

Redes Neuronales - Práctico 1: El Modelo Leaky Integrate & Fire.

Reinaldo Magallanes Saunders*

Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación, Universidad Nacional de Córdoba
M.Allende y H. de la Torre - Ciudad Universitaria, X5016LAE - Córdoba, Argentina

(Dated: 6 de noviembre de 2021)

I. INTRODUCCIÓN

Tanto los rápidos avances tecnológicos como la disponibilidad de datos en masa, en gran parte gracias a internet, dieron lugar al advenimiento y proliferación del *machine learning*. Debido a la diversidad de aplicaciones, desde vehículos autónomos[1] hasta AlphaZero[2], y mas, existe un gran interés en el desarrollo de sus muchas implementaciones, dentro de las cuales se encuentran las redes neuronales.

Las redes neuronales tienen su origen[3] como modelo del funcionamiento de neuronas en un cerebro. Aunque actualmente las redes neuronales no consten necesariamente de entidades que modelen neuronas biológicas, en nuestro caso, el concepto de red neuronal se construyó a partir del punto de vista biológico de la neurona.

Según su función y ubicación, las neuronas varían en tamaño, forma y estructura. En general, constan de tres partes esenciales, el soma, las dendritas y el axón, que contribuyen a la transmisión y recepción de señales electroquímicas. El soma o pericarion es el cuerpo celular de la neurona. Se encarga de mantener la estructura neuronal y proveer la energía requerida para su funcionamiento, y se encuentra encapsulado por una membrana que le permite interactuar con el exterior. Las dendritas son prolongaciones ramificadas que nacen del soma, y se encargan de recibir y procesar señales provenientes de otras neuronas. El axón es una estructura con forma de cola unida al soma, que permite la transmisión de señales a otras células.

Los impulsos nerviosos se transmiten mediante potenciales de acción, cambios en el potencial eléctrico neuronal a causa del flujo de iones a través de la membrana neuronal. El efecto del potencial de acción en la neurona se puede cuantificar mediante la diferencia de potencial entre el interior de la célula y su periferia, denominada potencial de membrana. En general, para una neurona, los potenciales de acción tienen aproximadamente la misma forma, lo que implica que la información transmitida no esta contenida en la forma, sino en la presencia o ausencia. Entonces, los potenciales de acción se reducen a eventos que suceden en un instante de tiempo preciso.

Los modelos neuronales en los que los potenciales de acción se describen como eventos, sin tratar de describir su forma, se denominan modelos *Integrate and Fire*. Estos modelos, introducidos por Lapicque[4], tienen dos componentes fundamentales necesarias para describir su dinámica. Primero, una ecuación diferencial que describe la evolución del potencial de mem-

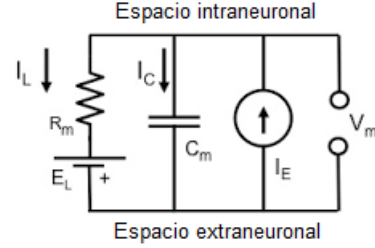


Figura 1: Circuito eléctrico que modela la membrana neuronal en el modelo *Leaky Integrate and Fire*.

brana, y segundo, un mecanismo de disparo. Cuando el potencial de membrana alcanza un valor umbral, la neurona dispara, generando un impulso que viaja a otras neuronas, lo que hace que sus potenciales crezcan o decrezcan, y el potencial de membrana vuelve a su valor de reposo.

II. MODELO LEAKY INTEGRATE & FIRE

En nuestro caso, el modelo a utilizar es el denominado *Leaky Integrate and Fire*. Este se basa en un circuito eléctrico simple, mostrado en la Figura 1, para describir la evolución temporal del potencial de membrana $V_m(t)$ entre el interior y el exterior de una neurona. Por su parte, la membrana provee aislamiento eléctrico entre el espacio intraneuronal y el espacio extraneuronal permitiendo acumulación de carga en la membrana, lo que se modela con un capacitor cuya capacitancia C_m se denomina capacitancia de membrana. Ya que este aislamiento no es perfecto, se presenta fuga (o *leakage*) de carga a través de la membrana, por lo que se incluye una resistencia de membrana R_m . El circuito se encuentra manejado por una corriente externa $I_E(t)$ generada por una fuente de corriente que busca modelar la señal estímulo que recibe la neurona. En el nodo, esta corriente se dividirá en dos corrientes $I_L(t)$ y $I_C(t)$, que circulan por las ramas resistiva y capacitiva, respectivamente. Finalmente, la diferencia de potencial entre el exterior y el interior de la neurona es no nula aun cuando no recibe estímulo eléctrico. Este es el valor de reposo del potencial de membrana, que se modela con una diferencia de potencial E_L .

Aplicando conceptos sencillos de teoría de circuitos y las leyes de Kirchhoff, se puede obtener la ecuación diferencial que describe la dinámica del modelo:

$$\dot{V}_m(t) = \frac{1}{\tau_m} [E_L - V_m(t) + R_m I_E(t)], \quad (2.1)$$

donde $\tau_m = R_m C_m$ es el tiempo característico de la membrana. Esta ecuación diferencial admite solución exacta (Apéndice A) dada por

*Correo electrónico: rei.magallanes@mi.unc.edu.ar

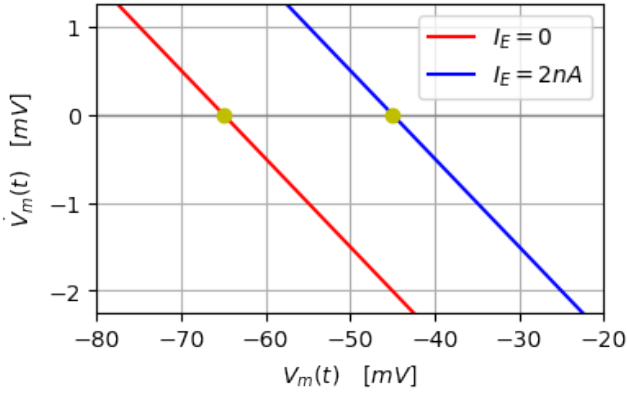


Figura 2: Diagrama de las fases para dos valores I_E constantes indicando el punto fijo estable correspondiente. Para $I_E = 0$, $V_m^{(\varphi)} = -65mV$. Para $I_E = 2nA$, $V_m^{(\varphi)} = -45mV$.

$$V_m(t) = \mathcal{C}e^{-t/\tau_m} + E_L + \frac{R_m}{\tau_m}e^{-t/\tau_m} \int I_E(\nu)e^{\nu/\tau_m} d\nu \quad (2.2)$$

donde \mathcal{C} está dada por las condiciones iniciales. En el caso particular en el que $I_E(t)$ es una corriente constante, y tomando $V_m(0) = E_L$, la solución se reduce a

$$V_m(t) = E_L + R_m I_E (1 - e^{-t/\tau_m}) \quad (2.3)$$

El mecanismo de disparo es el encargado de modelar la transmisión de impulsos a otras neuronas mediante potenciales de acción. Se puede ver que las ecuaciones no lo incorporan por sí mismas, sino que debe implementarse de forma externa. Esto se hace mediante una regla que estipula que cada vez que el potencial de membrana $V_m(t)$ llegue a cierto valor umbral V_{um} , este retorne de manera instantánea a su valor de reposo E_L .

Con el mecanismo de disparo, a partir de la ecuación 2.3, es posible calcular la frecuencia de disparo f_d para corriente constante. Asumiendo que $V_m(0) = E_L$, el tiempo de disparo t_d será el instante de tiempo en el que $V_m(t_d) = V_{um}$. Resolviendo para t_d y tomando su recíproco se obtiene

$$f_d = \frac{1}{t_d} = \frac{-1}{\tau_m \ln \left(1 - \frac{V_{um} - E_L}{R_m I_E} \right)} \quad (2.4)$$

III. DINÁMICA DEL MODELO.

Para estudiar el comportamiento del modelo frente a la variable dinámica $I_E(t)$, se toman los siguientes valores para el resto de los parámetros:

$$V_m(0) = E_L = -65mV, \quad R_m = 10M\Omega, \quad \tau_m = 10ms$$

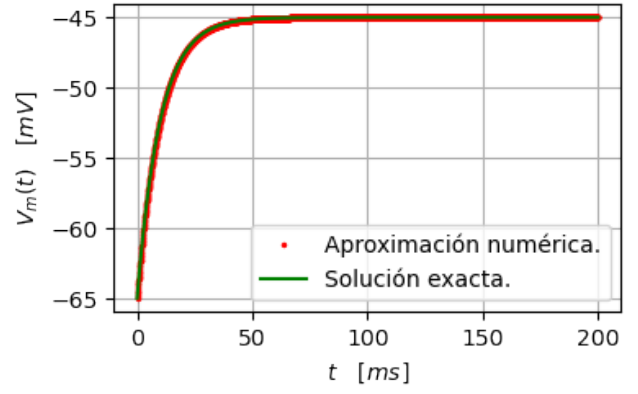


Figura 3: Potencial de membrana sin mecanismo de disparo para $I_E = 2nA$.

A. Leaky Integrate & Fire sin mecanismo de disparo.

En primer lugar, se trata el modelo sin el mecanismo de disparo.

Debido a la ausencia del mecanismo de disparo, resulta útil realizar un estudio de la dinámica del sistema a tiempos largos. Para ello, se toman valores de I_E constantes y se buscan los puntos fijos de la ecuación 2.1; valores $V_m^{(\varphi)}$ tales que $\dot{V}_m(t) = 0$. Como $\dot{V}_m(t)$ es una recta en $V_m(t)$, este sistema tiene un único punto fijo. Mas aun, como $d\dot{V}_m/dV_m = -\tau_m^{-1}$, este punto fijo será estable. Esto quiere decir que, a tiempos largos, y sin importar la condición inicial, el sistema se estabilizará en $V_m^{(\varphi)}$. De la ecuación 2.3, es inmediato que $V_m^{(\varphi)} = E_L + R_m I_E$, por lo que la corriente externa hace que el punto fijo se vea desplazado. En la Figura 2 se muestra un diagrama de las fases para corriente I_E nula, con punto fijo $V_m^{(\varphi)} = -65mV$, y para $I_E = 2nA$, con punto fijo $V_m^{(\varphi)} = -45mV$. En esta figura se puede observar claramente el desplazamiento del punto fijo producto del aumento de la corriente I_E .

Para el caso de corriente I_E nula, se puede ver rápidamente, de la ecuación 2.3, que el potencial de membrana no varía con el tiempo y conserva su valor inicial $V_m(t) = E_L = -65mV$, lo que está de acuerdo con el análisis hecho anteriormente. En el caso en que $I_E = 2nA$, el potencial de membrana si cambia con el tiempo. En la Figura 3 se puede observar el potencial de membrana en función del tiempo. Se presentan tanto la solución exacta, dada por la ecuación 2.3, como una aproximación numérica. Se utilizó el método de Runge-Kutta de 4to orden, con un paso de $0,05ms$. Efectivamente, a tiempos largos, el potencial de membrana se estabiliza con un valor de $-45mV$.

B. Leaky Integrate & Fire con mecanismo de disparo.

Una vez incorporado el mecanismo de disparo, la dinámica del sistema cambia completamente. Debido a que se lo debe incorporar de manera externa, se utiliza el método de Runge-Kutta de 4to orden con un

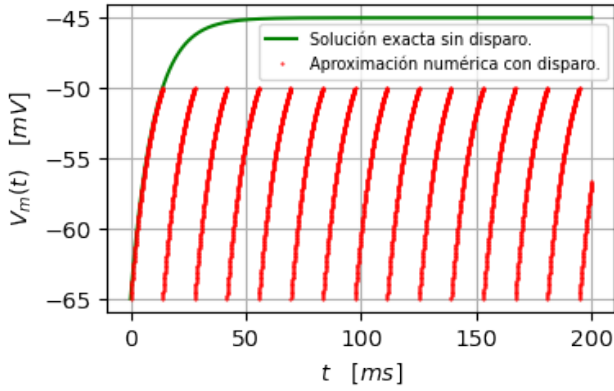


Figura 4: Potencial de membrana para $I_E = 2nA$.

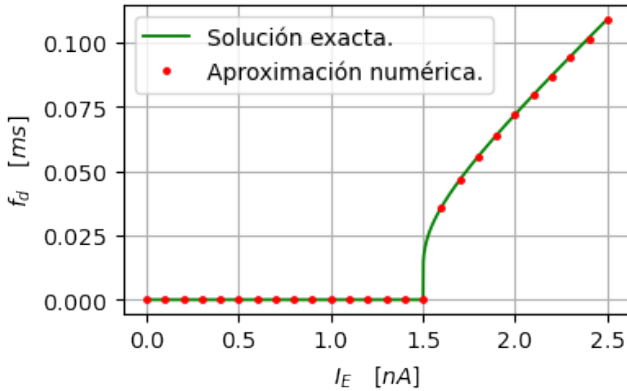


Figura 5: Frecuencia de disparo como función de la corriente constante I_E .

paso de $0,05ms$ y un potencial de membrana umbral de $-50mV$.

Para observar como la dinámica se altera con la introducción del mecanismo de disparo, en la Figura 4 se muestra el potencial de membrana para $I_E = 2nA$ para ambos casos. Se ve que, a tiempos cortos, ambos casos son idénticos pero una vez que el potencial de membrana alcanza el valor umbral $V_{um} = -50mV$ la neurona dispara y el potencial de membrana vuelve a su valor de reposo y vuelve a crecer.

Debido a que la corriente I_E es constante, los disparos se encuentran separados por intervalos de tiempos constantes, lo que sugiere una frecuencia de disparo constante. Esto se puede corroborar mediante la ecuación 2.4. Dado que la corriente I_E hace que $\dot{V}_m(t)$ aumente, según la ecuación 2.1, la frecuencia de disparo aumenta con I_E . Sin embargo, como la condición de disparo es que el potencial de membrana alcance el valor umbral, si V_m nunca alcanza este valor, producto de una corriente I_E muy débil o negativa, el disparo no ocurre y la frecuencia de disparo es nula. Esto se corresponde, en la ecuación 2.4, a un argumento negativo en el logaritmo en el caso de corriente débil o a un argumento mayor que uno, y por ende una frecuencia de disparo negativa, en el caso de una corriente negativa.

En la Figura 5 se puede observar la frecuencia de disparo f_d como función de la corriente constante I_E . Para la aproximación numérica se utilizó el método de Runge-Kutta para corrientes espaciadas por $0,1nA$ y

el tiempo de disparo se estimó como el tiempo en que tarda en suceder el primer disparo, ya que la condición inicial y el valor de reposo para el potencial de membrana son iguales. En los casos para los cuales el disparo no ocurre, se asignó $f_d = 0$ manualmente. Se puede notar que, para valores grandes de I_E , la frecuencia de disparo aumenta linealmente con I_E . Esto se puede corroborar desarrollando f_d , según la ecuación 2.4, en serie de Laurent en $I_E = \infty$ para obtener

$$I_E \gg 1 \Rightarrow f_d \approx \frac{R_m}{\tau_m(V_{um} - E_L)} I_E - \frac{1}{2\tau_m} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{I_E}\right)$$

Esto solo es válido si la corriente I_E es constante. En el caso de una corriente $I_E(t)$ variable la frecuencia de disparo deja de ser constante, y el potencial de membrana no presentará la simetría traslacional que se observa en la Figura 4.

Para observar el comportamiento del potencial de membrana frente a corrientes dependientes del tiempo, se tomaron dos corrientes oscilatorias. Primero, una corriente sinusoidal simple de la forma

$$I_E(t) = I_0 \cos\left(\frac{t}{30}\right), \quad I_0 = 2,5nA, \quad (3.1)$$

que se puede observar en la parte inferior de la Figura 6 junto con el potencial de membrana, en la parte superior, que se obtiene en respuesta a esta corriente. Luego, se consideró una corriente externa mas complicada, de la forma:

$$I_E(t) = 0,35nA \left[\cos\left(\frac{t}{3}\right) + \sin\left(\frac{t}{5}\right) + \cos\left(\frac{t}{7}\right) + \sin\left(\frac{t}{11}\right) + \cos\left(\frac{t}{13}\right) \right]^2. \quad (3.2)$$

En la Figura 7 se puede observar esta corriente como función del tiempo, en la parte inferior, y el correspondiente potencial de membrana, en la parte superior.

Se observa que una corriente externa variable en el tiempo puede alterar drásticamente el comportamiento del potencial de membrana, con disparos separados por intervalos de tiempo irregulares. Como era de esperarse, la periodicidad de $I_E(t)$ se ve reflejada en la periodicidad de $V_m(t)$, como muestra la Figura 6.

IV. CONCLUSIÓN

El modelo *Leaky Integrate & Fire* es de los modelos neuronales mas rudimentarios. Sin embargo, permite introducir y modelar conceptos básicos sobre neuronas.

Se pudo ver como, sin el mecanismo de disparo, la neurona se estabiliza frente a corrientes externas constantes, para cualquier condición inicial.

Una vez introducido el mecanismo de disparo, se vio que, frente a corrientes constantes, el potencial de membrana presenta simetría traslacional, lo que se traduce en una frecuencia de disparo constante, pero

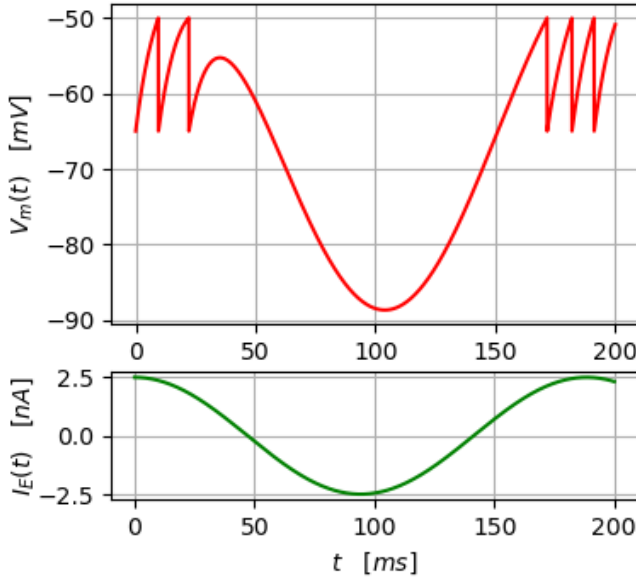


Figura 6: Potencial de membrana, en la parte superior, para una corriente $I_E(t)$, en la parte inferior, dada por la ecuación 3.1.

nula bajo cierto valor de corriente. Y, para corrientes variables, se pudo ver que los disparos no ocurren de forma regular, pero el potencial de membrana presenta

la misma periodicidad que la corriente externa.

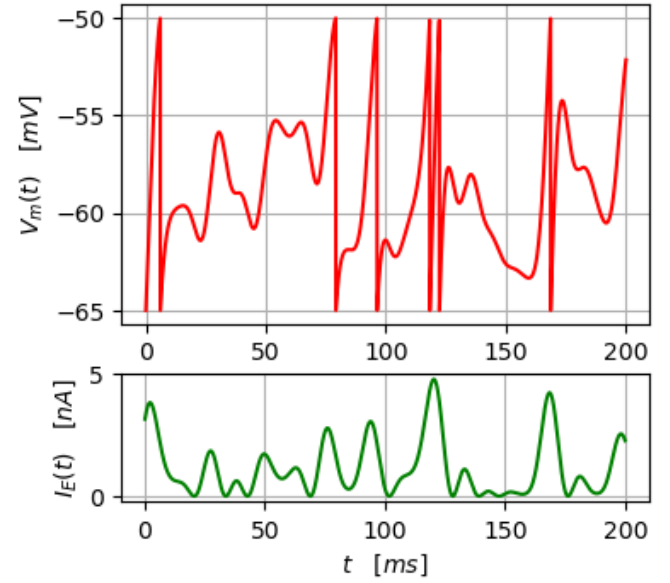


Figura 7: Potencial de membrana, en la parte superior, para una corriente $I_E(t)$, en la parte inferior, dada por la ecuación 3.2

-
- [1] T. Kurani, N. Kathiriya, U. Mistry, L. Kadu, H. Motekar. *Self driving car using machine learning*. International Research Journal of Engineering and Technology, volume 07, issue 05, May 2020.
 - [2] AlphaZero: *Shedding new light on chess, shogi, and Go*, DeepMind. Disponible en: <https://deepmind.com/blog/article/alphazero-shedding-new-light-grand-games-chess-shogi-and-go>
 - [3] W. McCulloch, W. Pitts (1943). *A Logical Calculus of Ideas Immanent in Nervous Activity*. Bulletin of Mathematical Biophysics. 5 (4): 115–133.
 - [4] N. Brunel, M. van Rossum (2007). *Quantitative investigations of electrical nerve excitation treated as polarization: Louis Lapicque 1907 · Translated by:.* Biological Cybernetics. 97. 341-349. 10.1007/s00422-007-0189-6.

Apéndice A: Solución exacta del modelo.

Primero, se escribe la ecuación 2.1 como

$$\dot{V}_m(t) + \frac{V_m(t)}{\tau_m} = \frac{E_L + R_m I_E(t)}{\tau_m}$$

y se multiplica a ambos lados de la igualdad por el factor integrante $\mu(t)$:

$$\mu(t)\dot{V}_m(t) + \mu(t)\frac{V_m(t)}{\tau_m} = \mu(t)\frac{E_L + R_m I_E(t)}{\tau_m}.$$

Ahora, para que la expresión de la derecha se pueda escribir como la derivada de $\mu(t)V_m(t)$, debe ser $\mu(t)/\tau_m = \dot{\mu}(t)$, por lo que $\mu(t) = \exp(t/\tau_m)$. Luego,

$$V_m(t) = \mu^{-1}(t) \left[\mathcal{C} + \int \mu(\nu) \frac{E_L + R_m I_E(\nu)}{\tau_m} d\nu \right],$$

lo cual se reduce a la ecuación 2.2.