Formule de geometrie analitică

I. Calcul vectorial

1. Produsul scalar:
   - $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cdot \cos(\mathbf{a}, \mathbf{b})$;
   - în coordonate carteziene: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$.
2. Produsul vectorial:
   - $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \sin(\mathbf{a}, \mathbf{b})$; în coordonate carteziene: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$
3. Produsul mixt: $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$
4. Aria triunghiului (în plan): $S = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \right|$;
5. Volumul paralelipipedului: $V = \left| \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} \right|$;
6. Volumul tetraedrului: $V = \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} \right|$

II. Dreapta în plan

1. ecuaţia vectorială: $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{a}$.
2. ecuaţiile parametrice $x = x_0 + lt,\ y = y_0 + mt$.
3. ecuaţia canonică: $\dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m}$.
4. dreapta printr-un punct de pantă dată: $y = y_0 = k(x - x_0)$.
5. ecuaţia generală: $ax + by + c = 0$.
6. ecuaţia prin tăieturi: $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} - 1 = 0$;
7. dreapta prin două puncte: $\dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \dfrac{y - y_0}{y_1 - y_0}$.
8. distanţa de la un punct la o dreaptă: $d = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.
9. unghiul a două drepte (ecuaţii generale): $\cos\alpha = \dfrac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$
10. unghiul dintre două drepte date cu ajutorul pantelor: $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}$;
11. fascicolul de drepte: $\lambda(a_1 x + b_1 y + c_1) + \mu(a_2 x + b_2 y + c_2) = 0$;
12. distanţa dintre două drepte paralele $ax + by + c_i = 0$: $d = \dfrac{|c_2 - c_1|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.
13. ecuaţiile bisectoarelor unghiurilor a două drepte: $\dfrac{|a_1 x + b_1 y + c_1|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \dfrac{|a_2 x + b_2 y + c_2|}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$

III. Dreapta şi planul în spaţiu

1. ecuaţia vectorială a planului: $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + u\mathbf{a}_1 + v\mathbf{a}_2$;

2. planul printr-un punct, paralel cu doi vectori: $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = 0$ sau $\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0.$
3. ecuaţia generală (carteziană): $ax + by + cz + d = 0.$
4. ecuaţia prin tăieturi: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0;$
5. ecuaţia fascicolului: $\lambda(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) + \mu(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0.$
6. ecuaţia vectorială a dreptei: $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{a}.$
7. ecuaţiile canonice ale dreptei: $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n};$
8. dreapta prin două puncte: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1};$
9. distanţa de la un punct la un plan: $d = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$
10. distanţa de la punctul M_1 la dreapta $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{a}$: $d = \frac{\left\| \overrightarrow{M_0M_1} \times \mathbf{a} \right\|}{\|\mathbf{a}\|}$
11. condiţia de coplanaritate a două drepte: $\left(\overrightarrow{M_1M_2}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\right) = 0$
12. distanţa dintre două drepte în spaţiu: $\delta = \frac{\left|\left(\overrightarrow{M_1M_2}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\right)\right|}{\|\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2\|}$
13. distanţa dintre două plane paralele $ax + by + cz + d_i = 0$: $d = \frac{|d_2 - d_1|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$
14. unghiul a două plane: $\cos\alpha = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$
15. unghiul dintre o dreaptă şi un plan: $\sin\alpha = \frac{|al + bm + cn|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$