

Национальный исследовательский университет информационных технологий,  
механики и оптики.

Кафедра вычислительной техники.

Конструкторско-техническое обеспечение производства ЭВМ.

**Домашняя работа №2**

Графовое представление электрических схем

*Вариант 5*

Студент:

*Куклина М.Д., Р3401*

Преподаватель:

*Поляков В.И.*

Санкт-Петербург, 2018

# 1. Представление исходных данных

## 1.1. Матрица комплексов

Матрица в транспонированном виде.

	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$	$e_5$	$e_6$	$e_7$	$e_8$	$e_9$	$e_{10}$	$e_{11}$	$e_{12}$	$e_{13}$	$e_{14}$	$e_{15}$	$e_{16}$	$e_{17}$
$u_1$	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0
$u_2$	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
$u_3$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1
$u_4$	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$u_5$	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
$u_6$	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
$u_7$	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
$u_8$	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
$u_9$	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0
$u_{10}$	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
$u_{11}$	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
$u_{12}$	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
$u_{13}$	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0
$u_{14}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1
$u_{15}$	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1
$u_{16}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0
$u_{17}$	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
$u_{18}$	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$u_{19}$	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0
$u_{20}$	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	0	0
$u_{21}$	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
$u_{22}$	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
$u_{23}$	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0
$u_{24}$	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
$u_{25}$	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0
$u_{26}$	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0
$u_{27}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0
$u_{28}$	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0
$u_{29}$	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0
$u_{30}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0
$u_{31}$	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0
$u_{32}$	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0

## 1.2. Матрица соединений

Из-за того, что граф неориентированный, достаточно указать верхнюю треугольную матрицу.

	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$	$e_5$	$e_6$	$e_7$	$e_8$	$e_9$	$e_{10}$	$e_{11}$	$e_{12}$	$e_{13}$	$e_{14}$	$e_{15}$	$e_{16}$	$e_{17}$
$e_1$	0	1	0	0	1	1	0	1	0	0	2	0	0	0	0	2	1
$e_2$		0	0	2	2	2	0	0	1	0	1	3	2	0	1	1	1
$e_3$			0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	2	1	1	0
$e_4$				0	0	1	0	0	1	0	0	3	1	1	1	1	3
$e_5$					0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1
$e_6$						0	0	1	2	1	0	2	3	1	1	2	1
$e_7$							0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0
$e_8$								0	0	0	1	0	1	0	0	0	0
$e_9$									0	2	1	2	0	1	2	0	1
$e_{10}$										0	1	0	1	1	3	1	1
$e_{11}$											0	0	0	0	1	0	0
$e_{12}$												0	2	1	2	2	1
$e_{13}$													0	0	2	3	1
$e_{14}$														0	2	3	2
$e_{15}$															0	1	0
$e_{16}$																0	3
$e_{17}$																	0

## 2. Раскраска графа методом упорядочивания вершин

1. Подсчитываем число  $r_i$  ненулевых элементов в каждом ряду  $i$  в матрице соединений:

$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$	$e_5$	$e_6$	$e_7$	$e_8$	$e_9$	$e_{10}$	$e_{11}$	$e_{12}$	$e_{13}$	$e_{14}$	$e_{15}$	$e_{16}$	$e_{17}$
7	11	5	9	5	13	3	4	9	8	7	10	10	9	12	13	11

2. Упорядочим вершины графа в порядке невозрастания  $r_i$ :

$e_6$	$e_{16}$	$e_{15}$	$e_2$	$e_{17}$	$e_{12}$	$e_{13}$	$e_4$	$e_9$	$e_{14}$	$e_{10}$	$e_1$	$e_{11}$	$e_3$	$e_5$	$e_8$	$e_7$
13	13	12	11	11	10	10	9	9	9	8	7	7	5	5	4	3

3. Просматривая последовательность слева направо, закрашиваем в некоторый новый цвет все вершины, которые не смежны ещё окрашенным в этот цвет.

В данном случае это вершины 6 и 5, которые раскрашивается в один цвет.

4. Удаляем окрашенные рёбра из таблицы.

5. Повторяем до тех пор, пока не останется неокрашенных вершин.

(а) Следующий шаг.

	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$	$e_7$	$e_8$	$e_9$	$e_{10}$	$e_{11}$	$e_{12}$	$e_{13}$	$e_{14}$	$e_{15}$	$e_{16}$	$e_{17}$	r
$e_1$	0	1	0	0	0	1	0	0	2	0	0	0	0	2	1	5
$e_2$		0	0	2	0	0	1	0	1	3	2	0	1	1	1	9
$e_3$			0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	1	1	0	4
$e_4$				0	0	0	1	0	0	3	1	1	1	1	3	8
$e_7$					0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	3
$e_8$						0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	3
$e_9$							0	2	1	2	0	1	2	0	1	8
$e_{10}$								0	1	0	1	1	3	1	1	7
$e_{11}$									0	0	0	0	1	0	0	6
$e_{12}$										0	2	1	2	2	1	9
$e_{13}$											0	0	2	3	1	9
$e_{14}$												0	2	3	2	8
$e_{15}$													0	1	0	11
$e_{16}$														0	3	11
$e_{17}$															0	9

$e_{15}$	$e_{16}$	$e_2$	$e_{12}$	$e_{13}$	$e_{17}$	$e_4$	$e_9$	$e_{14}$	$e_{10}$	$e_{11}$	$e_1$	$e_3$	$e_7$	$e_8$
11	11	9	9	9	9	8	8	8	7	6	5	4	3	3

Вершины 15, 1.

(b) Следующий шаг.

	$e_2$	$e_3$	$e_4$	$e_7$	$e_8$	$e_9$	$e_{10}$	$e_{11}$	$e_{12}$	$e_{13}$	$e_{14}$	$e_{16}$	$e_{17}$	r
$e_2$	0	0	2	0	0	1	0	1	3	2	0	1	1	7
$e_3$		0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	1	0	3
$e_4$			0	0	0	1	0	0	3	1	1	1	3	7
$e_7$				0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	2
$e_8$					0	0	0	1	0	1	0	0	0	2
$e_9$						0	2	1	2	0	1	0	1	5
$e_{10}$							0	1	0	1	1	1	1	6
$e_{11}$								0	0	0	0	0	0	4
$e_{12}$									0	2	1	2	1	8
$e_{13}$										0	0	3	1	8
$e_{14}$											0	3	2	7
$e_{16}$												0	3	9
$e_{17}$													0	8

$e_{16}$	$e_{12}$	$e_{13}$	$e_{17}$	$e_2$	$e_4$	$e_{14}$	$e_{10}$	$e_9$	$e_{11}$	$e_3$	$e_7$	$e_8$
9	8	8	8	7	7	7	6	5	4	3	2	2

Вершины 16, 9, 8.

(с) Следующий шаг.

	$e_2$	$e_3$	$e_4$	$e_7$	$e_{10}$	$e_{11}$	$e_{12}$	$e_{13}$	$e_{14}$	$e_{17}$	r
$e_2$	0	0	2	0	0	1	3	2	0	1	5
$e_3$		0	0	0	0	0	0	1	2	0	2
$e_4$			0	0	0	0	3	1	1	3	5
$e_7$				0	0	0	1	0	0	0	1
$e_{10}$					0	1	0	1	1	1	5
$e_{11}$						0	0	0	0	0	2
$e_{12}$							0	2	1	1	6
$e_{13}$								0	0	1	6
$e_{14}$									0	2	5
$e_{17}$										0	6

$e_{12}$	$e_{13}$	$e_{17}$	$e_2$	$e_4$	$e_{10}$	$e_{14}$	$e_3$	$e_{11}$	$e_7$
6	6	6	5	5	5	5	2	2	1

Вершины 12, 10, 3, 7.

(d) Следующий шаг.

	$e_2$	$e_4$	$e_{11}$	$e_{13}$	$e_{14}$	$e_{17}$	r
$e_2$	0	2	1	2	0	1	4
$e_4$		0	0	1	1	3	4
$e_{11}$			0	0	0	0	1
$e_{13}$				0	0	1	3
$e_{14}$					0	2	2
$e_{17}$						0	4

$e_2$	$e_4$	$e_{17}$	$e_{13}$	$e_{11}$	$e_{14}$
4	4	4	3	2	1

Вершины 2, 14.

(e) Следующий шаг.

	$e_4$	$e_{11}$	$e_{13}$	$e_{17}$	$r$
$e_4$	0	0	1	3	2
$e_{11}$		0	0	0	0
$e_{13}$			0	1	2
$e_{17}$				0	2

$e_4$	$e_{13}$	$e_{17}$	$e_{11}$
2	2	2	0

Вершины 4, 11.

(f) Следующий шаг.

	$e_{13}$	$e_{17}$	$r$
$e_{13}$	0	1	1
$e_{17}$		0	1

Вершина 13.

(g) Следующий шаг. Вершина 17.

Таким образом, получаем следующую раскраску.

**Цвет 1:** 15, 1.

**Цвет 2:** 16, 9, 8.

**Цвет 3:** 12, 10, 3, 7.

**Цвет 4:** 2, 14.

**Цвет 5:** 4, 11.

**Цвет 6:** 13.

**Цвет 7:** 17.

### 3. Размещение элементов методом обратного размещения

Зададим поверхность:

$p_1$	$p_2$	$p_3$	$p_4$	$p_5$	$p_6$
$p_7$	$p_8$	$p_9$	$p_{10}$	$p_{11}$	$p_{12}$
$p_{13}$	$p_{14}$	$p_{15}$	$p_{16}$	$p_{17}$	

Матрица  $D$  расстояний между позициями для размещения.

	$p_1$	$p_2$	$p_3$	$p_4$	$p_5$	$p_6$	$p_7$	$p_8$	$p_9$	$p_{10}$	$p_{11}$	$p_{12}$	$p_{13}$	$p_{14}$	$p_{15}$	$p_{16}$	$p_{17}$
$p_1$	0	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	6	2	3	4	5	6
$p_2$	1	0	1	2	3	4	2	1	2	3	4	5	3	2	3	4	5
$p_3$	2	1	0	1	2	3	3	2	1	2	3	4	4	3	2	3	4
$p_4$	3	2	1	0	1	2	4	3	2	1	2	3	5	4	3	2	3
$p_5$	4	3	2	1	0	1	5	4	3	2	1	2	6	5	4	3	2
$p_6$	5	4	3	2	1	0	6	5	4	3	2	1	7	6	5	4	3
$p_7$	1	2	3	4	5	6	0	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
$p_8$	2	1	2	3	4	5	1	0	1	2	3	4	2	1	2	3	4
$p_9$	3	2	1	2	3	4	2	1	0	1	2	3	3	2	1	2	3
$p_{10}$	4	3	2	1	2	3	3	2	1	0	1	2	4	3	2	1	2
$p_{11}$	5	4	3	2	1	2	4	3	2	1	0	1	5	4	3	2	1
$p_{12}$	6	5	4	3	2	1	5	4	3	2	1	0	6	5	4	3	2
$p_{13}$	2	3	4	5	6	7	1	2	3	4	5	6	0	1	2	3	4
$p_{14}$	3	2	3	4	5	6	2	1	2	3	4	5	1	0	1	2	3
$p_{15}$	4	3	2	3	4	5	3	2	1	2	3	4	2	1	0	1	2
$p_{16}$	5	4	3	2	3	4	4	3	2	1	2	3	3	2	1	0	1
$p_{17}$	6	5	4	3	2	3	5	4	3	2	1	2	4	3	2	1	0

Подсчитываем число  $r_i$  ненулевых элементов в каждом ряду  $i$  в матрице соединений:

$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$	$e_5$	$e_6$	$e_7$	$e_8$	$e_9$	$e_{10}$	$e_{11}$	$e_{12}$	$e_{13}$	$e_{14}$	$e_{15}$	$e_{16}$	$e_{17}$
7	11	5	9	5	13	3	4	9	8	7	10	10	9	12	13	11

Порядок позиций по убыванию суммы величин  $D$ .

$p_1$	$p_2$	$p_3$	$p_4$	$p_5$	$p_6$	$p_7$	$p_8$	$p_9$	$p_{10}$	$p_{11}$	$p_{12}$	$p_{13}$	$p_{14}$	$p_{15}$	$p_{16}$	$p_{17}$
63	51	45	45	51	63	57	45	39	39	45	57	63	51	45	45	51

Упорядочиваем:

$e_6$	$e_{16}$	$e_{15}$	$e_2$	$e_{17}$	$e_{12}$	$e_{13}$	$e_4$	$e_9$	$e_{14}$	$e_{10}$	$e_1$	$e_{11}$	$e_3$	$e_5$	$e_8$	$e_7$
13	13	12	11	11	10	10	9	9	9	8	7	7	5	5	4	3

$p_{10}$	$p_9$	$p_{11}$	$p_{15}$	$p_{16}$	$p_3$	$p_4$	$p_8$	$p_{14}$	$p_{17}$	$p_2$	$p_5$	$p_{12}$	$p_7$	$p_1$	$p_{13}$	$p_6$
39	39	45	45	45	45	45	45	51	51	51	51	57	57	63	63	63

Таким образом, искомое размещение:

39	39	45	45	45	45	45	45	51	51	51	51	57	57	63	63	63
$p_{10}$	$p_9$	$p_{11}$	$p_{15}$	$p_{16}$	$p_3$	$p_4$	$p_8$	$p_{14}$	$p_{17}$	$p_2$	$p_5$	$p_{12}$	$p_7$	$p_1$	$p_{13}$	$p_6$
$e_6$	$e_{16}$	$e_{15}$	$e_2$	$e_{17}$	$e_{12}$	$e_{13}$	$e_4$	$e_9$	$e_{14}$	$e_{10}$	$e_1$	$e_{11}$	$e_3$	$e_5$	$e_8$	$e_7$
13	13	12	11	11	10	10	9	9	9	8	7	7	5	5	4	3

Функционал данного размещения:  $F = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j d_{ij} r_{ij} = 338$ .

На рисунке не представлены линии соединений, так как они слишком сильно загрозили бы изображению.

$e_5$	$e_{10}$	$e_{12}$	$e_{13}$	$e_1$	$e_7$
$e_3$	$e_4$	$e_{16}$	$e_6$	$e_{15}$	$e_{11}$
$e_8$	$e_9$	$e_2$	$e_{17}$	$e_{14}$	

## 4. Поиск кратчайших путей

Матрица весов:  $c_{ij} = r_{ij} d_{ij}$ :

	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_4$	$c_5$	$c_6$	$c_7$	$c_8$	$c_9$	$c_{10}$	$c_{11}$	$c_{12}$	$c_{13}$	$c_{14}$	$c_{15}$	$c_{16}$	$c_{17}$
$c_1$		1			4	5		2			10					10	6
$c_2$	1			4	6	8			2		4	15	6		3	4	5
$c_3$						3							4	6	2	3	
$c_4$		4				2			2			9	5	4	3	2	9
$c_5$	4	6									1					3	2
$c_6$	5	8	3	2				5	8	3		2	21	6	5	8	3
$c_7$												5			3	4	
$c_8$	2					5					3		2				
$c_9$		2		2		8				2	2	6		2	2		3
$c_{10}$						3			2		1		4	3	6	1	2
$c_{11}$	10	4			1			3	2	1					3		
$c_{12}$		15		9		2	5		6				12	5	8	6	2
$c_{13}$		6	4	5		21		2		4		12			4	9	4
$c_{14}$			6	4		6			2	3		5			2	6	6
$c_{15}$		3	2	3		5	3		2	6	3	8	4	2		1	
$c_{16}$	10	4	3	2	3	8	4			1		6	9	6	1		3
$c_{17}$	6	5		9	2	3			3	2		2	4	6		3	



Найдём кратчайшие пути от вершины 1 до всех остальных.

1.  $l(c_1) = 0^+; l(c_i) = \infty$  для всех  $i \neq 1, p = c_1$ .

$c_1$	$0^+$
$c_2$	$\infty$
$c_3$	$\infty$
$c_4$	$\infty$
$c_5$	$\infty$
$c_6$	$\infty$
$c_7$	$\infty$
$c_8$	$\infty$
$c_9$	$\infty$
$c_{10}$	$\infty$
$c_{11}$	$\infty$
$c_{12}$	$\infty$
$c_{13}$	$\infty$
$c_{14}$	$\infty$
$c_{15}$	$\infty$
$c_{16}$	$\infty$
$c_{17}$	$\infty$

2.  $\Gamma p = \{c_2, c_5, c_6, c_8, c_1 1, c_1 6, c_1 7\}$ . Уточним временные пометки.

$$l(c_2) = \min(\infty, 0^+ + 1) = 1$$

$$l(c_5) = \min(\infty, 0^+ + 4) = 4$$

$$l(c_6) = \min(\infty, 0^+ + 5) = 5$$

$$l(c_8) = \min(\infty, 0^+ + 2) = 2$$

$$l(c_{11}) = \min(\infty, 0^+ + 10) = 10$$

$$l(c_{16}) = \min(\infty, 0^+ + 10) = 10$$

$$l(c_{17}) = \min(\infty, 0^+ + 6) = 6$$

$$l(c^*) = \min(l(c_i)) = l(c_2) = 1$$

$c_1$	$0^+$	
$c_2$	$\infty$	$1^+$
$c_3$	$\infty$	$\infty$
$c_4$	$\infty$	$\infty$
$c_5$	$\infty$	4
$c_6$	$\infty$	5
$c_7$	$\infty$	$\infty$
$c_8$	$\infty$	2
$c_9$	$\infty$	$\infty$
$c_{10}$	$\infty$	$\infty$
$c_{11}$	$\infty$	10
$c_{12}$	$\infty$	$\infty$
$c_{13}$	$\infty$	$\infty$
$c_{14}$	$\infty$	$\infty$
$c_{15}$	$\infty$	$\infty$
$c_{16}$	$\infty$	10
$c_{17}$	$\infty$	6

3.  $\Gamma p = \{c_4, c_5, c_6, c_9, c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{15}, c_{16}, c_{17}\}$ .

$$l(c_4) = \min(\infty, 1^+ + 4) = 5$$

$$l(c_5) = \min(4, 1^+ + 6) = 4$$

$$l(c_6) = \min(5, 1^+ + 8) = 5$$

$$l(c_9) = \min(\infty, 1^+ + 2) = 3$$

$$l(c_{11}) = \min(10, 1^+ + 4) = 5$$

$$l(c_{12}) = \min(\infty, 1^+ + 15) = 16$$

$$l(c_{13}) = \min(\infty, 1^+ + 6) = 7$$

$$l(c_{15}) = \min(\infty, 1^+ + 3) = 4$$

$$l(c_{16}) = \min(10, 1^+ + 4) = 5$$

$$l(c_{17}) = \min(6, 1^+ + 5) = 6$$

$$l(\min(c_i)) = l(c_9) = 3$$

$c_1$	$0^+$		
$c_2$	$\infty$	$1^+$	
$c_3$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$c_4$	$\infty$	$\infty$	5
$c_5$	$\infty$	4	4
$c_6$	$\infty$	5	5
$c_7$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$c_8$	$\infty$	2	$\infty$
$c_9$	$\infty$	$\infty$	$3^+$
$c_{10}$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$c_{11}$	$\infty$	10	5
$c_{12}$	$\infty$	$\infty$	16
$c_{13}$	$\infty$	$\infty$	7
$c_{14}$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$c_{15}$	$\infty$	$\infty$	4
$c_{16}$	$\infty$	10	5
$c_{17}$	$\infty$	6	6

$$4. \Gamma p = \{c_4, c_6, c_{10}, c_{11}, c_{12}, c_{14}, c_{15}, c_{17}\}.$$

$$l(c_4) = \min(5, 3^+ + 2) = 5$$

$$l(c_6) = \min(5, 3^+ + 8) = 5$$

$$l(c_{10}) = \min(\infty, 3^+ + 2) = 5$$

$$l(c_{11}) = \min(5, 3^+ + 2) = 5$$

$$l(c_{12}) = \min(16, 3^+ + ) = 9$$

$$l(c_{14}) = \min(\infty, 3^+ + ) = 5$$

$$l(c_{15}) = \min(4, 3^+ + 2) = 4$$

$$l(c_{17}) = \min(6, 3^+ + 3) = 6$$

$c_1$	$0^+$			
$c_2$	$\infty$	$1^+$		
$c_3$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$c_4$	$\infty$	$\infty$	5	5
$c_5$	$\infty$	4	4	4
$c_6$	$\infty$	5	5	5
$c_7$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$c_8$	$\infty$	2	$\infty$	$\infty$
$c_9$	$\infty$	$\infty$	$3^+$	
$c_{10}$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	5
$c_{11}$	$\infty$	10	5	5
$c_{12}$	$\infty$	$\infty$	16	9
$c_{13}$	$\infty$	$\infty$	7	7
$c_{14}$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	5
$c_{15}$	$\infty$	$\infty$	4	$4^+$
$c_{16}$	$\infty$	10	5	5
$c_{17}$	$\infty$	6	6	6

5.  $\Gamma p = \{c_3, c_4, c_6, c_7, c_{10}, c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{14}, c_{16}\}$

$$l(c_3) = \min(\infty, 4^+ + 2) = 6$$

$$l(c_4) = \min(5, 4^+ + 3) = 5$$

$$l(c_6) = \min(5, 4^+ + 5) = 5$$

$$l(c_7) = \min(\infty, 4^+ + 3) = 7$$

$$l(c_{10}) = \min(5, 4^+ + 6) = 5$$

$$l(c_{11}) = \min(5, 4^+ + 3) = 5$$

$$l(c_{12}) = \min(9, 4^+ + 8) = 9$$

$$l(c_{13}) = \min(7, 4^+ + 4) = 7$$

$$l(c_{14}) = \min(5, 4^+ + 2) = 5$$

$$l(c_{16}) = \min(5, 4^+ + 1) = 5$$

$c_1$	$0^+$				
$c_2$	$\infty$	$1^+$			
$c_3$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	6
$c_4$	$\infty$	$\infty$	5	5	5
$c_5$	$\infty$	4	4	4	$4^+$
$c_6$	$\infty$	5	5	5	5
$c_7$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	7
$c_8$	$\infty$	2	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$c_9$	$\infty$	$\infty$	$3^+$		
$c_{10}$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	5	5
$c_{11}$	$\infty$	10	5	5	5
$c_{12}$	$\infty$	$\infty$	16	9	9
$c_{13}$	$\infty$	$\infty$	7	7	7
$c_{14}$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	5	5
$c_{15}$	$\infty$	$\infty$	4	$4^+$	
$c_{16}$	$\infty$	10	5	5	5
$c_{17}$	$\infty$	6	6	6	6

6.  $\Gamma p = \{c_{11}, c_{16}, c_{17}\}$

$$l(c_{11}) = \min(5, 4^+ + 1) = 5$$

$$l(c_{16}) = \min(5, 4^+ + 3) = 5$$

$$l(c_{17}) = \min(6, 4^+ + 2) = 6$$

$c_1$	$0^+$					
$c_2$	$\infty$	$1^+$				
$c_3$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	6	6
$c_4$	$\infty$	$\infty$	5	5	5	$5^+$
$c_5$	$\infty$	4	4	4	$4^+$	
$c_6$	$\infty$	5	5	5	5	5
$c_7$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	7	7
$c_8$	$\infty$	2	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$c_9$	$\infty$	$\infty$	$3^+$			
$c_{10}$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	5	5	5
$c_{11}$	$\infty$	10	5	5	5	5
$c_{12}$	$\infty$	$\infty$	16	9	9	9
$c_{13}$	$\infty$	$\infty$	7	7	7	7
$c_{14}$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	5	5	5
$c_{15}$	$\infty$	$\infty$	4	$4^+$		
$c_{16}$	$\infty$	10	5	5	5	5
$c_{17}$	$\infty$	6	6	6	6	6

7.  $\Gamma p = \{c_6, c_{12}, c_{13}, c_{14}, c_{16}, c_{17}\}$

$$l(c_6) = \min(5, 5^+ + 2) = 5$$

$$l(c_{12}) = \min(9, 5^+ + 9) = 9$$

$$l(c_{13}) = \min(7, 5^+ + 5) = 7$$

$$l(c_{14}) = \min(5, 5^+ + 4) = 5$$

$$l(c_{16}) = \min(5, 5^+ + 2) = 5$$

$$l(c_{17}) = \min(6, 5^+ + 9) = 6$$

$c_1$	$0^+$						
$c_2$	$\infty$	$1^+$					
$c_3$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	6	6	6
$c_4$	$\infty$	$\infty$	5	5	5	$5^+$	
$c_5$	$\infty$	4	4	4	$4^+$		
$c_6$	$\infty$	5	5	5	5	5	$5^+$
$c_7$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	7	7	7
$c_8$	$\infty$	2	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$c_9$	$\infty$	$\infty$	$3^+$				
$c_{10}$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	5	5	5	5
$c_{11}$	$\infty$	10	5	5	5	5	5
$c_{12}$	$\infty$	$\infty$	16	9	9	9	9
$c_{13}$	$\infty$	$\infty$	7	7	7	7	7
$c_{14}$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	5	5	5	5
$c_{15}$	$\infty$	$\infty$	4	$4^+$			
$c_{16}$	$\infty$	10	5	5	5	5	5
$c_{17}$	$\infty$	6	6	6	6	6	6

$$8. \Gamma p = \{c_3, c_8, c_{10}, c_{12}, c_{13}, c_{14}, c_{16}, c_{17}\}$$

$$l(c_3) = \min(6, 5^+ + 8) = 6$$

$$l(c_8) = \min(\infty, 5^+ + 5) = 10$$

$$l(c_{10}) = \min(5, 5^+ + 3) = 5$$

$$l(c_{12}) = \min(9, 5^+ + 2) = 7$$

$$l(c_{13}) = \min(7, 5^+ + 21) = 7$$

$$l(c_{14}) = \min(5, 5^+ + 6) = 5$$

$$l(c_{16}) = \min(5, 5^+ + 8) = 5$$

$$l(c_{17}) = \min(6, 5^+ + 3) = 6$$

$c_1$	$0^+$							
$c_2$	$\infty$	$1^+$						
$c_3$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	6	6	6	6
$c_4$	$\infty$	$\infty$	5	5	5	$5^+$		
$c_5$	$\infty$	4	4	4	$4^+$			
$c_6$	$\infty$	5	5	5	5	5	$5^+$	
$c_7$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	7	7	7	7
$c_8$	$\infty$	2	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	10
$c_9$	$\infty$	$\infty$	$3^+$					
$c_{10}$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	5	5	5	5	$5^+$
$c_{11}$	$\infty$	10	5	5	5	5	5	5
$c_{12}$	$\infty$	$\infty$	16	9	9	9	9	7
$c_{13}$	$\infty$	$\infty$	7	7	7	7	7	7
$c_{14}$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	5	5	5	5	5
$c_{15}$	$\infty$	$\infty$	4	$4^+$				
$c_{16}$	$\infty$	10	5	5	5	5	5	5
$c_{17}$	$\infty$	6	6	6	6	6	6	6

$$9. \Gamma p = \{c_{11}, c_{13}, c_{14}, c_{16}, c_{17}\}$$

$$l(c_{11}) = \min(5, 5^+ + 1) = 5$$

$$l(c_{13}) = \min(7, 5^+ + 4) = 7$$

$$l(c_{14}) = \min(5, 5^+ + 3) = 5$$

$$l(c_{16}) = \min(5, 5^+ + 1) = 5$$

$$l(c_{17}) = \min(6, 5^+ + 2) = 6$$

$c_1$	$0^+$								
$c_2$	$\infty$	$1^+$							
$c_3$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	6	6	6	6	6
$c_4$	$\infty$	$\infty$	5	5	5	$5^+$			
$c_5$	$\infty$	4	4	4	$4^+$				
$c_6$	$\infty$	5	5	5	5	5	$5^+$		
$c_7$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	7	7	7	7	7
$c_8$	$\infty$	2	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	10	10
$c_9$	$\infty$	$\infty$	$3^+$						
$c_{10}$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	5	5	5	5	$5^+$	
$c_{11}$	$\infty$	10	5	5	5	5	5	5	$5^+$
$c_{12}$	$\infty$	$\infty$	16	9	9	9	9	7	7
$c_{13}$	$\infty$	$\infty$	7	7	7	7	7	7	7
$c_{14}$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	5	5	5	5	5	5
$c_{15}$	$\infty$	$\infty$	4	$4^+$					
$c_{16}$	$\infty$	10	5	5	5	5	5	5	5
$c_{17}$	$\infty$	6	6	6	6	6	6	6	6

10.  $\Gamma p = \{c_8\}$

$$l(c_8) = \min(10, 5^+ + 3) = 8$$

$c_1$	$0^+$									
$c_2$	$\infty$	$1^+$								
$c_3$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	6	6	6	6	6	6
$c_4$	$\infty$	$\infty$	5	5	5	$5^+$				
$c_5$	$\infty$	4	4	4	$4^+$					
$c_6$	$\infty$	5	5	5	5	5	$5^+$			
$c_7$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	7	7	7	7	7	7
$c_8$	$\infty$	2	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	10	10	8
$c_9$	$\infty$	$\infty$	$3^+$							
$c_{10}$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	5	5	5	5	$5^+$		
$c_{11}$	$\infty$	10	5	5	5	5	5	5	$5^+$	
$c_{12}$	$\infty$	$\infty$	16	9	9	9	9	7	7	7
$c_{13}$	$\infty$	$\infty$	7	7	7	7	7	7	7	7
$c_{14}$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	5	5	5	5	5	5	$5^+$
$c_{15}$	$\infty$	$\infty$	4	$4^+$						
$c_{16}$	$\infty$	10	5	5	5	5	5	5	5	5
$c_{17}$	$\infty$	6	6	6	6	6	6	6	6	6

11.  $\Gamma p = \{c_3, c_{12}, c_{16}, c_{17}\}$

$$l(c_3) = \min(6, 5^+ + 6) = 6$$

$$l(c_{12}) = \min(7, 5^+ + 5) = 7$$



$$l(c_{16} = \min(5, 5^+ + 6) = 5$$

$$l(c_{17} = \min(6, 5^+ + 6) = 6$$

$c_1$	$0^+$										
$c_2$	$\infty$	$1^+$									
$c_3$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	6	6	6	6	6	6	6
$c_4$	$\infty$	$\infty$	5	5	5	$5^+$					
$c_5$	$\infty$	4	4	4	$4^+$						
$c_6$	$\infty$	5	5	5	5	5	$5^+$				
$c_7$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	7	7	7	7	7	7	7
$c_8$	$\infty$	2	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	10	10	8	8
$c_9$	$\infty$	$\infty$	$3^+$								
$c_{10}$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	5	5	5	5	$5^+$			
$c_{11}$	$\infty$	10	5	5	5	5	5	5	$5^+$		
$c_{12}$	$\infty$	$\infty$	16	9	9	9	9	7	7	7	7
$c_{13}$	$\infty$	$\infty$	7	7	7	7	7	7	7	7	7
$c_{14}$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	5	5	5	5	5	5	$5^+$	
$c_{15}$	$\infty$	$\infty$	4	$4^+$							
$c_{16}$	$\infty$	10	5	5	5	5	5	5	5	5	$5^+$
$c_{17}$	$\infty$	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6

$$12. \Gamma p = \{c_3, c_7, c_{12}, c_{13}, c_{17}\}$$

$$l(c_3) = \min(6, 5^+ + 3) = 6$$

$$l(c_7) = \min(7, 5^+ + 4) = 7$$

$$l(c_{12}) = \min(7, 5^+ + 6) = 7$$

$$l(c_{13}) = \min(7, 5^+ + 9) = 7$$

$$l(c_{17}) = \min(6, 5^+ + 3) = 6$$

$c_1$	$0^+$											
$c_2$	$\infty$	$1^+$										
$c_3$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	6	6	6	6	6	6	6	$6^+$
$c_4$	$\infty$	$\infty$	5	5	5	$5^+$						
$c_5$	$\infty$	4	4	4	$4^+$							
$c_6$	$\infty$	5	5	5	5	5	$5^+$					
$c_7$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	7	7	7	7	7	7	7	7
$c_8$	$\infty$	2	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	10	10	8	8	8
$c_9$	$\infty$	$\infty$	$3^+$									
$c_{10}$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	5	5	5	5	$5^+$				
$c_{11}$	$\infty$	10	5	5	5	5	5	5	$5^+$			
$c_{12}$	$\infty$	$\infty$	16	9	9	9	9	7	7	7	7	7
$c_{13}$	$\infty$	$\infty$	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
$c_{14}$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	5	5	5	5	5	5	$5^+$		
$c_{15}$	$\infty$	$\infty$	4	$4^+$								
$c_{16}$	$\infty$	10	5	5	5	5	5	5	5	5	$5^+$	
$c_{17}$	$\infty$	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6

13.  $\Gamma p = \{c_{13}\}$ .

$$l(c_{13}) = \max(7, 6^+ + 4) = 7$$

$c_1$	$0^+$												
$c_2$	$\infty$	$1^+$											
$c_3$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	6	6	6	6	6	6	6	$6^+$	
$c_4$	$\infty$	$\infty$	5	5	5	$5^+$							
$c_5$	$\infty$	4	4	4	$4^+$								
$c_6$	$\infty$	5	5	5	5	5	$5^+$						
$c_7$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	7	7	7	7	7	7	7	7	7
$c_8$	$\infty$	2	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	10	10	8	8	8	8
$c_9$	$\infty$	$\infty$	$3^+$										
$c_{10}$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	5	5	5	5	$5^+$					
$c_{11}$	$\infty$	10	5	5	5	5	5	5	$5^+$				
$c_{12}$	$\infty$	$\infty$	16	9	9	9	9	7	7	7	7	7	7
$c_{13}$	$\infty$	$\infty$	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
$c_{14}$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	5	5	5	5	5	5	$5^+$			
$c_{15}$	$\infty$	$\infty$	4	$4^+$									
$c_{16}$	$\infty$	10	5	5	5	5	5	5	5	5	$5^+$		
$c_{17}$	$\infty$	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	$6^+$

14.  $\Gamma p = \{c_{12}, c_{13}\}$

$$l(c_{12}) = \max(7, 6^+ + 2) = 7$$

$$l(c_{13}) = \max(7, 6^+ + 4) = 7$$

$c_1$	$0^+$													
$c_2$	$\infty$	$1^+$												
$c_3$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	6	6	6	6	6	6	6	$6^+$		
$c_4$	$\infty$	$\infty$	5	5	5	$5^+$								
$c_5$	$\infty$	4	4	4	$4^+$									
$c_6$	$\infty$	5	5	5	5	5	$5^+$							
$c_7$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	7	7	7	7	7	7	7	7	7	$7^+$
$c_8$	$\infty$	2	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	10	10	8	8	8	8	8
$c_9$	$\infty$	$\infty$	$3^+$											
$c_{10}$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	5	5	5	5	$5^+$						
$c_{11}$	$\infty$	10	5	5	5	5	5	5	$5^+$					
$c_{12}$	$\infty$	$\infty$	16	9	9	9	9	7	7	7	7	7	7	7
$c_{13}$	$\infty$	$\infty$	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
$c_{14}$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	5	5	5	5	5	5	$5^+$				
$c_{15}$	$\infty$	$\infty$	4	$4^+$										
$c_{16}$	$\infty$	10	5	5	5	5	5	5	5	5	$5^+$			
$c_{17}$	$\infty$	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	$6^+$	

15.  $\Gamma p = \{c_{12}\}$

$$l(c_{12}) = \max(7, 7^+ + 5) = 7$$

$c_1$	$0^+$													
$c_2$	$\infty$	$1^+$												
$c_3$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	6	6	6	6	6	6	6	$6^+$		
$c_4$	$\infty$	$\infty$	5	5	5	$5^+$								
$c_5$	$\infty$	4	4	4	$4^+$									
$c_6$	$\infty$	5	5	5	5	5	$5^+$							
$c_7$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	7	7	7	7	7	7	7	7	7	$7^+$
$c_8$	$\infty$	2	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	10	10	8	8	8	8	8
$c_9$	$\infty$	$\infty$	$3^+$											
$c_{10}$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	5	5	5	5	$5^+$						
$c_{11}$	$\infty$	10	5	5	5	5	5	5	$5^+$					
$c_{12}$	$\infty$	$\infty$	16	9	9	9	9	7	7	7	7	7	7	$7^+$
$c_{13}$	$\infty$	$\infty$	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
$c_{14}$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	5	5	5	5	5	5	$5^+$				
$c_{15}$	$\infty$	$\infty$	4	$4^+$										
$c_{16}$	$\infty$	10	5	5	5	5	5	5	5	5	$5^+$			
$c_{17}$	$\infty$	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	$6^+$	

16.  $\Gamma p = \{c_{13}\}$

$$l(c_{13}) = \max(7, 7^+ + 12) = 7$$

$c_1$	$0^+$															
$c_2$	$\infty$	$1^+$														
$c_3$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	6	6	6	6	6	6	6	$6^+$				
$c_4$	$\infty$	$\infty$	5	5	5	$5^+$										
$c_5$	$\infty$	4	4	4	$4^+$											
$c_6$	$\infty$	5	5	5	5	5	$5^+$									
$c_7$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	7	7	7	7	7	7	7	7	7	$7^+$		
$c_8$	$\infty$	2	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	10	10	8	8	8	8	8	8	8
$c_9$	$\infty$	$\infty$	$3^+$													
$c_{10}$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	5	5	5	5	$5^+$								
$c_{11}$	$\infty$	10	5	5	5	5	5	5	$5^+$							
$c_{12}$	$\infty$	$\infty$	16	9	9	9	9	7	7	7	7	7	7	7	$7^+$	
$c_{13}$	$\infty$	$\infty$	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	$7^+$
$c_{14}$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	5	5	5	5	5	5	$5^+$						
$c_{15}$	$\infty$	$\infty$	4	$4^+$												
$c_{16}$	$\infty$	10	5	5	5	5	5	5	5	5	$5^+$					
$c_{17}$	$\infty$	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	$6^+$			

17.  $\Gamma p = \{c_8\}$

$$l(c_{13}) = \max(8, 7^+ + 2) = 8$$

$c_1$	$0^+$																
$c_2$	$\infty$	$1^+$															
$c_3$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	6	6	6	6	6	6	6	$6^+$					
$c_4$	$\infty$	$\infty$	5	5	5	$5^+$											
$c_5$	$\infty$	4	4	4	$4^+$												
$c_6$	$\infty$	5	5	5	5	5	$5^+$										
$c_7$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	7	7	7	7	7	7	7	7	7	$7^+$			
$c_8$	$\infty$	2	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	10	10	8	8	8	8	8	8	8	$8^+$
$c_9$	$\infty$	$\infty$	$3^+$														
$c_{10}$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	5	5	5	5	$5^+$									
$c_{11}$	$\infty$	10	5	5	5	5	5	5	$5^+$								
$c_{12}$	$\infty$	$\infty$	16	9	9	9	9	7	7	7	7	7	7	7	$7^+$		
$c_{13}$	$\infty$	$\infty$	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	$7^+$	
$c_{14}$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	5	5	5	5	5	5	$5^+$							
$c_{15}$	$\infty$	$\infty$	4	$4^+$													
$c_{16}$	$\infty$	10	5	5	5	5	5	5	5	5	$5^+$						
$c_{17}$	$\infty$	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	$6^+$				

## 5. Поиск пропускной способности алгоритмом Франка-Фриша

Возьмём за граф с пропускной способностью граф с весами, представленный в виде матрица из пункта 4.

Найдём пропускную способность, принимая за исток  $s$  вершину  $e_1$ , а за сток  $t$  — вершину  $e_7$ .

Обнаружим разрез  $(e_1, X \setminus e_1)$ . Его максимальная пропускная способность равна 10.

Объединим все вершины, между которыми есть ребро весом  $\geq 10$ . Объединяются множества  $(e_1, e_{11}, e_{16})$ ,  $(e_2, e_{12}, e_{13}, e_6)$ .

Получаем граф (так как разрез определяет по максимальной ПС, оставляем лишь наибольшие значения):

	$e_{1,11,16}$	$e_{2,6,12,13}$	$e_3$	$e_4$	$e_5$	$e_7$	$e_8$	$e_9$	$e_{10}$	$e_{14}$	$e_{15}$	$e_{17}$
$e_{1,11,16}$	0	9	3	2	4	4	3	2	1	6	3	6
$e_{2,6,12,13}$		0	4	9	6	5	5	8	4	6	8	5
$e_3$			0	0	0	0	0	0	0	6	2	0
$e_4$				0	0	0	0	2	0	4	3	9
$e_5$					0	0	0	0	0	0	0	2
$e_7$						0	0	0	0	0	3	0
$e_8$							0	0	0	0	0	0
$e_9$								0	2	2	2	3
$e_{10}$									0	3	6	2
$e_{14}$										0	2	6
$e_{15}$											0	0
$e_{17}$												0

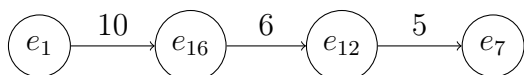
Теперь максимальная ПС – 6. Пусть

$$s = (e_{1,11,16}, e_{14}, e_{17}, e_{2,6,12,13}, e_3, e_4, e_5, e_9, e_{15}, e_{10})$$

$$t = e_7$$

	s	t	$e_8$
s	0	5	5
t		0	0
$e_8$			0

Теперь максимальная ПС – 5. Далее получаем, что  $s$  и  $t$  в одном множестве, следовательно, максимальная ПС равна 5. Граф приведён ниже. Из-за большого количество узлов и дуг, обозначим на графе только те вершины, которые задействованы в пути.



Учитывая, что максимальное возможное значение для того, чтобы достигнуть  $e_7$ , это 5, большее значение ПС уж точно не достигнуть.