Dreapta în plan

Paul A. Blaga

Universitatea “Babeş-Bolyai”

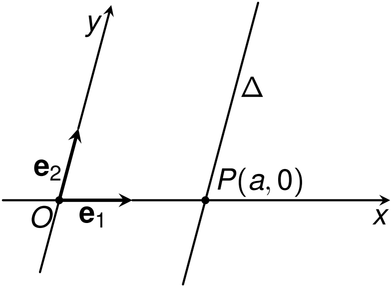
7 martie 2023

Ecuaţia dreptei scrisă cu ajutorul coeficientului unghiular (al pantei)

- Fie Δ o dreaptă situată într-un plan.
- *vector director* al dreptei = vector nenul a cărui direcţie coincide cu direcţia dreptei.
- O dreaptă are o infinitate de vectori directori, dar toţi aceştia sunt coliniari între ei.
- Alegem un sistem de coordonate afin (nu neapărat ortonormat) Oxy. Presupunem, mai întâi, că dreapta este paralelă cu axa Oy şi intersectează axa Ox într-un punct $P(a, 0)$.
- Atunci pentru toate punctele $M(x, y)$ de pe dreapta Δ şi numai pentru ele avem
$$x = a. \tag{1}$$
- Deci (1) *este ecuaţia unei drepte paralele cu axa Oy* şi care intersectează axa Ox în punctul $P(a, 0)$.

Ecuaţia dreptei scrisă cu ajutorul pantei

- Toate dreptele de acest tip au vectori directori de componente $(0, m)$, unde m este un număr real nenul oarecare.



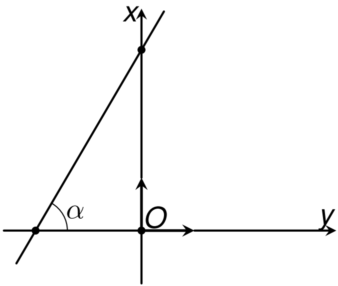
- Dacă dreapta Δ nu este paralelă cu axa Oy, atunci pentru orice vector director $\mathbf{v}(l, m)$ al acestei drepte avem $l \neq 0$, iar raportul $m : l$ are aceeaşi valoare constantă k, numită *coeficient unghiular* al dreptei Δ relativ la sistemul de coordonate ales.

Ecuaţia dreptei scrisă cu ajutorul pantei

Dacă, în particular, se consideră un sistem de coordonate ortogonal $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$, atunci pentru coeficientul unghiular avem, în mod evident,

$$k = \operatorname{tg} \alpha,$$

unde α este unghiul dintre $\mathbf{i}$ şi orice vector director al dreptei Δ. Unghiul α se numeşte *unghiul de înclinare* sau *panta* dreptei Δ relativ la axa Ox.



Ecuaţia dreptei scrisă cu ajutorul pantei

- Fie Δ o dreaptă de coeficient unghiular k şi $P(a, b)$ un punct de pe dreaptă.
- Fie, acum $M(x, y)$ un punct de pe dreaptă, diferit de punctul P.
- Atunci vectorul $\overrightarrow{PM}(x - a, y - b)$ este un vector director al dreptei Δ, prin urmare
$$\frac{y - b}{x - a} = k. \tag{2}$$
- De aici rezultă că
$$y - b = k(x - a). \tag{3}$$
Această ecuaţie este verificată de orice punct de pe dreaptă, inclusiv punctul P.

Ecuaţia dreptei scrisă cu ajutorul pantei

- Demonstrăm acum că, invers, dacă un punct verifică această ecuaţie, atunci el aparţine dreptei.
- Fie $M_1(x_1, y_1) \neq P$ un punct care verifică ecuaţia (3), adică
$$y_1 - b = k(x_1 - a). \tag{4}$$
- Cum $M_1 \neq P$, $x_1 - a \neq 0$, prin urmare, din (2) şi (4), obţinem că
$$\frac{y-b}{x-a} = \frac{y_1 - b}{x_1 - a}.$$
Aşadar, vectorii directori ai dreptelor Δ şi PM_1 sunt coliniari.
- Cum ambele drepte trec prin punctul P, ele coincid, deci $M_1 \in \Delta$. Astfel, ecuaţia (3) descrie o dreaptă care trece prin punctul P şi are coeficientul unghiular Δ.

Ecuaţia dreptei scrisă cu ajutorul pantei

Dacă, în particular, punctul P se află pe axa Oy (ceea ce este posibil, deoarece am presupus că dreapta noastră nu este paralelă cu această axă), adică dacă P are coordonatele $(0, b)$, atunci ecuaţia (3) capătă forma mai simplă:

$$y = kx + b.$$

Dacă dreapta este paralelă cu axa Oy, atunci panta sa este egală cu zero şi, dacă trece prin punctul $P(0, b)$, atunci ecuaţia ei este

$$y = b.$$

Ecuaţia generală a dreptei. Ecuaţia dreptei prin tăieturi

Definiţie

Se numeşte *ecuaţie de gradul întâi* sau *ecuaţie liniară* relativ la necunoscutele x şi y o ecuaţie de forma

$$Ax + By + C = 0, \tag{5}$$

unde $A, B, C \in \mathbb{R}$, iar coeficienţii A şi B nu se anulează simultan.

Teorema

Orice dreaptă în plan poate fi descrisă printr-o ecuaţie de forma (5). Invers, orice ecuaţie de forma (5) reprezintă o dreaptă.

Ecuaţia generală a dreptei. Ecuaţia dreptei prin tăieturi

Demonstraţie.

- Fie $\Delta \nparallel Oy$. Atunci
$$y - kx - b = 0. \tag{6}$$

- Dacă $\Delta \parallel Oy$, atunci
$$x - a = 0. \tag{7}$$

- Considerăm acum o ecuaţie de forma (5) oarecare. Dacă $B \neq 0$, atunci, folosind notaţiile $k = -A/B$, $b = -C/B$, putem aduce ecuaţia la forma (6). Dar ecuaţia (6) reprezintă o dreaptă, de coeficient unghiular k şi care trece prin punctul $P(0, b)$.
- Dacă în ecuaţia (5) $B = 0$, atunci această ecuaţie se poate aduce la forma (7) şi, prin urmare, reprezintă o dreaptă paralelă cu axa Oy.

Ecuaţia generală a dreptei. Ecuaţia dreptei prin tăieturi

Ecuaţia (5) se numeşte *ecuaţia generală a dreptei în plan*. Vom evidenţia acum câteva cazuri particulare, în care unul sau doi coeficienţi ai ecuaţiei generale se anulează.

1. $C = 0$. În acest caz ecuaţia (5) se reduce la
$$Ax + By = 0 \tag{8}$$
şi este ecuaţia unei drepte prin origine.
2. $B = 0, C \neq 0$. În acest caz, ecuaţia (5) capătă forma
$$Ax + C = 0. \tag{9}$$
Este ecuaţia unei drepte verticale, prin punctul $\left(-\dfrac{C}{A}, 0\right)$.
3. $B = 0$, $C = 0$. De data aceasta ecuaţia se reduce la
$$x = 0,$$
iar dreapta este chiar axa Oy.

Ecuaţia generală a dreptei. Ecuaţia dreptei prin tăieturi

4. $A = 0$, $C \neq 0$. Acest caz este analog cu cazul 2) şi conduce la o dreaptă paralelă cu axa Ox, dar care nu coincide cu această axă.
5. $A = 0$, $C = 0$. Acest caz este analog cu cazul 3), iar dreapta în chestiune este axa Ox.

Fie Δ dreapta dată prin ecuaţia sa generală (5). Atunci vectorul $\mathbf{n}(A, B)$ este perpendicular pe dreaptă, în timp ce vectorul $\mathbf{a}(-B, A)$ este un vector director al dreptei.
Într-adevăr, să alegem pe dreapta Δ două puncte distincte $M_1(x_1, y_1)$ şi $M_2(x_2, y_2)$. Avem, prin urmare,

$$Ax_1 + By_1 + C = 0,$$
$$Ax_2 + By_2 + C = 0.$$

Scăzând aceste ecuaţii membru cu membru, obţinem

$$A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) = 0.$$

Ecuaţia generală a dreptei. Ecuaţia dreptei prin tăieturi

Această egalitate înseamnă că vectorul $\mathbf{n}(A, B)$ este perpendicular pe vectorul $\overrightarrow{M_1 M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$, prin urmare este perpendicular şi pe dreapta Δ. Cum vectorul $\mathbf{a}(-B, A)$ este, în mod evident, şi el perpendicular pe vectorul $\mathbf{n}$, rezultă că $\mathbf{a}$ este un vector director al dreptei Δ.

Observaţie

Fie $\mathbf{r}$ vectorul de poziţie al unui punct curent M de pe dreaptă, $\mathbf{n}$ – vectorul normal la dreaptă şi $\mathbf{r}_0$ vectorul de poziţie al punctului dat, M_0, prin care trece dreapta. Atunci

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0. \tag{10}$$

Aceasta este o formă a ecuaţiei dreptei pe care o vom folosi destul de mult, de fiecare dată când dreapta este dată printr-un punct prin care trece şi un vector normal la dreaptă.

Ecuaţia generală a dreptei. Ecuaţia dreptei prin tăieturi

Să presupunem acum că în ecuaţia (5) toţi coeficienţii A, B, C sunt nenuli. Împărţim ecuaţia cu $-C$ şi notăm $a = -C/A$ şi $b = -C/B$. Atunci ecuaţia va deveni

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \tag{11}$$

În mod evident, a şi b sunt lungimile cu semn ale segmentelor pe care dreapta Δ le taie pe axele de coordonate Ox şi Oy (e vorba de segmentele cuprinse între originea coordonatelor şi punctele de intersecţie a dreptei cu axele). Aceste lungimi se numesc *tăieturi* ale dreptei pe axă, de aceea, ecuaţia (11) se numeşte *ecuaţia dreptei* Δ *prin tăieturi*.

Ecuaţia vectorială şi ecuaţiile parametrice ale dreptei

- Orice punct M al planului este unic identificat prin vectorul său de poziţie $\overrightarrow{OM}$, relativ la originea coordonatelor.
- Fie Δ o dreaptă din plan, $\mathbf{r}_0 = \overrightarrow{OM_0}$ vectorul de poziţie al unui punct de pe dreaptă şi $\mathbf{a}$ vectorul director al dreptei.
- Notăm cu $\mathbf{r}$ vectorul de poziţie al unui punct M oarecare din plan.
- Dacă M aparţine dreptei, atunci

  $$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = \overrightarrow{M_0M},$$

  deci $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ este un vector director al dreptei, aşadar este coliniar cu vectorul $\mathbf{a}$. De aici rezultă că există un număr real t astfel încât să avem

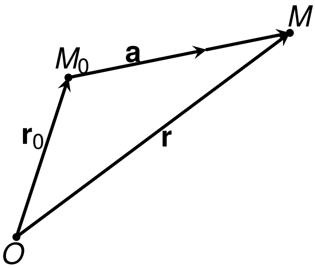
  $$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = t\mathbf{a}. \tag{12}$$

Ecuaţia vectorială şi ecuaţiile parametrice ale dreptei

Invers, dacă t este un număr real oarecare, este clar că punctul M din plan, al cărui vector de poziţie $\mathbf{r}$ verifică ecuaţia (12) este un punct de pe dreaptă. Ecuaţia (12) sau ecuaţia echivalentă cu ea

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{a}, \tag{13}$$

se numeşte *ecuaţia vectorială a dreptei*.



Ecuaţia vectorială şi ecuaţiile parametrice ale dreptei

Să presupunem acum că vectorii sunt daţi prin componentele lor, $\mathbf{a}(l, m)$, $\mathbf{r}_0(x_0, y_0)$ şi $\mathbf{r}(x, y)$. Atunci ecuaţia vectorială (13) este echivalentă cu sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \end{cases} . \tag{14}$$

Ecuaţiile (14) se numesc *ecuaţiile parametrice ale dreptei* Δ. Dacă dreapta Δ nu este paralelă cu nici una dintre axele de coordonate, atunci avem, în mod evident, $l \neq 0$ şi $m \neq 0$ şi atunci sistemul (14) este echivalent cu ecuaţia

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}, \tag{15}$$

care se numeşte *ecuaţia canonică a dreptei în plan*.

Ecuaţia vectorială şi ecuaţiile parametrice ale dreptei

Facem următoarea convenţie: *de fiecare dată când unul dintre numitorii din ecuaţia canonică a drepei se anulează, se consideră că numărătorul acelei fracţii este identic nul*.
Să presupunem, de exemplu, că avem ecuaţia:

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{0}.$$

Atunci, conform convenţiei, această ecuaţie este, de fapt, echivalentă cu ecuaţia $y=2$, adică reprezintă ecuaţia unei drepte paralele cu axa Ox.

Ecuaţia dreptei prin două puncte

Fie acum două puncte $M_0(x_0, y_0)$ şi $M_1(x_1, y_1)$ de pe dreapta Δ. Atunci $\overrightarrow{M_0M_1}(x_1 - x_0, y_1 - y_0)$ este un vector director al dreptei şi, prin urmare,

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} \tag{16}$$

este *ecuaţia dreptei care trece prin punctele M_0 şi M_1*. Precizăm că, în conformitate cu convenţia făcută, punctele M_0 şi M_1 pot să se afle şi pe o dreaptă paralelă cu una dintre axele de coordonate (ceea ce are ca efect faptul că una dintre coordonatele celor două puncte va fi aceeaşi pentru ambele).

Poziţia reciprocă a două drepte în plan

Considerăm două drepte Δ_1 şi Δ_2, date prin ecuaţiile lor generale

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 = 0, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 = 0. \end{cases} \tag{17}$$

A studia poziţia reciprocă a acestor două drepte înseamnă să stabilim numărul punctelor comune ale celor două drepte. Este evident că ne putem afla, în exclusivitate, în una dintre următoarele trei situaţii:

(i) dreptele se intersectează într-un punct;

(ii) dreptele coincid (ceea ce înseamnă că au o infinitate de puncte comune);

(iii) dreptele sunt paralele (deci nu au nici un punct comun).

Este clar că a studia poziţia reciprocă a dreptelor Δ_1 şi Δ_2 revine la investigarea sistemului de ecuaţii liniare (17), alcătuit din ecuaţiile generale ale dreptelor.

Poziţia reciprocă a două drepte în plan

Astfel, cele trei cazuri de mai sus corespund (în aceeaşi ordine), următoarelor cazuri posibile în analiza sistemului de ecuaţii:

(i) Sistemul de ecuaţii are soluţie unică, adică

$$\det \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0, \tag{18}$$

(ii) Sistemul de ecuaţii este compatibil, dar nedeterminat, adică

$$\det \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0 \tag{19}$$

şi

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}, \tag{20}$$

adică cele două ecuaţii (17) descriu aceeaşi dreaptă.

Poziţia reciprocă a două drepte în plan

3. Sistemul de ecuaţii este incompatibil, ceea ce inseamnă că este verificată, din nou, ecuaţia (19) dar, de data aceasta,

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}, \tag{21}$$

altfel spus, rangul matricii sistemului este egal cu 1, în timp ce rangul matricii extinse este egal cu 2. Egalitatea din (21) înseamnă că cele două drepte au vectori directori coliniari, în timp ce neegalitatea înseamnă că cele două drepte nu coincid, prin urmare ele sunt paralele.

Fascicole de drepte concurente

Definiţie

Se numeşte *fascicol de drepte* mulţimea tuturor dreptelor dintr-un plan care trec printr-un punct S al planului, care se numeşte *centrul fascicolului*.

Pentru a specifica un fascicol de drepte în plan este suficient să specificăm centrul fascicolului sau două dintre dreptele sale.
Fie, prin urmare, în plan, două drepte distincte care trec prin punctul $S(x_0, y_0)$, date prin ecuaţiile lor generale,

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \tag{22}$$

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0. \tag{23}$$

Fascicole de drepte concurente

Considerăm acum ecuaţia

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2) = 0, \tag{24}$$

unde α şi β sunt numere reale oarecare, care nu se anulează simultan. Vom demonstra că această ecuaţie determină o dreaptă care trece prin punctul S. Rescriem ecuaţia sub forma

$$(\alpha A_1 + \beta A_2)x + (\alpha B_1 + \beta B_2)y + \alpha C_1 + \beta C_2 = 0. \tag{25}$$

Aici coeficienţii necunoscutelor nu se pot anula simultan. Într-adevăr, să presupunem că

$$\alpha A_1 + \beta A_2 = 0, \quad \alpha B_1 + \beta B_2 = 0 \tag{26}$$

şi, de exemplu, $\alpha \neq 0$.

Fascicole de drepte concurente

Atunci şi $A_2 \neq 0$, pentru că dacă A_2 ar fi zero ar trebui să avem şi $A_1 = 0$, ceea ce ar contrazice ipoteza că dreptele (22) şi (23) se intersectează într-un punct. Analog se demonstrează că $B_2 \neq 0$, iar egalităţile (26) se pot scrie sub forma

$$A_1/A_2 = -\beta/\alpha,\ B_1/B_2 = -\beta/\alpha \quad \Leftrightarrow A_1/A_2 = B_1/B_2,$$

ceea ce nu este posibil, deoarece dreptele (22) şi (23) nu sunt paralele, ci se intersectează într-un punct. Astfel, coeficienţii necunoscutelor din ecuaţia (25) nu se pot anula simultan, de aceea, pentru orice α şi β ce nu se anulează simultan, această ecuaţie reprezintă o dreaptă. Este evident că dreapta (24) trece, într-adevăr, prin punctul $S(x_0, y_0)$.

Fascicole de drepte concurente

Vom arăta acum, invers, că orice dreaptă din fascicol are o ecuaţie de forma (24), cu alte cuvinte, vom demonstra că oricum am alege o dreaptă din fascicolul de drepte din plan care trec prin punctul $S(x_0, y_0)$, putem alege două constante α şi β, cel puţin una nenulă, astfel încât ecuaţia (24) să fie ecuaţia dreptei alese. Fie $M_1(x_1, y_1)$ un punct oarecare din plan, astfel încât $M_1 \neq S$. Este suficient să demonstrăm că putem alege constantele α, β astfel încât dreapta (24) să coincidă cu dreapta SM_1. Această afirmaţie se reduce la cerinţa ca x_1 şi y_1, coordonatele lui M_1, să verifice egalitatea

$$\alpha(A_1x_1 + B_1y_1 + C_1) + \beta(A_2x_1 + B_2y_1 + C_2) = 0. \tag{27}$$

Fascicole de drepte concurente

Cum punctul M_1 nu coincide cu centrul fascicolului, cel puţin una dintre cantităţile din paranteze este diferită de zero. Dacă

$$A_1 x_1 + B_1 y_1 + C_1 \neq 0,$$

atunci egalitatea (27) se poate rescrie sub forma:

$$\alpha = -\frac{A_2 x_1 + B_2 y_1 + C_2}{A_1 x_1 + B_1 y_1 + C_1}\beta.$$

Dacă îi dăm lui β o valoare nenulă arbitrară, obţinem valoarea corespunzătoare a lui α.
Prin urmare, pentru orice α şi β care nu se anulează simultan, ecuaţia (24) reprezintă ecuaţia unei drepte din fascicolul determinat de dreptele (22) şi (23) şi, invers, orice dreaptă a fascicolului se poate scrie sub forma (24).

Fascicole de drepte concurente

Ecuaţia (24) se numeşte *ecuaţia fascicolului de drepte* determinat de dreptele (22) şi (23). Remarcăm că ecuaţia dreptei (22) se obţine din ecuaţia (24) pentru $\beta = 0$ şi un $\alpha \neq 0$ arbitrar, în timp ce ecuaţia dreptei (23) se obţine din ecuaţia (24) pentru $\alpha = 0$ şi un $\beta \neq 0$ arbitrar. Împărţind ambii membrii ai ecuaţiei (24) la α şi notând $\beta/\alpha = \lambda$, ecuaţia obţinută se scrie

$$A_1 x + B_1 y + C_1 + \lambda(A_2 x + B_2 y + C_2) = 0. \tag{28}$$

Pentru orice λ, această ecuaţie corespunde unei drepte din fascicolul de drepte determinat de dreptele (22) şi (23). Invers, orice dreaptă a acestui fascicol, cu excepţia dreptei (23) se poate scrie sub forma (28) pentru un anumit λ.

Dacă se cunosc coordonatele centrului $S(x_0, y_0)$ al fascicolului, atunci ecuaţia fascicolului se poate scrie sub forma foarte simplă

$$\alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) = 0. \tag{29}$$

Distanţa de la un punct la o dreaptă

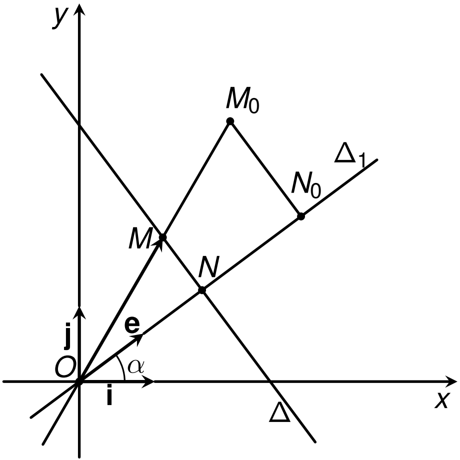
Fie Δ o dreaptă oarecare din plan.

Definiţie

Se numeşte *distanţă* de la un punct M_0 din plan până la dreapta Δ lungimea perpendicularei coborâte din punctul M_0 pe dreapta Δ.

Considerăm acum un versor $\mathbf{e}$ perpendicular pe dreapta Δ. Dacă Δ trece prin originea coordonatelor, atunci în calitate de $\mathbf{e}$ putem lua oricare dintre cei doi versori (opuşi) care sunt perpendiculari pe dreaptă. Dacă dreapta nu trece prin origine, atunci alegem acel versor $\mathbf{e}$, perpendicular pe dreapta Δ, care este orientat dinspre originea coordonatelor către dreaptă.

Distanţa de la un punct la o dreaptă



Distanţa de la un punct la o dreaptă

Notăm cu α unghiul dintre vectorii **i** şi **e**. Atunci

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}(\cos\alpha, \sin\alpha).$$

Fie Δ_1 dreapta care trece prin origine şi care este perpendiculară pe dreaptaΔ. Notăm cu N intersecţia celor două drepte. Notăm, de asemenea, cu p distanţa de la origine până la dreapta Δ, adică lungimea segmentului ON. Desigur, dacă dreapta Δ trece prin origine, atunci $N = O$ şi $p = 0$.
Un punct $M(x, y)$ din plan aparţine dreptei Δ dacă şi numai dacă proiecţia sa ortogonală pe dreapta Δ_1 coincide cu N. Această condiţie este echivalentă cu condiţia:

$$\overrightarrow{OM} \cdot \mathbf{e} = p.$$

Distanţa de la un punct la o dreaptă

Exprimând produsul scalar utilizând componentele vectorilor, obţinem, prin urmare

$$x \cos\alpha + y \sin\alpha - p = 0. \tag{30}$$

- Această ecuaţie se numeşte *ecuaţia normală* sau *ecuaţia normală Hesse* a dreptei.
- Dreapta Δ împarte mulţimea tuturor punctelor din plan care nu îi aparţin în două submulţimi, numite *semiplane (deschise)*.
- Semiplanul care conţine versorul $\mathbf{e}$, atunci când acesta este ataşat punctului N, se numeşte *pozitiv*, iar celălalt semiplan se numeşte *negativ*.
- Originea coordonatelor se găseşte totdeauna fie în semiplanul negativ, fie pe dreapta Δ.

Distanţa de la un punct la o dreaptă

Definiţie

Fie d distanţa de la punctul M_0 până la dreapta Δ. Se numeşte *abatere* a punctului M_0 de la dreapta Δ numărul δ definit prin următoarele condiţii:

1) $\delta = d$ dacă punctul M_0 se află în semiplanul pozitiv;
2) $\delta = -d$ dacă M_0 se află în semiplanul negativ;
3) $\delta = d = 0$ dacă M_0 se află pe dreapta Δ.

Distanţa de la un punct la o dreaptă

Teorema

Să presupunem că în plan se dă o dreaptă Δ, prin ecuaţia ei normală (30). Atunci abaterea δ a unui punct oarecare $M_0(x_0, y_0)$ faţă de dreapta Δ şi distanţa d de la punct până la dreaptă sunt date de formulele:

$$\delta = x_0 \cos\alpha + y_0 \sin\alpha - p, \tag{31}$$

$$d = \left| x_0 \cos\alpha + y_0 \sin\alpha - p \right|. \tag{32}$$

Demonstraţie.

Fie N_0 piciorul perpendicularei coborâte din M_0 pe dreapta Δ_1. Din formula lui Chasles obţinem că

$$\delta = (NN_0) = (ON_0) - (ON) = \overrightarrow{OM} \cdot \mathbf{e} - p = x_0 \cos\alpha + y_0 \sin\alpha - p.$$

Distanţa de la un punct la o dreaptă

Demonstraţie.

Formula (32) rezultă din formula (31), întrucât $d = |\delta|$. □

Formula (31) conduce la următoarea regulă: *pentru a obţine abaterea unui punct oarecare M_0 faţă de o dreaptă, este suficient să înlocuim coordonatele punctului în membrul stâng al ecuaţiei normale a dreptei. Numărul obţinut pe această cale este abaterea căutată.*
Să presupunem acum că dreapta este dată prin ecuaţia sa generală,

$$Ax + By + C = 0, \tag{33}$$

şi vrem să găsim ecuaţia sa normală (30). Cum ecuaţiile (30) şi (33) reprezintă aceeaşi dreaptă, coeficienţii lor trebuie să fie proporţionali, prin urmare:

$$\cos\alpha = \lambda A, \ \sin\alpha = \lambda B, \ -p = \lambda C. \tag{34}$$

Distanţa de la un punct la o dreaptă

Din primele două relaţii din (34) obţinem

$$\lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Potrivit celei de-a treia egalităţi din (34), rezultă că semnul lui λ trebuie să fie opus semnului termenului liber C din ecuaţia (33), dacă $C \neq 0$. Dacă $C = 0$, atunci λ poate să aibă orice semn. O schimbare de semn la λ aduce după sine schimbarea între ele a semiplanului pozitiv şi a celui negativ. Numărul λ se numeşte *factor normalizator* pentru ecuaţia (33), pentru că, după înmulţirea cu el, ecuaţia devine normală. Pe baza celor remarcate, formulele pentru abaterea şi distanţa de la un punct $M_0(x_0, y_0)$ până la dreapta (33) se pot scrie

$$\delta = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}, \; d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{35}$$

Distanţa de la un punct la o dreaptă

Să presupunem că se dă ecuaţia (33). Notăm

$$\delta' = \delta'(x_0, y_0) = Ax_0 + By_0 + C.$$

Teorema

Pentru toate punctele din acelaşi semiplan determinat de dreapta (33), δ' are acelaşi semn, iar pentru punctele din semiplanul opus are semn contrar.

Demonstraţie.

Afirmaţia acestei teoreme pentru ecuaţia normală

$$\frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}(Ax + By + C)$$

sau, cu alte cuvinte, pentru mărimea □

Distanţa de la un punct la o dreaptă

Demonstraţie.

$$\delta(x_0, y_0) = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}\delta'(x_0, y_0)$$

rezultă din teorema 2. Cum mărimile $\delta(x_0, y_0)$ şi $\delta'(x_0, y_0)$ diferă doar printr-un factor constant, care nu depinde de punctul $M_0(x_0, y_0)$, rezultă că afirmaţia rămâne adevărată şi pentru mărimea $\delta'(x_0, y_0)$. □

Teorema precedentă permite stabilirea semnificaţiei geometrice a inegalităţilor

$$Ax + By + C > 0, \tag{36}$$

$$Ax + By + C < 0, \tag{37}$$

care leagă variabilele x şi y.

Distanţa de la un punct la o dreaptă

Dacă x şi y sunt coordonatele carteziene ale unui punct din plan, atunci inegalitatea (36) este verificată doar de coordonatele punctele planului situate într-unul dintre semiplanele deschise determinate de dreapta

$$Ax + By + C = 0.$$

Inegalitatea (37) este verificată de coordonatele punctelor situate în cel de-al doilea semiplan deschis şi numai de ele. În mod corespunzător, inegalităţile

$$Ax + By + C \geq 0,$$
$$Ax + By + C \leq 0,$$

descriu câte un semiplan împreună cu semidreapta care îl mărgineşte (sau, cum se mai spune, câte un semiplan *închis*).

Distanţa dintre două drepte paralele

Considerăm două drepte paralele, date prin ecuaţiile lor generale

$$\Delta_1 : Ax + By + C_1 = 0 \tag{38}$$

şi

$$\Delta_2 : Ax + By + C_2 = 0. \tag{39}$$

Am folosit faptul că, dreptele fiind paralele, putem presupune că ele au acelaşi vector normal, deci ecuaţiile lor diferă doar prin termenul liber. Atunci *distanţa dintre dreptele* Δ_1 *şi* Δ_2 este, prin definiţie, distanţa de la un punct al dreptei Δ_1 la dreapta Δ_2. Dreptele fiind paralele, distanţa nu depinde de alegerea punctului.

Distanţa dintre două drepte paralele

Fie, prin urmare $M(x_M, y_M) \in \Delta_1$. Atunci coordonatele lui M verifică ecuaţia dreptei, deci trebuie să avem

$$Ax_M + By_M + C_1 = 0,$$

de unde deducem că $Ax_M + By_M = -C_1$. Atunci

$$d(\Delta_1, \Delta_2) = d(M, \Delta_2) = \frac{|Ax_M + By_M + C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|-C_1 + C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Astfel, *distanţa dintre dreptele paralele (38) şi (39) este dată de*

$$d(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \tag{40}$$

Distanţa dintre două drepte paralele

Să presupunem, acum, că prima dreaptă este dată prin ecuaţia ei normală

$$\Delta_1 : x\cos\alpha + y\sin\alpha - p_1 = 0. \tag{41}$$

Atunci o dreaptă paralelă cu ea va avea ecuaţia e forma

$$\Delta_2 : x\cos\alpha + y\sin\alpha - p_2 = 0, \tag{42}$$

dacă e situată de aceeaşi parte a originii sau

$$\Delta_2 : -x\cos\alpha - y\sin\alpha - p_2 = 0 \tag{43}$$

dacă originea se află între cele două drepte.

Distanţa dintre două drepte paralele

Astfel, folosind formula (40) putem spune că *distanţa dintre două drepte paralele, date prin ecuaţiile lor normale, este dată de*

$$d(\Delta_1, \Delta_2) = |p_1 - p_2|, \tag{44}$$

dacă dreptele sunt situate de aceeaşi parte a originii sau

$$d(\Delta_1, \Delta_2) = p_1 + p_2, \tag{45}$$

dacă originea este între cele două drepte.

Distanţa dintre două drepte paralele

În sfârşit, să presupunem că cele două drepte sunt date prin ecuaţiile lor explicite,

$$y = mx + n_1, \tag{46}$$

respectiv

$$y = mx + n_2. \tag{47}$$

Atunci, aducând aceste ecuaţii la forma generală, deducem imediat, folosind din nou formula (40), că *distanţa dintre două drepte paralele, date prin ecuaţiile lor explicite este*

$$d(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{|n_1 - n_2|}{\sqrt{1 + m^2}}. \tag{48}$$

Unghiul dintre două drepte

Să presupunem că se dau, în plan, două drepte, Δ_1 şi Δ_2, prin intermediul ecuaţiilor lor generale:

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0, \tag{49}$$

$$A_2 x + B_2 y + C_2 = 0. \tag{50}$$

După cum s-a văzut, în calitate de vectori directori ai acestor drepte pot fi luaţi vectorii $\mathbf{a}_1(-B_1, A_1)$ şi $\mathbf{a}_2(-B_2, A_2)$. Prin urmare,

$$\cos\varphi = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \tag{51}$$

Aici cu φ se notează unul dintre cele două unghiuri formate de cele două drepte. Dacă dreptele sunt paralele, atunci, prin convenţie, se consideră că dreptele fac între ele un unghi egal cu zero.

Unghiul dintre două drepte

Din formula (51) rezultă, în particular, condiţia necesară şi suficientă pentru ca dreptele (49) şi (50) să fie perpendiculare:

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0. \tag{52}$$

Să presupunem acum că dreptele Δ_1 şi Δ_2 sunt date nu prin ecuaţiile generale ci cu ajutorul coeficienţilor unghiulari:

$$y = k_1 x + b_1, \tag{53}$$

$$y = k_2 x + b_2. \tag{54}$$

Notăm cu φ unghiul cu care trebuie rotită dreapta Δ_1 în jurul punctului de intersecţie a dreptelor, pentru a se suprapune peste dreapta Δ_2. Dacă dreptele sunt paralele, atunci vom considera că $\varphi = 0$.

Unghiul dintre două drepte

Fie α_1 şi α_2 unghiurile pe care le fac cele două drepte cu axa Ox, adică avem $k_1 = \operatorname{tg}\alpha_1$, $\alpha_2 = \operatorname{tg}\alpha_2$. Atunci $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$ şi avem:

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.$$

Astfel,

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \tag{55}$$

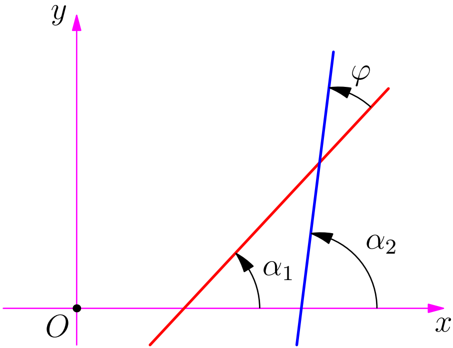
Din formula (55) se poate obţine cu uşurinţă condiţia de perpendicularitate a dreptelor (53) şi (54). Ea corespunde cazului în care $\operatorname{tg}\varphi$ nu există, adică, în formula (55), se anulează numitorul:

$$1 + k_1 k_2 = 0.$$

Unghiul dintre două drepte

Astfel, condiţia necesară şi suficientă pentru ca dreptele (53) şi (54) să fie perpendiculare este ca

$$k_2 = -\frac{1}{k_1}. \tag{56}$$



Unghiul dintre două drepte

Unghiul ascuţit dintre două drepte

Cele două unghiuri pe care le fac două drepte sunt suplementare. Fie unul este ascuţit, iar celălalt este obtuz, fie ambele unghiuri sunt drepte.

Cum pentru orice unghi avem

$$\cos(\pi - \varphi) = -\cos\varphi \quad \text{şi} \quad \operatorname{tg}(\pi - \varphi) = -\operatorname{tg}\varphi$$

este clar că formulele pentru determinarea unghiului ascuţit dintre două drepte sunt

$$\cos\varphi = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}, \tag{57}$$

dacă dreptele se dau prin ecuaţiile generale, respectiv

$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}\right|, \tag{58}$$

dacă dreptele se dau cu ajutorul pantelor

Bisectoarele unghiurilor a două drepte

Drepte date prin ecuaţia generală

Considerăm două drepte, date prin ecuaţiile

$$L_1 : \ a_1 x + b_1 y + c_1 = 0, \tag{59}$$

respectiv

$$L_2 : \ a_2 x + b_2 y + c_2 = 0. \tag{60}$$

Presupunem că dreptele sunt concurente: $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$.
Bisectoare: *LG al punctelor din plan egal depărtate de cele două drepte*, deci

$$L_\pm : \ \frac{|a_1 x + b_1 y + c_1|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \frac{|a_2 x + b_2 y + c_2|}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \tag{61}$$

sau

$$L_\pm : \ \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm \frac{a_2 x + b_2 y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}. \tag{62}$$

Dacă dreptele nu sunt perpendiculare, atunci ele formează un unghi ascuţit şi unul obtuz. Cum determinăm care este bisectoarea unghiului ascuţit?
Să presupunem, de exemplu, că vrem să stabilim în ce condiţii această bisectoare este L_+. Dacă se întâmplă asta, atunci unghiu ascuţit θ pe care îl face L_1 cu L_+ trebuie să fie cel mult egal cu $\pi/4$.
Ecuaţia dreptei L_+ este

$$L_+ : \left(\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}-\frac{a_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}\right)x+\left(\frac{b_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}-\frac{b_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}\right)y+ \\ +\frac{c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}-\frac{c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}=0.$$

Bisectoarele unghiurilor a două drepte

Drepte date prin ecuaţia generală

Vectorul normal la L_+ este

$$\mathbf{n}_+ = \left(\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} - \frac{a_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}, \frac{b_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} - \frac{b_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \right),$$

iar vectorul normal la L_1 este $\mathbf{n}(a_1, b_1)$, deci cosinusul unghiului ascuţit dintre cele două drepte este

$$\cos\theta = \frac{|\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_+|}{\|\mathbf{n}_1\| \cdot \|\mathbf{n}_+\|} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 - \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}}. \tag{63}$$

Bisectoarele unghiurilor a două drepte

Drepte date prin ecuaţia generală

L_+ este bisectoarea unghiului ascuţit dacă θ este mai mic de $\pi/4$. Cum pe intervalul $[0, 2\pi]$ funcţia cosinus este descrescătoare, din formula (63) tragem următoarele concluzii:

- Dacă $a_1 a_2 + b_1 b_2 > 0$, atunci L_+ este bisectoarea unghiului ascuţit (deci L_- este bisectoarea unghiului obtuz).
- Dacă $a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0$, atunci dreptele sunt perpendiculare, deci bisectoarele joacă acelaşi rol.
- Dacă $a_1 a_2 + b_1 b_2 < 0$, atunci L_+ este bisectoarea unghiului obtuz (deci L_- este bisectoarea unghiului ascuţit).

Să presupunem, din nou, că se dau două drepte neparalele, date prin ecuaţiile lor normale:

$$L_1 : \ x \cos \alpha_1 + y \sin \alpha_1 - p_1 = 0, \tag{64}$$

$$L_2 : \ x \cos \alpha_2 + y \sin \alpha_2 - p_2 = 0. \tag{65}$$

Presupunem că $\alpha_1 \neq \alpha_2$, ca să ne asigurăm că dreptele nu sunt paralele. Atunci ecuaţiile bisectoarelor sunt

$$L_\pm : \ |x \cos \alpha_1 + y \sin \alpha_1 - p_1| = |x \cos \alpha_2 + y \sin \alpha_2 - p_2| \tag{66}$$

sau

$$L_\pm : \ x \cos \alpha_1 + y \sin \alpha_1 - p_1 = \pm(x \cos \alpha_2 + y \sin \alpha_2 - p_2). \tag{67}$$

Bisectoarele unghiurilor a două drepte

Drepte date prin ecuaţia normală

Astfel, ecuaţiile celor două bisectoare sunt:

$$L_+ : \ x(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2) + y(\sin\alpha_1 - \sin\alpha_2) - p_1 + p_2 = 0, \tag{68}$$

respectiv

$$L_- : \ x(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2) + y(\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2) - p_1 - p_2 = 0. \tag{69}$$

Pentru a determina bisectoarea unghiului ascuţit, procedăm ca la punctul precedent, determinând unghiul ascuţit dintre L_1 şi L_+. Vectorii normali la cele două drepte sunt $\mathbf{n}_1(\cos\alpha_1, \sin\alpha_1)$ şi

$$\mathbf{n}_+(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2, \sin\alpha_1 - \sin\alpha_2).$$

De aceea, cosinusul unghiului ascuţit va fi dat de

$$\cos\theta = \frac{|\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_+|}{\|\mathbf{n}_1\| \cdot \|\mathbf{n}_+\|} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1 - \cos(\alpha_1 - \alpha_2)}.$$

Prin urmare,

- Dacă avem $\cos(\alpha_1 - \alpha_2) > 0$ (adică unghiul $\alpha_1 - \alpha_2$ este ascuţit), atunci L_+ este bisectoarea unghiului ascuţit, deci L_- este bisectoarea unghiului obtuz.
- Dacă avem $\cos(\alpha_1 - \alpha_2) = 0$, cele două drepte sunt perpendiculare şi cele două bisectoare joacă acelaşi rol.
- Dacă avem $\cos(\alpha_1 - \alpha_2) < 0$ (adică unghiul $\alpha_1 - \alpha_2$ este obtuz), atunci L_+ este bisectoarea unghiului obtuz, deci L_- este bisectoarea unghiului ascuţit.

Bisectoarele unghiurilor a două drepte

Drepte date prin ecuaţii explicite

Considerăm dreptele

$$L_1 : \; y = m_1 x + n_1 \tag{70}$$

şi

$$L_2 : \; y = m_2 x + n_2 \tag{71}$$

unde presupunem că $m_1 \neq m_2$, adică dreptele nu sunt paralele.
Vom reduce acest caz la cazul dreptelor date prin ecuaţiile generale.
În acest scop, rescriem ecuaţiile dreptelor sub forma

$$L_1 : \; m_1 x - y + n_1 = 0 \tag{72}$$

şi

$$L_2 : \; m_2 x - y + n_2 = 0. \tag{73}$$

Bisectoarele unghiurilor a două drepte

Drepte date prin ecuaţii explicite

Aplicăm discuţia din cazul general, în care, de data aceasta, $a_1 = m_1, b_1 = -1, c_1 = n_1$, respectiv $a_2 = m_2, b_2 = -1, c_2 = n_2$. Atunci ecuaţiile bisectoarelor vor fi

$$L_{+}: \ \frac{m_1 x - y + n_1}{m_1^2 + 1} = \frac{m_2 x - y + n_2}{m_2^2 + 1}, \tag{74}$$

respectiv

$$L_{-}+: \ \frac{m_1 x - y + n_1}{m_1^2 + 1} = -\frac{m_2 x - y + n_2}{m_2^2 + 1}, \tag{75}$$

iar

$$a_1 a_2 + b_1 b_2 = m_1 m_2 + 1. \tag{76}$$

Bisectoarele unghiurilor a două drepte

Drepte date prin ecuaţii explicite

Adaptând concluziile din cazul ecuaţiilor generale, putem afirma următoarele:

- Dacă $m_1 m_2 + 1 > 0$, atunci L_+ este bisectoarea unghiului ascuţit, iar L_- este bisectoarea unghiului obtuz.
- Dacă $m_1 m_2 + 1 = 0$, atunci cele două drepte sunt perpendiculare, iar bisectoarele joacă acelaşi rol.
- Dacă $m_1 m_2 + 1 < 0$, atunci L_+ este bisectoarea unghiului obtuz, iar L_- este bisectoarea unghiului ascuţit.

Simetricul unui punct faţă de o dreaptă

Definiţie

Fie

$$L: \ ax + by + c = 0 \tag{77}$$

o dreaptă şi $M(x_0, y_0)$ un punct din plan. *Simetricul* său faţă de dreapta L este fie punctul M însuşi dacă $M \in L$, fie un punct $M'(x_0', y_0')$ din plan, astfel încât dreapta L să fie mediatoarea segmentului MM'. Mijlocul M_1 al segmentului MM' este *proiecţia ortogonală* a lui M pe L.

1. Verificăm dacă $M \in L$. Dacă da, atunci $M' = M$.
2. Dacă $M \notin L$, atunci construim dreapta L', care trece prin M şi este perpendiculară pe L.
3. Determinăm punctul $M_1 = L \cap L'$.
4. Determinăm punctul M' astfel încât

$$M_1 = \frac{1}{2}M + \frac{1}{2}M'. \tag{78}$$

Simetricul unui punct faţă de o dreaptă

Presupunem că $M \notin L$. Vectorul director al dreptei L', care trece prin M şi este perpendiculară pe L este vectorul normal la dreapta L, $\mathbf{n}(a, b)$, ceea ce înseamnă că ecuaţia acestei drepte este

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}. \tag{79}$$

Coordonatele punctului M_1 se obţin rezolvând sistemul format din ecuaţiile (77) şi (79). Găsim

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b^2}{a^2 + b^2} x_0 - \dfrac{ab}{a^2 + b^2} y_0 - \dfrac{ac}{a^2 + b^2}, \\ y_1 = -\dfrac{ab}{a^2 + b^2} x_0 + \dfrac{a^2}{a^2 + b^2} y_0 - \dfrac{bc}{a^2 + b^2}. \end{cases} \tag{80}$$

Simetricul unui punct faţă de o dreaptă

Relaţia (78) înseamnă, când este scrisă în coordonate, că avem

$$(x_1, y_1) = \frac{1}{2}(x_0, y_0) + \frac{1}{2}(x_0', y_0'),$$

de unde deducem, imediat, relaţiile

$$\begin{cases} x_0' = 2x_1 - x_0, \\ y_0' = 2y_1 - y_0. \end{cases} \tag{81}$$

Dacă înlocuim relaţiile (80) în (81), obţinem coordonatele simetricului:

$$\begin{cases} x_0' = -\dfrac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} x_0 - \dfrac{2ab}{a^2 + b^2} y_0 - \dfrac{2ac}{a^2 + b^2}, \\ y_0' = -\dfrac{2ab}{a^2 + b^2} x_0 + \dfrac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} y_0 - \dfrac{2bc}{a^2 + b^2}. \end{cases} \tag{82}$$