Generări de suprafeţe

Paul A. Blaga

Universitatea “Babeş-Bolyai”

17 aprilie 2022

Suprafeţe cilindrice

Suprafaţă cilindrică = o suprafaţă generată de o dreaptă care se mişcă paralel cu o direcţie fixă şi îndeplineşte o condiţie suplimentară. Condiţia poate fi:

- ca dreapta mobilă să intersecteze tot timpul o curbă dată, care se numeşte *curbă directoare a suprafeţei cilindrice*.
- să rămână tot timpul tangentă unei suprafeţe;
- să rămână la o distanţă fixată de o anumită dreaptă fixă;
- diferite alte condiţii.

Suprafeţe cilindrice

Vom trata în detaliu cazul în care condiţia suplimentară este intersecţia cu o curbă.
Se dă o dreaptă, numită *directoare*,

$$(\Delta)\begin{cases} P_1(x,y,z)=0 \\ P_2(x,y,z)=0 \end{cases},$$

unde P_1 şi P_2 sunt funcţii de gradul întâi în variabilele x, y, z. Mai considerăm o curbă (*curba directoare a suprafeţei cilindrice*),

$$(C)\begin{cases} F_1(x,y,z)=0 \\ F_2(x,y,z)=0 \end{cases},$$

unde F_1 şi F_2 sunt curbe netede.

Suprafeţe cilindrice

Pentru a stabili ecuaţia suprafeţei, stabilim, înainte de toate, ecuaţiile unei drepte oarecare care este paralelă cu directoarea Δ. Vom numi o astfel de dreaptă *generatoare*. O generatoare se va scrie ca intersecţie a două plane care sunt paralele cu planele ce definesc directoarea, adică

$$(G_{\lambda,\mu})\begin{cases} P_1(x,y,z)=\lambda \\ P_2(x,y,z)=\mu, \end{cases} \tag{1}$$

unde λ şi μ sunt doi parametrii reali, deocamdată arbitrari.
Pentru ca generatoarele să intersecteze curba directoare, următorul sistem de ecuaţii trebuie să fie compatibil

$$\begin{cases} P_1(x,y,z)=\lambda \\ P_2(x,y,z)=\mu \\ F_1(x,y,z)=0 \\ F_2(x,y,z)=0 \end{cases} . \tag{2}$$

Suprafeţe cilindrice

Sistemul este, în general, incompatibil. Procedăm astfel:

i) Se aleg trei dintre cele patru ecuaţii (cele mai simple).

ii) Rezolvăm sistemul de la punctul precedent şi obţinem x, y, z, ca funcţii de parametrii generatoarelor, λ şi μ.

iii) Pentru ca sistemul format din cele patru ecuaţii să fie compatibil, soluţia obţinută la punctul precedent trebuie să verifice şi cea de-a patra ecuatie. Impunând aceasta, obţinem o condiţie de tipul

$$\varphi(\lambda, \mu) = 0, \tag{3}$$

unde $\varphi(\lambda, \mu)$ este membrul stâng al ultimei ecuaţii, în care s-au înlocuit x, y, z cu expresiile lor în funcţie de λ şi μ.

iv) Se exprimă λ şi μ în funcţie de x, y, z din ecuaţiile generatoarelor şi se înlocuiesc în condiţia de compatibilitate (3). Ecuaţia care se obţine,

$$\varphi\left(P_1(x, y, z), P_2(x, y, z)\right) = 0, \tag{4}$$

este ecuaţia suprafeţei cilindrice căutate.

Suprafeţe cilindrice
Exemplu

Vom scrie ecuaţia suprafeţei cilindrice ale cărei generatoare sunt paralele cu dreapta de ecuaţii

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{-1}$$

şi se sprijină pe hiperbola echilateră

$$xy=a^2,\ z=0.$$

Începem prin a scrie directoarea ca intersecţie de două plane. Un calcul simplu ne conduce la

$$\begin{cases} P_1(x,y,z)\equiv 3x-2y-3=0 \\ P_2(x,y,z)\equiv y+3z+3=0 \end{cases}.$$

Suprafeţe cilindrice

Exemplu

Prin urmare, ecuaţiile generatoarelor vor fi

$$\begin{cases} 3x - 2y - 3 = \lambda \\ y + 3z + 3 = \mu \end{cases}.$$

Condiţia ca generatoarele să intersecteze curba directoare se traduce, prin urmare, prin sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} 3x - 2y - 3 = \lambda \\ y + 3z + 3 = \mu \\ z = 0 \\ xy = a^2 \end{cases}.$$

Din primele trei ecuaţii, obţinem imediat că

$$\begin{cases} x = \dfrac{\lambda + 2\mu - 3}{3} \\ y = \mu - 3 \\ z = 0 \end{cases}.$$

Din cea de-a patra ecuaţie obţinem, înlocuind,

$$\varphi(\lambda, \mu) \equiv \frac{1}{3}(\lambda + 2\mu - 3)(\mu - 3) - a^2 = 0. \tag{5}$$

Pe de altă parte, din ecuaţiile generatoarelor,

$$\begin{cases} \lambda = 3x - 2y - 3 \\ \mu = y + 3z + 3 \end{cases}.$$

Suprafeţe cilindrice
Exemplu

Înlocuind în condiţia de compatibilitate de mai sus, obţinem:

$$(x + 2z)(y + 3z) - a^2 = 0,$$

care este ecuaţia suprafeţei cilindrice.

Suprafeţe cilindrice

Alt exemplu

Pentru a ilustra şi alte modalităţi de a descrie o suprafaţă cilindrică, vom determina ecuaţia suprafeţei cilindrice circumscrise sferei

$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=25,$$

având generatoarele paralele cu o dreaptă Δ de vector director $(-2,4,5)$.
Vom rezolva problema aceasta prin două metode diferite. Prima soluţie se bazează pe reducerea problemei la o problemă de tipul celei precedente. În acest scop, trebuie să găsim, mai întâi, curba directoare a suprafeţei. Din considerente geometrice, este clar că această curbă este un cerc mare al sferei, situat într-un plan perpendicular pe generatoare. Cum centrul sferei este punctul $C(1,2,3)$, ecuaţia acestui plan este

$$-2(x-1)+4(y-2)+5(z-3)=0,$$

Suprafeţe cilindrice

Alt exemplu

sau

$$-2x + 4y + 5z - 21 = 0.$$

Putem considera că directoarea Δ trece prin origine, deci are ecuaţiile

$$\frac{x}{-2} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5}$$

sau

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 5x + 2z = 0 \end{cases} .$$

Aşadar, ecuaţiile generatoarelor sunt

$$\begin{cases} 2x + y = \lambda \\ 5x + 2z = \mu \end{cases} . \tag{6}$$

Condiţia de intersecţie se scrie

$$\begin{cases} 2x + y = \lambda \\ 5x + 2z = \mu \\ -2x + 4y + 5z - 21 = 0 \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 25. \end{cases}.$$

Rezolvând sistemul format din primele trei ecuaţii, obţinem imediat soluţia

$$\begin{cases} x = \dfrac{8\lambda + 5\mu - 42}{45} \\ y = \dfrac{29\lambda - 10\mu + 84}{45} \\ z = \dfrac{-4\lambda + 2\mu + 21}{9} \end{cases}.$$

Suprafeţe cilindrice

Alt exemplu

Înlocuind în ultima ecuaţie, rezultă condiţia de compatibilitate

$$(8\lambda + 5\mu - 87)^2 + (29\lambda - 10\mu - 6)^2 + 25(-4\lambda + 2\mu - 6)^2 = 50625.$$

În fine, dacă în această ecuaţie punem (din ecuaţiile generatoarelor) $\lambda = 2x + y$ şi $\mu = 5x + 2z$, obţinem ecuaţia suprafeţei cilindrice,

$$\begin{aligned}&(41x + 8y + 10z - 87)^2 + (58x + 29y - 20z - 6)^2 + \\ &25(2x - 4y + 4z - 6)^2 = 50625.\end{aligned}$$

Dacă dezvoltăm această ecuaţie, este uşor de văzut că ea este echivalentă cu

$$936 + 174x + 12y + 60z - 41x^2 - 16xy - 20xz - 29y^2 + 40yz - 20z^2 = 0. \tag{7}$$

Suprafeţe cilindrice

Alt exemplu

Pentru cea de-a doua metodă, considerăm, din nou, ecuaţiile (6) ale generatoarelor, obţinute mai devreme. Condiţia de tangenţă din enunţul problemei înseamnă, în fapt, că sfera şi generatoarelor trebuie să aibă în comun puncte duble. Altfel spus, sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} 2x + y = \lambda \\ 5x + 2z = \mu \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 25. \end{cases} \quad .$$

trebuie să aibă o soluţie dublă. Ideea este să exprimăm din primele două ecuaţii două necunoscute în funcţie de a treia şi de parametrii, să înlocuim în ecuaţia sferei, pentru a obţine o ecuaţie de gradul al doilea în raport cu cea de-a treia necunoscută.

Suprafeţe cilindrice

Alt exemplu

Condiţia de tangenţă va însemna, pur şi simplu, că această ecuaţie are rădăcină dublă, adică discriminantul său se anulează. În fine, vom înlocui, ca mai sus, parametrii din ecuaţiile generatoarelor şi vom obţine, pe această cale, ecuaţia suprafeţei cilindrice.
Din primele două ecuaţii, se obţine imediat că

$$\begin{cases} y = \lambda - 2x \\ z = \frac{\mu - 5x}{2} \end{cases} .$$

Înlocuind în ecuaţia sferei, se obţine

$$45x^2 + (-16\lambda + 84 - 10\mu)\, x - 44 + 4\lambda^2 - 16\lambda + \mu^2 - 12\mu = 0.$$

Suprafeţe cilindrice

Alt exemplu

Egalând cu zero discriminantul acestei ecuaţii, obţinem condiţia de compatibilitate

$$-3744 - 48\lambda - 120\mu + 116\lambda^2 - 80\lambda\mu + 20\mu^2 = 0.$$

În fine, substituind în această ecuaţie, din ecuaţiile generatoarelor, $\lambda = 2x + y$ şi $\mu = 5x + 2z$, se obţine, după un calcul simplu, din nou, ecuaţia (7).

Suprafeţe conice

O *suprafaţă conică* este o suprafaţă generată de o familie de drepte (numite *generatoare*) care au un punct comun (numit *vârf*) şi îndeplineşte o condiţie suplimentară. Această condiţie suplimentară este, de regulă, aceea ca generatoarele să întâlnească o curbă dată, numită *curbă generatoare* a suprafeţei conice. Din nou, ca şi în cazul suprafeţelor cilindrice, această condiţie poate fi înlocuită cu alta (de exemplu ca generatoarele să fie tangente unei suprafeţe).

Suprafeţe conice

Metoda de descriere a suprafeţelor conice este, principial, cea folosită şi în cazul suprafeţelor cilindrice:

- se scriu, mai întâi, ecuaţiile unor drepte care pot juca rolul generatoarelor (în cazul nostru, drepte care trec prin vârf). Ecuaţiile acestea vor depinde de doi parametrii, pe moment arbitrari.
- Se pune condiţia ca aceste drepte să verifice condiţia suplimentară, obţinându-se, pe această cale, o relaţie între cei doi parametri.
- În relaţia obţinută la punctul precedent se înlocuiesc parametrii cu expresiile lor în funcţie de x, y, z, obţinute din ecuaţiile generatoarelor. Ecuaţia care se obţine este ecuaţia suprafeţei conice.

Suprafeţe conice

De regulă, vârful este dat fie prin coordonatele sale, fie ca intersecţie de trei plane. Vom considera cel de-al doilea caz, întrucât primul se reduce cu uşurinţă la acesta. Să presupunem, prin urmare, că vârful conului este dat prin intersecţia a trei plane, adică prin sistemul de ecuaţii

$$(V)\begin{cases} P_1 \equiv a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14} = 0 \\ P_2 \equiv a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24} = 0 \\ P_3 \equiv a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34} = 0 \end{cases}, \tag{8}$$

unde, fireşte,

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \neq 0,$$

altminteri sistemul nu ar avea o soluţie unică.

Suprafeţe conice

Condiţia ca o dreaptă să treacă prin vârful conului este uşor de descris geometric, plecând de la descrierea vârfului ca intersecţie de trei plane: *O dreaptă trece prin vârful conului dacă şi numai dacă ea face parte, simultan, din fascicolul de plane determinat de planele P_1 şi P_3 şi din cel determinat de planele P_2 şi P_3*. Prin urmare, ecuaţiile generatoarelor se pot scrie sub forma

$$(G_{\lambda,\mu}) \begin{cases} P_1 = \lambda P_3 \\ P_2 = \mu P_3 \end{cases}, \tag{9}$$

unde λ şi μ sunt doi parametri reali, deocamdată arbitrari.
Să presupunem, mai departe, că avem o condiţie suplimentară tradusă prin cerinţa ca generatoarele să intersecteze o curbă directoare, dată ca intersecţie de două suprafeţe, prin ecuaţii de forma

$$(C) \begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases}. \tag{10}$$

Suprafeţe conice

Condiţia ca generatoarele să intersecteze directoarea se traduce prin condiţia ca sistemul format din ecuaţiile generatoarelor şi cele ale directoarei, adică sistemul

$$\begin{cases} P_1 = \lambda P_3 \\ P_2 = \mu P_3 \\ F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases}, \tag{11}$$

să fie compatibil.
Strategia pe care o vom urma este similară cu cea din cazul suprafeţelor cilindrice, anume vom adăuga, în prima instanţă, ecuaţiilor generatoarelor cea mai simplă dintre ecuaţiile curbei directoare.

Suprafeţe conice

Rezolvând sistemul rezultat, vom obţine x, y, z ca funcţii de parametrii λ şi μ. Înlocuind în cea de-a patra ecuaţie, vom obţine o relaţie de forma

$$\varphi(\lambda, \mu) = 0, \tag{12}$$

relaţie pe care o vom numi *condiţia de compatibilitate*. Pe de altă parte, din ecuaţiile generatoarelor obţinem expresiile parametrilor λ şi μ în funcţie de variabilele x, y, z:

$$\begin{cases} \lambda = \dfrac{P_1}{P_3} \\ \mu = \dfrac{P_2}{P_3} \end{cases} .$$

Suprafeţe conice

Înlocuind aceste expresii în condiţia de compatibilitate, obţinem ecuaţia suprafeţei conice:

$$\varphi\left(\frac{P_1(x,y,z)}{P_3(x,y,z)},\frac{P_2(x,y,z)}{P_3(x,y,z)}\right)=0 \tag{13}$$

sau, şi mai explicit,

$$\varphi\left(\frac{a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+a_{14}}{a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z+a_{34}},\frac{a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z+a_{24}}{a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z+a_{34}}\right)=0. \tag{14}$$

Suprafeţe conice

Exemplu

Ca exemplu, vom determina ecuaţia unei suprafeţe conice cu vârful în $V(0,0,0)$ şi ale cărei generatoare intersectează curba

$$\begin{cases} x+y+z-1=0 \\ x^2-y=0 \end{cases}.$$

Ecuaţiile vârfului (ca intersecţie de trei plane) sunt, în mod evident:

$$\begin{cases} P_1(x,y,z)\equiv x=0 \\ P_2(x,y,z)\equiv y=0 \\ P_3(x,y,z)\equiv z=0 \end{cases},$$

prin urmare ecuaţiile generatoarelor sunt

$$\begin{cases} x=\lambda z \\ y=\mu z \end{cases}.$$

Pentru a obţine condiţia de compatibilitate, adăugăm, mai întâi, ecuaţiilor generatoarelor prima ecuaţie a curbei directoare şi obţinem sistemul

$$\begin{cases} x = \lambda z \\ y = \mu z \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases} .$$

Se obţine de aici imediat că

$$x = \frac{\lambda}{\lambda + \mu + 1},\ y = \frac{\mu}{\lambda + \mu + 1},\ z = \frac{1}{\lambda + \mu + 1}.$$

Înlocuind în a doua ecuaţie a curbei directoare, găsim relaţia de compatibilitate

$$\frac{\lambda^2}{(\lambda + \mu + 1)^2} - \frac{\mu}{\lambda + \mu + 1} = 0$$

sau

$$\varphi(\lambda, \mu) = \lambda^2 - \mu(\lambda + \mu + 1) = 0.$$

Înlocuind în această relaţie, din ecuaţiile generatoarelor, $\lambda = x/z$, $\mu = y/z$, obţinem

$$\frac{x^2}{z^2} - \frac{y}{z}\left(\frac{x}{z} + \frac{y}{z} + 1\right) = 0$$

sau

$$x^2 - y(x + y + z) = 0.$$

Considerăm acum un exemplu în care condiţia suplimentară nu este intersecţia cu o curbă dată:

O dreaptă G se deplasează prin spaţiu, trecând prin punctul fix $A(3,6,9)$ şi rămânând tot timpul la distanţa fixă 2 faţă de punctul fix $I(1,1,0)$. Să se determine ecuaţia suprafeţei conice descrise de dreapta mobilă.

Generatoarea este chiar dreapta G, ale cărei ecuaţii sunt de forma

$$\begin{cases} x-3=\lambda(z-9), \\ y-6=\mu(z-9). \end{cases}$$

Suprafeţe conice

Alt exemplu

Condiţia suplimentară se poate traduce prin condiţia ca generatoarea să fie tot timpul tangentă la sfera de rază 2, cu centrul în punctul I. Ecuaţia acestei sfere este

$$(x-1)^2+(y-1)^2+z^2=4.$$

Relaţia de compatibilitate se obţine, astfel, impunând ca sistemul

$$\begin{cases} x-3=\lambda(z-9), \\ y-6=\mu(z-9), \\ (x-1)^2+(y-1)^2+z^2=4 \end{cases}$$

să aibă soluţie dublă.

Suprafeţe conice

Alt exemplu

Înlocuind x şi y din primele două ecuaţii în cea de-a treia, obţinem

$$(3+\lambda(z-9)-1)^2+(6+\mu(z-9)-1)^2+z^2-4=0$$

sau

$$(1+\lambda^2+\mu^2)z^2-2(9\lambda^2+9\mu^2-2\lambda-5\mu)z+81\lambda^2+81\mu^2-36\lambda-90\mu+25=0.$$

Dacă punem condiţia ca discriminantul acestei ecuaţii să fie egal cu zero, obţinem condiţia

$$102\lambda^2+81\mu^2-20\lambda\mu-6\lambda-90\mu+25=0.$$

Ecuaţia suprefeţei se obţine înlocuind în condiţia de mai sus

$$\lambda=\frac{x-3}{z-9} \quad \text{şi} \quad \mu=\frac{y-6}{z-9}.$$

Suprafeţe conoide (Conoidul drept cu plan director)

Suprafeţele conoide sunt nişte suprafeţe care au anumite caracteristici în comun cu suprafeţele conice (de unde denumirea). Ele alcătuiesc, de fapt, o clasă mai largă de suprafeţe. Noi ne vom ocupa doar de o subclasă specială. Întrucât, totuşi, nu ne vom referi la suprafeţe conoidale mai generale, vom păstra termenul.

Se numeşte *suprafaţă conoidală* (*conoid drept cu plan director)* o suprafaţă generată de o familie de drepte (numite *generatoare*) care se sprijină pe o dreaptă dată, rămân paralele cu un plan dat şi îndeplinesc o condiţie suplimentară (de regulă, ca şi până acum, această condiţie este ca generatoarele să intersecteze o curbă dată, *curba directoare* a suprafeţei).

Suprafeţe conoide

Metoda de determinare a ecuaţiei suprafeţei conoidale este, principial, aceeaşi de până acum: se scriu mai întâi generatoarele, care vor forma o familie de drepte, dependente de doi parametri, drepte care intersectează dreapta dată şi sunt paralele cu planul dat. Odată scrise ecuaţiile generatoarelor, restul procesului este absolut identic cu cel din cazul suprafeţelor cilindrice şi conice, aşa că nu-l vom mai descrie încă o dată.

Prima problemă pe care trebuie să o înfruntăm este aceea a stabilirii ecuaţiilor generatoarelor. Aşa cum am spus, acestea intersectează dreapta dată şi sunt paralele cu planul dat. Prin urmare, ecuaţiile lor vor fi date ca intersecţie dintre un plan paralel cu planul dat şi un plan care trece prin dreapta dată.

Suprafeţe conoide

Să presupunem că dreapta fixă (directoarea) este dată de ecuaţiile

$$\begin{cases} P_1(x,y,z) \equiv a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14} = 0 \\ P_2(x,y,z) \equiv a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24} = 0 \end{cases}, \tag{15}$$

în timp ce planul director este dat de ecuaţia

$$P(x,y,z) \equiv ax + by + cz + d = 0. \tag{16}$$

Atunci ecuaţiile generatoarelor vor fi de forma

$$\begin{cases} P_1 = \lambda P_2 \\ P = \mu \end{cases}. \tag{17}$$

Într-adevăr, primul plan trece prin dreapta directoare (întrucât este un plan din fascicolul de plane determinat de această dreaptă), în timp ce al doilea plan este paralel cu planul director.

Suprafeţe conoide

Prin urmare, dacă ecuaţiile curbei directoare sunt

$$\begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases},$$

atunci se formează un sistem de ecuaţii din ecuaţiile generatoarelor şi una dintre ecuaţiile acestei curbe, se rezolvă şi se găsesc neconoscutele în funcţie de parametri λ şi μ. Înlocuind în cea de-a doua ecuaţie a curbei, se obţine condiţia de compatibilitate, din nou, sub forma unei relaţii între parametri:

$$\varphi(\lambda,\mu) = 0.$$

Înlocuind parametrii acum, din ecuaţiile generatoarelor, se obţine ecuaţia suprafeţei conoide sub forma

$$\varphi\left(\frac{P_1(x,y,z)}{P_2(x,y,z)}, P(x,y,z)\right) = 0 \tag{18}$$

Suprafeţe conoide

Exemplu

sau, mai explicit,

$$\varphi\left(\frac{a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+a_{14}}{a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z+a_{24}}, ax+by+cz+d\right)=0. \tag{19}$$

Ca exemplu, vom găsi ecuaţia suprafeţei conoide cu plan director ale cărei generatoare sunt paralele cu planul xOy,

$$z=0, \tag{P}$$

se sprijină pe axa Oz

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \tag{D}$$

şi pe curba

$$\begin{cases} y^2-2z+1=0 \\ x^2-2z+1=0. \end{cases} \tag{C}$$

Suprafeţe conoide

Exemplu

Ecuaţiile generatoarelor sunt

$$\begin{cases} x = \lambda y \\ z = \mu. \end{cases} \tag{G}$$

Deoarece ele trebuie să se sprijine pe curba directoare (C), sistemul

$$\begin{cases} x = \lambda y \\ z = \mu \\ y^2 - 2z + 1 = 0 \\ x^2 - 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

trebuie să fie compatibil. Relaţia de compatibilitate între parametrii se obţine eliminând pe x, y, z între ecuaţiile sistemului. Se obţine

$$2\lambda^2\mu - 2\lambda^2 - 2\mu + 1 = 0.$$

Suprafeţe conoide

Exemplu

Ca să obţinem ecuaţia suprafeţei, trebuie să eliminăm pe λ şi μ din sistemul format din ecuaţiile generatoarelor şi condiţia de compatibilitate:

$$\begin{cases} x = \lambda y \\ z = \mu \\ 2\lambda^2\mu - 2\lambda^2 - 2\mu + 1 = 0. \end{cases}$$

Înlocuim $\lambda = \frac{x}{y}$ şi $\mu = z$ în ecuaţia a treia şi eliminăm numitorul. În final, obţinem:

$$2x^2z - 2y^2z - 2x^2 + y^2 = 0.$$

O dreaptă G, paralelă cu planul xOy, se deplasează, sprijinindu-se tot timpul pe axa Oz şi rămânând tangentă sferei de ecuaţie

$$(x-1)^2+(y-1)^2+z^2-1=0.$$

Se cere ecuaţia suprafeţei conoide generate de dreapta G în mişcarea ei.

Este uşor de constatat că ecuaţiile generatoarei sunt

$$x+\lambda y=0, \quad z=\mu.$$

Condiţia de tangenţă înseamnă că generatoarea trebuie să intersecteze sfera în două puncte confundate. Înlocuind ecuaţiile generatoarelor în ecuaţia sferei, obţinem ecuaţia în y

$$(\lambda y+1)^2+(y-1)^2+\mu^2-1=0$$

sau

Suprafeţe conoide

Alt exemplu

$$(1+\lambda^2)y^2 + 2(\lambda - 1)y + \mu^2 + 1 = 0$$

Dacă punem condiţia ca discriminantul ecuaţiei s ă fie egal cu zero, obţinem condiţia de compatibilitate

$$\lambda^2\mu^2 + \mu^2 + 2\lambda = 0.$$

Dacă acum înlocuim în condiţia de compatibilitate $\lambda = -\dfrac{x}{y}$ şi $\mu = z$, obţinem ecuaţia suprafeţei,

$$x^2z^2 + y^2z^2 - 2xy = 0.$$

Suprafeţe de rotaţie

Definiţie

Se numesc *suprafeţe de rotatie* suprafeţele generate de o curbă C care se roteşte, fără alunecare, în jurul unei axe fixe D.

În timpul rotaţiei, un punct oarecare de pe curba C descrie un cerc cu centrul pe axa de rotaţie D, situat într-un plan perpendicular pe axa de rotaţie. Prin urmare, suprafaţa însăşi poate fi privită ca fiind generată de aceste cercuri, numite *paralele*. Avem, mai precis, următoarea teoremă:

Suprafeţe de rotaţie

Teorema

Fie

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} \tag{D}$$

ecuaţiile axei D şi fie

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0 \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases} \tag{C}$$

ecuaţiile curbei C. Ecuaţia suprafeţei de rotaţie este

$$F(\sigma, P) = 0,$$

unde

$$\sigma = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$$
$$P = lx + my + nz.$$

Suprafeţe de rotaţie

Demonstraţie.

Presupunem, ca în enunţ, că curba C este dată ca intersecţie a două suprafeţe:

$$(C)\begin{cases} F_1(x,y,z)=0 \\ F_2(x,y,z)=0. \end{cases} \tag{20}$$

Axa de rotaţie, pe de altă parte, are ecuaţiile:

$$(D)\ \frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}. \tag{21}$$

Cercul generator Γ se obţine ca intersecţie dintre o sferă cu centrul pe axa de rotaţie şi rază variabilă cu un plan variabil perpendicular pe axă. Prin urmare, ecuaţiile sale vor fi: □

Suprafeţe de rotaţie

Demonstraţie.

$$(\Gamma)\quad \begin{cases} (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = \lambda^2 \\ lx + my + nz = \mu. \end{cases} \tag{22}$$

Pentru ca cercul Γ să se sprijine pe curba C, trebuie ca cele două curbe să cel puţin un punct comun, adică sistemul de ecuaţii format din ecuaţiile lor:

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0 \\ F_2(x, y, z) = 0 \\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = \lambda^2 \\ lx + my + nz = \mu \end{cases} \tag{23}$$

să fie compatibil. Condiţia de compatibilitate se obţine eliminând x, y, z între cele patru ecuaţii de mai sus. $\square$

Suprafeţe de rotaţie

Demonstraţie.

Să presupunem că se obţine relaţia:

$$F(\lambda, \mu) = 0. \tag{24}$$

Acum, ca şi în cazul celorlalte suprafeţe generate, ecuaţia suprafeţei se obţine elminând parametrii λ şi μ între ecuaţiile cercului generator şi condiţia de compatibilitate:

$$\begin{cases} x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = \lambda^2 \\ lx + my + nz = \mu \\ F(\lambda, \mu = 0). \end{cases} \tag{25}$$

□

Suprafeţe de rotaţie

Demonstraţie.

λ şi μ se obţin, evident, din primele ecuaţii şi obţinem:

$$F\left(\sqrt{x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}, lx+my+nz\right)=0. \tag{26}$$

$\square$

Suprafeţe de rotaţie

Exemplu

Ca exemplu, vom determina ecuaţia suprafeţei de rotaţie generată de curba

$$(C)\quad \begin{cases} x^2 - 2y^2 + z^2 - 5 = 0 \\ x + z + 3 = 0 \end{cases}$$

în rotirea ei în jurul axei

$$x = y = z.$$

Ecuaţiile cercului generator sunt

$$(\Gamma)\quad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = \lambda^2 \\ x + y + z = \mu. \end{cases}$$

Suprafeţe de rotaţie

Exemplu

Prin urmare, condiţia de compatibilitate se obţine eliminând x, y, z din sistemul

$$\begin{cases} x^2 - 2y^2 + z^2 - 5 = 0 \\ x + z + 3 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = \lambda^2 \\ x + y + z = \mu. \end{cases}$$

Se obţine cu uşurinţă:

$$\lambda^2 - 3(\mu - 3)^2 - 5 = 0.$$

În fine, ecuaţia suprafeţei se obţine eliminând parametrii λ şi μ din sistemul format din ecuaţiile cercului generator şi relaţia de legătură, adică:

Suprafeţe de rotaţie
Exemplu

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = \lambda^2 \\ x + y + z = \mu \\ \lambda^2 - 3(\mu - 3)^2 - 5 = 0. \end{cases}$$

Se obţine, imediat,

$$x^2 + y^2 + z^2 - 3(x + y + z - 3)^2 - 5 = 0.$$