



AGH

**AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
IM. STANISŁAWA STASZICA
W KRAKOWIE**

Metody obliczeniowe w nauce i technice

Laboratorium 6

1. Wprowadzenie

Laboratorium miało na celu zapoznanie się z prostymi metodami obliczania całek ograniczonych przez pomocy metod numerycznych.

Zadanie wykonano w [Jupyter Notebook](#), pisząc w [Pythonie](#) i używając biblioteki do obliczeń naukowych o nazwie [NumPy](#).

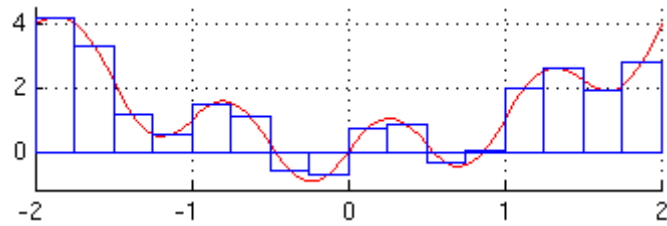
Wykorzystany kod oraz wyniki pomiarów są dostępne w [repozytorium](#).

Dla uproszczenia przyjęto że macierz współczynników jest kwadratowa.

2. Metoda prostokątów

$$h = \frac{b - a}{n}$$

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} f(a + hi)$$



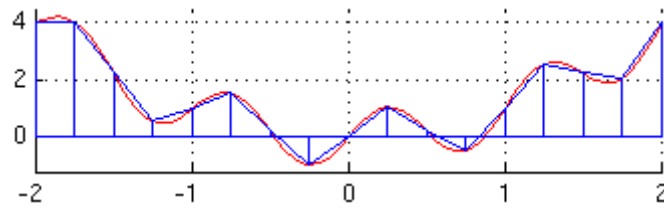
2.1. Implementacja

```
def integral_rectangles(f, a, b, n):  
    h = (b - a) / float(n)  
    return sum(  
        f(a + h * i) * h  
        for i in range(n)  
    )
```

3. Metoda trapezów

$$h = \frac{b - a}{n}$$

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(a + hi) + f(a + h(i + 1))}{2} h$$



3.1. Implementacja

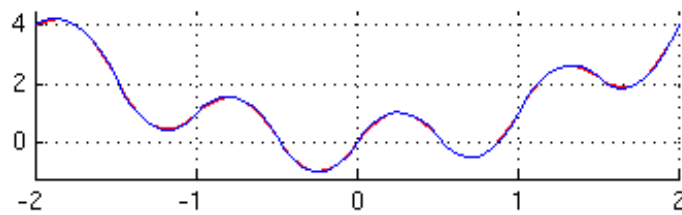
```
def integral_trapezoidal(f, a, b, n):  
    h = (b - a) / float(n)  
    return sum(  
        (f(a + h * i) + f(a + h * (i+1))) / 2.0 * h  
        for i in range(n)  
    )
```

4. Metoda Simpson'a

$$n \equiv_2 0$$

$$h = \frac{b-a}{n}$$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3} \left(f(a) + 4 \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}} f(a + h(2i+1)) + 2 \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} f(a + 2ih) + f(b) \right)$$



4.1. Implementacja

```
def integral_simpson(f, a, b, n):  
    if n%2 != 0:  
        raise ValueError("Number of steps in Simpson has to be even")  
  
    h = (b - a) / float(n)  
    return (h / 3.0) * (  
        f(a) +  
        4 * sum(f(a + i * h) for i in range(1, n, 2)) +  
        2 * sum(f(a + i * h) for i in range(2, n-1, 2)) +  
        f(b)  
    )
```

5. Testy

Testy przeprowadzono dla sześciu podanych funkcji.

Całka z każdej funkcji została obliczona przy wykorzystaniu trzech powyższych metod.

Parametry podczas testów:

- Liczba kroków: {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20}
- Przedziały: $(-10, -2)$, $(-4, 0)$, $(-2, 2)$, $(0, 4)$, $(2, 10)$

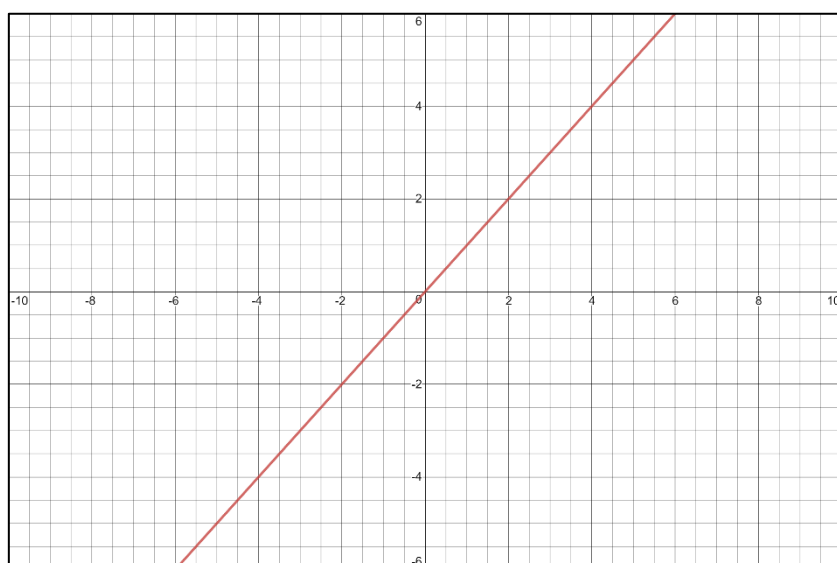
```
f1 = lambda x: x
f2 = lambda x: 2 * x**2
f3 = lambda x: 4 * sin(x)
f4 = lambda x: exp(x)
f5 = lambda x: x * sin(x)**2 + 2 * cos(x)
f6 = lambda x: cos((x + 1)/(x**2 + 0.04)) * exp(x)

ranges = [(-10, -2), (-4, 0), (-2, 2), (0, 4), (2, 10)]
steps = range(2, 21, 2)
```

```
def test(name, f, ranges, steps):
    with open(f'results-{name}.csv', 'w') as out:
        out.write("a,b,n,Rectangles,Trapezoidal,Simpson\n")
        for r in ranges:
            for n in steps:
                rec = integral_rectangles(f, r[0], r[1], n)
                tra = integral_trapezoidal(f, r[0], r[1], n)
                sim = integral_simpson(f, r[0], r[1], n)
                out.write(f'{r[0]},{r[1]},{n},{rec},{tra},{sim}\n')
```

5.1. Funkcja 1

$$f_1(x) = x$$



5.1.1. Wartości dokładne

$$\int_{-10}^{-2} f_1(x) dx = -48$$

$$\int_{-4}^0 f_1(x) dx = -8$$

$$\int_{-2}^2 f_1(x) dx = 0$$

$$\int_0^4 f_1(x) dx = 8$$

$$\int_2^{10} f_1(x) dx = 48$$

5.1.2. Pomiary

[-10, -2]										
n	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
Rectangles	-64,00	-56,00	-53,33	-52,00	-51,20	-50,67	-50,29	-50,00	-49,78	-49,60
	33,3%	16,7%	11,1%	8,3%	6,7%	5,6%	4,8%	4,2%	3,7%	3,3%
Trapezoidal	-48	-48	-48	-48	-48	-48	-48	-48	-48	-48
	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
Simpson	-48	-48	-48	-48	-48	-48	-48	-48	-48	-48
	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%

[-4, 0]										
n	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
Rectangles	-12,00	-10,00	-9,33	-9,00	-8,80	-8,67	-8,57	-8,50	-8,44	-8,40
	50,0%	25,0%	16,7%	12,5%	10,0%	8,3%	7,1%	6,3%	5,6%	5,0%
Trapezoidal	-8	-8	-8	-8	-8	-8	-8	-8	-8	-8
	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
Simpson	-8	-8	-8	-8	-8	-8	-8	-8	-8	-8
	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%

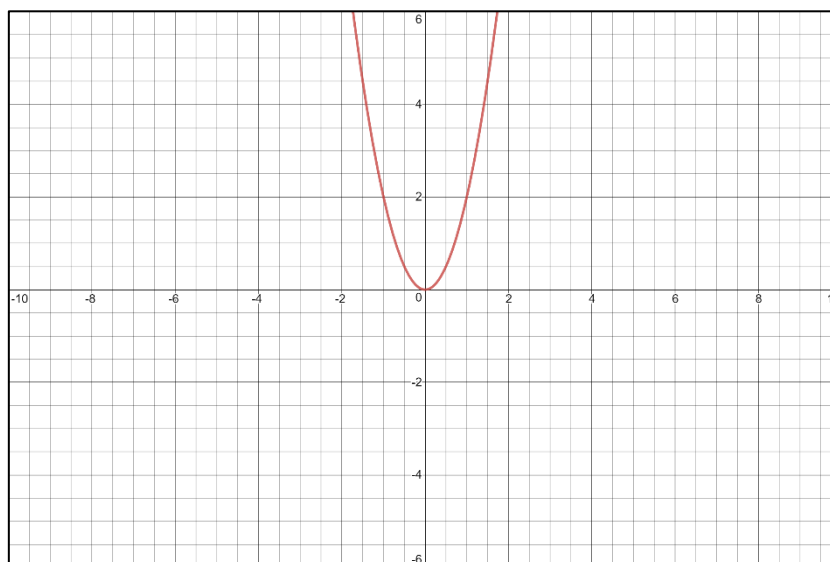
[-2, 2]										
n	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
Rectangles	-4,000	-2,000	-1,333	-1,000	-0,800	-0,667	-0,571	-0,500	-0,444	-0,400
	400,0%	200,0%	133,3%	100,0%	80,0%	66,7%	57,1%	50,0%	44,4%	40,0%
Trapezoidal	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
Simpson	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%

[0, 4]										
n	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
Rectangles	4,000	6,000	6,667	7,000	7,200	7,333	7,429	7,500	7,556	7,600
	50,0%	25,0%	16,7%	12,5%	10,0%	8,3%	7,1%	6,3%	5,6%	5,0%
Trapezoidal	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8
	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
Simpson	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8
	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%

[2, 10]										
n	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
Rectangles	32,00	40,00	42,67	44,00	44,80	45,33	45,71	46,00	46,22	46,40
	33,3%	16,7%	11,1%	8,3%	6,7%	5,6%	4,8%	4,2%	3,7%	3,3%
Trapezoidal	48	48	48	48	48	48	48	48	48	48
	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
Simpson	48	48	48	48	48	48	48	48	48	48
	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%

5.2. Funkcja 2

$$f_2(x) = 2x^2$$



5.2.1. Wartości dokładne

$$\int_{-10}^{-2} f_2(x) dx = \frac{1984}{3} = 661. (3)$$

$$\int_{-4}^0 f_2(x) dx = \frac{128}{3} = 42. (6)$$

$$\int_{-2}^2 f_2(x) dx = \frac{32}{3} = 10. (6)$$

$$\int_0^4 f_2(x) dx = \frac{128}{3} = 42. (6)$$

$$\int_2^{10} f_2(x) dx = \frac{1984}{3} = 661. (3)$$

5.2.2. Pomiary

[-10, -2]										
n	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
Rectangles	1088,0	864,0	794,1	760,0	739,8	726,5	717,1	710,0	704,5	700,2
	64,5%	30,6%	20,1%	14,9%	11,9%	9,9%	8,4%	7,4%	6,5%	5,9%
Trapezoidal	704,0	672,0	666,1	664,0	663,0	662,5	662,2	662,0	661,9	661,8
	6,5%	1,6%	0,7%	0,4%	0,3%	0,2%	0,1%	0,1%	0,1%	0,1%
Simpson	661,3	661,3	661,3	661,3	661,3	661,3	661,3	661,3	661,3	661,3
	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%

[-4, 0]										
n	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
Rectangles	80,000	60,000	53,926	51,000	49,280	48,148	47,347	46,750	46,288	45,920
	87,5%	40,6%	26,4%	19,5%	15,5%	12,8%	11,0%	9,6%	8,5%	7,6%
Trapezoidal	48,000	44,000	43,259	43,000	42,880	42,815	42,776	42,750	42,733	42,720
	12,5%	3,1%	1,4%	0,8%	0,5%	0,3%	0,3%	0,2%	0,2%	0,1%
Simpson	42,667	42,667	42,667	42,667	42,667	42,667	42,667	42,667	42,667	42,667
	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%

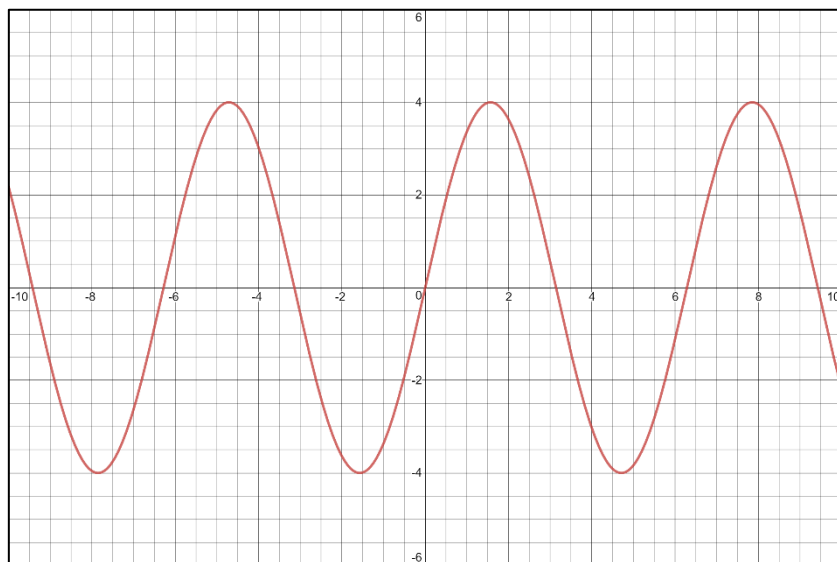
[-2, 2]										
n	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
Rectangles	16,000	12,000	11,259	11,000	10,880	10,815	10,776	10,750	10,733	10,720
	50,0%	12,5%	5,6%	3,1%	2,0%	1,4%	1,0%	0,8%	0,6%	0,5%
Trapezoidal	16,000	12,000	11,259	11,000	10,880	10,815	10,776	10,750	10,733	10,720
	50,0%	12,5%	5,6%	3,1%	2,0%	1,4%	1,0%	0,8%	0,6%	0,5%
Simpson	10,667	10,667	10,667	10,667	10,667	10,667	10,667	10,667	10,667	10,667
	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%

[0, 4]										
n	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
Rectangles	16,000	28,000	32,593	35,000	36,480	37,481	38,204	38,750	39,177	39,520
	62,5%	34,4%	23,6%	18,0%	14,5%	12,2%	10,5%	9,2%	8,2%	7,4%
Trapezoidal	48,000	44,000	43,259	43,000	42,880	42,815	42,776	42,750	42,733	42,720
	12,5%	3,1%	1,4%	0,8%	0,5%	0,3%	0,3%	0,2%	0,2%	0,1%
Simpson	42,667	42,667	42,667	42,667	42,667	42,667	42,667	42,667	42,667	42,667
	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%

[2, 10]										
n	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
Rectangles	320,00	480,00	538,07	568,00	586,24	598,52	607,35	614,00	619,19	623,36
	51,6%	27,4%	18,6%	14,1%	11,4%	9,5%	8,2%	7,2%	6,4%	5,7%
Trapezoidal	704,00	672,00	666,07	664,00	663,04	662,52	662,20	662,00	661,86	661,76
	6,5%	1,6%	0,7%	0,4%	0,3%	0,2%	0,1%	0,1%	0,1%	0,1%
Simpson	661,33	661,33	661,33	661,33	661,33	661,33	661,33	661,33	661,33	661,33
	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%

5.3. Funkcja 3

$$f_3(x) = 4 \sin x$$



5.3.1. Wartości dokładne

$$\int_{-10}^{-2} f_3(x) dx = 4 \cos(10) - 4 \cos(2) \approx -1.691698$$

$$\int_{-4}^0 f_3(x) dx = -8 \sin^2(2) \approx -6.614574$$

$$\int_{-2}^2 f_3(x) dx = 0$$

$$\int_0^4 f_3(x) dx = 8 \sin^2(2) \approx 6.614574$$

$$\int_2^{10} f_3(x) dx = -4 \cos(10) + 4 \cos(2) \approx 1.691698$$

5.3.2. Pomiary

[-10, -2]										
n	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
Rectangles	13,175	4,727	2,442	1,358	0,725	0,309	0,016	-0,203	-0,372	-0,506
	878,8%	379,4%	244,4%	180,3%	142,8%	118,3%	100,9%	88,0%	78,0%	70,1%
Trapezoidal	1,548	-1,086	-1,433	-1,548	-1,600	-1,629	-1,645	-1,656	-1,664	-1,669
	191,5%	35,8%	15,3%	8,5%	5,4%	3,7%	2,7%	2,1%	1,7%	1,3%
Simpson	4,013	-1,964	-1,729	-1,702	-1,696	-1,694	-1,693	-1,692	-1,692	-1,692
	337,2%	16,1%	2,2%	0,6%	0,2%	0,1%	0,1%	0,0%	0,0%	0,0%

[-4, 0]										
n	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
Rectangles	-1,220	-4,540	-5,359	-5,719	-5,921	-6,049	-6,137	-6,202	-6,251	-6,290
	81,6%	31,4%	19,0%	13,5%	10,5%	8,6%	7,2%	6,2%	5,5%	4,9%
Trapezoidal	-4,247	-6,054	-6,368	-6,476	-6,526	-6,553	-6,570	-6,580	-6,587	-6,593
	35,8%	8,5%	3,7%	2,1%	1,3%	0,9%	0,7%	0,5%	0,4%	0,3%
Simpson	-7,681	-6,656	-6,622	-6,617	-6,616	-6,615	-6,615	-6,615	-6,615	-6,615
	16,1%	0,6%	0,1%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%

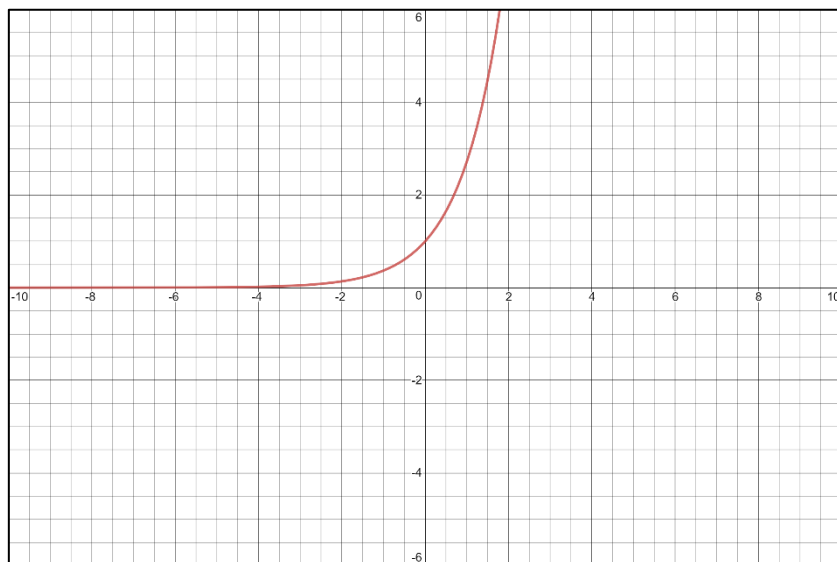
[-2, 2]										
n	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
Rectangles	-7,274	-3,637	-2,425	-1,819	-1,455	-1,212	-1,039	-0,909	-0,808	-0,727
	727,4%	363,7%	242,5%	181,9%	145,5%	121,2%	103,9%	90,9%	80,8%	72,7%
Trapezoidal	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
Simpson	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%

[0, 4]										
n	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
Rectangles	7,2744	7,5676	7,3768	7,2330	7,1316	7,0577	7,0020	6,9585	6,9237	6,8952
	10,0%	14,4%	11,5%	9,3%	7,8%	6,7%	5,9%	5,2%	4,7%	4,2%
Trapezoidal	4,2472	6,0539	6,3678	6,4762	6,5261	6,5532	6,5695	6,5801	6,5873	6,5925
	35,8%	8,5%	3,7%	2,1%	1,3%	0,9%	0,7%	0,5%	0,4%	0,3%
Simpson	7,6810	6,6562	6,6222	6,6169	6,6155	6,6150	6,6148	6,6147	6,6147	6,6146
	16,1%	0,6%	0,1%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%

[2, 10]										
n	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
Rectangles	10,078	6,900	5,309	4,455	3,926	3,566	3,306	3,110	2,956	2,832
	495,7%	307,8%	213,8%	163,3%	132,1%	110,8%	95,4%	83,8%	74,7%	67,4%
Trapezoidal	-1,548	1,086	1,433	1,548	1,600	1,629	1,645	1,656	1,664	1,669
	191,5%	35,8%	15,3%	8,5%	5,4%	3,7%	2,7%	2,1%	1,7%	1,3%
Simpson	-4,013	1,964	1,729	1,702	1,696	1,694	1,693	1,692	1,692	1,692
	337,2%	16,1%	2,2%	0,6%	0,2%	0,1%	0,1%	0,0%	0,0%	0,0%

5.4. Funkcja 4

$$f_4(x) = e^x$$



5.4.1. Wartości dokładne

$$\int_{-10}^{-2} f_4(x) dx = e^{-2} - e^{-10} \approx 0.135289$$

$$\int_{-4}^0 f_4(x) dx = 1 - e^{-4} \approx 0.981684$$

$$\int_{-2}^2 f_4(x) dx = 2 \sinh(2) \approx 7.253720$$

$$\int_0^4 f_4(x) dx = e^4 - 1 \approx 53.598150$$

$$\int_2^{10} f_4(x) dx = e^{10} - e^2 \approx 22019.076738$$

5.4.2. Pomiary

[-10, -2]										
n	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
Rectangles	0,0101	0,0424	0,0646	0,0787	0,0883	0,0952	0,1003	0,1043	0,1074	0,1100
	92,5%	68,7%	52,3%	41,8%	34,7%	29,7%	25,9%	22,9%	20,6%	18,7%
Trapezoidal	0,2807	0,1776	0,1548	0,1464	0,1424	0,1403	0,1390	0,1381	0,1375	0,1371
	107,5%	31,3%	14,4%	8,2%	5,3%	3,7%	2,7%	2,1%	1,6%	1,3%
Simpson	0,1937	0,1433	0,1372	0,1360	0,1356	0,1354	0,1354	0,1353	0,1353	0,1353
	43,2%	5,9%	1,4%	0,5%	0,2%	0,1%	0,1%	0,0%	0,0%	0,0%

[-4, 0]										
n	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
Rectangles	0,3073	0,5713	0,6905	0,7566	0,7984	0,8271	0,8481	0,8641	0,8766	0,8868
	68,7%	41,8%	29,7%	22,9%	18,7%	15,7%	13,6%	12,0%	10,7%	9,7%
Trapezoidal	1,2890	1,0622	1,0178	1,0021	0,9947	0,9908	0,9884	0,9868	0,9857	0,9850
	31,3%	8,2%	3,7%	2,1%	1,3%	0,9%	0,7%	0,5%	0,4%	0,3%
Simpson	1,0398	0,9866	0,9827	0,9820	0,9818	0,9818	0,9817	0,9817	0,9817	0,9817
	5,9%	0,5%	0,1%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%

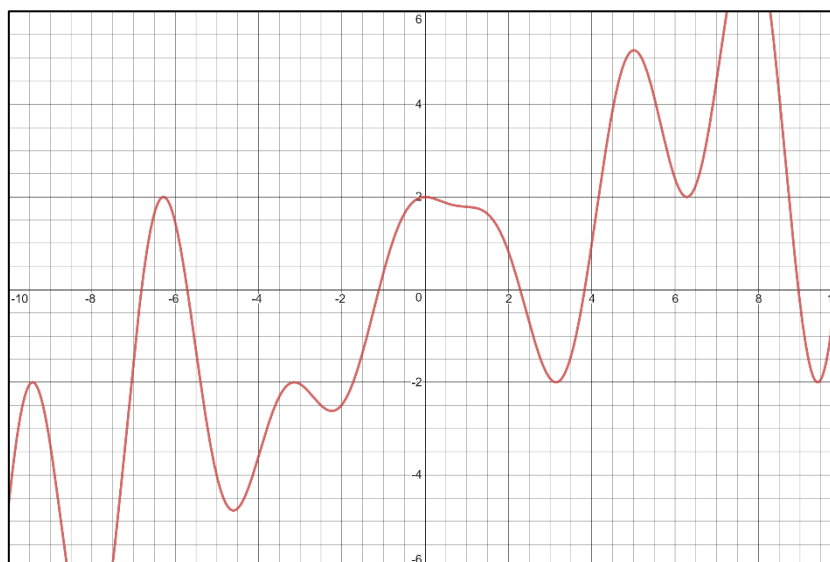
[-2, 2]										
n	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
Rectangles	2,2707	4,2215	5,1025	5,5908	5,8994	6,1118	6,2668	6,3847	6,4776	6,5525
	68,7%	41,8%	29,7%	22,9%	18,7%	15,7%	13,6%	12,0%	10,7%	9,7%
Trapezoidal	9,5244	7,8484	7,5204	7,4042	7,3502	7,3208	7,3030	7,2915	7,2835	7,2779
	31,3%	8,2%	3,7%	2,1%	1,3%	0,9%	0,7%	0,5%	0,4%	0,3%
Simpson	7,6829	7,2897	7,2613	7,2562	7,2547	7,2542	7,2540	7,2539	7,2538	7,2538
	5,9%	0,5%	0,1%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%

[0, 4]										
n	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
Rectangles	16,778	31,193	37,703	41,311	43,591	45,160	46,305	47,177	47,863	48,417
	68,7%	41,8%	29,7%	22,9%	18,7%	15,7%	13,6%	12,0%	10,7%	9,7%
Trapezoidal	70,376	57,992	55,569	54,710	54,311	54,094	53,962	53,877	53,819	53,777
	31,3%	8,2%	3,7%	2,1%	1,3%	0,9%	0,7%	0,5%	0,4%	0,3%
Simpson	56,770	53,864	53,654	53,616	53,606	53,602	53,600	53,599	53,599	53,599
	5,9%	0,5%	0,1%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%

[2, 10]										
n	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
Rectangles	1643	6893	10509	12815	14373	15489	16324	16971	17487	17908
	92,5%	68,7%	52,3%	41,8%	34,7%	29,7%	25,9%	22,9%	20,6%	18,7%
Trapezoidal	45681	28912	25188	23824	23181	22829	22615	22476	22380	22312
	107,5%	31,3%	14,4%	8,2%	5,3%	3,7%	2,7%	2,1%	1,6%	1,3%
Simpson	31530	23322	22337	22128	22066	22042	22032	22027	22024	22022
	43,2%	5,9%	1,4%	0,5%	0,2%	0,1%	0,1%	0,0%	0,0%	0,0%

5.5. Funkcja 5

$$f_5(x) = x \sin^2 x + 2 \cos x$$



5.5.1. Wartości dokładne

$$\int_{-10}^{-2} f_5(x) dx \approx -24.113157$$

$$\int_{-4}^0 f_5(x) dx \approx -4.667434$$

$$\int_{-2}^2 f_5(x) dx = 4 \sin(2) \approx 3.637189$$

$$\int_0^4 f_5(x) dx \approx 1.640224$$

$$\int_2^{10} f_5(x) dx \approx 18.299882$$

5.5.2. Pomiary

[-10, -2]										
n	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
Rectangles	-12,743	-29,812	-26,789	-25,840	-25,378	-25,107	-24,929	-24,804	-24,712	-24,641
	-47,2%	-23,6%	-11,1%	-7,2%	-5,2%	-4,1%	-3,4%	-2,9%	-2,5%	-2,2%
Trapezoidal	-8,440	-27,660	-25,354	-24,764	-24,518	-24,390	-24,314	-24,266	-24,234	-24,210
	-65,0%	-14,7%	-5,1%	-2,7%	-1,7%	-1,1%	-0,8%	-0,6%	-0,5%	-0,4%
Simpson	-1,755	-34,066	-22,398	-23,799	-24,009	-24,068	-24,090	-24,100	-24,105	-24,108
	-92,7%	-41,3%	-7,1%	-1,3%	-0,4%	-0,2%	-0,1%	-0,1%	0,0%	0,0%

[-4, 0]										
n	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
Rectangles	-12,168	-7,751	-6,651	-6,132	-5,828	-5,629	-5,488	-5,383	-5,302	-5,237
	-160,7%	-66,1%	-42,5%	-31,4%	-24,9%	-20,6%	-17,6%	-15,3%	-13,6%	-12,2%
Trapezoidal	-6,570	-4,952	-4,785	-4,732	-4,708	-4,696	-4,688	-4,683	-4,680	-4,678
	-40,8%	-6,1%	-2,5%	-1,4%	-0,9%	-0,6%	-0,4%	-0,3%	-0,3%	-0,2%
Simpson	-7,695	-4,413	-4,636	-4,659	-4,664	-4,666	-4,667	-4,667	-4,667	-4,667
	-64,9%	-5,5%	-0,7%	-0,2%	-0,1%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%

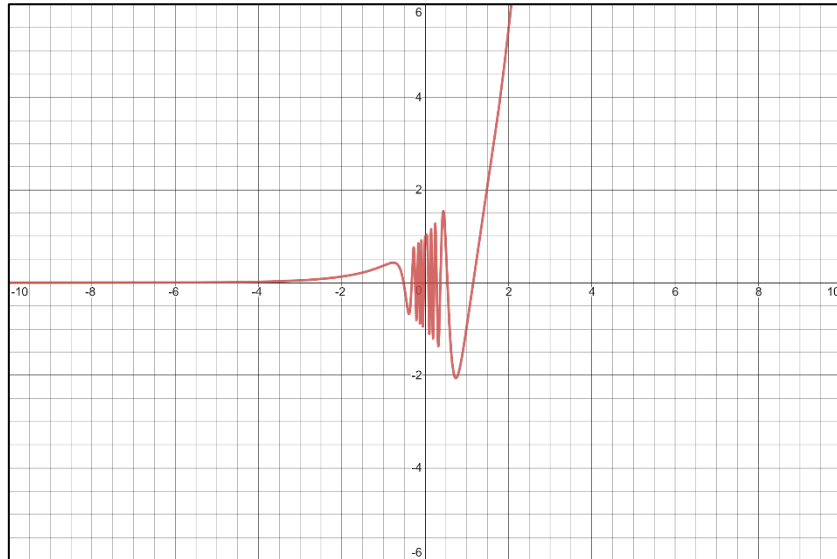
[-2, 2]										
n	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
Rectangles	-0,972	1,675	2,399	2,734	2,927	3,052	3,140	3,205	3,255	3,294
	126,7%	53,9%	34,0%	24,8%	19,5%	16,1%	13,7%	11,9%	10,5%	9,4%
Trapezoidal	2,335	3,329	3,501	3,561	3,589	3,603	3,612	3,618	3,622	3,625
	35,8%	8,5%	3,7%	2,1%	1,3%	0,9%	0,7%	0,5%	0,4%	0,3%
Simpson	4,224	3,660	3,641	3,638	3,638	3,637	3,637	3,637	3,637	3,637
	16,1%	0,6%	0,1%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%

[0, 4]										
n	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
Rectangles	5,643	2,690	2,210	2,022	1,925	1,866	1,827	1,799	1,778	1,762
	244,0%	64,0%	34,7%	23,3%	17,4%	13,8%	11,4%	9,7%	8,4%	7,4%
Trapezoidal	4,626	2,182	1,871	1,768	1,722	1,697	1,682	1,672	1,665	1,660
	182,1%	33,0%	14,1%	7,8%	5,0%	3,4%	2,5%	1,9%	1,5%	1,2%
Simpson	4,179	1,367	1,605	1,631	1,636	1,638	1,639	1,640	1,640	1,640
	154,8%	16,7%	2,1%	0,6%	0,2%	0,1%	0,1%	0,0%	0,0%	0,0%

[2, 10]										
n	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
Rectangles	12,841	23,467	20,122	19,214	18,834	18,640	18,529	18,460	18,414	18,383
	29,8%	28,2%	10,0%	5,0%	2,9%	1,9%	1,2%	0,9%	0,6%	0,5%
Trapezoidal	13,761	23,927	20,429	19,444	19,018	18,793	18,660	18,575	18,516	18,475
	24,8%	30,7%	11,6%	6,3%	3,9%	2,7%	2,0%	1,5%	1,2%	1,0%
Simpson	15,544	27,316	16,456	17,949	18,182	18,248	18,273	18,285	18,291	18,294
	15,1%	49,3%	10,1%	1,9%	0,6%	0,3%	0,1%	0,1%	0,1%	0,0%

5.6. Funkcja 6

$$f_6(x) = \cos\left(\frac{x+1}{x^2+0.04}\right)e^x$$



5.6.1. Wartości dokładne

$$\int_{-10}^{-2} f_6(x) dx \approx 0.131932$$

$$\int_{-4}^0 f_6(x) dx \approx 0.46991$$

$$\int_{-2}^2 f_6(x) dx \approx 1.92957$$

$$\int_0^4 f_6(x) dx \approx 44.6872$$

$$\int_2^{10} f_6(x) dx \approx 21838.3$$

5.6.2. Pomiary

[-10, -2]										
n	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
Rectangles	0,0100	0,0417	0,0633	0,0771	0,0864	0,0930	0,0980	0,1019	0,1049	0,1074
	91,8%	65,8%	48,1%	36,8%	29,2%	23,7%	19,6%	16,5%	13,9%	11,9%
Trapezoidal	0,2723	0,1728	0,1508	0,1427	0,1388	0,1368	0,1355	0,1347	0,1341	0,1337
	123,3%	41,7%	23,6%	17,0%	13,9%	12,2%	11,1%	10,4%	10,0%	9,6%
Simpson	0,1881	0,1397	0,1339	0,1326	0,1322	0,1321	0,1320	0,1320	0,1320	0,1320
	54,3%	14,5%	9,8%	8,8%	8,4%	8,3%	8,3%	8,2%	8,2%	8,2%

[-4, 0]										
n	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
Rectangles	0,2984	0,5657	0,6050	0,4001	0,2498	0,4715	0,7227	0,5770	0,2899	0,2574
	36,5%	20,4%	28,7%	14,9%	46,8%	0,3%	53,8%	22,8%	38,3%	45,2%
Trapezoidal	1,2716	1,0523	0,9294	0,6434	0,4445	0,6337	0,8617	0,6987	0,3980	0,3547
	170,6%	123,9%	97,8%	36,9%	5,4%	34,9%	83,4%	48,7%	15,3%	24,5%
Simpson	1,0227	0,9791	0,8697	0,5071	0,2569	0,5352	0,8816	0,7171	0,3627	0,3248
	117,6%	108,4%	85,1%	7,9%	45,3%	13,9%	87,6%	52,6%	22,8%	30,9%

[-2, 2]										
n	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
Rectangles	2,2448	0,5524	0,6609	1,7377	1,4021	0,7790	1,4683	2,0285	1,6730	1,2547
	16,3%	71,4%	65,8%	9,9%	27,3%	59,6%	23,9%	5,1%	13,3%	35,0%
Trapezoidal	7,5574	3,2086	2,4317	3,0659	2,4646	1,6645	2,2273	2,6926	2,2633	1,7860
	291,7%	66,3%	26,0%	58,9%	27,7%	13,7%	15,4%	39,5%	17,3%	7,4%
Simpson	6,3598	1,7591	2,6544	3,0183	2,2658	1,4087	2,3059	2,5682	2,4315	1,5597
	229,6%	8,8%	37,6%	56,4%	17,4%	27,0%	19,5%	33,1%	26,0%	19,2%

[0, 4]										
n	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
Rectangles	12,870	23,648	29,421	33,856	35,661	36,185	37,622	39,088	39,617	39,714
	71,2%	47,1%	34,2%	24,2%	20,2%	19,0%	15,8%	12,5%	11,3%	11,1%
Trapezoidal	63,846	49,136	46,412	46,599	45,856	44,681	44,904	45,460	45,281	44,811
	42,9%	10,0%	3,9%	4,3%	2,6%	0,0%	0,5%	1,7%	1,3%	0,3%
Simpson	49,822	44,233	44,063	45,754	45,437	44,104	44,392	45,080	44,897	44,463
	11,5%	1,0%	1,4%	2,4%	1,7%	1,3%	0,7%	0,9%	0,5%	0,5%

[2, 10]										
n	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
Rectangles	1605	6810	10400	12691	14240	15348	16178	16821	17334	17752
	92,6%	68,8%	52,4%	41,9%	34,8%	29,7%	25,9%	23,0%	20,6%	18,7%
Trapezoidal	45381	28698	24992	23635	22995	22644	22431	22293	22198	22130
	107,8%	31,4%	14,4%	8,2%	5,3%	3,7%	2,7%	2,1%	1,6%	1,3%
Simpson	31310	23136	22155	21947	21885	21861	21851	21846	21843	21841
	43,4%	5,9%	1,4%	0,5%	0,2%	0,1%	0,1%	0,0%	0,0%	0,0%

6. Wnioski

Metoda prostokątów w każdym przypadku była najgorsza, a czasami nawet jej błędy były rzędu kilkuset procent. Aby ta metoda zwracała względnie poprawne wyniki, ilość kroków musiała by być znacznie większa.

Metoda trapezów sprawdzała się znacznie lepiej, momentami była zbliżona dokładnością do metody Simpson'a, szczególnie gdy wykres funkcji był „ostry” tak jak w funkcji nr 6.

Metoda Simpsona dawała zdecydowanie najlepsze wyniki gdy mieliśmy do czynienia z funkcjami względnie gładkimi (funkcje nr 1-5), lecz nie specjalnie poradziła sobie z okolicami punktu 0 w funkcji nr 6. Pomimo to można ją uznać zdecydowanie za najlepszą z tych trzech metod, jako że daje najlepsze wyniki, a złożoność ma taką samą jak pozostałe metody.