SEMINARUL 10

Cuadrice pe ecuaţia redusă

Problema 10.1. Să se determine punctele de intersecţie ale elipsoidului

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{4}-1=0$$

cu dreapta

$$x=4+2t,\ y=-6-3t,\ z=-2-2t.$$

Problema 10.2. Să se scrie ecuaţia planului tangent la hiperboloidul cu o pânză

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{1}=1$$

în punctul $M(2,3,1)$. Să se arate că acest plan tangent taie suprafaţa după două drepte reale şi să se calculeze unghiul format de cele două drepte.

Problema 10.3. Să se scrie ecuaţiile planelor tangente în punctele de intersecţie ale dreptei $x=y=z$ cu:

a) paraboloidul eliptic $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{4}=9z$;

b) paraboloidul hiperbolic $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{4}=9z$.

Problema 10.4. Să se scrie ecuaţia planelor tangente la:

a) paraboloidul eliptic $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{3}=z$;

b) paraboloidul hiperbolic $x^2-\dfrac{y^2}{4}=z$,

paralele cu planul

$$x-3y+2z-1=0.$$

Problema 10.5. Să se determine generatoarele rectilinii ale paraboloidului hiperbolic $4x^2-9y^2=36z$ care trec prin punctul $P(3\sqrt{2},2,1)$.

Problema 10.6. Să se scrie ecuaţiile generatoarelor rectilinii ale paraboloidului hiperbolic

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = z$$

care sunt paralele cu planul

$$3x + 2y - 4z = 0.$$

Problema 10.7. Să se afle generatoarele rectilinii ale suprafeţei

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 1$$

care sunt paralele cu planul

$$x + y + z = 0.$$

Problema 10.8. Să se găsească un punct al elipsoidului

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0, \quad a > b > c > 0.$$

astfel încât planul tangent în acest punct să taie segmente de lungime egală pe axele de coordonate.

Problema 10.9. Să se găsească punctele de pe elipsoidul

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0, \quad a > b > c > 0.$$

în care normalele intersectează axa Oz.

Problema 10.10. Ce condiţii trebuie să îndeplinească semiaxele unui elipsoid astfel încât normalele sale să treacă prin centrul său?

Problema 10.11. Să se găsească locul geometric al punctelor de pe cuadrica

$$y^2 - z^2 = 2x$$

prin care trec generatoare rectilinii perpendiculare.

Problema 10.12. Să se găsească ecuaţia proiecţiei pe planul xOy a curbei de intersecţie a elipsoidului

$$\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} - 1 = 0$$

cu planul

$$x + y + z - 1 = 0.$$

Problema 10.13. Să se găsească locul geometric al punctelor M de pe suprafaţa $x^2 - y^2 = z$ pentru care normala în M la suprafaţă formează un unghi constant cu axa Oz. Să se arate că proiecţia acestui loc geometric pe planul xOy este un cerc a cărui ecuaţie se cere.

Problema 10.14. Să se determine ecuaţia hiperboloidului cu o pânză care are ca axe de simetrie axele de coordonate, este tangent la planul

$$6x - 3y + 2z - 6 = 0$$

şi pentru care dreapta

$$\begin{cases} 4x - z - 5 = 0, \\ 6x + 5z + 9 = 0 \end{cases}$$

este o generatoare rectilinie.

Problema 10.15. Să se scrie ecuaţia normalei în punctul $P(-2,2,-1)$ la cuadrica

$$\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{2}+1=0.$$

Să se determine coordonatele punctului în care normala înţeapă a doua oară suprafaţa.

Problema 10.16. Să se determine planele care conţin dreapta

$$\frac{x+1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{0}$$

şi sunt tangente la hiperboloidul cu două pânze

$$x^2+2y^2-z^2+1=0.$$

Problema 10.17. Să se afle distanţa cea mai scurtă dintre paraboloidul eliptic

$$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=z$$

şi planul

$$x-y-2z=0.$$

Problema 10.18. Să se arate că dreapta

$$\frac{x-2}{0}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z-6}{2}$$

este tangentă elipsoidului

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}-1=0$$

şi să se determine coordonatele punctului de tangenţă.