НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Направление подготовки 09.03.04 - Программная инженерия

Дисциплина – Вычислительная математика

Лабораторная работа №6

Вариант №11

Выполнил: Мухсинов С.П

Группа: P3217

Преподаватель: Малышева Т.А

Санкт-Петербург

2024

Цель работы

Решить задачу Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений численными методами.

Задание

1. В программе численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) должен быть реализован в виде отдельного класса /метода/функции;
2. Пользователь выбирает ОДУ вида(не менее трех уравнений), из тех, которые предлагает программа;
3. Предусмотреть ввод исходных данных с клавиатуры: начальныеусловия , интервал дифференцирования , шаг h, точность ;
4. Для исследования использовать одношаговые методы и многошаговые методы (см. табл.1);
5. Составить таблицу приближенных значений интеграла дифференциального уравнения, удовлетворяющего начальным условиям, для всех методов, реализуемых в программе;
6. Для оценки точности одношаговых методов использовать правило Рунге;
7. Для оценки точности многошаговых методов использовать точное решение задачи.
8. Построить графики точного решения и полученного приближенного решения (разными цветами);
9. Программа должна быть протестирована при различных наборах данных, в том числе и некорректных.
10. Проанализировать результаты работы программы

Используемые формулы и методы

Модификации метода Эйлера.

Рассмотрим уравнение (2) в окрестностях узлов $x = x_i + h/2$ (i=0, 1…), являющихся серединами отрезков $[x_i, x_{i+1}]$. В левой части (2) заменим производную центральной разностью, а в правой части заменим значение функции $f(x_i + h/2, Y(x_i + h/2))$ средним арифметическим значений функции $f(x, Y)$ в точках (x_i, y_i) и (x_{i+1}, y_{i+1}). Тогда:

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = \frac{1}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})].$$

Отсюда:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})]. \qquad (9)$$

Полученная схема является неявной, поскольку искомое значение y_{i+1} входит в обе части соотношения (9) и его нельзя выразить явно. Для вычисления y_{i+1} можно применить один из итерационных методов. Если имеется хорошее начальное приближение y_i, то можно построить решение с использованием двух итераций следующим образом. Считая y_i начальным приближением, вычисляем первое приближение $\tilde{y}_{i+1}$ по формуле метода Эйлера (7):

$$\tilde{y}_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$$

Вычисленное значение $\tilde{y}_{i+1}$ подставляем вместо y_{i+1} в правую часть соотношения (9) и находим окончательное значение:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1})] \text{ или:}$$

$$\boldsymbol{y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\big[f(x_i, y_i) + f\big(x_{i+1}, y_i + hf(x_i, y_i)\big)\big],\ i = 0, 1 \dots} \tag{10}$$

Методы Рунге-Кутта

Существуют и другие явные одношаговые методы. Так, рассмотренные методы Эйлера являются частными случаями методов первого и второго порядков, относящихся к классу методов *Рунге-Кутта*.

Идея, предложенная Рунге (1856–1927) и Куттой (1867–1944), заключается в том, чтобы при численном решении задачи Коши не использовать в расчетных формулах частные производные функции $f(x, y)$; использовать только ее саму, зато вычислять на каждом шаге ее значения в нескольких точках. Проиллюстрируем это на примере одного из возможных методов Рунге – Кутты II порядка. Из определения производной:

$$y'(x_i) = \lim_{\Delta x} \frac{\Delta y(x_i)}{\Delta x} = \lim_{x_{i+1} \to x_i} \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{x_{i+1} - x_k} = \lim_{h \to 0} \frac{y_{i+1} - y_i}{h} \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{h}$$

В финальное выражение входят значения функции y в двух точках, а производной уже нет. Подставим это приближенное выражение для производной в решаемое ДУ $y' = f(x, y)$, беря значение правой части в i-м узле:

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = f(x_i, y_i)$$

Отсюда $y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i)$ и мы снова получили метод Эйлера! Но поскольку для аппроксимации производной y' взяты две точки, то и для правой части ДУ $f(x, y)$ уместно привлечь две точки:

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = \frac{1}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})]$$

После преобразования:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})]$$

Искомой величиной в уравнении является y_{i+1},входящей в обе части уравнения. Решать это уравнение можно методом итераций, беря в качестве начального приближения то значение $y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i)$, которое получается в методе Эйлера. Тогда:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_i + h, y_i + h \cdot f(x_i, y_i))]$$

Или:

$$\boldsymbol{y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}(k_1 + k_2),} \tag{11}$$

$$\boldsymbol{k_1 = h \cdot f(x_i, y_i) \quad k_2 = h \cdot f(x_i + h, y_i + k_1)} \tag{12}$$

Формулы (11), (12) представляют **метод Рунге – Кутты II порядка**

Широко распространен **метод Рунге-Кутта четвертого порядка**, часто без уточнений называемый просто методом Рунге – Кутты.

$$\boldsymbol{y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)}, \tag{13}$$

$$\boldsymbol{k_1 = h \cdot f(x_i, y_i)}$$
$$\boldsymbol{k_2 = h \cdot f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2})}$$
$$\boldsymbol{k_3 = h \cdot f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2})}$$
$$\boldsymbol{k_4 = h \cdot f(x_i + h, y_i + k_3)}$$

Таким образом, данный метод Рунге-Кутта требует на каждом шаге четырехкратного вычисления правой части $f(x, y)$уравнения (5).
Суммарная погрешность этого метода есть величина $\delta_n = O(h^4)$.

Метод Рунге-Кутта (13) требует большего объема вычислений по сравнению с методом Эйлера и его модификацией, однако это окупается повышенной точностью, что дает возможность проводить счет с большим шагом. Другими словами, для получения результатов с одинаковой точностью в методе Эйлера потребуется значительно меньший шаг, чем в методе Рунге-Кутта.

Широко распространенным семейством многошаговых методов являются **методы Адамса**. Простейший из них, получающийся при $k = 1$, совпадает с рассмотренным ранее методом Эйлера первого порядка точности. В практических расчетах чаще всего используется вариант метода Адамса, имеющий четвертый порядок точности и использующий на каждом шаге результаты предыдущих четырех. Именно его и называют обычно методом Адамса. Рассмотрим этот метод.
Пусть найдены значения в четырех y_{i-3}, y_{i-2} y_{i-1}, y_i последовательных узлах ($k = 4$). При этом имеются также вычисленные ранее значения правой части f_{i-3}, f_{i-2} f_{i-1}, f_i, где $f_i = f(x_{i,}y_i)$. В качестве интерполяционного многочлена $P_3(x)$ можно взять многочлен Ньютона. В случае постоянного шага h конечные разности для правой части в узле x_i имеют вид:

$$\Delta f_i = f_i - f_{i-1}$$
$$\Delta^2 f_i = f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2}$$
$$\Delta^3 f_i = f_i - 3f_{i-1} + 3f_{i-2} - f_{i-3}$$

Тогда разностную схему четвертого порядка метода Адамса можно записать после необходимых преобразований в виде:

$$\boldsymbol{y_{i+1} = y_i + hf_i + \frac{h^2}{2}\Delta f_i + \frac{5h^3}{12}\Delta^2 f_i + \frac{3h^4}{8}\Delta^3 f_i} \tag{17}$$

Сравнивая метод Адамса с методом Рунге-Кутта той же точности, отмечаем его экономичность, поскольку он требует вычисления лишь одного значения правой части на каждом шаге (в методе Рунге-Кутта - четырех). Но метод Адамса неудобен тем, что невозможно начать счет по одному лишь известному значению y_0. Расчет может быть начат только с узла x_3, а не x_0. Значения y_1, y_2, y_3, необходимые для вычисления y_4 нужно получить каким-либо другим способом (например, методом Рунге-Кутта), что существенно усложняет алгоритм. Кроме того, метод Адамса не позволяет (без усложнения формул) изменить шаг h в процессе счета; этого недостатка лишены одношаговые методы.

Рассмотрим еще одно семейство многошаговых методов, которые используют неявные схемы – **методы прогноза и коррекции** (они называются также **методами предиктор-корректор**). Суть этих методов состоит в следующем. На каждом шаге вводятся два этапа, использующих многошаговые методы: с помощью явного метода (предиктора) по известным значениям функции в предыдущих узлах находится начальное приближение $y_{i+1} = y_{i+1}^{(0)}$ в новом узле; используя неявный метод (корректор), в результате итераций находятся приближения $y_{i+1}^{(1)}, y_{i+1}^{(2)}$ ... Один из вариантов метода прогноза и коррекции может быть получен на основе метода Адамса четвертого порядка. Окончательный вид разностных соотношений:

на этапе предиктора: $\boldsymbol{y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}(55f_i - 59f_{i-1} + 37f_{i-2} - 9f_{i-3})}$ (18)

на этапе корректора: $\boldsymbol{y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}(9f_{i+1} + 19f_i - 5f_{i-1} + f_{i-2})}$ (19)

Явная схема (18) используется на каждом шаге один раз, а с помощью неявной схемы (19) строится итерационный процесс вычисления y_{i+1}, поскольку это значение входит в правую часть выражения $f_{i+1} = f(x_{i+1,}y_{i+1})$. Заметим, что в этих формулах, как и в случае метода Адамса, при вычислении y_{i+1} необходимы значения сеточной функции в четырех предыдущих узлах: y_{i-3}, y_{i-2} y_{i-1}, y_i. Следовательно, расчет по этому методу может быть начат только со значения y_4. Необходимые при этом y_1, y_2, y_3 находятся по методу Рунге-Кутта, y_0 задается начальным условием. Это характерная особенность многошаговых методов.

Суммарная погрешность этого метода есть величина $\delta_n = O(h^4)$.

Программная реализация

Метод Эйлера (Модифицированный)

```
    @Override
    protected double[] calculate(double h1) {
        int n1 = (int) ((xn - x0) / h1);
        double[] x1 = new double[n1 + 1];
        double[] y1 = new double[n1 + 1];
        x1[0] = x0;
        y1[0] = y0;

        for (int i = 1; i <= n1; i++) {
            x1[i] = x0 + i * h1;
        }
        for (int i = 1; i <= n1; i++) {
            y1[i] = y1[i - 1] + (h1 / 2) * (f.at(x1[i - 1], y1[i - 1]) +
                    f.at(x1[i], y1[i - 1] + h1 * f.at(x1[i - 1], y1[i -
1])));

        }
        return y1;
    }
}
```

Метод Рунге-Кутта 4-го порядка

```
    @Override
    protected double[] calculate(double h1) {
        int n1 = (int) ((xn - x0) / h1);
        double[] x1 = new double[n1 + 1];
        double[] y1 = new double[n1 + 1];
        x1[0] = x0;
        y1[0] = y0;

        for (int i = 1; i <= n1; i++) {
            x1[i] = x0 + i * h1;
        }

        for (int i = 1; i <= n1; i++) {
            double k1, k2, k3, k4;
            k1 = h1 * f.at(x1[i - 1], y1[i - 1]);
            k2 = h1 * f.at(x1[i - 1] + h1 / 2, y1[i - 1] + k1 / 2);
            k3 = h1 * f.at(x1[i - 1] + h1 / 2, y1[i - 1] + k2 / 2);
            k4 = h1 * f.at(x1[i - 1] + h1, y1[i - 1] + k3);
            y1[i] = y1[i - 1] + (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4) / 6;
        }
        return y1;
    }
}
```

Метод Адамса

```
    @Override
    public Result solve() {
        return new Result(x, calculate(h));
    }

    @Override
    protected double[] calculate(double h1) {
        Result result = new Runge(x0, xn, y0, h1, eps, f, 4).solve();
        y[1] = result.getY()[1];
        y[2] = result.getY()[2];
        y[3] = result.getY()[3];
        for (int i = 4; i <= n; i++) {
            double yp = y[i-1] + (h1/24) * (55*f.at(x[i-1], y[i-1]) -
59*f.at(x[i-2], y[i-2]) +
                    37*f.at(x[i-3], y[i-3]) - 9*f.at(x[i-4], y[i-4]));
            double yk = y[i-1] + (h1/24) * (9*f.at(x[i], yp) + 19*f.at(x[i-
1], y[i-1]) -
                    5*f.at(x[i-2], y[i-2]) + f.at(x[i-3], y[i-3]));
            while (Math.abs(yk-yp) > eps){
                yp = yk;
                yk = y[i-1] + (h1/24) * (9*f.at(x[i], yp) + 19*f.at(x[i-1],
y[i-1]) -
                        5*f.at(x[i-2], y[i-2]) + f.at(x[i-3], y[i-3]));
            }
            y[i] = yk;
        };
        return y;
    }
}
```

Результаты работы программы

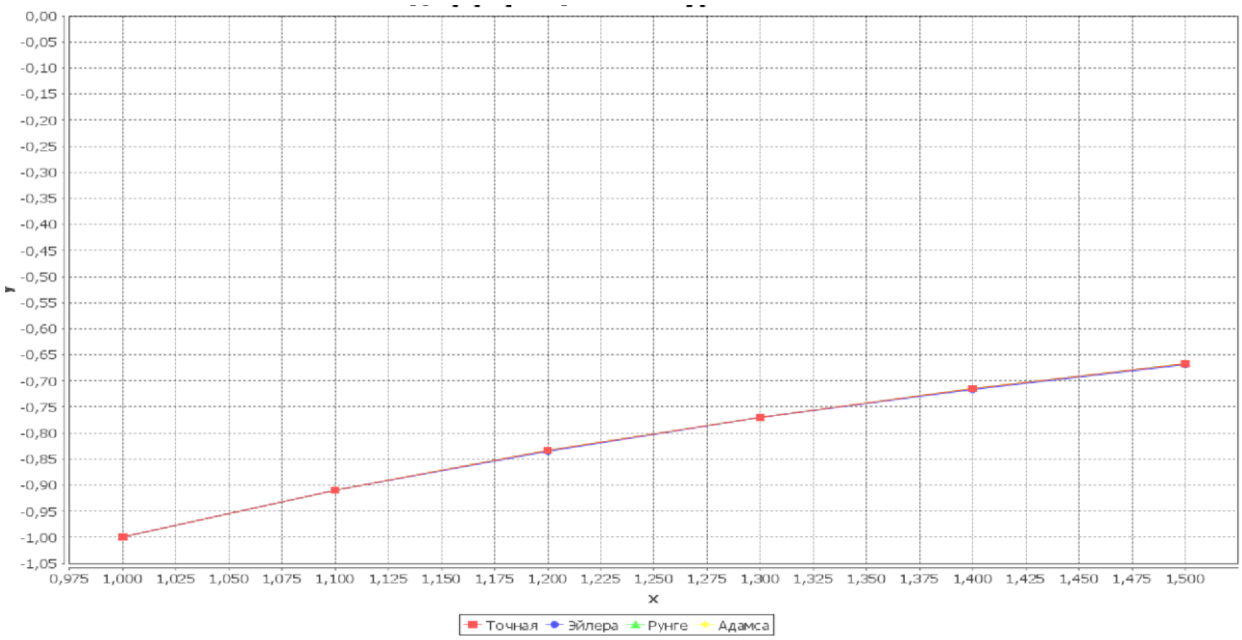
Пример №1

```
Выберите уравнение для решения:
1) y' = y + (1 + x)*y^2
2) y' = x^2 + y
3) y' = sin(x)*y
1
Введите начало и конец интервала (два числа через пробел):
1 1.5
Введите начальное условие для x0 = 1.0
-1
Введите шаг h:
0.1
Введите точность eps:
0.01
```

```
Усовершенствованный метод Эйлера:
xi  yi
1.0 -1.0
1.1 -0.90995
1.2 -0.8346160376352598
1.3 -0.7706932440205728
1.4 -0.715790969495626
1.5 -0.6681387752357489


Метод Рунге-Кутта 4-го порядка:
xi  yi
1.0 -1.0
1.1 -0.9090933147918919
1.2 -0.8333367498975212
1.3 -0.7692344924625675
1.4 -0.7142893911537227
1.5 -0.6666701275340977
```

```
Точное решение:
1.0 -1.0

1.1 -0.9090909090909090909

1.2 -0.8333333333333334

1.3 -0.7692307692307692

1.4 -0.7142857142857143

1.5 -0.6666666666666666
```

```
Метод Адамса:
xi  yi
1.0 -1.0
1.1 -0.9090933147918919
1.2 -0.8333367498975212
1.3 -0.7692344924625675
1.4 -0.714267169487349 5
1.5 -0.6666395048522458
```



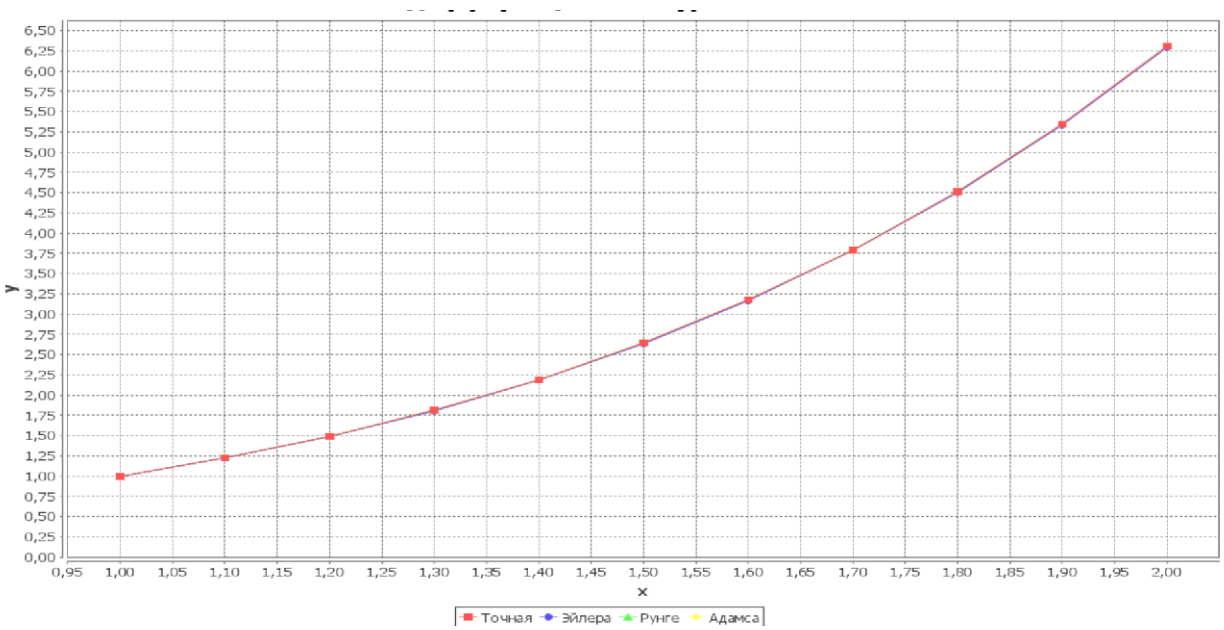
Пример №2

```
Выберите уравнение для решения:
1) y' = y + (1 + x)*y^2
2) y' = x^2 + y
3) y' = sin(x)*y
2
Введите начало и конец интервала (два числа через пробел):
1 2
Введите начальное условие для x0 = 1.0
1
Введите шаг h:
0.1
Введите точность eps:
0.01
0.05
0.05
0.05
Усовершенствованный метод Эйлера:
xi      yi
1.0     1.0
1.1     1.2205
1.2     1.4872025
1.3     1.8070587625
1.4     2.1877499325625003
1.5     2.6377636754815628
1.6     3.1664788614071266
1.7000000000000002      3.784259141854875
1.8     4.502556351749637
1.9     5.334024768683348
2.0     6.2926473693951
```

```
Метод Рунге-Кутта 4-го порядка:
xi      yi
1.0     1.0
1.1     1.2210252083333333
1.2     1.4884158636814235
1.3     1.809151675411352
1.4     2.1909464147407602
1.5     2.6423251166343915
1.6     3.1727094010884276
1.7000000000000002      3.7925117677253986
1.8     4.513239807430218
1.9     5.347611374010827
2.0     6.309681868558358
```

```
Метод Адамса:
xi      yi
1.0     1.0
1.1     1.2210252083333333
1.2     1.4884158636814235
1.3     1.809151675411352
1.4     2.190948010870299
1.5     2.642328698306178
1.6     3.172715378454009
1.7000000000000002      3.792520628511267
1.8     4.513252114099007
1.9     5.347627775254609
2.0     6.309703111425422
```

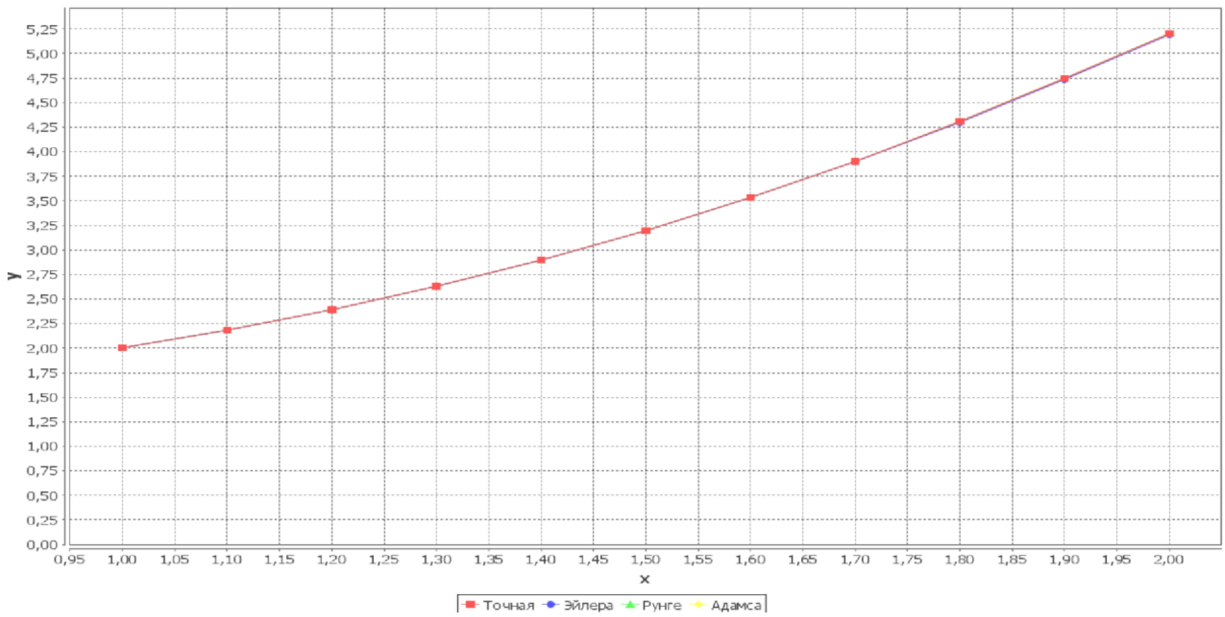
```
Точное решение:
1.0     1.0
1.1     1.2210255084538861
1.2     1.4884165489610184
1.3     1.8091528454560195
1.4     2.1909481858476223
1.5     2.642327624200769
1.6     3.172712802343054
1.7000000000000002      3.7925162448228615
1.8     4.5132455709548065
1.9     5.347618666941698
2.0     6.309690970754271
```



Пример №3

```
Выберите уравнение для решения:
1) y' = y + (1 + x)*y^2
2) y' = x^2 + y
3) y' = sin(x)*y
3
Введите начало и конец интервала (два числа через пробел):
1 2
Введите начальное условие для x0 = 1.0
2
Введите шаг h:
0.1
Введите точность eps:
0.01
0.05
0.05
0.05
Усовершенствованный метод Эйлера:
xi      yi
1.0     2.0
1.1     2.1807670858363224
1.2     2.3886280406576836
1.3     2.6257477028549436
1.4     2.8940940938196342
1.5     3.1952597233756026
1.6     3.530246847435704
1.7000000000000002      3.899221648177916
1.8     4.301248066150255
1.9     4.734018770117937
2.0     5.193607807164122
```

```
Метод Рунге-Кутта 4-го порядка:
xi      yi
1.0     2.0
1.1     2.1811523232414
1.2     2.389517930394728
1.3     2.6272837259312816
1.4     2.896439215539962
1.5     3.1985960932249347
1.6     3.534771435420886
1.7000000000000002      3.9051396158729856
1.8     4.3087638999054025
1.9     4.743325505537971
2.0     5.204875011378357


Метод Адамса:
xi      yi
1.0     2.0
1.1     2.1811523232414
1.2     2.389517930394728
1.3     2.6272837259312816
1.4     2.8964364972683763
1.5     3.1985899147849475
1.6     3.534761142252556
1.7000000000000002      3.905124656885637
1.8     4.308743966856225
1.9     4.7433006782144975
2.0     5.204845917075031


Точное решение:
1.0     2.0
1.1     2.1811524087696887
1.2     2.3895181433400747
1.3     2.62728411779493
1.4     2.8964398460353116
1.5     3.198597027496817
1.6     3.5347727399666837
1.7000000000000002      3.905141353530108
1.8     4.308766124545659
1.9     4.7433282572955315
2.0     5.204878313250145
```



Вывод

В процессе выполнения лабораторной работы была реализована программа, решающая задачу Коши численными методами Рунге-Кутта 4-го порядка, Адамса, Эйлера (Модифицированного).