunt *paralele* dacă vectorii lor directori sunt coliniari, adică dacă există un scalar (nenul, în cazul nostru) $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât să avem

$$\mathbf{v}_1 = \lambda \mathbf{v}_2 \quad (37)$$

sau (cu aceeași convenție ca și la ecuațiile dreptei)

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}. \quad (38)$$

Probleme diverse referitoare la drepte și plane în spațiu

Pozițiile relative a două plane

Presupunem că s-a fixat un sistem de coordonate afine $Oxyz$ și sunt date două plane, prin ecuațiile lor generale

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad (39)$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \quad (40)$$

Este clar, din considerente geometrice, că cele două plane se pot afla în următoarele situații:

- 1) se taie după o dreaptă;
- 2) sunt paralele, dar nu coincid;
- 3) coincid.

Scopul nostru este să stabilim relațiile care există între coeficienții celor două ecuații în fiecare caz.

Probleme diverse referitoare la drepte și plane în spațiu

Pozițiile relative a două plane

- *Urmă* a planului (39) pe planul de coordonate xOy = intersecția dintre acest plan și planul de coordonate.
- Dacă planul (39) nu este paralel cu planul xOy , atunci această intersecție este o dreaptă care, privită ca dreaptă în planul de coordonate, va avea, în mod evident, ecuația

$$A_1x + B_1y + D_1 = 0.$$

- Analog se obțin urmele planului pe planele de coordonate xOz și yOz , dacă planul nostru nu este paralel nici cu aceste plane de coordonate.
- Planul (40) coincide cu planul (39) dacă și numai dacă urmele lor pe planele de coordonate coincid.

Probleme diverse referitoare la drepte și plane în spațiu

Pozițiile relative a două plane

- Aceasta se întâmplă dacă și numai dacă toți coeficienții celor două plane sunt proporționali, adică dacă și numai dacă există un scalar nenul λ astfel încât să avem

$$A_1 = \lambda A_2, \quad B_1 = \lambda B_2, \quad C_1 = \lambda C_2, \quad D_1 = \lambda D_2 \quad (41)$$

sau

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}.$$

- Din punct de vedere algebric, la aceeași concluzie se poate ajunge și pe altă cale. Pentru ca planele (39) și (40) să coincidă, este necesar și suficient ca sistemul format din ecuațiile lor să fie compatibil, dublu nedeterminat, ceea ce înseamnă exact condiția (41).

Probleme diverse referitoare la drepte și plane în spațiu

Pozițiile relative a două plane

- Să presupunem acum, de exemplu, că primul plan este paralel cu planul xOy . Aceasta înseamnă, evident, că $A_1 = B_1 = 0$, iar raționamentul algebric de mai sus ne duce la aceeași concluzie ca pentru planele în poziție generală.
- Dacă sistemul de ecuații (39)–(40) este incompatibil, atunci înseamnă că rangul sistemului trebuie să fie egal cu 1, în timp ce rangul matricei extinse trebuie să fie egal cu 2. Prin urmare, planele sunt paralele dacă și numai dacă

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}, \quad (42)$$

cu aceeași convenție ca mai sus asupra egalității cu zero a numitorilor.

Probleme diverse referitoare la drepte și plane în spațiu

Pozițiile relative a două plane

- Ultima situație posibilă este ca sistemul format din ecuațiile planelor să fie de rang maxim, ceea ce înseamnă că intersecția este o dreaptă. Aceasta înseamnă că primii trei coeficienți nu pot fi proporționali.

Probleme diverse referitoare la drepte și plane în spațiu

Pozițiile relative a trei plane

Considerăm trei plane, date prin ecuațiile lor generale:

$$\begin{cases} (P_1) A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ (P_2) A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \\ (P_3) A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0. \end{cases} \quad (43)$$

Pentru a stabili pozițiile relative ale celor trei plane, trebuie să studiem sistemul de ecuații (43). Fie Δ determinantul sistemului:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix},$$

Probleme diverse referitoare la drepte și plane în spațiu

Pozițiile relative a trei plane

m – matricea sistemului,

$$m = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix}$$

și M – matricea extinsă a sistemului,

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix}.$$

Notăm, de asemenea, cu $\mathbf{n}_1(A_1, B_1, C_1)$, $\mathbf{n}_2(A_2, B_2, C_2)$, $\mathbf{n}_3(A_3, B_3, C_3)$ vectorii normali la cele trei plane.

Probleme diverse referitoare la drepte și plane în spațiu

Pozițiile relative a trei plane

Avem următoarele situații:

- (a) Dacă $\Delta \neq 0$, atunci sistemul (43) este compatibil determinat, prin urmare, are o singură soluție: *planele se intersectează într-un punct.*
- (b) Să presupunem acum că $\Delta = 0$, $\text{rg } m = 2$, $\text{rg } M = 3$, iar vectorii normali la cele trei plane sunt, doi câte doi, necoliniari. Deoarece rangul matricei sistemului este strict mai mic decât rangul matricei extinse, sistemul este incompatibil, prin urmare cele trei plane nu au nici un punct comun. Cum vectorii normali sunt, doi câte doi, necoliniari, rezultă că planele sunt, două câte două, neparalele. Ele se intersectează după câte o dreaptă, iar cele trei dreapta care se obțin sunt paralele.

Probleme diverse referitoare la drepte și plane în spațiu

Pozițiile relative a trei plane

- (c) De data aceasta avem, de asemenea, $\text{rg } m = 2$, $\text{rg } M = 3$, dar acum doi dintre cei trei vectori normali la plane sunt coliniari¹. Două dintre cele trei plane (cele cu vectorii normali coliniari) sunt paralele între ele, iar cel de-al treilea le intersectează pe ambele.
- (d) Să presupunem acum că $\text{rg } m = 2$, $\text{rg } M = 2$ (deci sistemul este compatibil), iar vectorii normali sunt doi câte doi necoliniari. În acest caz, planele sunt două câte două distincte și trec prin aceeași dreaptă.
- (e) Dacă $\text{rg } m = 2$, $\text{rg } M = 2$, iar doi dintre cei trei vectori normali sunt coliniari, atunci, din nou, sistemul este compatibil, două dintre plane coincid (cele care au vectorii normali coliniari), iar cel de-al treilea le intersectează după o dreaptă.

¹ Nu pot fi toți trei coliniari, deoarece $\text{rg } m = 2$!

Probleme diverse referitoare la drepte și plane în spațiu

Pozițiile relative a trei plane

- (f) Dacă $\text{rg } m = 1$, $\text{rg } M = 3$, atunci sistemul este incompatibil, adică planele nu se intersectează, dar ele sunt paralele între ele.
- (g) Dacă $\text{rg } m = 1$, $\text{rg } M = 2$, atunci două dintre plane coincid, iar cel de-al treilea este paralel cu ele.
- (h) Dacă $\text{rg } m = 1$, $\text{rg } M = 1$, atunci sistemul este compatibil dublu nedeterminat, toate cele trei plane coincid.

Probleme diverse referitoare la drepte și plane în spațiu

Fascicule de plane. Snopuri de plane

Definiție

Se numește *fascicol de plane* mulțimea tuturor planelor care trec printr-o anumită dreaptă, care se numește *axa fascicolului*.

Să presupunem că sunt date două plane distincte concurente

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad (44)$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \quad (45)$$

Probleme diverse referitoare la drepte și plane în spațiu

Fascicule de plane. Snopuri de plane

Teorema

Dacă α și β sunt două numere reale care nu se anulează simultan, atunci ecuația

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0 \quad (46)$$

este ecuația unui plan ce aparține fascicolului de plane determinat de planele (44) și (45). Invers, orice plan al acestui fascicol se poate reprezenta cu ajutorul unei ecuații (46), pentru o anumită alegere a constantelor α și β , care nu sunt ambele nule.

Demonstrația acestei teoreme este perfect analogă cu demonstrația teoremei similare pentru fascicule de drepte din plan.

Probleme diverse referitoare la drepte și plane în spațiu

Fascicule de plane. Snopuri de plane

Spre deosebire de cazul dreptelor din plan, unde am avut de considerat doar familiile de drepte care trec printr-un punct (adică fasciculele de drepte), în cazul planelor în spațiu, pe lângă fasciculele de plane (care trec printr-o dreaptă), putem considera alte familii remarcabile de plane, cele ce trec printr-un punct. Începem prin a da următoarea definiție:

Definiție

Se numește *snop de plane* mulțimea tuturor planelor care trec printr-un punct dat, numit *centrul snopului de plane*.

Probleme diverse referitoare la drepte și plane în spațiu

Fascicule de plane. Snopuri de plane

- Dacă centrul snopului de plane este dat prin intermediul coordonatelor sale, $S(x_0, y_0, z_0)$.
- Atunci orice plan care trece prin centrul snopului (și, deci, aparține snopului), se poate scrie sub forma

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0, \quad (47)$$

unde constantele reale A, B, C nu sunt toate egale cu zero.

- Invers, pentru orice constante A, B, C care nu sunt toate egale cu zero, ecuația (47) este ecuația unui plan care trece prin centrul snopului.

Ca și în cazul fasciculelor, însă, de multe ori nu este dat în mod explicit centrul snopului de plane, ci acesta este descris cu ajutorul ecuațiilor unor plane care trec prin acest punct.

Probleme diverse referitoare la drepte și plane în spațiu

Fascicule de plane. Snopuri de plane

Este util să avem o descriere a planelor snopului cu ajutorul unui număr redus de plane (mai precis, trei), care determină în mod unic centrul acestui snop. Avem următorul rezultat:

Teorema

Fie

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0 \end{cases} \quad (48)$$

ecuațiile a trei plane care trec prin punctul $S(x_0, y_0, z_0)$ astfel încât să fie îndeplinită condiția

Probleme diverse referitoare la drepte și plane în spațiu

Fascicule de plane. Snopuri de plane

Teorema

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \neq 0. \quad (49)$$

Atunci pentru orice numere reale α, β, γ care nu se anulează simultan, ecuația

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) + \gamma(A_3x + B_3y + C_3z + D_3) = 0 \quad (50)$$

descrie un plan al snopului de plane cu centrul în punctul S . Invers, orice plan al acestui snop poate fi descris prin intermediul unei ecuații de acest tip, pentru o anumită alegere a constantelor α, β, γ .

Probleme diverse referitoare la drepte și plane în spațiu

Poziția relativă a unei drepte față de un plan

Considerăm un plan Π , dat prin ecuația generală

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (51)$$

și o dreaptă Δ , dată prin ecuațiile sale parametrice

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt. \end{cases} \quad (52)$$

Trebuie să stabilim poziția dreptei Δ relativ la planul Π .

Este clar, din motive geometrice, că sunt posibile următoarele situații:

- ❶ dreapta intersectează planul într-un punct;
- ❷ dreapta este paralelă cu planul și nu este situată în el;
- ❸ dreapta este inclusă în plan.

Probleme diverse referitoare la drepte și plane în spațiu

Poziția relativă a unei drepte față de un plan

Vom stabili care trebuie să fie legătura dintre coeficienții planului și cei ai drepte pentru fiecare dintre cele trei situații.

Dacă înlocuim expresiile lui x, y, z din ecuațiile dreptei Δ în ecuația planului Π , obținem:

$$(Al + Bm + Cn)t + Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \quad (53)$$

Soluția acestei ecuații în t reprezintă valoarea parametrului de pe dreaptă care corespunde punctului (sau punctelor) de intersecție dintre dreaptă și plan. Este ușor de văzut că ecuația admite o soluție unică dacă și numai dacă coeficientul lui t este diferit de zero, adică

$$Al + Bm + Cn \neq 0.$$

Probleme diverse referitoare la drepte și plane în spațiu

Poziția relativă a unei drepte față de un plan

Semnificația geometrică a acestei relații este clară: vectorul director al dreptei nu este perpendicular pe vectorul normal la plan, adică dreapta nu este paralelă cu planul. Prin urmare, condiția aceasta este condiția *ca dreapta și planul să se intersecteze într-un punct*.

Dacă este îndeplinită condiția

$$Al + Bm + Cn = 0, \quad Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0,$$

atunci dreapta este paralelă cu planul, dar nu se intersectează cu el. Într-adevăr, prima condiție arată că dreapta este paralelă cu planul, în timp ce a doua condiție indică faptul că ecuația nu are soluție.

Probleme diverse referitoare la drepte și plane în spațiu

Poziția relativă a unei drepte față de un plan

În sfârșit, dacă este îndeplinită condiția

$$Al + Bm + Cn = 0, \quad Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0,$$

atunci dreapta este inclusă în plan, pentru că, în acest caz, ecuația de intersecție se transformă într-o identitate, care este verificată pentru orice t real.

Probleme diverse referitoare la drepte și plane în spațiu

Ecuția unui plan determinat de două drepte concurente

Considerăm dreptele

$$(D_1) : \frac{x - x_0}{l_1} = \frac{y - y_0}{m_1} = \frac{z - z_0}{n_1} \quad (54)$$

și

$$(D_2) : \frac{x - x_0}{l_2} = \frac{y - y_0}{m_2} = \frac{z - z_0}{n_2}, \quad (55)$$

care trec prin punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Atunci planul care trece prin cele două drepte este, în fapt, planul care trece prin punctul M_0 și este paralel cu vectorii $\mathbf{v}_1(l_1, m_1, n_1)$ și $\mathbf{v}_2(l_2, m_2, n_2)$, deci ecuația sa este

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (56)$$

Probleme diverse referitoare la drepte și plane în spațiu

Ecuția planului determinat de o dreaptă și un punct

Considerăm dreapta

$$(D) : \frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n} \quad (57)$$

și punctul $M_2(x_2, y_2, z_2)$, care nu aparține dreptei. Planul pe care îl căutăm este cel care trece prin punctul $M_1(x_1, y_1, z_1)$ și este paralel cu vectorii $\mathbf{v}(l, m, n)$ și $\overrightarrow{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, deci ecuația lui va fi

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0. \quad (58)$$

Probleme diverse referitoare la drepte și plane în spațiu

Ecuția planului determinat de două drepte paralele

Considerăm dreptele paralele (și distincte!)

$$(D_1) : \frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n} \quad (59)$$

și

$$(D_2) : \frac{x - x_2}{l} = \frac{y - y_2}{m} = \frac{z - z_2}{n}, \quad (60)$$

care trec prin punctele $M_1(x_1, y_1, z_1)$ și $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Planul pe care îl căutăm este cel care trece prin punctul $M_1(x_1, y_1, z_1)$ și este paralel cu vectorii $\mathbf{v}(l, m, n)$ și $\overrightarrow{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, deci ecuația lui va fi

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0. \quad (61)$$

Probleme diverse referitoare la drepte și plane în spațiu

Proiecția unei drepte pe un plan

Considerăm dreapta

$$(D) : \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} \quad (62)$$

și planul

$$(P) : Ax + By + Cz + D = 0. \quad (63)$$

Este ușor de constatat că dacă proiectăm ortogonal toate punctele dreptei (D) pe planul (P) obținem o dreaptă situată în plan, pe care o vom numi *proiecția dreptei (D) pe planul (P)* . Dacă dreapta este *perpendiculară* pe plan, atunci dreapta aceasta, de fapt, se reduce la un singur punct, cel în care dreapta înțeapă planul. De aceea, în cele ce urmează, vom admite că dreapta *nu* este perpendiculară pe plan.

Probleme diverse referitoare la drepte și plane în spațiu

Proiecția unei drepte pe un plan

Dreapta pe care o căutăm o vom scrie ca intersecție a două plane: planul (P) și planul (P') , care trece prin dreapta (D) și este perpendicular pe planul (P) . În practică, acest plan este planul care trece prin punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ de pe dreaptă și este paralel cu vectorul director al dreptei, $\mathbf{v}(l, m, n)$ și vectorul normal la planul (P) , $\mathbf{n}(A, B, C)$. Datorită ipotezei pe care am făcut-o mai sus, cei doi vectori sunt necoliniari, deci punctul și cei doi vectori determină, în mod unic, planul (P') .

După cum am văzut, ecuația planului (P') este

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l & m & n \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0. \quad (64)$$

Probleme diverse referitoare la drepte și plane în spațiu

Proiecția unei drepte pe un plan

Așadar, ecuațiile proiecției dreptei pe plan sunt

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| \begin{array}{ccc} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l & m & n \\ A & B & C \end{array} \right| = 0, \\ Ax + By + Cz + D = 0. \end{array} \right. \quad (65)$$

Probleme diverse referitoare la drepte și plane în spațiu

Poziția relativă a două drepte în spațiu

Presupunem că se dau două drepte în spațiu, prin intermediul ecuațiilor lor parametrice

$$x = x_1 + l_1 t, \quad y = y_1 + m_1 t, \quad z = z_1 + n_1 t, \quad (66)$$

$$x = x_2 + l_2 s, \quad y = y_2 + m_2 s, \quad z = z_2 + n_2 s, \quad (67)$$

și vrem să stabilim poziția lor relativă.

Din considerente geometrice, este clar că putem avea următoarele situații:

- (a) dreptele sunt concurente;
- (b) dreptele coincid;
- (c) dreptele sunt paralele, dar nu coincid;
- (d) dreptele sunt necoplanare (strâmbe).

Vom stabili acum legăturile dintre coeficienții celor două drepte pentru fiecare situație.

Probleme diverse referitoare la drepte și plane în spațiu

Poziția relativă a două drepte în spațiu

Considerăm vectorii directori ai celor două drepte:

$$\mathbf{a}_1(l_1, m_1, n_1), \mathbf{a}_2(l_2, m_2, n_2).$$

Presupunem că acești vectori sunt coliniari, adică

$$l_1 = \lambda l_2, m_1 = \lambda m_2, n_1 = \lambda n_2. \quad (68)$$

Atunci dreptele sunt paralele, adică fie coincid, fie sunt paralele și nu au nici un punct comun. Dreptele coincid dacă și numai dacă vectorul $\overrightarrow{M_1 M_2}$, unde $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, este paralel cu vectorii \mathbf{a}_1 și \mathbf{a}_2 , adică:

$$x_2 - x_1 = \mu l_1, y_2 - y_1 = \mu m_1, z_2 - z_1 = \mu n_1. \quad (69)$$

Astfel, egalitățile (68) și (69) reprezintă condițiile necesare și suficiente pentru ca dreptele (66) și (67) să coincidă.

Probleme diverse referitoare la drepte și plane în spațiu

Poziția relativă a două drepte în spațiu

- Pentru ca dreptele să fie paralele, fără să coincidă, este necesar și suficient ca condiția (68) să fie verificată, iar condiția (69) – nu.
- Să presupunem acum că vectorii \mathbf{a}_1 și \mathbf{a}_2 sunt necoliniari, adică nu este verificată condiția (68). Atunci dreptele (66) și (67) se intersectează într-un punct sau sunt necoplanare.
- Dacă se intersectează și, prin urmare, se află într-un același plan Π , atunci vectorii \mathbf{a}_1 , \mathbf{a}_2 și $\overrightarrow{M_1M_2}$ sunt coplanari. De aceea:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (70)$$

Probleme diverse referitoare la drepte și plane în spațiu

Poziția relativă a două drepte în spațiu

- Invers, să presupunem că vectorii \mathbf{a}_1 și \mathbf{a}_2 sunt necoliniari și este verificată condiția (70).
- Alegem punctele A_1 și A_2 astfel încât să avem $\overrightarrow{M_1 A_1} = \mathbf{a}_1$ și $\overrightarrow{M_2 A_2} = \mathbf{a}_2$.
- Atunci segmentele $M_1 M_2$, $M_1 A_1$ și $M_2 A_2$ determină un plan, în care sunt situate dreptele (66) și (67).
- Cum vectorii \mathbf{a}_1 și \mathbf{a}_2 sunt necoliniari, dreptele sunt concurente. Astfel, dreptele (66) și (67) sunt concurente dacă și numai dacă vectorii lor directori sunt necoliniari și este verificată egalitatea (70).
- Remarcăm că această egalitate are loc și dacă dreptele sunt paralele, pentru că în acest caz a doua și a treia linie a determinantului sunt proporționale.

Probleme diverse referitoare la drepte și plane în spațiu

Poziția relativă a două drepte în spațiu

- Prin urmare, condiția necesară pentru ca dreptele noastre să fie *necoplanare* este

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

În restul acestui capitol vom presupune că reperul cu care lucrăm este ortonormat.

Probleme diverse referitoare la drepte și plane în spațiu

Distanța de la un punct la o dreaptă în spațiu

Vom stabili, în cele ce urmează, o formulă care ne dă distanța d de la un punct M_1 , de vector de poziție \mathbf{r}_1 , în spațiu, la o dreaptă Δ , de ecuație vectorială $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{a}$. Alegem, mai întâi, un punct M_2 pe dreapta Δ astfel încât să avem $\overrightarrow{M_0M_2} = \mathbf{a}$.

Construim un paralelogram pe vectorii $\overrightarrow{M_0M_1}$ și $\overrightarrow{M_0M_2}$. Atunci distanța d căutată este egală cu lungimea perpendicularei M_1N , coborâte din vârful M_1 pe latura opusă a paralelogramului. Cum aria paralelogramului este egală cu

$$\|(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{a}\| = \|\mathbf{a}\|d,$$

formula

$$d = \frac{\|(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{a}\|}{\|\mathbf{a}\|}$$

ne dă distanța de la punctul M_1 , de vector de poziție \mathbf{r}_1 la dreapta Δ .

Probleme diverse referitoare la drepte și plane în spațiu

Perpendiculara comună a două drepte strâmbe

Considerăm două drepte în spațiu,

$$(\Delta_1) : \frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1} \quad (71)$$

și

$$(\Delta_2) : \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}, \quad (72)$$

astfel încât cele două drepte să fie necoplanare, adică

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Există o singură dreaptă care intersectează ambele drepte date și este perpendiculară pe fiecare dintre ele. De aceea, ea se și numește *perpendiculara comună* a celor două drepte.

Probleme diverse referitoare la drepte și plane în spațiu

Perpendiculara comună a două drepte strâmbе

Metoda de construire a perpendicularei comune este cât se poate de simplă. Mai întâi determinăm vectorul director al acestei perpendiculare. Fie $\mathbf{a}_1(l_1, m_1, n_1)$, respectiv $\mathbf{a}_2(l_2, m_2, n_2)$ vectorii directori ai dreptelor Δ_1 și Δ_2 . Atunci vectorul $\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2$ este, conform definiției, un vector care este perpendicular atât pe vectorul \mathbf{a}_1 , cât și pe vectorul \mathbf{a}_2 , prin urmare el este, în mod evident, un vector director al perpendicularei comune. Cum

$$\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix},$$

componentele acestui vector sunt

$$\beta_1 \equiv \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}, \quad \beta_2 \equiv \begin{vmatrix} n_1 & l_1 \\ n_2 & l_2 \end{vmatrix}, \quad \beta_3 \equiv \begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix}. \quad (73)$$

Probleme diverse referitoare la drepte și plane în spațiu

Perpendiculara comună a două drepte strâmbe

Acum scriem ecuațiile perpendicularei comune ca intersecție de două plane: unul care trece prin prima dreaptă și este perpendicular pe cea de-a doua și unul care trece prin a doua dreaptă și este perpendicular pe prima dreaptă.

Primul plan se va putea scrie, prin urmare:

$$\pi_1 : \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Într-adevăr, acest plan trece prin dreapta Δ_1 și este paralel cu perpendiculara comună, deci, în particular, este perpendicular pe dreapta Δ_2 .

Probleme diverse referitoare la drepte și plane în spațiu

Perpendiculara comună a două drepte strâmbe

În același mod, cel de-al doilea plan se va scrie:

$$\pi_2 : \begin{vmatrix} x - x_2 & y - y_2 & z - z_2 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} = 0,$$

prin urmare ecuațiile perpendicularei comune vor fi:

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} = 0, \\ \begin{vmatrix} x - x_2 & y - y_2 & z - z_2 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} = 0. \end{cases}$$

Probleme diverse referitoare la drepte și plane în spațiu

Lungimea perpendicularei comune a două drepte necoplanare

Considerăm, din nou, dreptele necoplanare (71) și (72). Consideră, de asemenea, planul π care trece prin prima dreaptă și este paralel cu cea de-a doua, adică planul de ecuație

$$\pi : \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Vectorul normal la acest plan este, în mod evident, $\mathbf{n}(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, unde $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ sunt date de (73).

Atunci lungimea perpendicularei comune (adică distanța dintre dreptele necoplanare date), va fi egală cu distanța de la un punct oarecare al dreptei Δ_2 (de exemplu punctul $M_2(x_2, y_2, z_2)$) până la planul π .

Probleme diverse referitoare la drepte și plane în spațiu

Lungimea perpendicularei comune a două drepte necoplanare

Conform formulei pentru distanța de la un punct la un plan, obținem:

$$d(\Delta_1, \Delta_2) = d(M_2, \pi) = \frac{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2}}.$$

Probleme diverse referitoare la drepte și plane în spațiu

Unghiul dintre o dreaptă și un plan

Presupunem că se dă dreapta

$$x = x_0 + lt, \quad y = y_0 + mt, \quad z = z_0 + nt \quad (74)$$

și planul

$$Ax + By + Cz + D = 0. \quad (75)$$

Vom nota cu φ unghiul dintre dreaptă și plan (mai precis, unghiul dintre dreaptă și proiecția sa pe plan). Dacă dreapta este perpendiculară pe plan vom pune $\varphi = \pi/2$. Vom considera că $0 \leq \varphi \leq \pi/2$. Cum vectorul $\mathbf{n}(A, B, C)$ este perpendicular pe planul (75), unghiul format de vectorul director $\mathbf{a}(l, m, n)$ al dreptei (74) cu vectorul \mathbf{n} este fie $\psi = \pi/2 - \varphi$, fie $\psi = \pi/2 + \varphi$. Prin urmare,

$$\sin \varphi = |\cos \psi| = \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

Probleme diverse referitoare la drepte și plane în spațiu

Unghiul dintre o dreaptă și un plan

Condiția ca dreapta să fie paralelă cu planul este ca vectorul normal la plan să fie perpendicular pe vectorul director al drepte, adică

$$Al + Bm + Cn = 0,$$

în timp ce condiția ca dreapta să fie perpendiculară pe plan este ca vectorul normal la plan să fie paralel cu vectorul director al drepte, adică

$$\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}.$$