Vectori şi coordonate

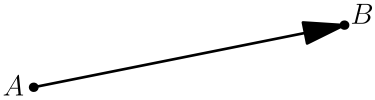
Paul A. Blaga

Universitatea “Babeş-Bolyai”

7 martie 2023

Segmente orientate

- Un segment de dreaptă pentru care s-a precizat care dintre capetele sale este originea şi care extremitatea, se numeşte *segment orientat* sau *vector legat*.
- Un segment orientat cu originea în punctul A şi extremitatea în punctul B se notează, de regulă, cu $\overline{AB}$.
- Din punct de vedere grafic, un segment de dreaptă orientat $\overline{AB}$ se reprezintă sub forma unei săgeţi:



- Un segment orientat este definit, în mod unic, de capetele sale şi de ordinea acestor capete.
- $A = B$, avem de-a face cu un *segment orientat nul* şi se scrie $\overline{AA} = \vec{0}$.

Segmente orientate

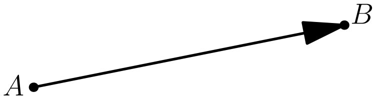
- Dacă s-a ales o unitate de lungime, atunci putem defini lungimea segmentului orientat $\overline{AB}$ ca fiind lungimea segmentului neorientat AB şi scriem:

$$\|\overline{AB}\| = |AB| \quad \text{sau} \quad \|\overline{AB}\| = AB.$$

- Lungimea unui segment orientat se mai numeşte şi *modulul* său sau *norma* sa.
- Spunem că două segmente orientate $\overline{AB}$ şi $\overline{CD}$ sunt *egale* dacă $A = C$ şi $B = D$, cu alte cuvinte, dacă ele au aceeaşi origine şi aceeaşi extremitate.

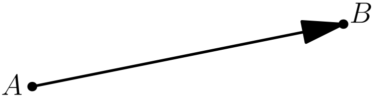
Vectori liberi

- Două segmente orientate *nenule* $\overline{AB}$ şi $\overline{CD}$ au *aceeaşi direcţie* dacă dreptele AB şi CD sunt paralele.
- Un segment legat nul se consideră, prin convenţie, că are aceeaşi direcţie cu orice alt segment orientat.
- Presupunem acum că cele două segmente orientate (nenule) au aceeaşi direcţie, dar dreptele lor suport nu coincid. Vom spune că ele au *acelaşi sens* dacă segmentele (neorientate) AC şi BD nu se intersectează.



Vectori liberi

- Dacă aceste doua segmente se intersectează, vom spune că segmentele orientate $\overline{AB}$ şi $\overline{CD}$ *au sensuri opuse*:



- Dacă segmentele orientate nenule $\overline{AB}$ şi $\overline{CD}$ au aceeaşi dreaptă suport: $AB = CD$ (ca drepte), atunci vom spune că ele au acelaşi sens dacă există un al treilea segment orientat, $\overline{EF}$, având aceeaşi direcţie (dar nu şi aceeaşi dreaptă suport) cu $\overline{AB}$ şi $\overline{CD}$, şi care are acelaşi sens cu ambele segmente. În caz contrar, vom spune că segmentele $\overline{AB}$ şi $\overline{CD}$ au sensuri opuse.

Vectori liberi

- Se consideră, prin convenţie, că vectorul nul are acelaşi sens cu orice alt vector.

Observaţie

De fiecare dată când spunem că două segmente orientate au acelaşi sens, subînţelegem, chiar dacă nu o spunem în mod explicit, că segmentele au aceeaşi direcţie. Relaţia "acelaşi sens" nu este definită pentru perechi de segmente orientate care nu au aceeaşi direcţie. Mai spunem, uneori, despre două segmente orientate care au aceeaşi direcţie şi acelaşi sens, că au *aceeaşi orientare*.

Vectori liberi

Definiţie

Spunem că două segmente orientate $\overline{AB}$ şi $\overline{CD}$ sunt *echipolente* şi scriem $\overline{AB} \sim \overline{CD}$, dacă fie ambele sunt nule, fie ambele sunt nenule şi ele au aceeaşi direcţie, acelaşi sens şi acelaşi modul.

Este uşor de constatat că relaţia de echipolenţă este o relaţie de echivalenţă (adică este reflexivă, simetrică şi tranzitivă).

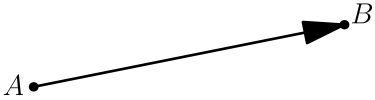
Definiţie

Se numeşte *vector liber* o clasă de echivalenţă de segmente orientate, în raport cu relaţia de echipolenţă. Vectorul liber determinat de segmentul orientat $\overline{AB}$ se notează cu $\overrightarrow{AB}$. Astfel,

$$\overrightarrow{AB} = \left\{ \overline{CD} \,|\, \overline{CD} - \text{segment orientat a.î. } \overline{CD} \sim \overline{AB} \right\}$$

Vectori liberi

- Un vector liber este o famile de vectori legaţi echipolenţi, câte unul în fiecare punct al spaţiului:



- Doi vectori liberi se numesc *egali* dacă ei sunt egali ca şi clasă de echivalenţă, adică sunt alcătuiţi din aceleaşi segmente orientate. Altfel spus,
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \iff \overline{AB} \sim \overline{CD}.$$

Vectori liberi

- De regulă, dacă nu vrem să scoatem în evidenţă un reprezentant al unui vector liber, vom utiliza pentru notarea acestor obiecte litere mici, de regulă din prima parte a alfabetului, $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \ldots$. Vectorul nul se notează cu $\mathbf{0}$. Pentru reprezentarea unui vector liber se utilizează unul dintre segmentele orientate care îl formează.
- Dacă se dă un vector liber $\mathbf{a}$ şi un punct A, există un singur punct B din spaţiu astfel încât să avem

$$\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}.$$

  Prin construirea punctului B pentru care e verificată relaţia de mai sus, spunem că am *ataşat* vectorul liber $\mathbf{a}$ punctului A.
- Se numeşte *modul* al vectorului liber $\mathbf{a}$ modulul oricăruia dintre segmentele orientate care îl alcătuiesc. Modulul lui $\mathbf{a}$ se notează cu $\|\mathbf{a}\|$.

Vectori liberi

- Să presupunem că se dau doi vectori **a** şi **b**. Îi ataşăm unui punct O (construim punctele A şi B astfel încât să avem $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ şi $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$). Atunci *unghiul dintre vectorii* **a** *şi* **b** este, prin definiţie, unghiul (mai mic sau egal cu π) dintre segmentele orientate $\overline{OA}$ şi $\overline{OB}$. În mod evident, acest unghi nu depinde de alegerea punctului O.
- Spunem că un segment orientat $\overline{AB}$ este paralel cu o dreaptă Δ (cu un plan Π) dacă dreapta sa suport este paralelă cu dreapta Δ (cu planul Π). Segmentul nul se consideră, prin convenţie, că este paralel cu orice dreaptă sau plan.
- Spunem că vectorii liberi $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ sunt *coliniari (coplanari)* dacă segmentele care îi alcătuiesc sunt paralele cu o aceeaşi dreaptă (respectiv cu acelaşi plan).

Vectori liberi

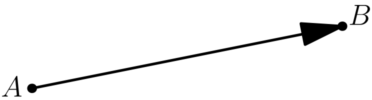
- Dacă în spaţiu se fixează un plan Π şi se consideră numai acele puncte care aparţin acestui plan, atunci prin vector (liber) vom înţelege o clasă de echivalenţă de segmente orientate situate în acel plan. Analog se definesc şi vectorii de pe dreaptă.

Adunarea vectorilor

Considerăm doi vectori **a** şi **b**. Alegem un punct O oarecare din spaţiu şi construim un punct A astfel încât $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ şi un punct B astfel încât $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b}$.

Definiţie

Vectorul $\overrightarrow{OB}$ se numeşte *suma vectorilor* **a** şi **b** şi se notează cu $\mathbf{a} + \mathbf{b}$.



Adunarea vectorilor

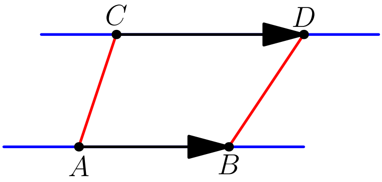
Suma $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ nu depinde de alegerea punctului O. Modalitatea de construcţie a sumei a doi vectori descrisă mai sus se numeşte *regula triunghiului* (sau a *închiderii*).

Dacă vectorii **a** şi **b** nu sunt coliniari, atunci avem şi o altă metodă de a determina suma a doi vectori, care, fireşte, dă acelaşi rezultat ca şi regula triunghiului.

- **a** şi **b** – doi vectori necoliniari.
- Alegem un punct O şi ataşăm cei doi vectori de punctul O, cu alte cuvinte, determinăm punctele A şi B astfel încât $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ şi $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$.
- Cum vectorii **a** şi **b** nu sunt coliniari, de aici rezultă că nici punctele O, A şi B nu sunt coliniare, deci ele determină un plan.

Adunarea vectorilor

- În acest plan, construim paralelogramul *OACB*.



Cum se constată cu uşurinţă că $\overrightarrow{BC} = \mathbf{a}$ şi $\overrightarrow{AC} = \mathbf{b}$, rezultă, pe baza regulii triunghiului, menţionată mai sus, că au loc egalităţile:

$$\overrightarrow{OC} = \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}. \tag{1}$$

Avem două egalităţi, pentru că avem două situaţii în care putem aplica regula triunghiului, şi de fiecare dată vectorul care închide triunghiul este $\overrightarrow{OC}$.

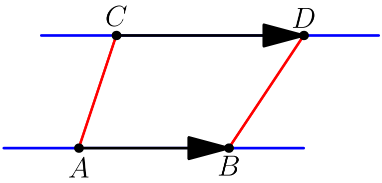
Adunarea vectorilor

- (*Regula paralelogramului*): pentru a găsi suma a doi vectori necoliniari, se ataşează aceşti doi vectori unui punct O şi se construieşte pe segmentele orientate obţinute, ca laturi, un paralelogram. Diagonala paralelogramului care pleacă din punctul O va fi atunci segmentul orientat care determină suma celor doi vectori.
- Regula paralelogramului permite (vezi formula (1)) demonstrarea foarte simplă a *comutativităţii* adunării vectorilor liberi, pentru cazul vectorilor *necoliniari*. Pentru cazul vectorilor coliniari, comutativitatea se poate verifica foarte uşor cu ajutorul regulii închiderii, atât pentru vectorii orientaţi în acelaşi sens, cât şi pentru cei având sensuri opuse. Aşadar, operaţia de adunare a vectorilor liberi este comutativă.

Adunarea vectorilor

Considerăm acum trei vectori $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$. Ataşăm vectorul **a** unui punct O, construind, astfel, punctul A astfel încât $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$. Construim, mai departe, punctul B astfel încât $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b}$. Conform definiţiei sumei, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$. Adunăm acum la acest vector vectorul **c**. Pentru aceasta construim punctul C astfel încât $\overrightarrow{BC} = \mathbf{c}$. Avem, atunci

$$\overrightarrow{OC} = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}. \tag{2}$$



Adunarea vectorilor

Pe de altă parte, $\overrightarrow{AC} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$, prin urmare

$$\overrightarrow{OC} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}). \tag{3}$$

Combinând (2) cu (3) obţinem

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}),$$

adică adunarea vectorilor este *asociativă*. Asociativitatea şi comutativitatea ne permit să extindem regula triunghiului la *regula poligonului*: Dacă vrem să adăugăm *n* vectori, îi aşezăm, într-o ordine arbitară, astfel încât extremitatea primului vector să coincidă cu originea celui de-al doilkea, extremitatea celui de-al doilea cu originea celui de-al treilea, etc. Atunci suma celor *n* vectori este vectorul liber care este asociat segmentului orientat ce uneşte originea primului vector cu extremitatea ultimului vector.

Adunarea vectorilor

- Adunarea vectorilor liberi admite *element neutru*, vectorul nul, $\mathbf{0}$, deoarece este evident că pentru orice vector $\mathbf{a}$ avem:

$$\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{a}.$$

- Fiecare vector admite un opus relativ la operaţia de adunare. Astfel, dacă vectorul liber $\mathbf{a}$ este reprezentat de segmentul orientat $\overline{AB}$, atunci vom nota cu $-\mathbf{a}$ vectorul liber reprezentat de segmentul orientat $\overline{BA}$ şi se constată imediat că avem:

$$\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = 0.$$

Adunarea vectorilor

Acestea fiind spuse, putem afirma că *mulţimea tuturor vectorilor liberi din spaţiu formează un grup abelian în raport cu operaţia de adunare a vectorilor*.
Aşa cum se întâmplă în orice grup abelian (aditiv), odată cu adunarea vectorilor putem defini şi scăderea lor, punând, prin definiţie:

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} := \mathbf{a} + (-\mathbf{b}).$$

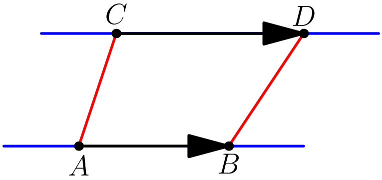
Dacă ataşam vectorul $\mathbf{a}$ unui punct O şi alegem A şi B astfel încât $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ şi $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$, atunci, după cum se constată cu uşurinţă, $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \overrightarrow{BA}$ sau

$$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}.$$

Adunarea vectorilor

Regula paralelogramului se poate aplica fără dificultate şi pentru determinarea diferenţei a doi vectori, nu doar pentru determinarea sumei.

Diferenţa celor doi vectori este determinată de cea de-a doua diagonală, orientarea fiind aleasă în aşa fel încât originea să fie situată în extremitatea scăzătorului, iar extremitatea în extremitatea descăzutului.



Înmulţirea cu scalari

Notăm cu $\mathcal{V}$ mulţimea tuturor vectorilor liberi din spaţiu.

Definiţie

Fie **a** un vector şi $\lambda \in \mathbb{R}$ un număr real. *Produsul vectorului* **a** *cu scalarul* λ este, prin definiţie, un vector, notat $\lambda\mathbf{a}$ caracterizat în modul următor:

(i) modulul lui $\lambda\mathbf{a}$ este dat de

$$\|\lambda\mathbf{a}\| := |\lambda| \cdot \|\mathbf{a}\|,$$

unde produsul din membrul drept este produsul de numere reale;

(ii) direcţia lui $\lambda\mathbf{a}$ coincide cu direcţia lui **a**;

(iii) sensul lui $\lambda\mathbf{a}$ coincide cu sensul lui **a** dacă $\lambda > 0$ sau cu sensul opus sensului lui **a** dacă $\lambda < 0$.

Înmulţirea cu scalari

Proprietăţi

1. $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$.
2. $(-1)\mathbf{a} = -\mathbf{a}$.
3. $\lambda(\mu\mathbf{a}) = (\lambda\mu)\mathbf{a}$, pentru orice scalari $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ şi orice vector $\mathbf{a}$.
4. $\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$, pentru orice $\lambda \in \mathbb{R}$ şi pentru orice doi vectori liberi $\mathbf{a}, \mathbf{b}$.
   Presupunem acum, în continuare, că $\lambda > 0$, dar vectorii $\mathbf{a}$ şi $\mathbf{b}$ sunt, de data aceasta, coliniari. Alegem un punct O arbitrar şi construim punctele A şi B astfel încât $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ şi $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b}$.
5. $(\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}$, pentru orice scalari λ şi μ şi pentru orice vector $\mathbf{a}$.

Proprietăţile 1)–5), împreună cu faptul că mulţimea $\mathcal{V}$ este un grup abelian (ceea ce am demonstrat în secţiunea precedentă), înseamnă că această mulţime este un *spaţiu vectorial* peste mulţimea numerelor reale.

Înmulţirea cu scalari

Observaţie

Proprietăţile 4) şi 5) pot fi extinse, prin inducţie, la orice număr finit de sumanzi, cu alte cuvinte, se poate demonstra cu uşurinţă că:

$$\lambda(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \cdots + \mathbf{a}_k) = \lambda\mathbf{a}_1 + \lambda\mathbf{a}_2 + \cdots + \lambda\mathbf{a}_k,$$
$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k)\mathbf{a} = \lambda_1\mathbf{a} + \lambda_2\mathbf{a} + \cdots + \lambda_k\mathbf{a},$$

pentru orice k natural, cel puţin egal cu 2, orice numere reale, $\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ şi orice vectori $\mathbf{a}, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$.

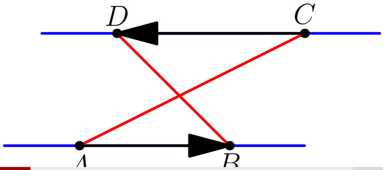
Proiecţiile vectorilor

Axe

Alegem o dreaptă oarecare în spaţiu. Vom numi unul dintre cele două sensuri de pe această dreaptă *pozitiv* şi îl vom nota pe desen cu o săgeată. Sensul opus va fi numit *negativ*. O dreaptă pe care s-a ales un sens pozitiv se numeşte *axă* sau *dreaptă orientată*.

Alegem acum o axă Δ şi pe ea alegem un segment nenul ca unitate de lungime. Vom numi *lungime cu semn* a unui segment orientat $\overline{AB}$ de pe axă şi-l vom nota cu simbolul (AB) numărul dat de

$$(AB) = \begin{cases} \|\overline{AB}\| & \text{dacă } \overline{AB} \text{ are acelaşi sens cu } \Delta \\ -\|\overline{AB}\| & \text{dacă } \overline{AB} \text{ şi } \Delta \text{ au sensuri opuse} \end{cases} \tag{4}$$



Teorema (Chasles)

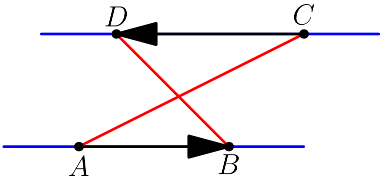
Pentru orice trei puncte A, B, C situate pe o axă pe care s-a ales o unitate de lungime, are loc următoarea relaţie:

$$(AB) + (BC) = (AC). \tag{5}$$

Fie Δ o axă în spaţiu şi Π un plan care nu este paralel cu Δ. Printr-un punct oarecare A din spaţiu ducem un plan Π_1, paralel cu planul Π. Acest plan intersectează axa Δ într-un punct A'. Punctul A' se numeşte *proiecţia punctului A pe axa Δ, paralelă cu planul* Π. Dacă planul Π este perpendicular pe axa Δ, atunci proiecţia se numeşte *ortogonală*. În acest caz, A' este piciorul perpendicularei coborâte din punctul A pe axa Δ.

Proiecţiile vectorilor

- Proiecţia unui vector legat $\overline{AB}$ este vectorul legat $\overline{A'B'}$, care uneşte proiecţiile capetelor se numeşte *proiecţia segmentului orientat* $\overline{AB}$ *pe axa* Δ*, paralelă cu planul* Π. Lungimea cu semn a proiecţiei se notează cu $\mathrm{pr}_{\Delta}\,\overline{AB}\,(\parallel \Pi)$.
- Proiecţia unui vector liber **a** este proiecţia uni reprezentant al său. Proiecţia se notează cu $\mathrm{pr}_{\Delta}\,\mathbf{a}\,(\parallel \Pi)$ şi este un vector liber pe axă.



D
C
A
B

Proiecţia pe o axă într-un plan

Presupunem acum că atât axa Δ, cât şi figura care se proiectează sunt situate într-un acelaşi plan Π.

- Fie Δ_1 o dreaptă din planul Π, care nu este paralelă cu axa Δ.
- Ducem, printr-un punct A al planului, o dreaptă paralelă cu dreapta Δ_1, care intersectează axa într-un punct A', care se numeşte *proiecţia punctului A pe axa Δ, paralelă cu dreapta Δ_1* .
- Celelalte noţiuni din paragraful precedent se definesc în mod analog şi se bucură de aceleaşi proprietăţi.

Proiecţia pe un plan

- Fie Π un plan şi Δ o dreaptă care nu este paralelă cu planul. Ducem printr-un punct A al spaţiului o dreaptă Δ_1, paralelă cu dreapta Δ.
- Dreaptă Δ_1 intersectează planul într-un punct A', care se numeşte *proiecţia punctului A pe planul* Π*, paralelă cu dreapta* Δ.
- Dacă dreapta Δ este perpendiculară pe planul Π, proiecţia se numeşte *ortogonală*.

Proiecţia sumei vectorilor

- Presupunem că pe axa Δ se proiectează doi vectori **a** şi **b**. Proiecţia se face paralel cu un plan Π sau paralel cu o dreaptă Δ_1, dacă atât vectorii, cât şi axa se află într-un acelaşi plan.
- Alegem un punct O şi construim punctele A şi B astfel încât $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ şi $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b}$ şi, prin urmare, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$.
- Dacă O', A', B' sunt proiecţiile punctelor O, A, B pe axa Δ, atunci vectorii $\overrightarrow{O'A'}, \overrightarrow{A'B'}$ şi $\overrightarrow{O'B'}$ sunt, respectiv, proiecţiile vectorilor $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ şi $\mathbf{a} + \mathbf{b}$.
- De aici rezultă că *proiecţia sumei vectorilor este egală cu suma proiecţiilor termenilor*. Este clar că această proprietate se poate extinde, fără dificultate, şi la sume de mai mult de doi vectori.

Proiecţia sumei vectorilor

- Dacă pe axă s-a ales şi o unitate de lungime, atunci, în virtutea egalităţii (5), avem şi

$$(O'B') = (O'A') + (A'B')$$

sau, utilizând notaţia introdusă mai devreme,

$$\mathrm{pr}_{\Delta}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathrm{pr}_{\Delta}\,\mathbf{a} + \mathrm{pr}_{\Delta}\,\mathbf{b}, \tag{6}$$

adică lungimea cu semn a proiecţiei sumei vectorilor pe o axă este egală cu suma magnitudinilor proiecţiilor termenilor.

Dependenţa liniară a vectorilor

Definiţie

Vectorii

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k \tag{7}$$

se numesc *liniar dependenţi* dacă există numerele reale

$$\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \tag{8}$$

nu toate nule, astfel încât

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + \lambda_k \mathbf{a}_k = \mathbf{0}. \tag{9}$$

În caz contrar, vectorii se numesc *liniar independenţi*.

Dependenţa liniară a vectorilor

Este clar că vectorii sunt liniar independenţi dacă şi numai dacă din egalitatea (9) rezultă că

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0.$$

Se mai spune, de asemenea, că vectorii (7) formează *un sistem liniar dependent*, respectiv *un sistem liniar independent*.
Dacă un vector **a** se poate scrie în funcţie de vectorii (7) sub forma

$$\mathbf{a} = \mu_1 \mathbf{a}_1 + \mu_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + \mu_k \mathbf{a}_k,$$

atunci vom spune că **a** este *o combinaţie liniară a acestor vectori* .

Dependenţa liniară a vectorilor

Teorema

Pentru ca vectorii (7) (cu $k > 1$) să fie liniar dependenţi, este necesar şi suficient ca cel puţin unul dintre aceşti vectori să poată fi scris ca o combinaţie liniară a celorlalţi.

Consecinţa

Dacă vectorii (7) sunt liniar independenţi, atunci nici unul nu poate fi scris ca o combinaţie liniară a celorlalţi. În particular, nici unul dintre vectori nu poate fi egal cu zero.

Pentru cazul a doi vectori, avem următorul rezultat:

Teorema

Doi vectori sunt liniar dependenţi dacă şi numai dacă sunt coliniari.

Dependenţa liniară a vectorilor

Consecinţa

Doi vectori sunt liniar independenţi dacă şi numai dacă ei nu sunt coliniari.

Vectorii liniar independenţi vor juca un rol esenţial. În particular, ei ne furnizează descompuneri ale altor vectori. Un prototip de astfel de descompunere este dat de următoarea teoremă:

Teorema

Să presupunem că într-un plan Π *sunt daţi doi vectori necoliniari* $\mathbf{e}_1$ *şi* $\mathbf{e}_2$. *Atunci orice alt vector* $\mathbf{a}$ *din plan se poate descompune în funcţie de vectorii* $\mathbf{e}_1$ *şi* $\mathbf{e}_2$, *cu alte cuvinte există două numere reale (unic determinate)* x *şi* y *astfel încât*

$$\mathbf{a} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2. \tag{10}$$

Dependenţa liniară a vectorilor

Demonstraţie.

Alegem $O \in \Pi$. Atunci există $E_1, E_2, M \in \Pi$ a.î.

$$\overrightarrow{OE_1} = \mathbf{e}_1, \ \overrightarrow{OE_2} = \mathbf{e}_2, \ \overrightarrow{OM} = \mathbf{a}.$$

- Proiectând punctul M pe dreapta OE_1, paralel cu dreapta OE_2, obţinem un punct M_1.
- Analog, fie M_2 punctul ce se obţine proiectând punctul M pe dreapta OE_2, paralel cu dreapta OE_1.
- Întrucât vectorii $\overrightarrow{OE_1}$ şi $\overrightarrow{OM_1}$ sunt coliniari, iar $\overrightarrow{OE_1} \neq 0$, rezultă că există un număr real x astfel încât $\overrightarrow{OM_1} = x\overrightarrow{OE_1}$.

□

Dependenţa liniară a vectorilor

Demonstraţie.

- În mod analog, există un y real astfel încât $\overrightarrow{OM_2} = y\overrightarrow{OE_2}$. Cum $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$, egalitatea (10) este verificată.
- Mai rămâne să demonstrăm unicitatea numerelor reale x şi y. Să presupunem că ar exista alte două numere reale, x' şi y' astfel încât să avem

$$\mathbf{a} = x'\mathbf{e}_1 + y'\mathbf{e}_2. \tag{11}$$

Dacă scădem egalitatea (11) din egalitatea (10), obţinem

$$(x - x')\mathbf{e}_1 + (y - y')\mathbf{e}_2 = 0. \tag{12}$$

Cum vectorii $\mathbf{e}_1$ şi $\mathbf{e}_2$ sunt liniar independenţi, obţinem că $x - x' = 0$ şi $y - y' = 0$, adică $x = x'$ şi $y = y'$.

□

Dependenţa liniară a vectorilor

Să vedem acum ce se întâmplă în cazul în care avem *trei* vectori. Avem următorul rezultat:

Teorema

Pentru ca trei vectori să fie liniar dependenţi este necesar şi suficient ca ei să fie coplanari.

Demonstraţie.

Presupunem că vectorii

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \tag{13}$$

sunt liniar dependenţi. Atunci putem presupune, fără a reduce generalitatea, că al treilea vector e o combinaţie liniară a primilor doi. Prin urmare, există două numere reale λ_1 şi λ_2 astfel încât să avem

$$\mathbf{a}_3 = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2. \tag{14}$$

Dependenţa liniară a vectorilor

Demonstraţie.

Dacă ataşăm vectorii unui punct O, obţinem trei puncte M_1, M_2, M_3 astfel încât

$$\overrightarrow{OM_1} = \mathbf{a}_1,\ \overrightarrow{OM_2} = \mathbf{a}_2,\ \overrightarrow{OM_3} = \mathbf{a}_3.$$

Dacă vectorii $\overrightarrow{OM_1}$ şi $\overrightarrow{OM_2}$ sunt necoliniari, atunci punctele O, M_1, M_2 sunt necoliniare, deci ele determină un plan Π. Datorită relaţiei (14), vectorul $\overrightarrow{OM_3}$ aparţine, de asemenea, planului Π, prin urmare cei trei vectori sunt coplanari. Dacă vectorii $\overrightarrow{OM_1}$ şi $\overrightarrow{OM_2}$ sunt coliniari, atunci din relaţia (14) rezultă că vectorul $\overrightarrow{OM_3}$ este, de asemenea, coliniar cu ceilalţi doi vectori, prin urmare, cu atât mai mult, cei trei vectori sunt coplanari. $\square$

Demonstraţie.

Invers, să presupunem că vectorii (13) sunt coplanari. Să admitem, pentru început, că doi dintre vectori, de exemplu vectorii $\mathbf{a}_1$ şi $\mathbf{a}_2$ nu sunt coliniari. Atunci, în virtutea teoremei 4, există două constante λ_1 şi λ_2 astfel încât să avem

$$\mathbf{a}_3 = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2$$

şi, prin urmare, vectorii (13) sunt liniar dependenţi.
Dacă toţi trei vectorii sunt coliniari, atunci avem, de exemplu, $\mathbf{a}_1 = \lambda \mathbf{a}_2$, relaţie care se poate rescrie sub forma

$$\mathbf{a}_1 = \lambda \mathbf{a}_2 + 0\mathbf{a}_3,$$

adică, din nou, conchidem că cei trei vectori sunt coplanari. $\square$

Dependenţa liniară a vectorilor

Drept consecinţă a acestei teoreme, putem conchide că *în spaţiu există triplete de vectori liniar independenţi*.
Şi în spaţiu avem un rezultat similar teoremei 4, adică:

Teorema

Dacă vectorii

$$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \tag{15}$$

sunt liniar independenţi şi **a** *este un vector oarecare, atunci există trei numere reale,* x, y, z *astfel încât*

$$\mathbf{a} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3. \tag{16}$$

Această descompunere a lui **a** *este unică.*

Demonstraţie.

Alegem un punct oarecare O din spaţiu şi determinăm punctele E_1, E_2, E_3 şi M astfel încât să avem

$$\overrightarrow{OE_1} = \mathbf{e}_1,\ \overrightarrow{OE_2} = \mathbf{e}_2,\ \overrightarrow{OE_3} = \mathbf{e}_3,\ \overrightarrow{OM} = \mathbf{a}.$$

Notăm cu M_1, M_2, M_3 proiecţiile punctului M pe dreptele OE_1, OE_2, OE_3, paralel cu planele OE_2E_3, OE_1E_3, respectiv OE_1E_2. Se constată cu uşurinţă că

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_3}. \tag{17}$$

Cum vectorii $\overrightarrow{OE_1}$ şi $\overrightarrow{OM_1}$ sunt coliniari şi $\overrightarrow{OE_1} \neq 0$, rezultă că există un număr real x astfel încât $\overrightarrow{OM_1} = x\overrightarrow{OE_1}$. □

Dependenţa liniară a vectorilor

Demonstraţie.

În mod analog, există numerele reale y şi z astfel încât $\overrightarrow{OM_2} = y\overrightarrow{OE_2}$ şi $\overrightarrow{OM_3} = \overrightarrow{OE_3}$. Unicitatea numerelor x, y, z se demonstrează ca şi în cazul teoremei 4. $\square$

Întrebarea naturală care se pune este: ce se întâmplă dacă avem mai mult de trei vectori? Răspunsul este dat de teorema care urmează.

Teorema

Orice patru vectori sunt liniar dependenţi.

Dependenţa liniară a vectorilor

Demonstraţie.

Presupunem că dintre cei patru vectori

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a} \tag{18}$$

trei sunt liniar independenţi, de exemplu

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3. \tag{19}$$

Atunci, în virtutea teoremei 6, există trei numere reale $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ astfel încât

$$\mathbf{a} = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \lambda_3 \mathbf{a}_3,$$

adică cei patru vectori sunt, într-adevăr, liniar dependenţi. □

Dependenţa liniară a vectorilor

Demonstraţie.

Dacă vectorii (19) sunt liniar dependenţi, adică între ei există o relaţie de forma

$$\mu_1 \mathbf{a}_1 + \mu_2 \mathbf{a}_2 + \mu_3 \mathbf{a}_3 = 0, \tag{20}$$

unde nu toţi coeficienţii se anulează, această relaţie se poate rescrie sub forma

$$\mu_1 \mathbf{a}_1 + \mu_2 \mathbf{a}_2 + \mu_3 \mathbf{a}_3 + 0\mathbf{a} = 0,$$

adică vectorii (18) sunt liniar dependenţi. □

Consecinţa

Spaţiul vectorial $\mathcal{V}$ al vectorilor liberi din spaţiu este de dimensiune 3.

Orientarea sistemelor de doi şi trei vectori liniar independenţi

Definiţie

Un sistem (ordonat) de vectori liniar independenţi $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a_2}\}$ într-un plan se numeşte un sistem *drept* dacă atunci când ataşăm cei doi vectori punctului O din plan, adică alegem două puncte A_1 şi A_2 din plan astfel încât $\mathbf{a}_1 = \overrightarrow{OA_1}$ şi $\mathbf{a}_2 = \overrightarrow{OA_2}$, când rotim vectorul $\mathbf{a}_1$ în jurul punctului O pentru a-l aplica peste vectorul $\mathbf{a}_2$ (ca direcţie şi sens), pe drumul cel mai scurt, rotaţia se face în sens trigonometric (invers sensului acelor de ceasornic).
Acelaşi sistem se numeşte *stâng* dacă rotaţia menţionată mai sus se face în sensul acelor de ceasornic.

Observaţie

Este clar că dacă sistemul $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a_2}\}$ este drept, atunci sistemul $\{\mathbf{a}_2, \mathbf{a_1}\}$ este stâng şi viceversa.

Orientarea sistemelor de doi şi trei vectori liniar independenţi

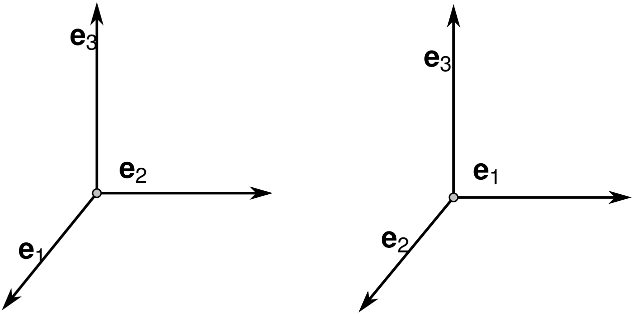
Definiţie

Fie $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a_2}, \mathbf{a}_3\}$ un sistem ordonat de trei vectori liniar independenţi din spaţiu. Fixăm, ca şi mai sus, un punct O şi alegem trei puncte A_1, A_2, A_3 astfel încât să avem $\mathbf{a}_i = \overrightarrow{OA_i},\ i = 1, 2, 3$. Sistemul $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a_2}, \mathbf{a}_3\}$ se numeşte *drept* dacă în planul OA_1A_2, văzut din punctul A_3, rotaţia în jurul punctului O care aplică A_1 peste A_2 pe cel mai scurt drum, se face în sens trigonometric. În caz contrar, adică dacă rotaţia se face în sensul acelor de ceasornic, sistemul se numeşte *stâng*.

Observaţie

Se poate constata imediat că dacă sistemul $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a_2}, \mathbf{a}_3\}$ este drept, atunci tot drepte sunt şi sistemele $\{\mathbf{a}_2, \mathbf{a_3}, \mathbf{a}_1\}$ şi $\{\mathbf{a}_3, \mathbf{a_1}, \mathbf{a}_2\}$, în timp ce sistemele $\{\mathbf{a}_3, \mathbf{a_2}, \mathbf{a}_1\}$, $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a_3}, \mathbf{a}_2\}$ şi $\{\mathbf{a}_2, \mathbf{a_1}, \mathbf{a}_3\}$ sunt stângi.

Orientarea sistemelor de doi şi trei vectori liniar independenţi



Puncte şi vectori

Dacă fixăm un punct O (fie în plan, fie în spaţiu, nu contează), atunci fiecărui punct M putem să-i asociem, în mod unic, vectorul $\overrightarrow{OM}$, pe care îl vom numi *vectorul de poziţie* al lui M (relativ la originea O) sau *raza vectoare* a lui M. Dacă punctul O este subînţeles, atunci vom folosi, pur şi simplu, notaţia $\overrightarrow{OM} \equiv \mathbf{r}_M$ sau chiar $\overrightarrow{OM} \equiv \mathbf{r}$. Punctul O odată fixat, obţinem o bijecţie între mulţimea vectorilor liberi din plan (sau spaţiu) şi mulţimea punctelor din plan (sau spaţiu).
În aparenţă, folosind această bijecţie, putem transfera structura de spaţiu vectorial de pe mulţimea vectorilor liberi pe mulţimea punctelor. Asta ar însemna să fim capabili să adunăm, de exemplu, punctele sau să le înmulţim cu scalari reali oarecare. Din păcate, acest lucru nu este posibil. Desenul următor explică de ce.

Puncte şi vectori

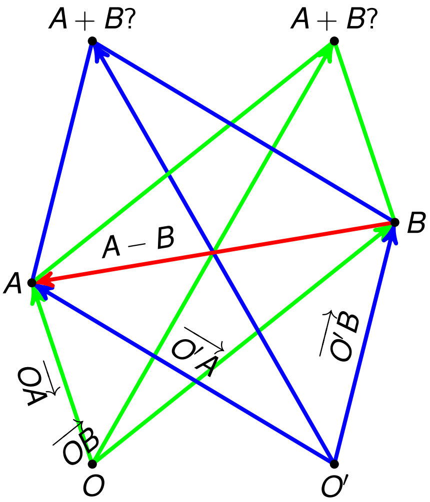


Figura: “Adunarea” punctelor

Adunarea dintre un punct şi un vector

Fie $O \in \mathbb{R}^3$ un punct dat. Considerăm alte două puncte, P şi Q. Atunci are loc relaţia

$$\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{PQ}$$

sau

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ}. \tag{21}$$

Rescriem ecuaţia (21) sub forma

$$Q = P + \overrightarrow{PQ} \tag{22}$$

("reducem" punctul O). Avem voie să utilizăm o astfel de notaţie, pentru că vectorul $\overrightarrow{PQ}$ *nu* depinde de alegerea punctului O.

Adunarea dintre un punct şi un vector

Dăm, mai general, următoarea definiţie:

Definiţie

Suma dintre un punct P şi un vector $\mathbf{v}$ este un *punct* Q (unic determinat!) astfel încât $\overrightarrow{PQ} = \mathbf{v}$. Vom scrie

$$Q = P + \mathbf{v}. \tag{23}$$

Această relaţie se poate interpreta şi spunând că vectorul $\mathbf{v}$ este *diferenţa* $Q - P$ a punctelor Q şi P.

Operaţii cu puncte

Vrem să construim combinaţii de puncte mai generale decât diferenţa a două puncte. Începem cu următorul rezultat:

Propoziţie

Fie $A_1, \ldots A_n$ n puncte din spaţiu şi $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ – n numere reale astfel încât să avem

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 0.$$

Atunci vectorul

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \overrightarrow{OA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{OA_2} + \cdots + \alpha_n \overrightarrow{OA_n}$$

nu depinde de alegerea punctului O.

Operaţii cu puncte

Demonstraţie.

Avem

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= -(\alpha_2 + \ldots \alpha_n)\overrightarrow{OA_1} + \alpha_2\overrightarrow{OA_2} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{OA_n} = \\ &= \alpha_2\left(\overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OA_1}\right) + \alpha_3\left(\overrightarrow{OA_3} - \overrightarrow{OA_1}\right) + \cdots + \alpha_n\left(\overrightarrow{OA_n} - \overrightarrow{OA_1}\right) = \\ &= \alpha_2\overrightarrow{A_1A_2} + \alpha_3\overrightarrow{A_1A_3} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{A_1A_n}.\end{aligned}$$

Vectorul $\mathbf{v}$ de mai sus se va scrie ca o combinaţie a punctelor $A_1, \ldots, A_n$:

$$\mathbf{v} = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \ldots \alpha_n A_n, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots \alpha_n = 0.$$

$\square$

Operaţii cu puncte

O a doua variantă de combinare a punctelor este sugerată de rezultatul care urmează.

Propoziţie

Fie $A_1, \ldots A_n$ n puncte din spaţiu şi $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ – n numere reale astfel încât să avem

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 1.$$

Atunci punctul P, dat de

$$\overrightarrow{OP} = \alpha_1 \overrightarrow{OA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{OA_2} + \cdots + \alpha_n \overrightarrow{OA_n}$$

nu depinde de alegerea punctului O.

Operaţii cu puncte

Demonstraţie.

Avem

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= (1-\alpha_2-\alpha_3-\cdots-\alpha_n)\overrightarrow{OA_1}+\alpha_2\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\alpha_n\overrightarrow{OA_n}=\\ &=\overrightarrow{OA_1}+\alpha_2\left(\overrightarrow{OA_2}-\overrightarrow{OA_1}\right)+\cdots+\alpha_n\left(\overrightarrow{OA_n}-\overrightarrow{OA_1}\right)=\\ &=\overrightarrow{OA_1}+\alpha_2\overrightarrow{A_1A_2}+\cdots+\alpha_n\overrightarrow{A_1A_n},\end{aligned}$$

ceea ce înseamnă că punctul P se poate scrie, după regula de adunare dintre un punct şi un vector, sub forma

$$\begin{aligned}P &= A_1+\alpha_2\overrightarrow{A_1A_2}+\cdots+\alpha_n\overrightarrow{A_1A_n}=\\ &=A_1+\alpha_2(A_2-A_1)+\alpha_3(A_3-A_1)+\ldots\alpha_n(A_n-A_1)=\\ &=(1-\alpha_2-\alpha_3-\cdots-\alpha_n)A_1+\alpha_2A_2+\cdots+\alpha_nA_n=\\ &=\alpha_1A_1+\alpha_2A_2+\cdots+\alpha_nA_n.\end{aligned}$$

Combinaţii afine şi convexe

Definiţie

O combinaţie de puncte de forma

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \cdots + \alpha_n A_n,$$

cu $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 1$. Se numeşte *combinaţie afină* sau *combinaţie baricentrică* a punctelor $A_1, \ldots, A_n$.
O combinaţie afină în care toţi coeficienţii sunt pozitivi se numeşte *combinaţie convexă*.

Combinaţii afine şi convexe

Definiţie

Fie $\mathcal{S}$ o mulţime de puncte din spaţiu.
Mulţimea tuturor combinaţiilor afine ale unui număr finit de puncte din $\mathcal{S}$ se numeşte *înfăşurătoarea afină* a mulţimii $\mathcal{S}$ şi se notează cu $\operatorname{aff}(\mathcal{S})$.
Mulţimea tuturor combinaţiilor convexe ale unui număr finit de puncte din $\mathcal{S}$ se numeşte *înfăşurătoarea convexă* a mulţimii $\mathcal{S}$ şi se notează cu $\operatorname{conv}(\mathcal{S})$.

Combinaţii afine şi convexe

Exemple

1. Înfăşurătoarea afină a unei perechi de puncte distincte A, B este dreapta AB.
2. Înfăşurătoarea afină a trei puncte necoliniare, A, B, C este planul determinat de aceste trei puncte.
3. Înfăşurătoarea afină a patru puncte necoplanare, A, B, C, D este întregul spaţiu.
4. Înfăşurătoarea convexă a unei perechi de puncte distincte A, B este segmentul de dreaptă $[AB]$.
5. Înfăşurătoarea convexă a trei puncte necoliniare, A, B, C este triunghiul (plin) determinat de aceste trei puncte.
6. Înfăşurătoarea afină a patru puncte necoplanare, A, B, C, D este tetraedrul (plin) $ABCD$.

Împărţirea unui segment într-un raport dat

Fie Δ o dreaptă oarecare şi A şi B două puncte de pe ea, iar k un număr real. Alegem pe Δ un sens de parcurgere oarecare. Spunem că un punct M de pe dreaptă *împarte segmentul AB în raportul k* dacă avem

$$\frac{(MA)}{(MB)} = k. \tag{24}$$

Este clar că definiţia nu depinde de alegerea orientării dreptei Δ. Este, de asemenea, clar că raportul k este negativ dacă punctul M se află în interiorul segmentului AB şi este pozitiv atunci când punctul se află în exteriorul acestuia. Se observă, de asemenea, că relaţia (24) este echivalentă cu relaţia vectorială

$$\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}. \tag{25}$$

Împărţirea unui segment într-un raport dat

Fie, acum, $\mathbf{r}_1$ şi $\mathbf{r}_2$ vectorii de poziţie ai punctelor A, respectiv B, şi $\mathbf{r}$ – vectorul de poziţie al punctului M. Atunci relaţia (25) se poate rescrie sub forma

$$\mathbf{r}_1 - \mathbf{r} = k(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r})$$

sau

$$(1-k)\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - k\mathbf{r}_2,$$

adică

$$\mathbf{r} = \frac{\mathbf{r}_1 - k\mathbf{r}_2}{1-k}. \tag{26}$$

Împărţirea unui segment într-un raport dat

Observaţii

1. În formula (26) nu putem avea $k = 1$, pentru că asta ar însemna $(MA) = (MB)$, ceea ce ne-ar conduce la $A = B$, ori noi am presupus că cele două puncte sunt distincte.
2. Relaţia (26) se poate scrie sub forma

$$\mathbf{r} = \frac{1}{1-k}\mathbf{r}_1 + \left(1 - \frac{1}{1-k}\right)\mathbf{r}_2. \tag{27}$$

   Asta înseamnă că punctul M este o combinaţie afină a punctelor A şi B, iar când k ia toate valorile reale (mai puţin 1), punctul M va parcurge întreaga axă reală.

Împărţirea unui segment într-un raport dat

Observaţii

3. Dacă avem $k \leq 0$, atunci este clar din definiţie că punctul M aparţine segmentului AB. Remarcăm, în plus, că atunci când k este negativ, cei doi coeficienţi din relaţia (27) sunt, ambii, pozitivi, adică punctul M este, de data aceasta, o combinaţie *convexă* a punctelor A şi B, iar segmentul AB este mulţimea tuturor combinaţiilor convexe a celor două puncte (înfăşurătoarea convexă a celor două puncte). Se observă că punctul A corespunde valorii $k = 0$ a raportului, în timp ce punctul B se obţine dacă facem $k \to -\infty$.
4. Pentru $k = -1$, regăsim expresia pentru vectorul de poziţie al mijlocului segmentului AB:

$$\mathbf{r} = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2.)$$

Coordonate pe dreaptă

- Fie Δ o dreaptă oarecare. Alegem pe ea un vector nenul oarecare, $\mathbf{e}$, pe care îl vom numi *vector unitar* sau *versor*.
- Dacă acum $\mathbf{a}$ este un vector oarecare de pe dreaptă, atunci, conform secţiunii precedente, există un singur număr real x astfel încât $\mathbf{a} = x\mathbf{e}$. Numărul x se numeşte *componenta* vectorului $\mathbf{a}$, relativ la dreapta Δ, înzestrată cu versorul $\mathbf{e}$.
- Alegem pe dreapta Δ, înzestrată cu versorul $\mathbf{e}$, un punct O, pe care îl vom numi *originea coordonatelor*. Dreapta Δ se va numi de-acum *axă de coordonate*. Dacă M este un punct oarecare al dreptei, vectorul $\overrightarrow{OM}$ se va numi *rază vectoare* sau *vector de poziţie* al punctului M, iar componenta acestui vector se numeşte *coordonata punctului M*.

Coordonate pe dreaptă

- Alegem, mai departe, punctul E pe dreaptă astfel încât să avem $\overrightarrow{OE} = \mathbf{e}$. Segmentul OE va fi ales ca scară a lungimilor pe dreapta Δ. Prin urmare, coordonata unui punct M de pe dreaptă nu este altceva decât magnitudinea (OM) a segmentului orientat $\overline{OM}$. Pentru a scoate în evidenţă că numărul real x este coordonata punctului M, vom scrie, de regulă, $M(x)$.

Trebuie remarcat că există o infinitate de moduri de a asocia coordonate punctelor de pe dreaptă.

Coordonate pe dreaptă

Coordonata unui punct este unic determinată doar în momentul în care s-au ales:

- versorul dreptei;
- originea dreptei.

Datorită introducerii coordonatelor, fiecărui punct M de pe axa de coordonate Δ i se pune în corespondenţă un singur număr real – coordonata sa x. Invers, pentru fiecare număr real x există un singur punct M de pe axa Δ a cărui coordonată este x. Astfel, poziţia fiecărui punct de pe axa de coordonate este unic determinată prin prescrierea coordonatei acelui punct.
Notăm cu $\rho(M_1, M_2)$ distanţa dintre punctele M_1 şi M_2, adică lungimea segmentului M_1M_2. Această distanţă se poate exprima cu ajutorul coordonatelor. Mai precis, avem următoarea teoremă:

Coordonate pe dreaptă

Teorema

Pentru orice puncte $M_1(x_1)$ şi $M_2(x_2)$ de pe axa de coordonate au loc egalităţile:

$$(M_1M_2) = x_2 - x_1, \tag{28}$$
$$\rho(M_1, M_2) = |x_2 - x_1|. \tag{29}$$

Demonstraţie.

Din teorema lui Chasles rezultă că

$$(OM_1) + (M_1M_2) = (OM_2) \implies (M_1M_2) = (OM_2) - (OM_1).$$

Utilizând definiţia coordonatelor, obţinem egalitatea (28). Formula (29) rezultă imediat din formula (28). □

Peste tot în această secţiune vom considera că toate punctele şi toţi vectorii se află într-un plan Π.

Definiţie

Fie O un punct şi $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ – doi vectori liniar independenţi (necoliniari) din planul Π. Tripletul $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ se numeşte *reper afin* sau *sistem de coordonate afin* în planul Π.

Ataşăm vectorii $\mathbf{e}_1$ şi $\mathbf{e}_2$ punctului O, construind punctele E_1 şi E_1 astfel încât $\overrightarrow{OE_1} = \mathbf{e}_1$ şi $\overrightarrow{OE_2} = \mathbf{e}_2$. Segmentele orientate $\overline{OE_1}$ şi $\overline{OE_2}$ definesc două axe de coordonate, Ox şi Oy. Punctul O se numeşte *originea coordonatelor*, iar vectorii $\mathbf{e}_1$ şi $\mathbf{e}_2$ – *vectorii bazei*.

Fie acum **a** un vector oarecare din planul Π. **a** se poate reprezenta în mod unic sub forma

$$\mathbf{a} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2. \tag{30}$$

Definiţie

Coeficienţii x şi y din descompunerea (30) se numesc *componentele* vectorului **a** relativ la sistemul de coordonate $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$.

x şi y sunt, de fapt, lungimile cu semn ale proiecţiilor vectorului **a** pe axele Ox şi Oy, paralel cu axele OY, respectiv Ox. Pentru a scoate în evidenţă faptul că x şi y sunt componentele vectorului **a** vom scrie $\mathbf{a} = \mathbf{a}(x, y)$ sau, pur şi simplu, $\mathbf{a}(x, y)$.

Fie, acum, M un punct oarecare al planului Π, în care s-a fixat un sistem de coordonate afine $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$. Vectorul $\overrightarrow{OM}$ se numeşte *raza vectoare* sau *vectorul de poziţie* al punctului M.

Definiţie

Componentele x şi y ale vectorului $\overrightarrow{OM}$ se numesc *coordonate afine* ale punctului M relativ la reperul $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$. De regulă, x se numeşte *abscisă*, în timp ce y se numeşte *ordonată*.

Un sistem de coordonate afine se mai notează şi cu Oxy, dacă vectorii bazei sunt subînţeleşi. Dacă x şi y sunt coordonatele unui punct M, vom utiliza în mod frecvent notaţia $M(x, y)$.

Teorema

Componentele unei combinaţii liniare de vectori sunt egale cu aceeaşi combinaţie liniară a componentelor vectorilor. Mai precis, dacă

$$\mathbf{a}(X, Y) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbf{a}_i(X_i, Y_i),$$

atunci

$$X = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i X_i, \quad Y = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j Y_j.$$

Consecinţa

Dacă $X(x_1, y_1)$ şi $B(x_2, y_2)$ sunt două puncte din plan, atunci

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}(x_2 - x_1, y_2 - y_1),$$

adică pentru a obţine componentele vectorului definit de segmentul orientat $\overline{AB}$, trebuie să scădem din coordonatele extremităţii sale coordonatele originii.

Demonstraţie.

Rezultă imediat din teorema precedentă şi din relaţia

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}.$$

□

Consecinţa

Pentru ca doi vectori $\mathbf{a}(x_1, y_1)$ *şi* $\mathbf{b}(x_2, y_2)$ *să fie coliniari, este necesar şi suficient ca ei să aibă componentele corespunzătoare proporţionale.*

Proporţionalitatea componentelor se poate scrie şi

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1},$$

cu condiţia ca ambii numitori să fie diferiţi de zero. Menţionăm, pe de altă parte, că se poate utiliza convenţia că de fiecare dată când un numitor este zero, se admite că şi numărătorul care îi corespunde este zero, ceea ce înseamnă că, formal, putem scrie egalitatea precedentă şi când unul dintre numitori se anulează.

Consecinţa

Coordonatele mijlocului A al unui segment de dreaptă cu capetele în punctele $A_1(x_1, y_1)$ şi $A_2(x_2, y_2)$ sunt

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

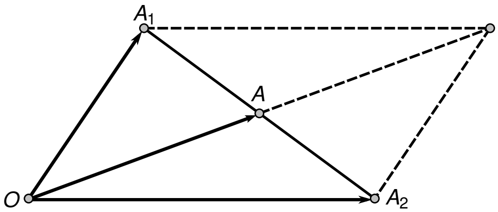


Figura:

- Presupunem că în planul Π a fost aleasă o unitate de măsură pentru lungime.
- Alegem un punct O şi doi vectori de lungime 1, perpendiculari unul pe celălalt, $\mathbf{i}$ şi $\mathbf{j}$.
- Sistemul afin de coordonate $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ se numeşte *sistem de coordonate rectangular* sau *cartezian*. Despre baza $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ vom spune că este *ortonormată* (ceea ce înseamnă că vectorii sunt *ortogonali*, adică perpendiculari şi "normaţi", adică de lungime 1).
- Toate proprietăţile valabile într-un sistem de coordonate afin oarecare rămân adevărate şi într-un sistem rectangular, dar, de regulă, expresiile care intervin sunt mult mai simple atunci când sunt scrise în coordonate carteziene.

Fie O un punct oarecare al spaţiului şi $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ – trei vectori liniar independenţi (adică necoplanari).

Definiţie

Cuadrupletul $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ se numeşte *reper afin* sau *sistem de coordonate afine* în spaţiu. Punctul O se numeşte *originea coordonatelor*, iar vectorii $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ se numesc *vectorii bazei*.

Definiţie

Se numesc *componente* ale unui vector $\mathbf{a}$ relativ la reperul $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ coeficienţii x, y, z ai descompunerii:

$$\mathbf{a} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3.$$

Definiţie

Coordonatele unui punct M, relativ la acelaşi reper sunt, prin definiţie, componentele x, y, z ale vectorului său de poziţie, $\overrightarrow{OM}$. Coordonata x se numeşte *abscisă*, coordonata y – *ordonată*, iar coordonata z – *cotă*.

- Un sistem de coordonate afin se mai notează cu $Oxyz$, dacă vectorii bazei sunt subînţeleşi.
- Construim punctele E_1, E_2, E_3 astfel încât

$$\overrightarrow{OE_1} = \mathbf{e}_1, \overrightarrow{OE_2} = \mathbf{e}_2, \overrightarrow{OE_3} = \mathbf{e}_3. \tag{31}$$

- Segmentele orientate $\overline{OE_1}, \overline{OE_2}$ şi $\overline{OE_3}$ determină cele trei *axe de coordonate*, Ox, Oy şi Oz.

- Cele trei plane determinate de câte două axe de coordonate se numesc *plane de coordonate*. Aceste plane împart spaţiul în opt zone, care se numesc *octanţi de coordonate*.
- Ca şi în cazul reperelor plane, distingem sisteme de coordonate *drepte* şi stângi.
- Considerăm un triplet de vectori necoplanari $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. Ataşam aceşti vectori unui punct O, adică determinăm punctele E_1, E_2, E_3, astfel încât să fie verificate relaţiile (31).
- Rotim segmentul orientat $\overline{OE_1}$, în planul OE_1E_2, în jurul lui O, pe cel mai scurt drum, până când el coincide, ca direcţie şi sens, cu segmentul orientat $\overline{OE_2}$.

- Dacă această rotaţie, privită din extremitatea segmentului orientat $\overline{OE_3}$ (cu alte cuvinte, din punctul E_3) se produce în sensul invers mersului acelor de ceasornic, vom spune că tripletul de vectori $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ este *drept*, altfel vom spune că este *stâng*.
- Un sistem de coordonate $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ se numeşte *drept* sau stâng, după cum tripletul $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ este drept sau stâng.
- Peste tot, în cele ce urmează, sistemele de coordonate vor fi totdeauna drepte, dacă nu se menţionează altfel.

Cel mai simplu dintre sistemele de coordonate afine în spaţiu este sistemul de coordonate rectangular sau cartezian. Presupunem că în spaţiu s-a ales o unitate de măsură pentru lungime. Atunci un sistem de coordonate rectangular sau cartezian în spaţiu este determinat de alegerea unui punct O şi a trei vectori de lungime 1, $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, perpendiculari între ei.

Pe componente, avem

Teorema

Componentele unei combinaţii liniare de vectori sunt egale cu aceeaşi combinaţie liniară a componentelor vectorilor. Mai precis, dacă

$$\mathbf{a}(X, Y, Z) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbf{a}_i(X_i, Y_i, Z_i),$$

atunci

$$X = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i X_i, \quad Y = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j Y_j, \quad Z = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j Z_j.$$

Definiţie

Fie **a** şi **b** doi vectori. Se numeşte *produs scalar* al celor doi vectori numărul real, notat $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$, dat de

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \|\mathbf{a}\|\cdot\|\mathbf{b}\|\cos\varphi, \tag{32}$$

unde φ este unghiul dintre cei doi vectori.

Alegem un punct oarecare O în spaţiu şi construim un segment orientat $\overline{OA}$ astfel încât

$$\overrightarrow{OA} = \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|}.$$

Notăm cu Δ axa definită de segmentul orientat $\overline{OA}$. Atunci

$$\|\mathbf{b}\|\cos\varphi = \mathrm{pr}_{\Delta}\,\mathbf{b}.$$

Prin urmare, definiţia devine

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \operatorname{pr}_{\Delta} \mathbf{b}. \tag{33}$$

Proprietăţi

1. comutativitatea:
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}. \tag{34}$$
Această proprietate rezultă direct din definiţia produsului scalar;
2. compatibilitatea cu înmulţirea vectorilor cu scalari:
$$(\lambda \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}), \tag{35}$$
$$\mathbf{a} \cdot (\lambda \mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}), \tag{36}$$
3. distributivitatea faţă de adunarea vectorilor:
$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}. \tag{37}$$

Produsul scalar al vectorilor

Definiţie şi proprietăţi fundamentale

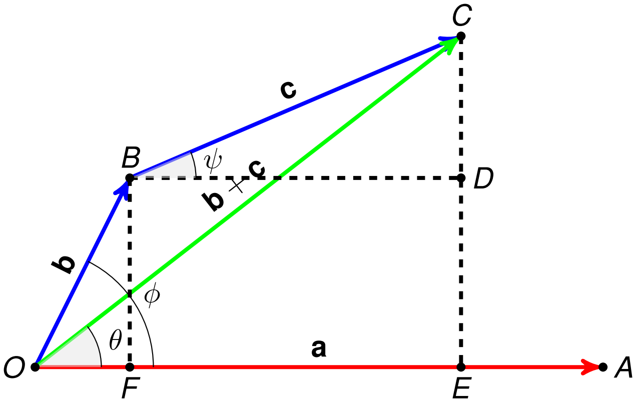


Figura: Distributivitatea produsului scalar

Produsul scalar al vectorilor

Definiţie şi proprietăţi fundamentale

4. Doi vectori **a** şi **b** sunt perpendiculari dacă şi numai dacă produsul lor scalar este egal cu zero:
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0. \tag{38}$$

5. Produsul scalar a unui vector cu el însuşi este egal cu pătratul normei acestui vector:
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \|\mathbf{a}\|^2. \tag{39}$$

Produsul scalar al vectorilor

Exprimarea produsului scalar în coordonate

Alegem, în spaţiu, un sistem de coordonate rectangular, cu originea într-un punct O. Fie $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ baza ortonormată care generează acest sistem de coordonate. Din proprietăţile produsului scalar obţinem tabla de multiplicare:

$$\begin{array}{c|ccc} \cdot & \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \hline \mathbf{i} & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{j} & 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{k} & 0 & 0 & 1 \end{array} \tag{40}$$

Presupunem acum că se dau doi vectori **a** şi **b**, care au următoarele expresii în raport cu baza de coordonate:

$$\mathbf{a} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = X'\mathbf{i} + Y'\mathbf{j} + Z'\mathbf{k}.$$

Utilizând tabla de înmulţire scalară (40) a vectorilor bazei, produsul scalar dintre **a** şi **b** va fi

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} &= (X\mathbf{i}+Y\mathbf{j}+Z\mathbf{k})\cdot(X'\mathbf{i}+Y'\mathbf{j}+Z'\mathbf{k}) = XX'\mathbf{i}^2+XY'\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}+\\ &+XZ'\mathbf{i}\cdot\mathbf{k}+YX'\mathbf{j}\cdot\mathbf{i}+YY'\mathbf{j}^2+YZ'\mathbf{j}\cdot\mathbf{k}+ZX'\mathbf{k}\cdot\mathbf{i}+ZZ'\mathbf{k}^2=\\ &=XX'+YY'+ZZ'.\end{aligned}$$

Aşadar, în coordonate, avem:

- produsul scalar este dat de

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = XX'+YY'+ZZ'. \tag{41}$$

- condiţia de ortogonalitate este

$$XX'+YY'+ZZ'=0. \tag{42}$$

Produsul scalar al vectorilor

Exprimarea produsului scalar în coordonate

- lungimea vectorului **a** este

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}. \tag{43}$$

- Dacă se dau $M(x, y, z)$ şi $M'(x', y', z')$, distanţa $d(M, M')$ dintre cele două puncte este egală cu lungimea vectorului $\overrightarrow{MM'}(x' - x, y' - y, z' - z)$, deci

$$d(M, M') = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}.$$

- Unghiul dintre vectorii $\mathbf{a}(X, Y, Z)$ şi $\mathbf{b}(X', Y', Z')$, este dat de:

$$\cos\varphi = \frac{XX' + YY' + ZZ'}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}\sqrt{X'^2 + Y'^2 + Z'^2}}.$$

Definiţie

Produsul vectorial dintre vectorul $\mathbf{a}$ şi vectorul $\mathbf{b}$ este, prin definiţie, vectorul, notat prin $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, determinat prin următoarele condiţii:

1) dacă vectorii $\mathbf{a}$ şi $\mathbf{b}$ sunt coliniari, atunci, prin definiţie, produsul lor vectorial $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ este egal cu zero.
2) dacă cei doi vectori nu sunt coliniari, adică fac între ei un unghi φ, cu $0 < \varphi < \pi$, atunci produsul lor vectorial se defineşte prin următoarele trei condiţii:
    - (i) lungimea vectorului $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ este egală cu $\|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\| \cdot \sin\varphi$;
    - (ii) vectorul $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ este perpendicular pe ambii vectori $\mathbf{a}$ şi $\mathbf{b}$;
    - (iii) tripletul de vectori $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b})$ este direct.

Proprietăţi

1. Dacă vectorii **a** şi **b** nu sunt coliniari, atunci norma vectorului $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ este egală cu aria paralelogramului construit pe segmentele OA şi OB, unde O este un punct arbitrar din spaţiu, iar $\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$ şi $\overrightarrow{OB}=\mathbf{b}$.
2. Aria triunghiului OAB este egală cu jumătate din norma produsului vectorial a vectorilor $\overrightarrow{OA}$ şi $\overrightarrow{OB}$.
3. Produsul vectorial este *anticomutativ*:
$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=-\mathbf{b}\times\mathbf{a}. \tag{44}$$
4. Produsul vectorial este compatibil cu înmulţirea cu scalari a vectorilor:
$$(\lambda\mathbf{a})\times\mathbf{b}=\lambda(\mathbf{a}\times\mathbf{b}), \tag{45}$$
$$\mathbf{a}\times(\lambda\mathbf{b})=\lambda(\mathbf{a}\times\mathbf{b}). \tag{46}$$

5. Produsul vectorial este distributiv faţă de adunarea vectorilor:

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times\mathbf{c}=\mathbf{a}\times\mathbf{c}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}, \tag{47}$$

$$\mathbf{c}\times(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\mathbf{c}\times\mathbf{a}+\mathbf{c}\times\mathbf{b}. \tag{48}$$

Proprietăţile produsului vectorial descrise mai sus permit formularea unei reguli pentru calculul produsului vectorial a două combinaţii liniare de vectori liberi: pur şi simplu se calculează produsul fiecărui termen din prima combinaţie cu fiecare termen din a doua combinaţie şi apoi se însumează rezultatele. De exemplu,

$$(\mathbf{a}+2\mathbf{b})\times(2\mathbf{c}-3\mathbf{d})=2\mathbf{a}\times\mathbf{c}-3\mathbf{a}\times\mathbf{d}+4\mathbf{b}\times\mathbf{c}-6\mathbf{b}\times\mathbf{d}.$$

Observaţie

Produsul vectorial are o serie de similarităţi cu produsul scalar al vectorilor. Sunt, totuşi, o serie de diferenţe care trebuie ţinute minte:

1) Produsul vectorial *nu* este comutativ – ordinea factorilor contează.
2) Produsul vectorial a doi vectori este un vector, nu un scalar. Ca urmare, de data aceasta are sens să considerăm produse de mai mulţi factori. Totuşi, aşa cum vom vedea ceva mai târziu, produsul vectorial *nu* este asociativ.

Considerăm un sistem de coordonate ortogonal $Oxyz$ şi fie $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ baza ortonormată de coordonate. Vectorii bazei se înmulţesc vectorial după regulile descrise în următoarea tabelă:

$\times$	$\mathbf{i}$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{k}$
$\mathbf{i}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{k}$	$-\mathbf{j}$
$\mathbf{j}$	$-\mathbf{k}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{i}$
$\mathbf{k}$	$\mathbf{j}$	$-\mathbf{i}$	$\mathbf{0}$

Fie, acum, **a** şi **b** doi vectori daţi prin componentele lor:

$$\mathbf{a} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = X'\mathbf{i} + Y'\mathbf{j} + Z'\mathbf{k}.$$

Atunci

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (YZ' - ZY')\mathbf{i} + (ZX' - XZ')\mathbf{j} + (XY' - YX')\mathbf{k}. \tag{49}$$

Ţinând cont de regula de dezvoltare a unui determinant de ordinul al treilea după prima linie, formula precedentă se mai poate scrie sub următoarea formă, mult mai uşor de reţinut:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ X & Y & Z \\ X' & Y' & Z' \end{vmatrix}. \tag{50}$$

Din expresia analitică (50) rezultă imediat formule analitice pentru aria paralelogramului şi aria triunghiului determinate de cei doi vectori. Astfel, din formula menţionată rezultă imediat că

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} Y & Z \\ Y' & Z' \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} X & Z \\ X' & Z' \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} X & Y \\ X' & Y' \end{vmatrix},$$

adică

$$Aria_{par} \equiv \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \sqrt{\begin{vmatrix} Y & Z \\ Y' & Z' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} X & Z \\ X' & Z' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} X & Y \\ X' & Y' \end{vmatrix}^2}. \tag{51}$$

Prin urmare, aria triunghiului determinat de cei doi vectori este

$$Aria_{triun} = \frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} Y & Z \\ Y' & Z' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} X & Z \\ X' & Z' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} X & Y \\ X' & Y' \end{vmatrix}^2}. \tag{52}$$

Să considerăm acum cazul în care avem trei puncte oarecare din planul xOy: $A(x_A, y_A, 0)$, $B(x_B, y_B, 0)$, $C(x_C, y_C, 0)$. Ele determină doi vectori: $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$ şi $\mathbf{b} = \overrightarrow{AC}$. Este clar că $\mathbf{a} = \mathbf{a}(x_B - x_A, y_B - y_A, 0)$ şi $\mathbf{b} = \mathbf{b}(x_C - x_A, y_B - y_A, 0)$. Prin urmare,

Produsul vectorial al vectorilor

Definiţie şi proprietăţi fundamentale

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_B - x_A & y_B - y_A & 0 \\ x_C - x_A & y_C - y_A & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{k}\begin{vmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A \end{vmatrix} = \mathbf{k}\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix},$$

de unde rezultă că

$$\|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\| = \pm\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}.$$

Aşadar, aria triunghiului ABC din planul xOy este dată de formula

$$Aria_{ABC} = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}. \tag{53}$$

După cum am putut constata până acum, produsul vectorial a doi vectori este, din nou, un vector, de aceea are sens să înmulţim acest vector cu un al treilea vector. Rezultatul acestei operaţii este ceea ce se numeşte *dublu produs vectorial*. Menţionăm că *produsul vectorial nu este asociativ*, de aceea nu se poate renunţa la paranteze aşa cum se face, de exemplu, în cazul produsului numerelor reale sau complexe sau în cazul produsului matricilor. De acest fapt ne putem convinge cu uşurinţă, studiind produsele elementelor bazei canonice a spaţiului tridimensional. Avem, de exemplu:

$$(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i},$$

în timp ce

$$\mathbf{i} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{j}) = 0.$$

Produsul vectorial al vectorilor

Dublul produs vectorial

Fie, prin urmare, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ şi $\mathbf{c}$ trei vectori din spaţiu. După cum am spus mai devreme, *dublul produs vectorial* al celor trei vectori este, prin definiţie, vectorul $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$. Are loc următoarea relaţie:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a}. \tag{54}$$

Pe de altă parte,

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = -(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{a} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{a})\mathbf{c} - (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a})\mathbf{b}.$$

Comparând vectorii $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ şi $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ ajungem la concluzia că ei pot fie egali doar dacă

$$-(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a} + 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} = 0.$$

Astfel, *o condiţie necesară pentru ca cele două produse vectoriale duble să fie egale este necesar ca cei trei vectori să fie coplanari.* Această condiţie nu este, însă, şi suficientă, întrucât,după cum se vede din egalitatea de mai sus, coeficienţii celor trei vectori nu sunt arbitrari. Se poate demonstra cu uşurinţă, utilizând relaţia (54) că pentru orice trei vectori $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ şi $\mathbf{c}$ are loc următoarea identitate (*identitatea lui Jacobi*):

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} + (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{a} + (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = 0. \tag{55}$$

Fie $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ şi $\mathbf{c}$ trei vectori. Se numeşte *produs mixt* al celor trei vectori numărul

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) := (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}. \tag{56}$$

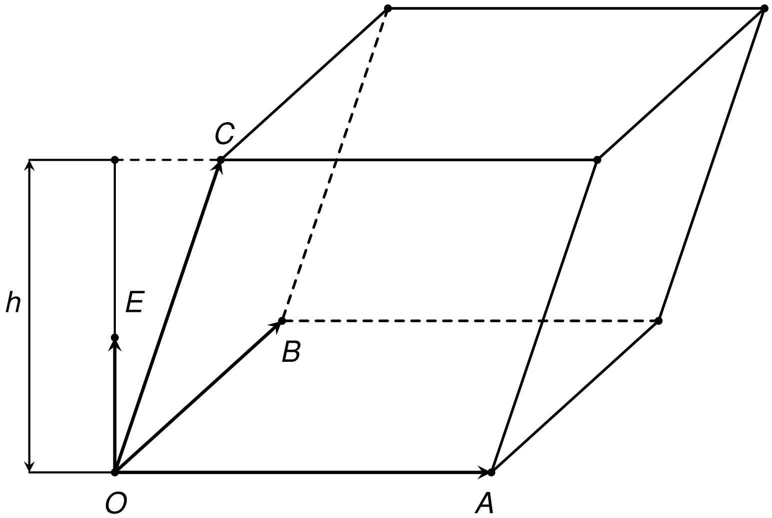
Produsul mixt al vectorilor are o interpretare geometrică remarcabilă, exprimată de următoarea teoremă.

Teorema

Fie $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ şi $\mathbf{c}$ trei vectori necoplanari. Îi ataşam unui punct O şi fie A, B, C punctele pentru care

$$\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}, \ \overrightarrow{OB} = \mathbf{b}, \ \overrightarrow{OC} = \mathbf{c}.$$

Atunci produsul mixt $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ este egal cu volumul paralelipipedului construit pe segmentele OA, OB, OC, luat cu semnul plus dacă tripletul $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ este direct şi cu semnul minus dacă tripletul este stâng.


C
h
E
B
O
A

Consecinţa

Volumul tetraedrului OABC este dat de formula

$$Vol_{OABC} = \pm\frac{1}{6}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}),$$

unde $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}, \mathbf{b} = \overrightarrow{OB}, \mathbf{c} = \overrightarrow{OC}$.

Consecinţa

Un sistem de trei vectori liniar independenţi $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ *este drept dacă* $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) > 0$ *şi stâng dacă* $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) < 0$.

Consecinţa

Un sistem ortonormat de trei vectori liniar independenţi $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ *este drept dacă* $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 1$ *şi stâng dacă* $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = -1$.

Produsul mixt al vectorilor ne permite, de asemenea, să stabilim un criteriu de coplanaritate a trei vectori, cuprins în teorema care urmează.

Teorema

Pentru ca trei vectori $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ *şi* $\mathbf{c}$ *să fie coplanari este necesar şi suficient ca produsul lor mixt să fie egal cu zero:*

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0. \tag{57}$$

Dacă, relativ la o bază ortonormată, vectorii $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ sunt daţi prin componentele lor:

$$\mathbf{a}(X_1, Y_1, Z_1),\ \mathbf{b}(X_2, Y_2, Z_2),\ \mathbf{c}(X_3, Y_3, Z_3), \tag{58}$$

atunci:

$$\begin{aligned}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = {} & (Y_1 Z_2 - Y_2 Z_1) X_3 + (X_2 Z_1 - X_1 Z_2) Y_3 + \\ & + (X_1 Y_2 - X_2 Y_1) Z_3 = X_1 Y_2 Z_3 + X_2 Y_3 Z_1 + X_3 Y_1 Z_3 - X_1 Y_3 Z_2 - \\ & - X_3 Y_2 Z_1 - X_2 Y_1 Z_3.\end{aligned}$$

Este uşor de constatat că această relaţie se poate rescrie cu ajutorul unui determinant de ordinul al treilea:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3. \end{vmatrix} \tag{59}$$

Produsul mixt al vectorilor

Expresia produsului mixt în coordonate

Din proprietăţile determinanţilor se obţin imediat următoarele relaţii între produsele mixte a trei vectori, luaţi în diferite ordini:

$$(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = (\mathbf{c},\mathbf{a},\mathbf{b}) = (\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{a}) = -(\mathbf{b},\mathbf{a},\mathbf{c}) = -(\mathbf{c},\mathbf{b},\mathbf{a}) = -(\mathbf{a},\mathbf{c},\mathbf{b}).$$

- dacă facem o permutare circulară a factorilor într-un produs mixt, valoarea produsului nu se schimbă;
- dacă se schimbă ordinea a doi factori (nu neapărat vecini), *semnul* produsului se schimbă (dar valoarea absolută nu!).
- dacă doi factori dintr-un produs mixt sunt liniar dependenţi, produsul se anulează.
- Vectorii sunt coplanari dacă îi numai dacă

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{60}$$