Conice pe ecuaţia canonică

Paul A. Blaga

Universitatea “Babeş-Bolyai”

27 martie 2022

Definiţie

Se numeşte *elipsă* locul geometric al punctelor din plan pentru care suma distanţelor de la ele până la două puncte fixe F_1 şi F_2, numite *focare* este constantă, egală cu $2a$, presupunându-se că distanţa dintre cele două focare este $2c$, unde c este un număr real pozitiv sau nul, verificând inegalitatea $c < a$.

- Dacă focarele sunt confundate, elipsa este un cerc.
- Pentru a deduce ecuaţia elipsei, construim un sistem de coordonate ortonormat în plan în modul următor.
- Alegem ca origine mijlocul segmentului F_1F_2 şi alegem ca axă Ox dreapta F_1F_2 orientată astfel încât F_2 să aibă abscisă pozitivă. Prin urmare, focarele vor avea coordonatele $F_1(-c, 0)$ şi $F_2(c, 0)$.

- Axa Oy se alege astfel încât să se completeze un sistem ortonormat drept (deci, în particular, ca dreaptă, această axă nu este altceva decât mediatoarea segmentului F_1F_2).
- Dacă cumva elipsa este un cerc (adică $c = 0$), atunci orice sistem de coordonate drept ortonormat, cu originea în centrul cercului, va satisface necesităţile noastre.
- Fie $M(x, y)$ un punct oarecare al elipsei. Atunci avem, pe de-o parte,

$$F_1M = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \quad F_2M = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}. \tag{1}$$

- Pe de altă parte, din definiţia elipsei, trebuie să avem

$$F_1M + F_2M = 2a. \tag{2}$$

Elipsa
Definiţie şi ecuaţie canonică

- Combinând aceste două ecuaţii, obţinem:
$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a. \tag{3}$$
Aceasta este, de fapt, ecuaţia elipsei, întrucât punctele elipsei, şi numai ele, verifică această ecuaţie.

Vom stabili acum o altă formă, mai atractivă, pentru ecuaţia (3) a elipsei.

- Trecem ultimul termen din ecuaţie în membrul drept şi ridicăm la pătrat.
- După reducerea termenilor asemnea, obţinem:
$$a\sqrt{(x-x)^2+y^2}=a^2-cx.$$
- Ridicând din nou la pătrat şi regrupând termenii, obţinem:
$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$$

sau, încă,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1. \tag{4}$$

- Introducem acum o nouă cantitate,

$$b = \sqrt{a^2 - b^2};$$

conform ipotezelor noastre, această cantitate este reală. Avem, prin urmare,

$$b^2 = a^2 - c^2, \tag{5}$$

prin urmare ecuaţia (4) devine

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{6}$$

- Am demonstrat până acum că fiecare punct al elipsei verifică ecuaţia (6).
- Vom arăta acum că şi afirmaţia inversă este adevărată, în sensul că orice punct $M(x, y)$ ale cărui coordonate verifică ecuaţia (6), este un punct al elipsei, adică verifică ecuaţia (2).
- Din ecuaţia (6), obţinem

$$y^2 = b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right).$$

- Utilizând această relaţie şi egalitatea (5), obţinem

$$F_1M = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + 2cx + c^2 + b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2} =$$
$$= \sqrt{\frac{c^2}{a^2}x^2 + 2cx + a^2} + \sqrt{\left(\frac{c}{a} + a\right)^2} = \left|a + \frac{c}{a}x\right|.$$

- Cum, în virtutea relaţiei (6), $|x| \leq a$ şi, în plus, $c < a$, avem
$$F_1M = a + \frac{c}{a}x. \tag{7}$$
- Exact la fel se obţine
$$F_1M = a - \frac{c}{a}x. \tag{8}$$
- Însumând ultimele două egalităţi, obţinem egalitatea (2). Astfel, relaţia (6) este ecuaţia elipsei. Ea se numeşte *ecuaţia canonică a elipsei*.

Elipsa

Definiţie şi ecuaţie canonică

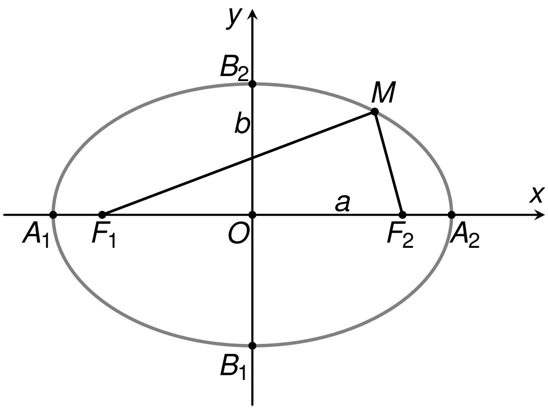


Figura: Elipsa

Plecând de la ecuaţia (6), vom studia forma elipsei.

- Coordonatele punctelor de pe elipsă sunt supuse restricţiilor $|x| \leq a$ şi $|y| \leq b$. Prin urmare, elipsa este mărginită de un dreptunghi de laturi $2a$ şi $2b$, cu laturile paralele cu axele şi cu centrul în origine.
- Mai departe, remarcăm că în ecuaţia (6) a elipsei apar numai puteri pare ale coordonatelor, de aceea elipsa este simetrică faţă de axe şi, deci, şi faţă de origine. Aceasta înseamnă că dacă punctul $M(x, y)$ aparţine elipsei, atunci acelaşi lucru este valabil pentru punctele $M(-x, y)$, $M(x, -y)$ şi $M(-x, -y)$.

Prin urmare, pentru a determina forma elipsei, este suficient să considerăm porţiunea ei cuprinsă în primul cadran al axelor de coordonate, iar în celelalte cadrane construcţia ei se poate face prin simetrie.

Plecând de la ecuaţia (6), vom studia forma elipsei. Pentru primul cadran, din ecuaţia (6) se obţine:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}. \tag{9}$$

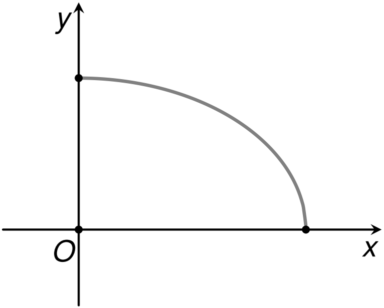


Figura: Porţiunea din elipsă cuprinsă în cadranul I

Plecând de la ecuaţia (6), vom studia forma elipsei. Prin urmare, avem de studiat graficul funcţiei

$$f : [0, a] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Este cât se poate de clar că nu avem de studiat limite la $\pm\infty$ sau asimptote, deci începem prin a calcula derivatele. Avem:

$$f'(x) = \frac{-bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}}$$

În ceea ce priveşte derivata a doua, se obţine:

$$f''(x) = \frac{ab}{(x - a)(x + a)\sqrt{a^2 - x^2}}$$

Plecând de la ecuaţia (6), vom studia forma elipsei.

- Se observă imediat că ambele derivate sunt negative, deci funcţia este strict descrescăyoare şi concavă pe întreg domeniul de definiţie, ceea ce înseamnă că graficul său este cel din figura 2.
- Axele de simetrie ale elipsei (axele Ox şi Oy), se numesc, pur şi simplu, *axe*, iar centrul de simetrie (originea coordonatelor), se numeşte *centrul elipsei*.
- Punctele A_1, A_2, B_1 şi B_2, în care axele se intersectează cu elipsa, se numesc *vârfuri* ale elipsei.
- Termenul de *semiaxe* se foloseşte atât pentru segmentele OA_1, OA_2, OB_1 şi OB_2, cât şi pentru lungimile lor, a şi b.
- În ipotezele noastre, când focarele elipsei sunt pe axa Ox, din relaţia (5) rezultă că $a > b$. În acest caz, a se numeşte *semiaxă mare*, iar b – *semiaxă mică*.

- Totuşi, ecuaţia (6) are sens şi în cazul în care $a < b$; aceasta va fi, însă, ecuaţia unei elipse care are focarele pe axa Oy, în loc de Ox, iar semiaxa mare va fi egală cu b.
- Un al treilea caz posibil este cel în care $a = b$. În acest caz, ecuaţia (6) se transformă în

$$x^2 + y^2 = a^2. \tag{10}$$

- În cele ce urmează vom privi cercul ca un caz particular de elipsă, în care cele două semiaxe sunt egale, iar focarele coincid cu centrul cercului.

Se numeşte *excentricitate* a elipsei numărul real

$$\varepsilon = c/a. \tag{11}$$

Întrucât, din ipoteza făcută iniţial, $c < a$, rezultă că $\varepsilon < 1$. În cazul cercului, focarele coincid, de aceea $c = 0$, iar excentricitatea este $\varepsilon = 0$.
Rescriem egalitatea (11) sub forma

$$\varepsilon = \sqrt{1 - (b/a)^2}.$$

De aici se observă că excentricitatea determină forma elipsei: cu cât ε este mai aproape de zero, cu atât elipsa este mai apropiată de un cerc; dacă excentricitatea elipsei creşte, elipsa devine tot mai turtită.

Vom studia numărul de puncte de intersecţie pe care îl poate avea o dreaptă cu o elipsă. Vom presupune, mai întâi, că dreapta nu este paralelă cu axa Oy. Atunci ecuaţia sa se poate scrie cu ajutorul pantei:

$$y = kx + m. \tag{12}$$

Pentru a determina punctele de intersecţie ale acestei drepte cu elipsa (6), înlocuim expresia lui y din formula (12) în ecuaţia (6). Obţinem:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(kx+m)^2}{b^2} = 1$$

sau

$$(a^2k^2 + b^2)x^2 + 2a^2kmx + a^2(m^2 - b^2) = 0.$$

Această ecuaţie ne dă abscisele punctelor de intersecţie. Întrucât este o ecuaţie de gradul doi, vor fi întotdeauna două puncte de intersecţie (distincte, confundate sau imaginare).

Discriminantul ecuaţiei este:

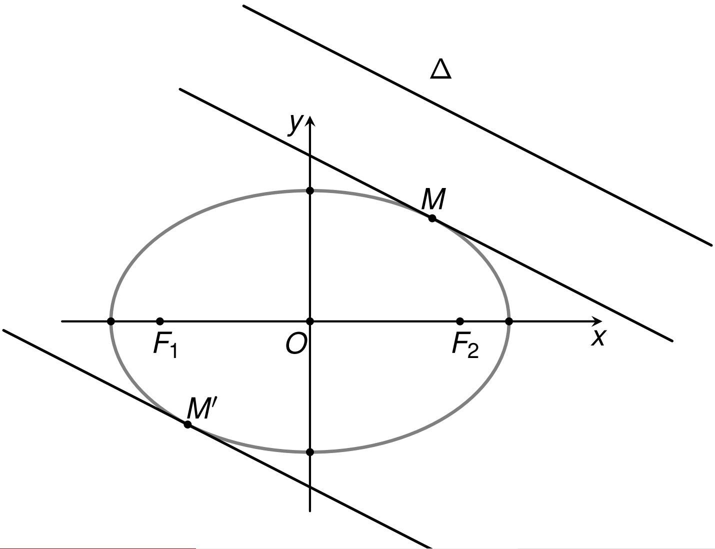
$$\Delta = 4a^4k^2m^2 - 4a^2(m^2 - b^2)(a^2k^2 + b^2) = 4a^4k^2m^2 - 4a^4k^2m^2 - \\ - 4a^2m^2b^2 + 4a^2b^2k^2 + 4a^2b^4 = 4a^2b^2(a^2k^2 + b^2 - m^2).$$

Semnul discriminantului este dat de factorul $s = a^2k^2 + b^2 - m^2$. Putem avea, deci, următoarele situaţii:

1. dacă $-\sqrt{a^2k^2 + b^2} < m < \sqrt{a^2k^2 + b^2}$, atunci $\Delta > 0$, iar dreapta şi elipsa au două puncte comune;
2. dacă $m = \pm\sqrt{a^2k^2 + b^2}$, atunci $\Delta = 0$, adică dreapta are un singur punct comun cu elipsa (dreapta este tangentă elipsei);
3. dacă $m \in \left(-\infty, -\sqrt{a^2k^2 + b^2}\right) \cup \left(\sqrt{a^2k^2 + b^2}, \infty\right)$, atunci $\Delta < 0$, iar dreapta şi elipsa nu au puncte comune.

Elipsa

Intersecţia cu o dreaptă. Tangenta la o elipsă



Prin urmare, pentru orice pantă k există două tangente la elipsă, având această pantă, anume

$$y = kx \pm \sqrt{a^2k^2 + b^2}. \tag{13}$$

Dacă dreapta este paralelă cu axa Oy, atunci ecuaţia sa este de forma $x = h$. Dacă înlocuim în ecuaţia elipsei, obţinem

$$\frac{h^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

de unde

$$y^2 = b^2\left(1 - \frac{h^2}{a^2}\right).$$

De aici se observă imediat că dreapta $x = h$ intersectează elipsa în două puncte distincte dacă $h \in (-a, a)$, este tangentă elipsei dacă $h = \pm a$ şi nu intersectează elipsa dacă $h \in (-\infty, -a) \cup (a, \infty)$.

Elipsa

Intersecţia cu o dreaptă. Tangenta la o elipsă

Problema tangentei la o elipsă se poate aborda şi într-un alt mod. Anume, presupunem că vrem să determinăm ecuaţia tangentei într-un punct dat (x_0, y_0) al elipsei. Pentru a fixa ideile, presupunem că x_0 şi y_0 sunt ambele pozitive. Atunci ele se află pe o ramură a elipsei care poate fi descrisă prin ecuaţia

$$y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

Pentru a scrie ecuaţia tangentei, avem nevoie, mai întâi, de derivata lui y în x_0:

$$y'(x_0) = b\frac{-\frac{x_0}{a^2}}{\sqrt{1 - \frac{x_0^2}{a^2}}} = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x_0}{y_0},$$

unde am ţinut cont de faptul că punctul (x_0, y_0) verifică ecuaţia elipsei.

Prin urmare, după cum se ştie din analiză, ecuaţia tangentei este

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0) = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x_0}{y_0}x + \frac{b^2}{y_0}\frac{x_0^2}{a^2}.$$

Dacă înmulţim această ecuaţie cu $\frac{y_0}{b^2}$ obţinem

$$\frac{yy_0}{b^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = -\frac{xx_0}{a^2} + \frac{x_0^2}{a^2}$$

sau, folosind din nou ecuaţia elipsei (pentru (x_0, y_0)),

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1,$$

adică ecuaţia tangentei într-un punct al unei elipse se poate scrie prin dedublare. Acelaşi rezultat se obţine, fără dificultate, şi dacă punctul de pe elipsă se află pe una dintre celelalte ramuri.

Vom descrie, în cele ce urmează, o altă metodă de a obţine ecuaţia tangentei într-un punct al unei elipse. Fie, prin urmare, $M_0(x_0, y_0)$ un punct al elipsei

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Ecuaţiile parametrice ale unei drepte care trece prin M_0 vor fi:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt. \end{cases}$$

Dacă înlocuim în ecuaţia elipsei, obţinem:

$$b^2(x_0^2 + 2tlx_0 + l^2t^2) + a^2(y_0^2 + 2tmy_0 + m^2t^2) - a^2b^2 = 0$$

sau, grupând după puterile lui t,

$$t^2\left(b^2l^2+a^2m^2\right)+2t(a^2lx_0+b^2my_0)+b^2x_0^2+a^2y_0^2-a^2b^2=0.$$

Cum punctul M_0 este pe elipsă, termenul liber al ecuaţiei trebuie să fie egal cu zero, deci ecuaţia se reduce la

$$t^2\left(b^2l^2+a^2m^2\right)+2t(b^2lx_0+a^2my_0)=0.$$

Pentru ca dreapta să fie tangentă elipsei, este necesar ca ecuaţia de mai sus să aibă rădăcină dublă. Aceasta se poate întâmpla dacă şi numai dacă termenul de gradul întâi dispare, adică dacă avem

$$b^2lx_0+a^2my_0=0.$$

Dacă vectorul director al dreptei este $\mathbf{v}(l,m)$, ecuaţia de mai sus înseamnă că vectorul $\mathbf{n}(b^2x_0,a^2y_0)$ este perpendicular pe dreaptă, adică acest vector este vectorul perpendicular pe tangentă.

De aici rezultă că ecuaţia tangentei se poate scrie sub forma

$$b^2 x_0(x - x_0) + a^2 y_0(y - y_0) = 0$$

sau

$$b^2 x_0 x + a^2 y_0 y - b^2 x_0^2 - a^2 y_0^2 = 0.$$

Cum, din nou, punctul M_0 este pe elipsă, termenul liber este $-a^2 b^2$, deci ecuaţia tangentei se scrie

$$b^2 x_0 x + a^2 y_0 y - a^2 b^2 = 0$$

sau

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1. \tag{14}$$

În fine, vom discuta cazul în care ni se cere să determinăm tangentele duse dintr-un punct la o elipsă. Plecăm, din nou, de la ecuaţia canonică a elipsei,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

După cum am văzut mai sus, ecuaţia unei tangente neverticale la această elipsă se poate scrie sub forma

$$y = kx + \sqrt{a^2k^2 + b^2}.$$

Cerem ca această tangentă să treacă printr-un punct $M(x_1, y_1)$. Asta înseamnă că

$$y_1 = kx_1 + \sqrt{a^2k^2 + b^2}$$

sau

$$(y_1 - kx_1)^2 - a^2k^2 - b^2 = 0$$

sau, încă,

$$k^2(x_1^2 - a^2) - 2kx_1y_1 + y_1^2 - b^2 = 0. \tag{15}$$

Discriminantul ecuaţiei (15) este

$$\Delta = 4\left(b^2x_1^2 + a^2y_1^2 - a^2b^2\right). \tag{16}$$

Pentru a avea două tangente prin punctul M trebuie să avem $\Delta > 0$, adică

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - 1 > 0. \tag{17}$$

Aceasta înseamnă că punctul M este exterior elipsei. Pantele celor două tangente vor fi

$$k_{1,2} = \frac{-x_1y_1 \pm \sqrt{b^2x_1^2 + a^2y_1^2 - a^2b^2}}{x_1^2 - a^2}.$$

Pentru a avea o singură tangentă, trebuie să avem $\Delta = 0$, adică

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - 1 = 0. \tag{18}$$

De data asta, punctul trebuie să fie pe elipsă, iar panta unicei tangente va fi

$$k = \frac{-x_1 y_1}{x_1^2 - a^2}.$$

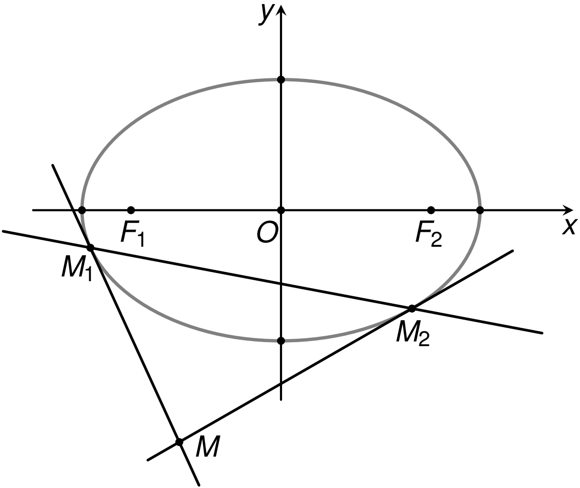
Este uşor de constatat că, în acest caz, ecuaţia tangentei este chiar acea care se obţine prin dedublare, adică

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} - 1 = 0.$$

În fine, nu avem tangente dacă $\Delta < 0$, adică dacă

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - 1 < 0 \tag{19}$$

(punctul M este în interiorul elipsei).



Examinăm acum cazul în care una dintre tangentele duse din punctul M este verticală. Este clar, atunci, că această tangentă trebuie să aibă ecuaţia

$$x = \pm a.$$

Aşadar, vom avea $M = M(\pm a, y_1)$. Ce-a de-a doua tangentă din M nu poate să fie tot verticală, deci ecuaţia sa trebuie să fie de forma

$$y = kx \pm \sqrt{a^2k^2 + b^2}. \tag{20}$$

Pentru ca tangenta să treacă prin M, trebuie să avem

$$y_1 = \pm ka \pm \sqrt{a^2k^2 + b^2} \tag{21}$$

sau, ridicând la pătrat,

$$(y_1 \mp ka)^2 = a^2k^2 + b^2, \tag{22}$$

adică

$$y_1^2 \mp 2y_1ka + a^2k^2 = a^2k^2 + b^2$$

sau

$$\pm 2y_1ak = y_1^2 - b^2. \tag{23}$$

Dacă $y_1 = 0$, atunci ecuaţia de mai sus (în k) nu are soluţie, ceea ce este normal, pentru că, în acest caz M este unul dintre vârfurile de pe Ox ale elipsei, deci nu există decât o singură tangentă, cea verticală. în caz contrar, din ecuaţia (23) rezultă că

$$k = \pm\frac{y_1^2 - b^2}{2ay_1}, \tag{24}$$

semnul alegându-se în funcţie de vârful prin care trece tangenta verticală.

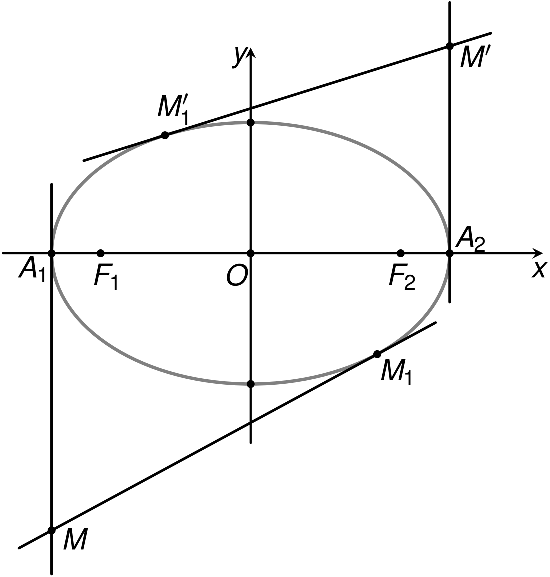


Figura: Tangente la elipsă, cu o tangentă verticală

Considerăm că se dau, în plan, două puncte F_1 şi F_2, distanţa dintre care este egală cu $2c$. Mai alegem un număr real a, care verifică inegalitatea

$$0 < a < c. \tag{25}$$

Definiţie

Se numeşte *hiperbolă* figura geometrică formată din toate punctele din plan pentru care valoarea absolută a diferenţei distanţelor până la punctele fixe F_1 şi F_2 este constantă, egală cu $2a$. Punctele F_1 şi F_2 se numesc *focare* ale hiperbolei.

Este clar acum de ce am impus dubla inegalitate (25): dacă $a = 0$, atunci figura este neinteresantă, întrucât ea se reduce la o dreaptă (mediatoarea segmentului F_1F_2), în timp ce dacă $a > c$, figura este mulţimea vidă.

Vom stabili acum ecuaţia hiperbolei. În acest scop, alegem un reper cartezian în care axa Ox să coincidă cu dreapta F_1F_2, cu sensul de la F_1 înspre F_2. Originea o alegem în mijlocul segmentului F_1F_2. Prin urmare, coordonatele focarelor vor fi $F_1(-c, 0)$ şi $F_2(c, 0)$. Dacă $M(x, y)$ este un punct oarecare al hiperbolei, atunci, în conformitate cu definiţia, avem

$$|F_1M - F_2M| = 2a$$

sau

$$F_1M - F_2M = \pm 2a. \tag{26}$$

Dacă înlocuim în ecuaţia (26) expresiile

$$F_1M = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \quad F_2M = \sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

obţinem

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\pm 2a. \tag{27}$$

Aceasta este ecuaţia hiperbolei. În cele ce urmează, vom obţine o formă mai simplă a ei. Trecem al doilea radical în membrul drept şi ridicăm ambii membrii la pătrat şi obţinem

$$cx-a^2=\pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

Dacă ridicăm din nou la pătrat şi reducem termenii asemenea, obţinem

$$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2)$$

sau

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{c^2-a^2}=1. \tag{28}$$

Introducem acum mărimea

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}.$$

În virtutea inegalităţii (25), ea este reală. Atunci

$$b^2 = c^2 - a^2, \tag{29}$$

iar ecuaţia (28) capătă forma

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{30}$$

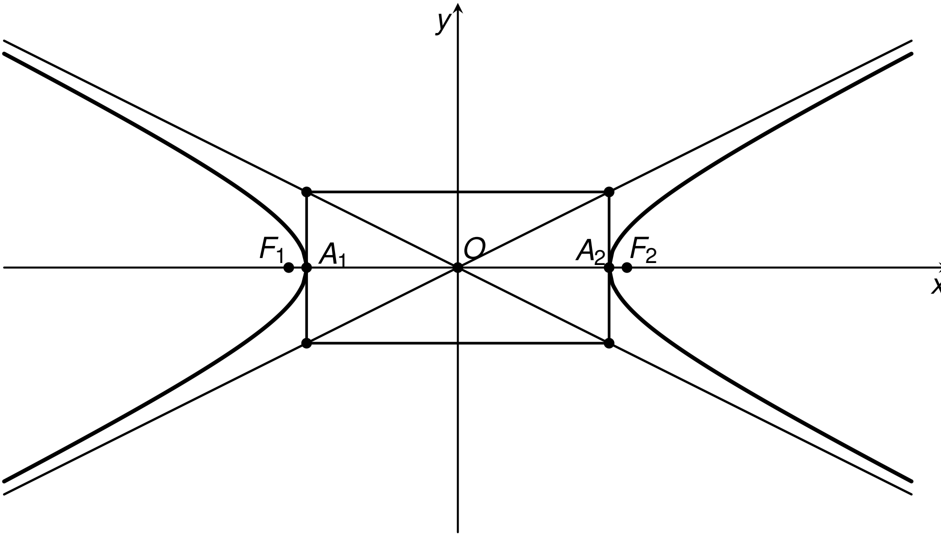


Figura: Hiperbola

Am demonstrat până acum că toate punctele hiperbolei, care verifică, deci, ecuaţia (27), verifică, de asemenea, ecuaţia (30). Vom demonstra, acum, că şi afirmaţia inversă este adevărată. Fie, prin urmare, $M(x, y)$ un punct ce verifică ecuaţia (30). Atunci

$$y^2 = b^2\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right).$$

Folosind această relaţie şi egalitatea (29), obţinem

$$\begin{aligned} F_1M &= \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + 2cx + c^2 + \frac{b^2}{a^2}x^2 - b^2} = \\ &= \sqrt{\frac{c^2}{a^2}x^2 + 2cx + a^2} = \left|\frac{c}{a}x + a\right|. \end{aligned} \tag{31}$$

În mod analog, se obţine

$$F_2M = \left|\frac{c}{a}x - a\right|. \tag{32}$$

Cum din egalitatea (30) rezultă că $|x| \geq a$, iar, în virtutea inegalităţii (25), $c > a$, rezultă că pentru $x \geq a$ formulele (31) şi (32) ne conduc la

$$F_1M = \frac{c}{a}x + a, \quad F_2M = \frac{c}{a}x - a. \tag{33}$$

Prin urmare,

$$F_1M - F_2M = 2a.$$

Pentru $x \leq -a$ avem

$$F_1M = -\frac{c}{a}x - a, \quad F_2M = -\frac{c}{a}x + a. \tag{34}$$

Prin urmare,

$$F_1M - F_2M = -2a.$$

Aşadar, orice punct care verifică ecuaţia (30) verifică, de asemenea, ecuaţia (26), deci şi ecuaţia (27). Prin urmare, ecuaţia (30) este echivalentă cu ecuaţia hiperbolei. Ea se numeşte *ecuaţia canonică a hiperbolei*.

Din ecuaţia (30) se vede imediat că $|x| \geq a$. Aceasta înseamnă că hiperbola este situată, în întregime, în afara benzii verticale delimitată de dreptele $x = -a$ şi $x = a$.
Ca şi în cazul elipsei, în ecuaţia canonică a hiperbolei intră numai puteri pare ale variabilelor x şi y, ceea ce înseamnă că şi hiperbola are două axe de simetrie (axele de coordonate) şi un centru de simetrie (originea coordonatelor). De aceea, este suficient să studiem forma hiperbolei în primul cadran al axelor de coordonate, întrucât în celelalte trei se poate, apoi, deduce prin simetrie. În acest cadran, se obţine, din ecuaţia (30):

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}, \quad x \geq a. \tag{35}$$

Graficul acestei funcţii, care începe din punctul $A(a, 0)$ este nemărginit la dreapta şi superior. Este uşor de constatat că dreapta

$$y = \frac{b}{a}x \tag{36}$$

este asimptotă oblică la $+\infty$ a acestui grafic. Este, de asemenea, clar, din motive de simetrie, că dreptele

$$y = \pm\frac{b}{a}x$$

sunt, ambele, asimptote oblice la graficul hiperbolei, atât la $+\infty$, cât şi la $-\infty$.
În cazul elipsei, am văzut că există un dreptunghi, cu centrul în origine şi de laturi $2a$, respectiv $2b$, cu laturile paralele cu axele de coordonate, care conţine întreaga elipsă şi care este, de asemenea, tangent elipsei.

Un rol asemănător îl joacă în cazul hiperbolei acelaşi dreptunghi, atâta doar că:

- hiperbola se află în exteriorul dreptunghiului;
- doar două dintre laturile dreptunghiului sunt tangente la elipsă şi
- diagonalele acestui dreptunghi (dreptele lor suport, de fapt) sunt chiar asimptotele hiperbolei.

Hiperbola este o figură alcătuită din două ramuri.

- Semnul “$+$” din egalitatea (26) corespunde ramurii din dreapta, în timp ce semnul “$-$” corespunde ramurii din stânga.
- Centrul de simetrie al hiperbolei se numeşte, pur şi simplu, *centrul* hiperbolei.
- Axele sale de simetrie se numesc *axele hiperbolei*. Mai precis, axa care intersectează hiperbola se numeşte *axă reală*, în timp ce axa ce nu o intersectează se numeşte *axă imaginară*.

- Punctele A_1 şi A_2, în care axa reală intersectează hiperbola se numesc *vârfuri* ale hiperbolei.
- De asemenea, ca şi în cazul elipsei, numerele a şi b se numesc *semiaxe* ale hiperbolei.
- Dacă $a = b$, atunci hiperbola se numeşte *echilateră*.
- E uşor de constatat că în cazul unei hiperbole echilatere asimptotele formează un unghi de 45° cu axa Ox.

Alături de hiperbola (30), se poate considera şi curba de ecuaţie

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{37}$$

Se poate vedea cu uşurinţă că şi această curbă este o hiperbolă, pentru care focarele sunt situate pe axa Oy. Vom spune despre cele două hiperbole (care au aceleaşi axe şi aceleaşi asimptote) că sunt *conjugate*.

Se numeşte *excentricitate* a hiperbolei numărul

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}.$$

Este clar, din însăşi definiţia hiperbolei, că $\varepsilon > 1$. Excentricitatea determină forma dreptunghiului fundamental, deci, în ultimă instanţă, forma hiperbolei. Astfel, cu cât excentricitatea este mai mare, cu atât cele două ramuri ale hiperbolei se apropie mai mult de axa *Oy* şi, cu cât excentricitatea este mai apropiată de 1, cu atât hiperbola se apropie mai tare de axa *Ox*.

Analog cu ceea ce am făcut în cazul elipsei, ne vom ocupa acum de problema intersecţiei dintre o hiperbolă dată de ecuaţia implicită (30) şi o dreaptă.
Să presupunem, mai întâi, că dreapta nu este orizontală. Atunci ecuaţia ei se poate scrie cu ajutorul pantei, adică

$$y = kx + m. \tag{38}$$

Dacă înlocuim pe y din formula de mai sus în ecuaţia (30) a hiperbolei, obţinem ecuaţia care ne dă abscisa (sau abscisele) punctului (sau punctelor) de intersecţie:

$$(b^2 - a^2k^2)x^2 - 2a^2kmx - a^2(b^2 + m^2) = 0. \tag{39}$$

Această ecuaţie se numeşte *ecuaţia de intersecţie*.

Dacă $b^2 - a^2k^2 \neq 0$, atunci ecuaţia (39) este de gradul doi, deci pentru a determina numărul rădăcinilor sale reale trebuie să facem apel la discriminantul ecuaţiei. Avem

$$\Delta = -4\, a^2b^2\left(-b^2 + a^2k^2 - m^2\right). \tag{40}$$

Pentru ca dreapta să fie tangentă la hiperbolă, trebuie să avem $\Delta = 0$, adică

$$a^2k^2 = b^2 + m^2.$$

Este clar că, întrucât $b \neq 0$, vom avea, întotdeauna, două tangente, pentru un m dat.

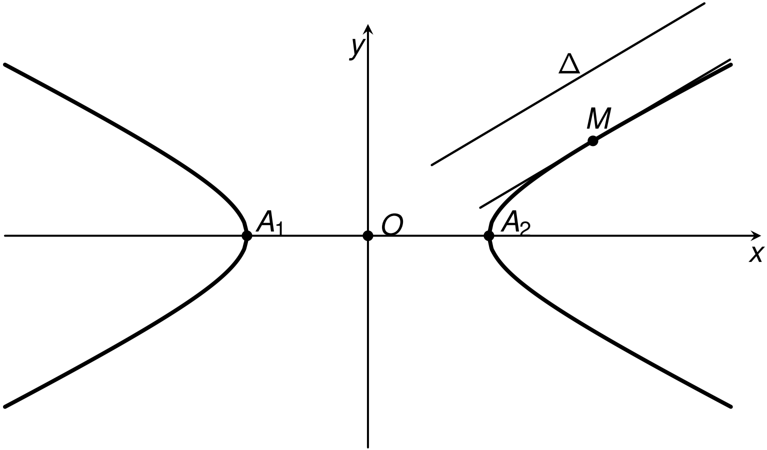


Figura: Tangenta la o hiperbolă, de direcţie dată

Dacă $\Delta > 0$, adică dacă

$$a^2k^2 < b^2 + m^2,$$

atunci dreapta şi hiperbola vor avea două puncte în comun.
Dacă $\Delta < 0$, adică dacă

$$a^2k^2 > b^2 + m^2,$$

atunci dreapta şi hiperbola nu vor avea puncte în comun.
Dacă, pe de altă parte, $b^2 - a^2k^2 = 0$, atunci sunt posibile două situaţii:

1. $m = 0$;
2. $m \neq 0$.

În prima situaţie, avem două drepte, de pante $k = \pm b/a$, care trec prin origine. Este clar că aceste două drepte nu sunt altceva decât asimptotele hiperbolei, despre care ştim, deja, că nu au puncte comune cu hiperbola.
În ce-a de-a doua situaţie, avem de-a face cu drepte care sunt paralele cu asimptotele hiperbolei, aşadar ele intersectează hiperbola exact într-un punct.

Utilizând exact aceeaşi metodă ca şi în cazul elipsei, se obţine

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

pentru ecuaţia tangentei în punctul $M_0(x_0, y_0)$ al hiperbolei.

Procedăm exact ca şi în cazul elipsei. Începem cu situaţia în care nici una dintre tangentele duse din $M(x_1, y_1)$ nu este verticală. Atunci, după cum am văzut, ecuaţia tangentei este de forma

$$y = kx \pm \sqrt{a^2k^2 - b^2}.$$

Pentru ca tangenta să treacă prin M, trebuie să avem

$$y_1 - kx_1 = \pm\sqrt{a^2k^2 - b^2}$$

sau, ridicând la pătrat,

$$(y_1 - kx_1)^2 = a^2k^2 - b^2.$$

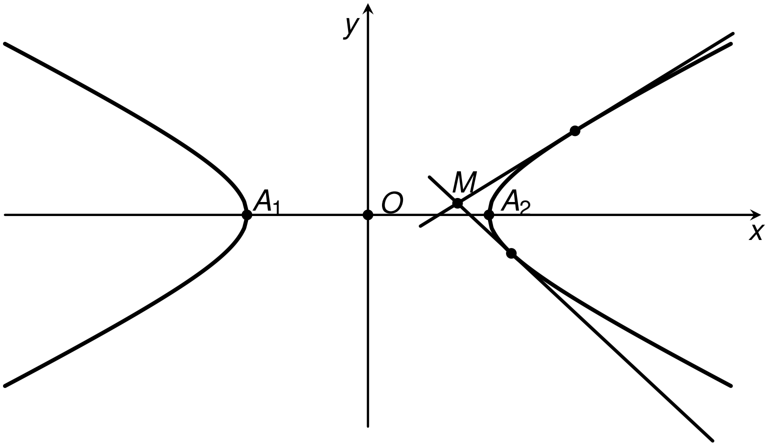


Figura: Tangente la hiperbolă dintr-un punct exterior (tangente neverticale)

Se obţine, astfel, ecuaţia

$$(x_1^2 - a^2)k^2 - 2x_1y_1k + (y_1^2 + b^2) = 0.$$

Aceasta este ecuaţia care ne dă pantele celor două tangente. Discriminantul ei este:

$$\Delta = 4(a^2y_1^2 - b^2x_1^2 + a^2b^2) = -4a^2b^2\left(\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} - 1\right).$$

Se observă imediat că:

- avem două tangente dacă

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} - 1 < 0,$$

  adică punctul este între cele două ramuri ale hiperbolei;

- avem o singură tangentă dacă
$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} - 1 = 0,$$
adică dacă punctul este pe hiperbolă;
- nu avem tangente dacă
$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} - 1 > 0,$$
adică dacă punctul este în interiorul uneia dintre ramurile hiperbolei.

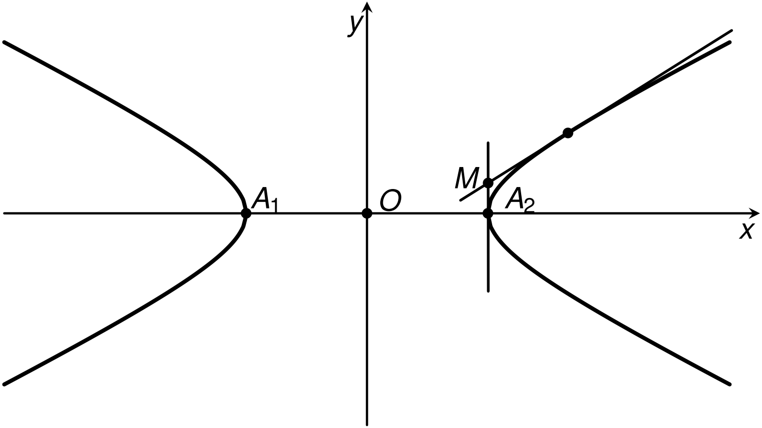


Figura: Tangente la hiperbolă dintr-un punct exterior (o tangentă verticală)

Examinăm acum cazul în care una dintre tangente este verticală, ceea ce înseamnă că are ecuaţia

$$x = \pm a.$$

Aşadar, vom avea $M = M(\pm a, y_1)$. Ce-a de-a doua tangentă din M nu poate să fie tot verticală, deci ecuaţia sa trebuie să fie de forma

$$y = kx \pm \sqrt{a^2k^2 - b^2}. \tag{41}$$

Pentru ca tangenta să treacă prin M, trebuie să avem

$$y_1 = \pm ka \pm \sqrt{a^2k^2 - b^2} \tag{42}$$

sau, ridicând la pătrat,

$$(y_1 \mp ka)^2 = a^2k^2 - b^2 \tag{43}$$

adică

$$y_1^2 \mp 2y_1ka + a^2k^2 = a^2k^2 - b^2$$

sau

$$\pm 2y_1ak = y_1^2 + b^2. \tag{44}$$

Dacă $y_1 = 0$, atunci ecuaţia de mai sus (în k) nu are soluţie, ceea ce este normal, pentru că, în acest caz M este unul dintre vârfurile de pe Ox ale elipsei, deci nu există decât o singură tangentă, cea verticală. în caz contrar, din ecuaţia (23) rezultă că

$$k = \pm \frac{y_1^2 + b^2}{2ay_1}, \tag{45}$$

semnul alegându-se în funcţie de vârful prin care trece tangenta verticală.

Definiţie

Se numeşte *parabolă* locul geometric al punctelor din plan care sunt egal depărtate de o dreaptă fixă Δ, numită *directoare* şi de un punct fix F, numit *focar*.

Fie p distanţa de la punctul F la dreapta Δ. Construim un sistem rectangular de coordonate în plan în modul următor. În calitate de axă Ox alegem perpendiculara coborâtă din punctul F pe dreapta Δ, cu sensul de la directoare înspre focar, în timp ce axa Oy va fi mediatoarea segmentului determinat de F şi piciorul perpendicularei coborâte din F pe Δ, cu sensul ales astfel încât reperul xOy să fie drept, unde O este punctul de intersecţie a celor două axe de coordonate. Aceasta înseamnă că punctul F are coordonatele $(p/2, 0)$, în timp ce ecuaţia dreptei Δ este $x = -p/2$.

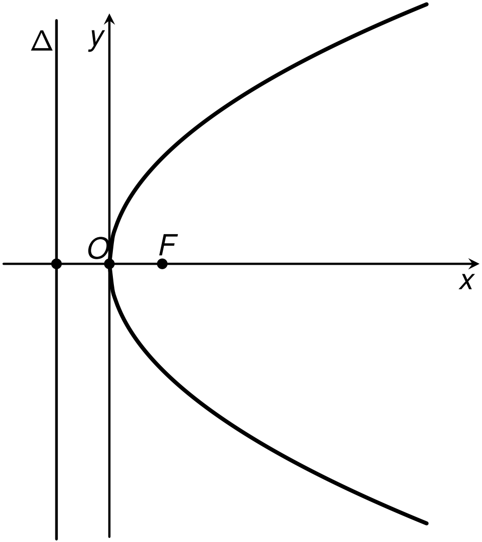


Figura: Parabola

Fie, acum, $M(x, y)$ un punct oarecare al parabolei. Atunci, distanţa de la M la F este egală cu

$$d(M, F) = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2},$$

în timp ce distanţa de la M la Δ este

$$d(M, \Delta) = \left|x + \frac{p}{2}\right|.$$

Aşadar, ecuaţia parabolei este, conform definiţiei,

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right|. \tag{46}$$

Este uşor de constatat că egalitatea (46) poate avea loc doar dacă

$$\left|x + \frac{p}{2}\right| = x + \frac{p}{2},$$

adică dacă
$$x \geq -\frac{p}{2}.$$
ceea ce înseamnă că ecuaţia parabolei, (46) se poate rescrie sub forma
$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=x+\frac{p}{2}. \tag{47}$$
Prin ridicare la pătrat, această ecuaţie este echivalentă (în acest caz particular!!) cu ecuaţia
$$\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2$$
sau, după reducerea termenilor asemenea, cu ecuaţia
$$y^2=2px. \tag{48}$$
Ecuaţia (48) se numeşte *ecuaţia canonică a parabolei de parametru p*.

Remarcăm, înainte de toate, că din ecuaţia canonică (48) rezultă imediat că x poate lua doar valori nenegative, prin urmare parabola dată de această ecuaţie este situată de partea dreaptă a axei Oy. Cum ecuaţia (48) conţine variabila y doar la puterea a doa, rezultă că parabola este simetrică faţă de axa Ox şi, deci, pentru studiul formei, este suficient să examinăm partea din parabolă situată în primul cadran. În acest cadran, ecuaţia parabolei se poate scrie sub forma

$$y = \sqrt{2px}. \tag{49}$$

Dacă se calculează primele două derivate ale lui y, se obţine imediat că

$$y' = \frac{1}{\sqrt{2px}}, \tag{50}$$

respectiv

$$y'' = -\frac{\sqrt{2}p^2}{4(px)^{3/2}}. \tag{51}$$

Aşadar, pe intervalul $(0, \infty)$, $y' > 0$, în timp ce $y'' < 0$. Aceasta înseamnă că funcţia y este strict crescătoare şi concavă pe acest interval. Forma curbei în cadranul al patrulea se obţine din cea din cadranul 1, printr-o reflexie faţă de axa Ox.

Axa de simetrie a parabolei (48), adică axa Ox, se numeşte *axa parabolei*, în timp ce punctul în care parabola intersectează axa (originea, în cazul nostru), se numeşte *vârful parabolei*.

Mărimea p care apare în ecuaţia canonică (48) se numeşte *parametru focal* sau, pur şi simplu, *parametru* al parabolei. Vom indica, şn cele ce urmează, o altă interpretare geometrică a acestui parametru.
Considerăm dreapta care trece prin focarul parabolei şi este perpendiculară pe axa parabolei. Se observă, imediat, că ecuaţia acestei drepte este

$$x = \frac{p}{2}. \tag{52}$$

Fie M_1 şi M_2 punctele de intersecţie dintre această dreaptă şi parabolă. Rezolvând sistemul de ecuaţii format de ecuaţiile (48) şi (52), obţinem $y = \pm p$, prin urmare

$$p = FM_1. \tag{53}$$

Astfel, *parametrul p al parabolei este egal cu lungimea perpendicularei ridicate pe axa parabolei, între focarul parabolei şi punctul în care perpendiculara intersectează parabola*.
Parametrul este cel care defineşte forma şi dimensiunile parabolei.

Observaţie

Alături de ecuaţia (48), tot parabole definesc şi următoarele trei ecuaţii (canonice!):

$$y^2 = -2px, \quad x^2 = 2py, \quad x^2 = -2py. \tag{54}$$

Astfel, prima ecuaţie ne dă o parabolă simetrică faţă de axa Oy în raport cu parabola (48), iar celelalte două parabole se obţin aplicând o rotaţie de 90°, respectiv -90°, parabolei (48), în jurul originii.

Considerăm parabola (48) şi o dreaptă, pe care o considerăm, în prima instanţă, neverticală. Pentru a determina punctele de intersecţie, trebuie să rezolvăm sistemul

$$\begin{cases} y^2 = 2px, \\ y = kx + b. \end{cases}$$

Înlocuind cea de-a doua ecuaţie în prima, obţinem ecuaţia în x:

$$k^2x^2 + 2(kb - p)x + b^2 = 0. \tag{55}$$

Această ecuaţie se numeşte *ecuaţia de intersecţie* dintre parabolă şi dreaptă. Cum ea este o ecuaţie de gradul doi în x, înseamnă că parabola şi dreapta pot avea în comun două puncte distincte, un singur punct (sau două puncte confundate) sau niciun punct, în funcţie de discriminantul ecuaţiei (55).

Un calcul simplu ne arată că discriminantul este dat de

$$\Delta = 4p(p - 2bk). \tag{56}$$

Prin urmare,

(i) Parabola şi dreapta au două puncte distincte în comun dacă

$$\Delta > 0, \quad \text{adică} \quad kb < \frac{p}{2}.$$

(ii) Parabola şi dreapta au două puncte confundate în comun (adică, de fapt, un singur punct) dacă

$$\Delta = 0, \quad \text{adică} \quad kb = \frac{p}{2}.$$

În acest caz parabola şi dreapta sunt tangente. De remarcat că, întrucât parametrul p al parabolei este strict pozitiv, rezultă că (devreme ce $kb \neq 0$):

- tangenta la o parabolă nu poate fi orizontală (mai precis, în cazul general, nu poate fi paralelă cu axa parabolei);
- nu există tangente neverticale la o parabolă care să treacă prin vârful parabolei.

(iii) Parabola şi dreapta nu puncte în comun dacă

$$\Delta < 0, \quad \text{adică} \quad kb > \frac{p}{2}.$$

În particular, orice dreaptă paralelă cu axa parabolei (adică orizontală) intersectează parabola în două puncte distincte; de asemenea, orice dreaptă (neverticaă) care trece prin origine intersectează parabola în două puncte distincte.

Să analizăm, acum, intersecţia dintre parabola (48) şi o dreaptă verticală. În acest caz, avem de rezolvat sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} y^2 = 2px, \\ x = a, \end{cases}$$

care ne conduce la ecuaţia de intersecţie (în y de data aceasta);

$$y^2 - 2ap = 0. \tag{57}$$

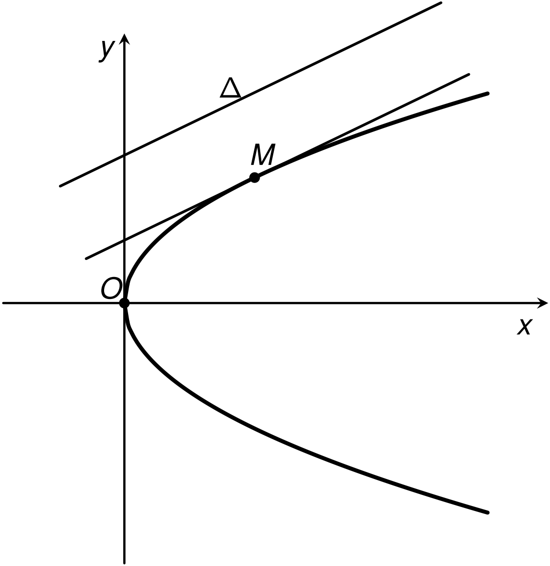


Figura: Tangenta la o parabolă, paralelă cu o direcţie

Cum, din nou, $p > 0$, intersecţia este:

(i) o pereche de puncte distincte, dacă $a > 0$;

(ii) o pereche de puncte confundate (adică un singur punct) dacă $a = 0$. Dreapta este, în acest caz tangetă parabolei. Ea coincide cu axa Oy.

(iii) mulţimea vidă, dacă $a < 0$.

Plecăm, din nou, de la ecuaţia canonică a parabolei şi considerăm o dreaptă care intersectează parabola într-un punct $M_0(x_0, y_0)$. Ecuaţiile parametrice ale dreptei vor fi, deci

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt. \end{cases}$$

Înlocuind în ecuaţia parabolei, obţinem

$$(y_0 + mt)^2 = 2p(x_0 + lt)$$

sau, după ce facem calculele,

$$m^2t^2 + 2t(-pl + my_0) + y_0^2 - 2p_0 = 0.$$

Termenul liber se anulează, deoarece M_0 se află pe parabolă, deci ecuaţia se reduce

$$m^2t^2 + 2t(-pl + my_0) = 0.$$

Parabola

Ecuaţia tangentei într-un punct al parabolei

Condiţia de tangenţă înseamnă, ca şi în cazul celorlalte conice, că ecuaţia de intersecţie trebuie să aibă soluţie dublă, deci, în cazul nostru, coeficientul lui t trebuie să fie zero:

$$-pl + my_0 \equiv \mathbf{v}(l, m) \cdot \mathbf{n}(-p, y_0) = 0,$$

adică vectorul $\mathbf{n}(-p, y_0)$ este vectorul normal al tangentei. Prin urmare, ecuaţia tangentei este:

$$-p(x - x_0) + y_0(y - y_0) = 0$$

sau

$$yy_0 = p(x + x_0),$$

unde am utilizat, din nou, faptul că punctul M_0 aparţine parabolei. Şi de data aceasta, ca şi în cazul conicelor cu centru, spunem că această formă a ecuaţiei parabolei a fost obţinută prin dedublare.

E o mică diferenţă faţă de cazul celorlalte două conice, pentru că aici apare x la puterea întâi. De data asta, regula de dedublare înseamnă că:

- x se înlocuieşte cu $(x + x_0)/2$;
- y^2 se înlocuieşte cu yy_0.

Considerăm un punct $M(x_1, y_1)$. Începem, ca de obicei, cu cazul tangentelor neverticale. Am văzut că ele au ecuaţia de forma

$$y = kx + \frac{p}{2k}.$$

Pentru ca M să se afle pe tangentă, trebuie să avem

$$y_1 = kx_1 + \frac{p}{2k},$$

de unde

$$2x_1k^2 - 2y_1k + p = 0.$$

Discriminantul este

$$\Delta = 4(y_1^2 - 2px_1).$$

Prin urmare:

- avem două tangente dacă $y_1^2 - 2px_1 > 0$ (punctul e în afara parabolei);
- avem o singură tangentă dacă $y_1^2 - 2px_1 = 0$ (punctul este pe parabolă);
- nu avem tangente dacă $y_1^2 - 2px_1 < 0$ (punctul este în interiorul parabolei).

Ecuaţia tangentei este de forma

$$y - y_1 = k(x - x_1),$$

cu k dat de ecuaţia de gradul doi de mai sus.
Să vedem ce se întâmplă dacă una dintre tangente este verticală. Ea trebuie să aibă ecuaţia

$$x = 0.$$

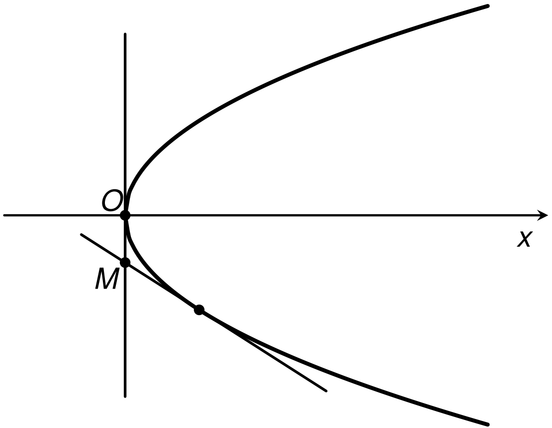


Figura: Tangente la parabolă dintr-un punct exterior (o tangentă verticală)

Căutăm panta celei de-a doua tangente. Remarcăm, mai întâi, că $x_1 = 0$. Ecuaţia tangentei trebuie să fie

$$y = kx + \frac{p}{2k}.$$

Ca să treacă prin M,

$$y_1 = \frac{p}{2k}.$$

Dacă $y_1 = 0$, atunci avem o singură tangentă (cea verticală). În caz contrar,

$$k = \frac{p}{2y_1},$$

adică ecuaţia tangentei este

$$y - y_1 = \frac{p}{2y_1}x.$$