Национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики.
Кафедра систем управления и информатики.
Основы теории автоматического управления.

Лабораторная работа №5
Свободное и вынужденное движение линейных систем.
5 вариант

Студент:
Куклина М.Д., P3401
Преподаватель:
Кремлев А.С.

2018

1. Задание

Начальные условия и корни характеристических уравнений:

N	Начальные условия		Корни характеристического уравнения	
	y_0	$\dot{y}_0$	λ_1	λ_2
1	1	0	-2.0	-2.0
2	1	0	$-0.9 + j7$	$-0.9 + j7$
3	1	0	$j7$	$-j7$
4	0.05	0	$0.9 + j7$	$0.9 - j7$
5	0.05	0	2.0	2.0
6	0	0.1	-0.5	0.5

Параметры системы и входное воздействие:

a_0	a_1	b	$g_1(t)$	$g_2(t)$	$g_3(t)$
3	3	2	2.0	$0.8t$	$\sin(3t)$

2. Математическая модель и схема моделирования

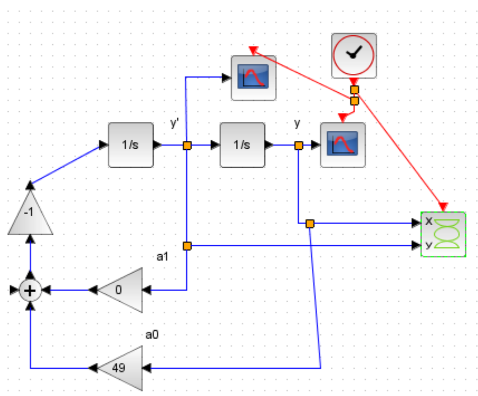


Схема моделирования свободной составляющей

2.1. Поиск a_0, a_1

Нам даны два корня уравнения $\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$. Подставляя их в уравнение, имеем систему:

$$\begin{cases} \lambda_1^2 + a_1\lambda_1 + a_0 = 0 \\ \lambda_2^2 + a_1\lambda_2 + a_0 = 0 \end{cases}$$

Имеем по теореме Виета:

$$a_0 = \lambda_1\lambda_2$$
$$a_1 = -\left(\lambda_1 + \lambda_2\right)$$

2.2. Поиск выражения свободной составляющей

В зависимости от корней характеристического уравнения свободная составляющая может принимать разный вид:

2.2.1. Корни вещественны и одинаковы: $\boldsymbol{\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda}$

$$y_{\text{св}}(t) = \left(C_1 + C_2 t\right) e^{\lambda t} \Rightarrow \begin{cases} y_{\text{св}}(0) = C_1 \\ y'_{\text{св}}(0) = \lambda C_1 + C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = y_{\text{св}}(0) \\ C_2 = -\lambda y_{\text{св}}(0) + y'_{\text{св}}(0) \end{cases}$$

$$y_{\text{св}}(t) = \left(y_{\text{св}}(0) \cdot (1 - \lambda t) + y'_{\text{св}}(0) t\right) e^{\lambda t}$$

2.2.2. Корни вещественны и различны: $\boldsymbol{\lambda = \alpha \pm (\beta + 0i)}$

$$y_{\text{св}}(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \Rightarrow \begin{cases} y_{\text{св}}(0) = C_1 + C_2 \\ y'_{\text{св}}(0) = \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \dfrac{y'_{\text{св}}(0) - \lambda_2 y_{\text{св}}(0)}{\lambda_1 - \lambda_2} \\ C_2 = -\dfrac{y'_{\text{св}}(0) - \lambda_1 y_{\text{св}}(0)}{\lambda_1 - \lambda_2} \end{cases}$$

$$y_{\text{св}}(t) = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left(\left(y'_{\text{св}}(0) - \lambda_2 y_{\text{св}}(0)\right) e^{\lambda_1 t} - \left(y'_{\text{св}}(0) - \lambda_1 y_{\text{св}}(0)\right) e^{\lambda_2 t} \right)$$

2.2.3. Корни комплексные: $\boldsymbol{\lambda = \alpha \pm \omega i}$

$$y_{\text{св}}(t) = A e^{\alpha t} \sin(\omega t + \phi) \Rightarrow \begin{cases} y_{\text{св}}(0) = A \sin(\phi) \\ y'_{\text{св}}(0) = A \left(\omega \cos(\phi) + \alpha \sin(\phi)\right) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \phi = \operatorname{arcctg} \left(\omega^{-1} \cdot \left(\dfrac{y'_{\text{св}}(0)}{y_{\text{св}}(0)} - \alpha \right) \right) \\ A = y_{\text{св}}(0) \cdot \operatorname{sgn}\left(y'_{\text{св}}(0) - \alpha y_{\text{св}}(0)\right) \sqrt{\left(\omega^{-1} \cdot \left(\dfrac{y'_{\text{св}}(0)}{y_{\text{св}}(0)} - \alpha \right) \right)^2 + 1} \end{cases}$$

2.2.4. Корни комплексные и число мнимые: $\boldsymbol{\lambda = \pm \omega i}$

Применяя наработки предыдущего параграфа при $\alpha = 0$:

$$y_{\text{св}}(t) = A \sin(\omega t + \phi) \Rightarrow \begin{cases} y_{\text{св}}(0) = A \sin(\phi) \\ y'_{\text{св}}(0) = A \omega \cos(\phi) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \phi = \operatorname{arcctg} \left(\dfrac{y'_{\text{св}}(0)}{\omega y_{\text{св}}(0)} \right) \\ A = y_{\text{св}}(0) \cdot \operatorname{sgn}\left(y'_{\text{св}}(0)\right) \sqrt{\left(\dfrac{y'_{\text{св}}(0)}{\omega y_{\text{св}}(0)} \right)^2 + 1} \end{cases}$$

3. Расчёт

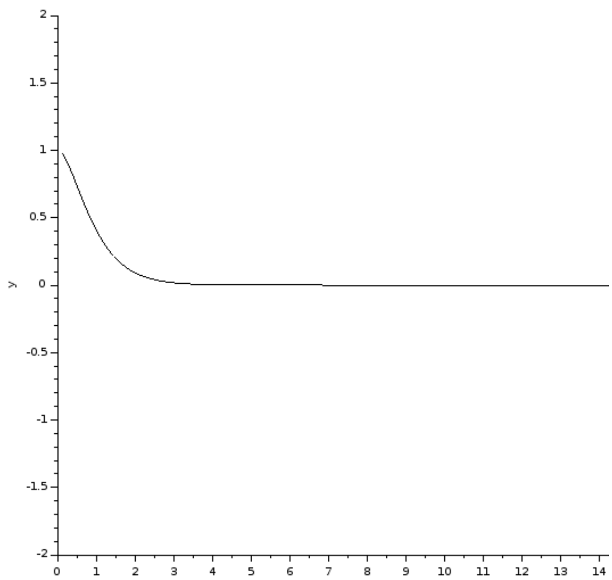
N	Корни		Параметры		Условия		Свободная составляющая $y_{\text{св}}(t)$
	λ_1	λ_2	a_0	a_1	y_0	$\dot{y}_0$	
1	-2	-2	4	4	1	0	$(1+2t)e^{-2t}$
2	$-0.9 \pm j7$		49.81	-1.8	1	0	$1.0082e^{-0.9t}\sin(7t+1.443)$
3	$\pm j7$		49	0	1	0	$\sin(7t+\frac{\pi}{2})$
4	$0.9 \pm j7$		49.81	1.8	0.05	0	$0.05041e^{0.9t}\sin(7t-1.443)$
5	2	2	4	-4	0.05	0	$(1-2t)e^{2t}$
6	± 0.5		-0.25	0	0	0.1	$-0.1e^{-0.5t}+0.1e^{0.5t}$

4. Эксперименты

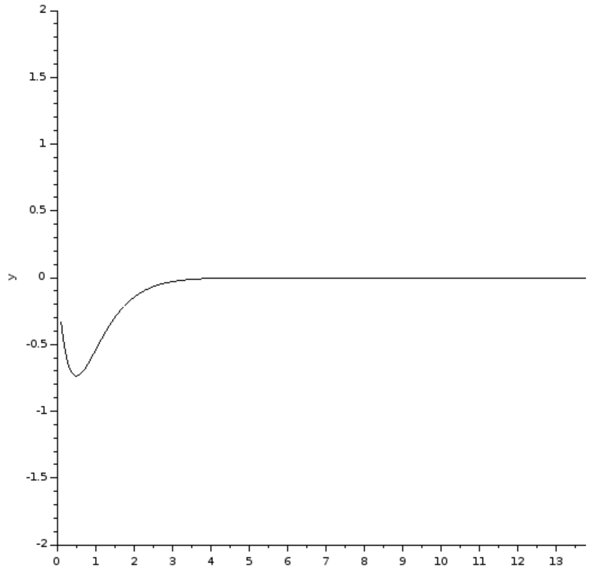
4.1. Расчёт свободных составляющих

4.1.1. Эксперимент 1

y:

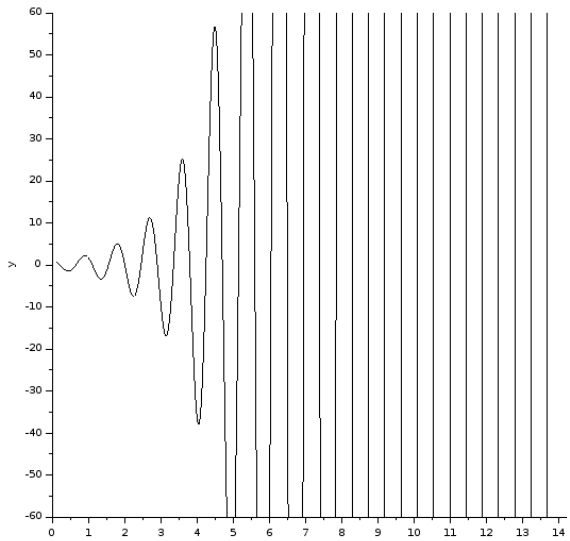


y':

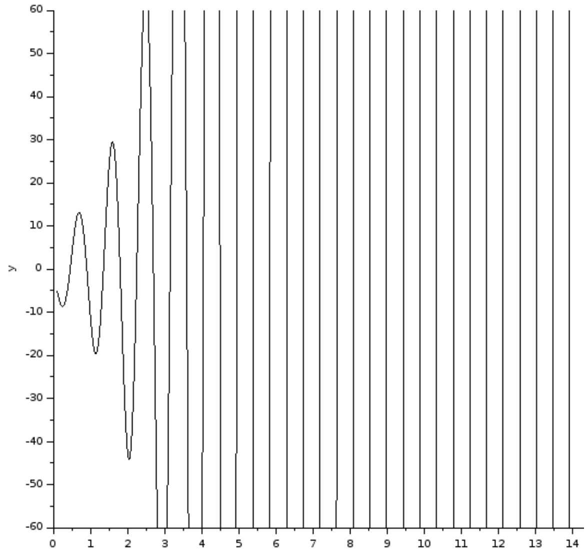


4.1.2. Эксперимент 2

y:

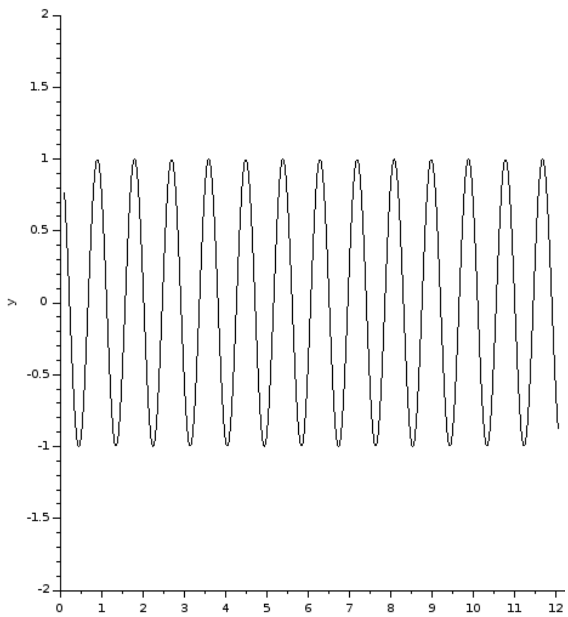


y':

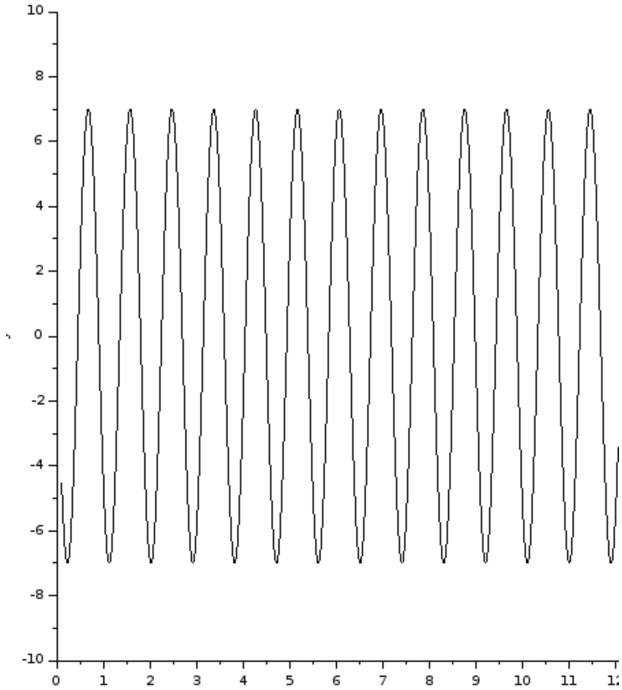


4.1.3. Эксперимент 3

y:

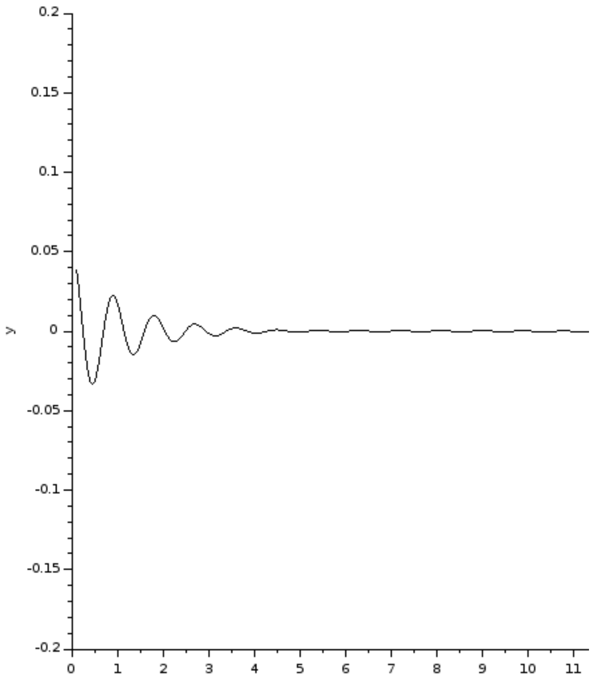


y':

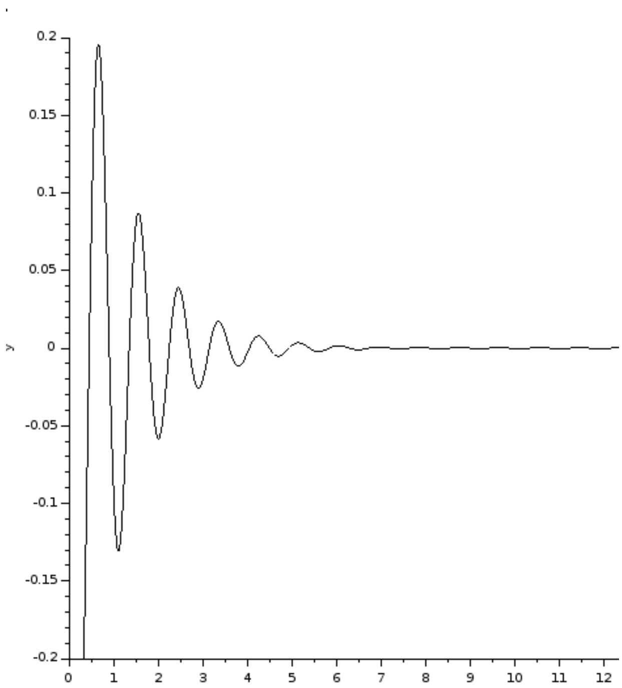


4.1.4. Эксперимент 4

y:

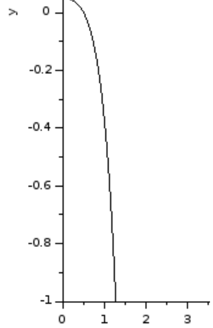


y':

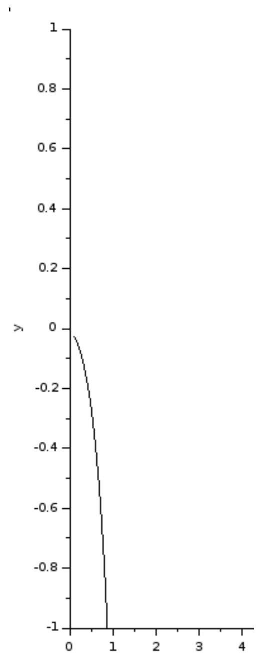


4.1.5. Эксперимент 5

y:

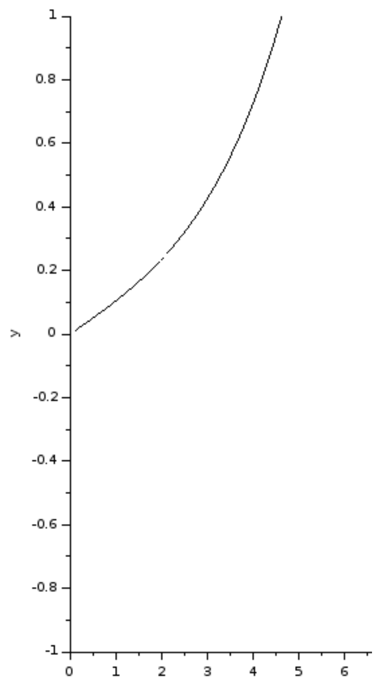


y':

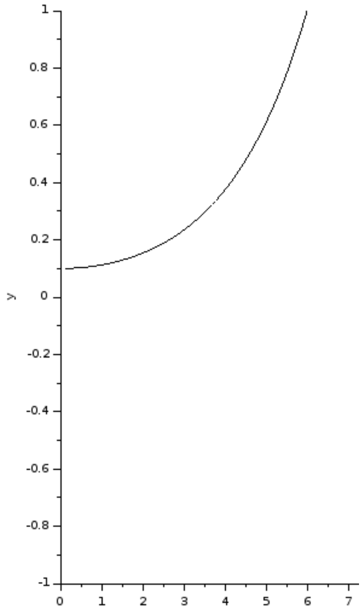


4.1.6. Эксперимент 6

y:

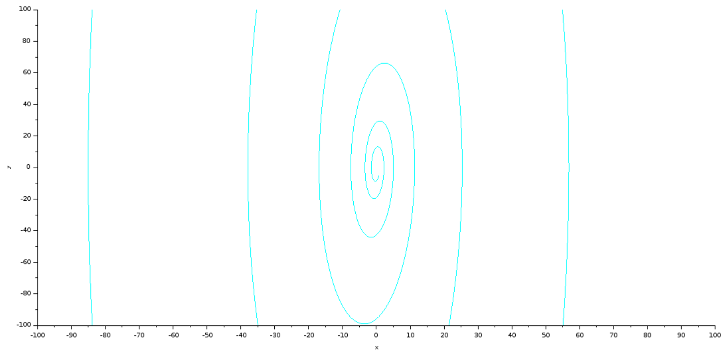


y':

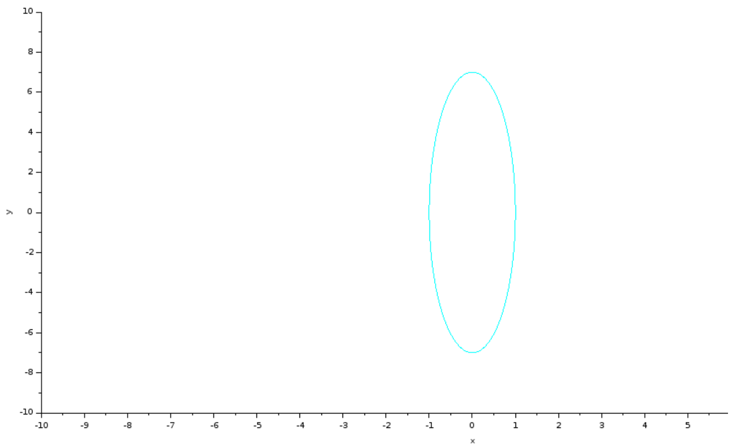


4.2. Фазовые кривые

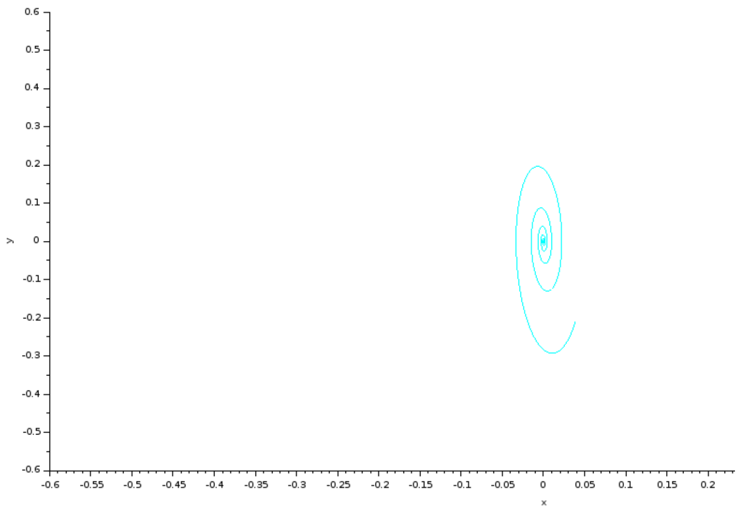
4.2.1. $1.0082e^{-0.9t}\sin(7t + 1.443)$



4.2.2. $\sin(7t + \frac{\pi}{2})$



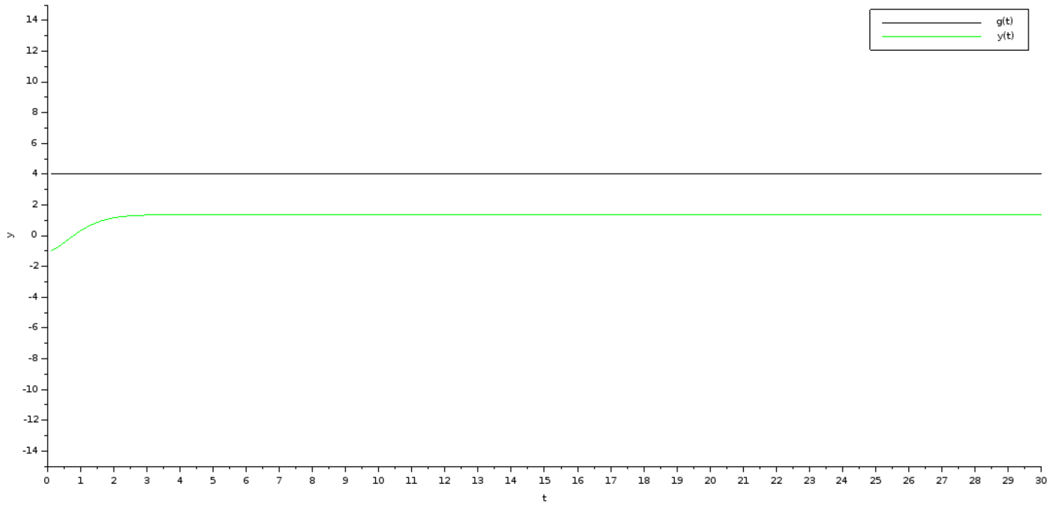
4.2.3. $0.05041e^{0.9t}\sin(7t - 1.443)$



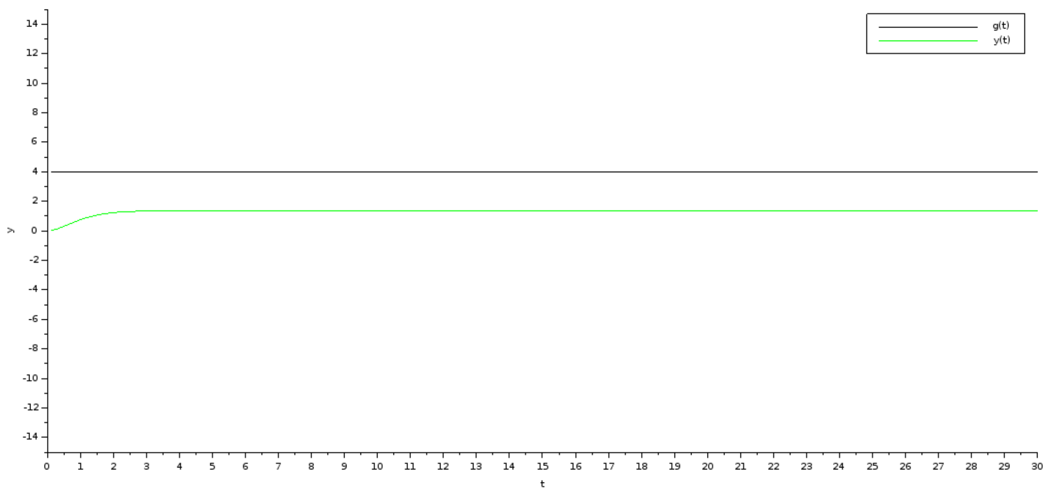
4.3. Вынужденное движение

4.3.1. $g_1 = 2.0$

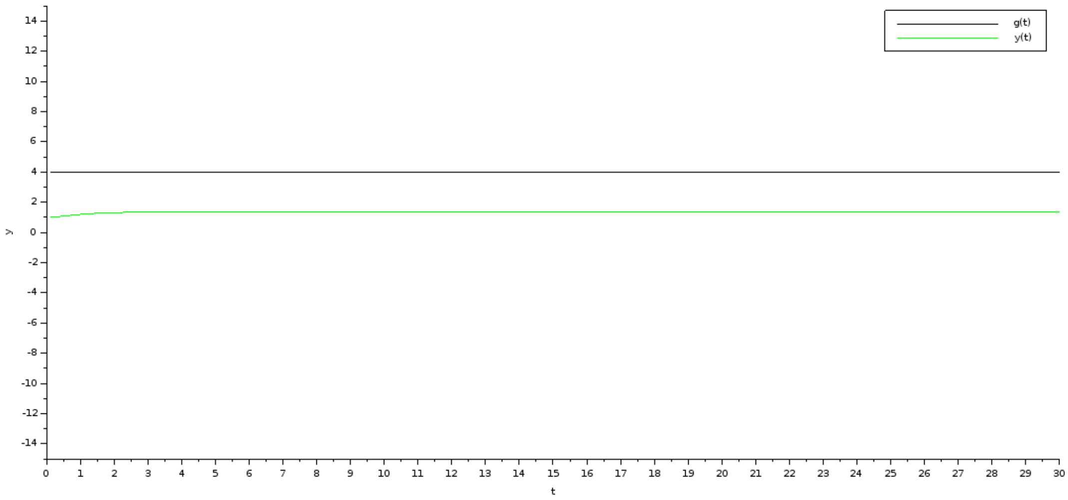
Для условия $y(0) = -1$



Для условия $y(0) = 0$

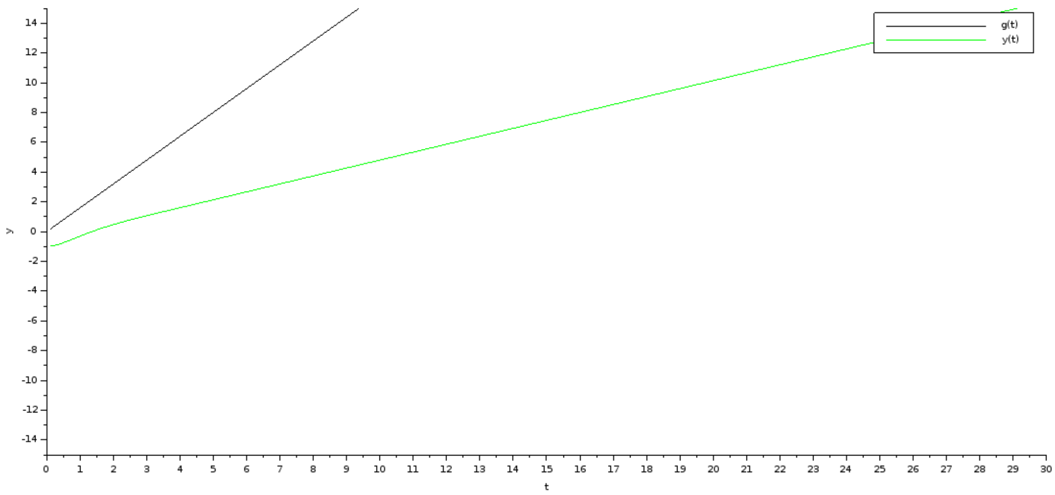


Для условия $y(0) = 1$

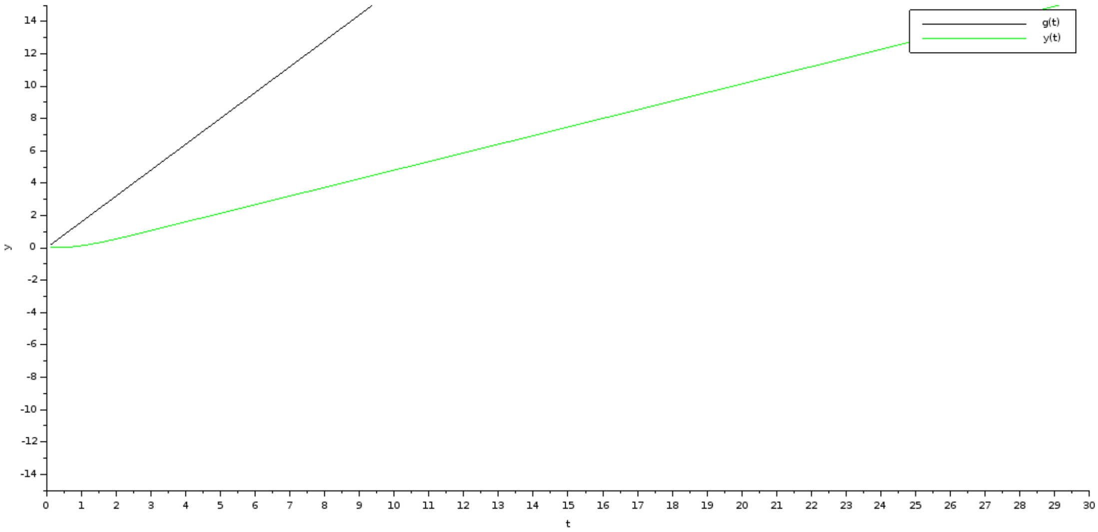


4.3.2. $g = 0.8t$

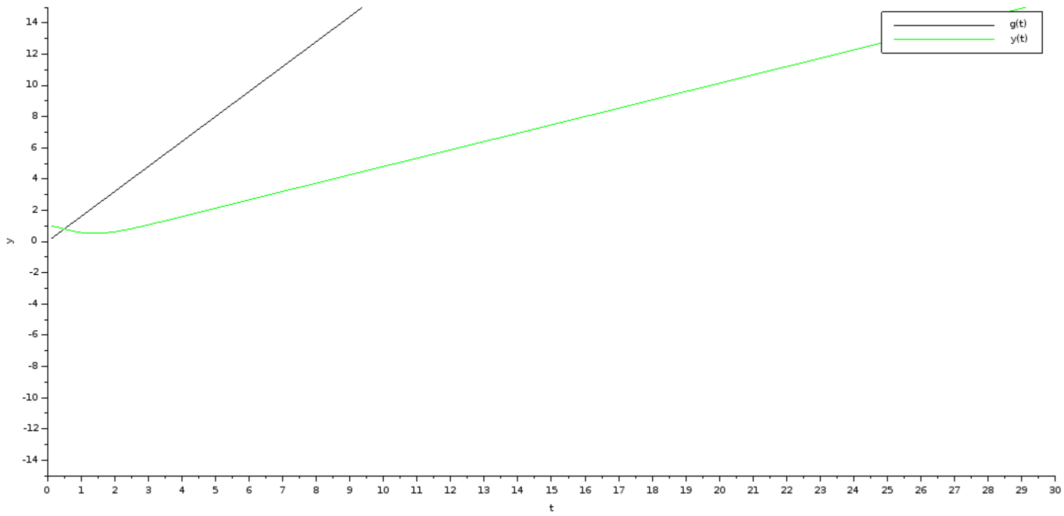
Для условия $y(0) = -1$



Для условия $y(0) = 0$

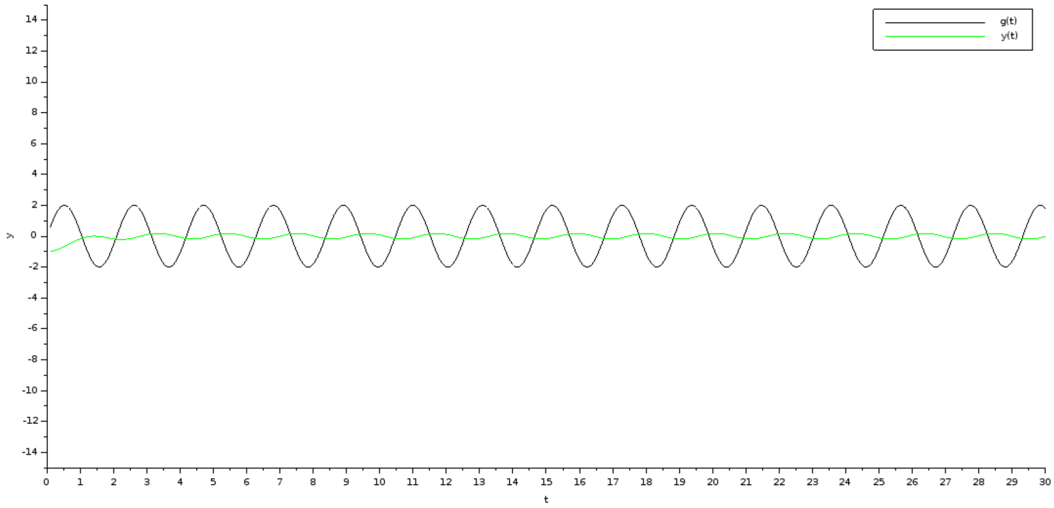


Для условия $y(0) = 1$

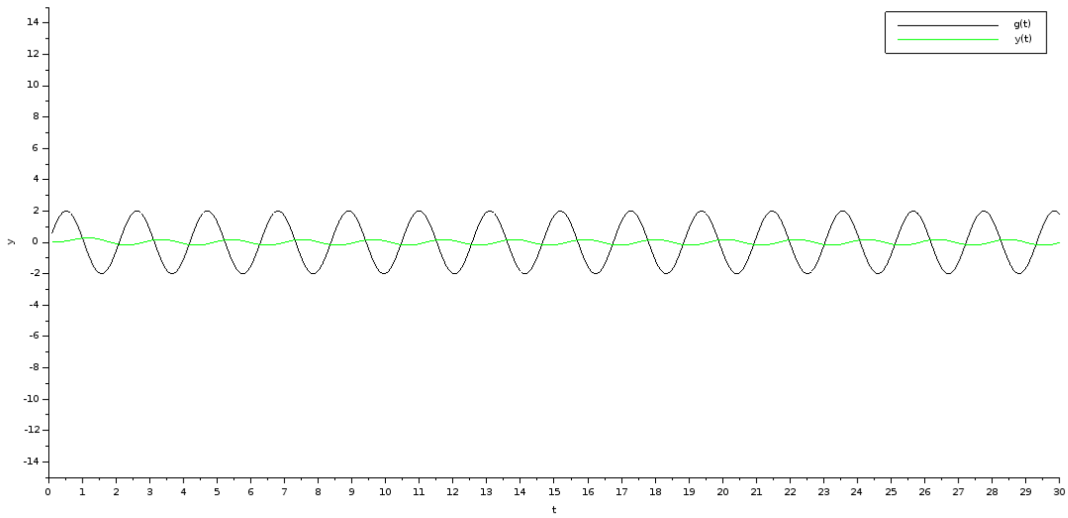


4.3.3. $g = \sin(3t)$

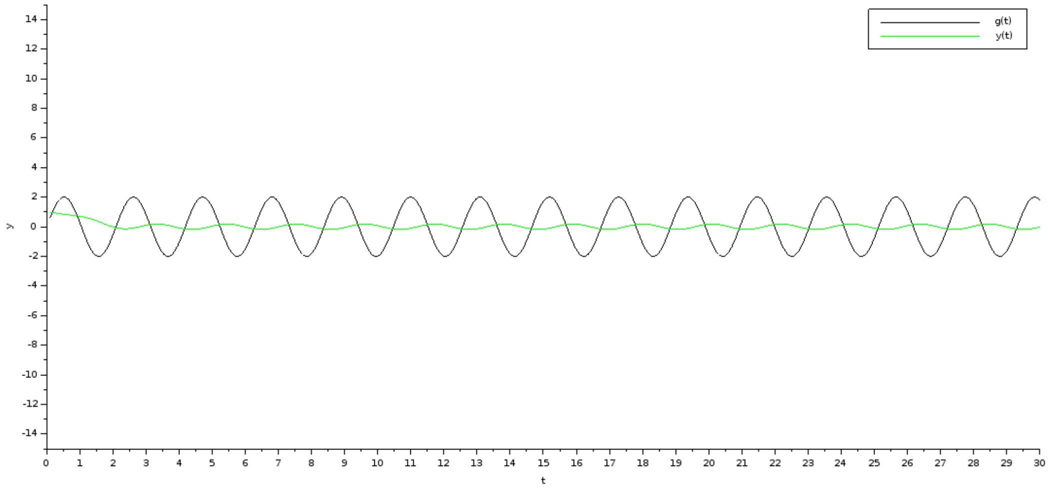
Для условия $y(0) = -1$



Для условия $y(0) = 0$



Для условия $y(0) = 1$



5. Выводы

В результате проделанной работы мы смоделировали дифференциальные уравнения вида $y'' + a_1 y' + a_0 y = bg(t)$, где b может быть равен 0, что соответствует свободному движению системы, путём построения аналоговых электрических систем, описываемых такими дифференциальными уравнениями. Это позволяет осуществлять, к примеру, анализ затухающих колебательных движений.