НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Направление подготовки 09.03.04 - Программная инженерия

Дисциплина – Вычислительная математика

Лабораторная работа №3

Вариант №11

Выполнил: Мухсинов С.П

Группа: P3217

Преподаватель: Малышева Т.А

Санкт-Петербург

2024

Цель работы:

Найти приближенное значение определенного интеграла с требуемой точностью различными численными методами

Задание:

Обязательное задание (до 80 баллов)

Исходные данные:

1. Пользователь выбирает функцию, интеграл которой требуется вычислить (3-5 функций), из тех, которые предлагает программа.
2. Пределы интегрирования задаются пользователем
3. Точность вычисления задается пользователем.
4. Начальное значение числа разбиения интервала интегрирования: n=4.
5. Ввод исходных данных осуществляется с клавиатуры.

Программная реализация задачи:

1. Реализовать в программе методы по выбору пользователя:
   • Метод прямоугольников (3 модификации: левые, правые, средние)
   • Метод трапеций
   • Метод Симпсона
2. Методы должны быть оформлены в виде отдельной(ого) функции/класса.
3. Вычисление значений функции оформить в виде отдельной(ого) функции/класса.
4. Для оценки погрешности и завершения вычислительного процесса использовать правило Рунге.
5. Предусмотреть вывод результатов: значение интеграла, число разбиения интервала интегрирования для достижения требуемой точности.

Вычислительная реализация задачи:

1. Вычислить интеграл, приведенный в таблице 1, точно.
2. Вычислить интеграл по формуле Ньютона – Котеса при $n = 6$.
3. Вычислить интеграл по формулам средних прямоугольников, трапеций и Симпсона при $n = 10$.
4. Сравнить результаты с точным значением интеграла.
5. Определить относительную погрешность вычислений для каждого метода.
6. В отчете отразить последовательные вычисления.

Используемые формулы и методы

Метод прямоугольников

На каждом шаге интегрирования функция аппроксимируется полиномом нулевой степени – отрезком, параллельным оси абсцисс. Площадь криволинейной трапеции приближенно заменяется площадью многоугольника, составленного из

n - прямоугольников. Таким образом, вычисление определенного интеграла сводится к нахождению суммы

n- элементарных прямоугольников.

$$\int_a^b f(x)dx \approx S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

Различают метод левых, правых и средних прямоугольников.

В качестве точек ξ_i могут выбираться левые ($\xi_i = x_{i-1}$) или правые ($\xi_i = x_i$) границы отрезков, получим формулы левых и правых прямоугольников.

Метод прямоугольников

$\int_a^b f(x)dx \approx h_1 y_0 + h_2 y_1 + \cdots + h_n y_{n-1} = \sum_{i=1}^{n} h_i\, y_{i-1}$ - левые прямоугольники

$\int_a^b f(x)dx \approx h_1 y_1 + h_2 y_2 + \cdots + h_n y_n = \sum_{i=1}^{n} h_i y_i$ - правые прямоугольники

При $h_i = h = \frac{b-a}{n} = const$:

$$\int_a^b f(x)dx = h\sum_{i=1}^{n} y_{i-1}$$

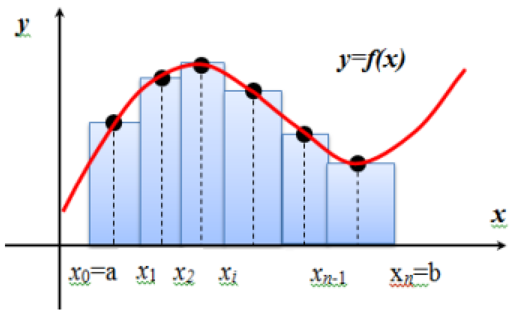
$$\int_a^b f(x)dx = h\sum_{i=1}^{n} y_i$$

Метод прямоугольников. Метод средних

Для аналитически заданных функций более точным является использование значений в средних точках элементарных отрезков (полуцелых узлах):

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} h_i\, f(x_{i-1/2})$$

$$x_{i-1/2} = \frac{x_{i-1}+x_i}{2} = x_{i-1} + \frac{h_i}{2}, i = 1, 2, \dots n$$



При $h_i = h = \frac{b-a}{n} = const$:

$$\int_a^b f(x)dx = h\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1/2})$$

Метод трапеций

Подынтегральную функцию на каждом отрезке $[x_i; x_{i+1}]$ заменяют интерполяционным многочленом первой степени:

$$f(x) \approx \varphi_i(x) = a_i x + b$$

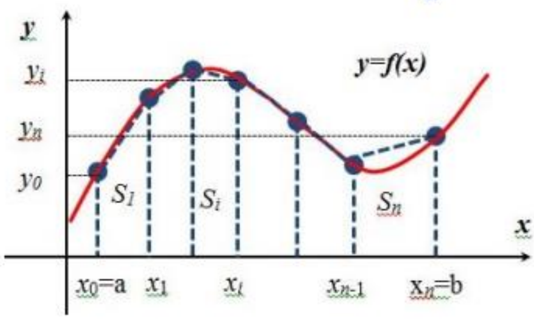
Используют линейную интерполяцию, т.е. график функции $y = f(x)$ представляется в виде ломаной, соединяющий точки (x_i, y_i) . Площадь всей фигуры (криволинейной трапеции):

$$S_{\text{общ}} = S_1 + S_2 + \cdots + S_n = \frac{y_0+y_1}{2}h_1 + \frac{y_1+y_2}{2}h_2 + \cdots + \frac{y_{n-1}+y_n}{2}h_n$$

$$y_0 = f(a), \quad y_n = f(b), \quad y_i = f(x_i), \quad h_i = x_i - x_{i-1}$$

Складывая все эти равенства, получаем формулу трапеций для численного интегрирования:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} h_i(y_{i-1}+y_i)$$



При $h_i = h = \frac{b-a}{n} = const$ формула трапеций:

$$\int_a^b f(x)dx = h\cdot\left(\frac{y_0+y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i\right)$$

или $$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\cdot\left(y_0 + y_n + 2\sum_{i=1}^{n-1} y_i\right)$$

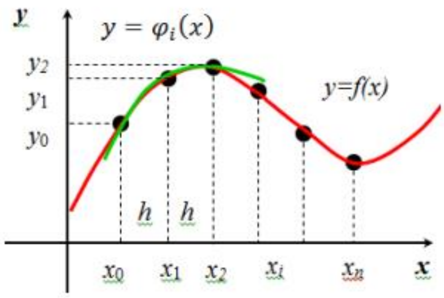
Метод Симпсона (Симпсон Томас(20.08.1710–14.05.1751) – английский математик)

Разобьем отрезок интегрирования [*a, b*] на четное число *n* равных частей с шагом *h*.
На каждом отрезке $[x_0, x_2]$, $[x_2, x_4]$, …, $[x_{i-1}, x_{i+1}]$, … , $[x_{n-2}, x_n]$ подынтегральную функцию заменим интерполяционным многочленом второй степени:

$$f(x) \approx \varphi_i(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i, \quad x_{i-1} \le x \le x_{i+1}$$

Коэффициенты этих квадратных трехчленов могут быть найдены из условий равенства многочлена и подынтегральной функции в узловых точках.

В качестве $\varphi_i(x)$ можно принять интерполяционный многочлен Лагранжа второй степени, проходящий через точки $(x_{i-1}, y_{i-1}), (x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1})$.



Метод Симпсона

Для точек x_0, x_1, x_2:

$$\varphi_1(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} y_2.$$

При $x_0 = 0; x_1 = h; \ x_2 = 2h$, получим:

$$\varphi_1(x) = \frac{(x-h)(x-2h)}{h \cdot 2h} y_0 + \frac{x(x-2h)}{-h \cdot h} y_1 + \frac{x(x-h)}{2h \cdot h} y_2 = \frac{x^2 - x \cdot 3h + 2h^2}{2h^2} y_0 + \frac{x^2 - 2h \cdot x}{-h^2} y_1 + \frac{x^2 - h \cdot x}{2h^2} y_2$$

$$S_1 = \int_{x_0}^{x_0+2h} \varphi_1(x) dx = \int_0^{2h} \left(\frac{x^2 - x \cdot 3h + 2h^2}{2h^2} y_0 + \frac{x^2 - 2h \cdot x}{-h^2} y_1 + \frac{x^2 - h \cdot x}{2h^2} y_2 \right) dx =$$

$$= \frac{y_0}{2h^2} \left(\frac{x^3}{3} - 3h\frac{x^2}{2} + 2h^2 x\right)\Big|_0^{2h} - \frac{y_1}{h^2}\left(\frac{x^3}{3} - 2h\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^{2h} + \frac{y_2}{2h^2}\left(\frac{x^3}{3} - h\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^{2h} = \frac{y_0 h}{3} + \frac{4y_1 h}{3} + \frac{y_2 h}{3}$$
$$= \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

Для каждого элементарного отрезка $[x_{i-1}, x_{i+1}]$: $S_i = \frac{h}{3}(y_{i-1} + 4y_i + y_{i+1})$

$$S_{общ} = S_1 + S_2 + \dots + S_n = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \dots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + 2y_n)$$

Методы Ньютона-Котеса

Для семейства методов Ньютона-Котеса можно записать общее выражение:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{n \cdot h}{C_n} \sum_{i=0}^{n} c_n^i f(x_i) \qquad (*)$$

где n – порядок метода Ньютона-Котеса

$$C_n = \sum_{i=0}^{n} c_n^i$$

Из выражения (*) можно получить формулу прямоугольников для n=0, формулу трапеций для n=1, формулу Симпсона для n=2.

n	C_n	c_n^0	c_n^1	c_n^2	c_n^3	c_n^4	c_n^5
0	1	1					
1	2	1	1				
2	6	1	4	1			
3	8	1	3	3	1		
4	90	7	32	12	32	7	
5	288	19	75	50	50	75	19

Вычислительная реализация

1. Вычислить интеграл, приведенный в таблице 1, точно:

$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 7x + 11$$

$$F(x) = \frac{x^4}{4} - 3x^3 - \frac{7x^2}{2} + 11x$$

$$I = \int_1^3 (2x^3 - 9x^2 - 7x + 11)dx = F(3) - F(1) = -44$$

2. Вычислить интеграл по формуле Ньютона – Котеса при $n = 6$

n	Коэффициенты Котеса c_i^n			
1	$c_1^0 = c_1^1 = \frac{b-a}{2}$			
2	$c_2^0 = c_2^2 = \frac{b-a}{6}$	$c_2^1 = \frac{4(b-a)}{6}$		
3	$c_3^0 = c_3^3 = \frac{b-a}{8}$	$c_3^1 = c_3^2 = \frac{3(b-a)}{8}$		
4	$c_4^0 = c_4^4 = \frac{7(b-a)}{90}$	$c_4^1 = c_4^3 = \frac{32(b-a)}{90}$	$c_4^2 = \frac{12(b-a)}{90}$	
5	$c_5^0 = c_5^5 = \frac{19(b-a)}{288}$	$c_5^1 = c_5^4 = \frac{75(b-a)}{288}$	$c_5^2 = c_5^3 = \frac{50(b-a)}{288}$	
6	$c_6^0 = c_6^6 = \frac{41(b-a)}{840}$	$c_6^1 = c_6^5 = \frac{216(b-a)}{840}$	$c_6^2 = c_6^4 = \frac{27(b-a)}{840}$	$c_6^3 = \frac{272(b-a)}{840}$

$\boldsymbol{N = 6}$, следовательно $\boldsymbol{h = \frac{b-a}{N} = \frac{3-1}{6} = \frac{1}{3}}$

$$\int_1^3 (2x^3 - 9x^2 - 7x + 11)dx = \sum_{i=0}^{N} f(x_i)c_n^i = f(1) \cdot c_6^0 + f\left(\frac{4}{3}\right) \cdot c_6^1 +$$

$$+f\left(\frac{5}{3}\right) \cdot c_6^2 + f(2) \cdot c_6^3 + f\left(\frac{7}{3}\right) \cdot c_6^4 + f\left(\frac{8}{3}\right) \cdot c_6^5 + f(3) \cdot c_6^6 = -44.0$$

Ошибка: $|I - (-44.0)| = |-44 - (-44)| = 0$

Относительная погрешность: 0%

3. Вычислить интеграл по формулам средних прямоугольников, трапеций и Симпсона при n = 10 .

3.1 Формула средних прямоугольников:

$\boldsymbol{N = 10}$, следовательно $\boldsymbol{h = \frac{b-a}{N} = \frac{3-1}{10} = \frac{1}{5}}$

$$\int_1^3 (2x^3 - 9x^2 - 7x + 11)dx = h\sum_{i=1}^{N} f\left(x_{i-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{5} \cdot (f\left(1 + \frac{1}{10}\right) + f\left(1 + \frac{3}{10}\right)$$

$$+f\left(1 + \frac{5}{10}\right) + f\left(1 + \frac{7}{10}\right) + f\left(1 + \frac{9}{10}\right) + f\left(1 + \frac{11}{10}\right) + f\left(1 + \frac{13}{10}\right) +$$

$$+f\left(1 + \frac{15}{10}\right) + f\left(1 + \frac{17}{10}\right) + f\left(1 + \frac{19}{10}\right) = -44.02$$

Ошибка: $|I - (-44.2)| = |-44 - (-44.2)| = 0.02$

Относительная погрешность: 0.045%

3.2 Формула трапеций

$$\int_1^3 (2x^3 - 9x^2 - 7x + 11)dx = \frac{h}{2}\left(y_0 + y_N + 2\sum_{i=1}^{N-1} y_i\right) = \frac{1}{10} \cdot (f(1) + f(3) +$$

$$+2(f(1.2) + f(1.4) + f(1.6) + f(1.8) + f(2) + f(2.2) + f(2.4) + f(2.6) +$$

$$+ f(2.8)) = -43.96$$

Ошибка: $|I - (-43.96)| = |-44 - (-43.96)| = 0.04$

Относительная погрешность: 0.09%

3.3 Формула Симпсона

$$\int_1^3 (2x^3 - 9x^2 - 7x + 11)dx = \frac{h}{3}[y_1 + 4(y_1 + y_3 + \cdots y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \cdots +$$

$$+y_{n-2}) + y_n] = -44.0$$

Ошибка: $|I - (-44)| = | - 44 - (-44)| = 0$

Относительная погрешность: 0%

Программная реализация

Метод левых прямоугольников:

```
@Override
public double calculateIntegral(int n) {
    double h = (B - A)/n;
    double s = 0;
    for(int i = 0; i < n; i++){
        s += f.at(A + i * h);
    }
    return h*s;
}
```

Метод правых прямоугольников:

```
@Override
public double calculateIntegral(int n) {
    double h = (B - A)/n;
    double s = 0;
    for(int i = 1; i <= n; i++){
        s += f.at(A + i * h);
    }
    return h*s;
}
```

Метод средних прямоугольников:

```
@Override
public double calculateIntegral(int n) {
    double s = 0;
    double h = (B - A)/n;
    double m;
    for(int i = 1; i <= n; i++){
        m = ((A + (i - 1) * h) + (A + i * h))/2;
        s += f.at(m);
    }
    return h*s;
}
```

Метод трапеций:

```
@Override
public double calculateIntegral(int n) {
    double h = (B - A)/n;
    double s = 0;
    for(int i = 1; i <= n; i++){
        s += (f.at(A + (i -1) * h) + f.at(A + i * h))/2;
    }
    return s*h;
}
```

Метод Симпсона:

```
@Override
public double calculateIntegral(int n) {
    n = 2 * n;
    double h = (B - A) / n;
    double s = f.at(A) + f.at(B);
    for(int i = 1; i < n; i+=2){
        s += 4 * (f.at(A + i*h));
    }
    for(int i = 2; i < n; i+=2){
        s+= 2 * (f.at(A + i * h));
    }
    return (s*h)/3;
}
```

Пример работы программы

```
Выберите функцию, которую необходимо проинтегрировать:
1) 2x^3 - 9x^2 - 7x + 11
2) x^3 + 2x^2 - 3x - 12
3) sin(x)
1
Введите начало и конец интервала через пробел:
1 3
Введите значение погрешности вычислений:
0.01
Выберите метод:
1) Метод левых прямоугольников
2) Метод правых прямоугольников
3) Метод средних прямоугольников
4) Метод трапеций
5) Метод Симпсона
3
Найденное значение интеграла: -44.001953125
Число разбиений интервала : 32
```

Вывод

В ходе выполнения лабораторной работы мы изучили некоторые методы численного интегрирования и реализовали программу, вычисляющую приближенное значение определенного интеграла с требуемой точностью.