Step(m) の証明

Reiji Konishi

2020 年 12 月 19 日

1　ii-b について

MLP シリーズ「統計的因果探索」の図 4.10 の例とほぼ同じモデルで考える。($x_3 \to x_1 \to x_2$)

$$
\begin{aligned}
x_3 &\sim Poisson(\lambda) \\
x_1 &= b_{13}x_3 + e_1 \\
x_2 &= b_{21}x_1 + e_2
\end{aligned}
$$

まず最初に、因果順序が最も早い変数を探索する。

$E(x_3^2) = E(x_3) + E(x_3)^2$ が成立しているため、命題 2.3 を使って、因果順序が最も早い変数は x_3 だと特定できる。(もし親となる変数があれば、$E(x_3^2) > E(x_3) + E(x_3)^2$ となってしまう。)

次に、因果順序が最も早い x_3 による寄与を他の変数 x_1, x_2 から取り除く。この時の残差 $r_1^{(3)}$ と $r_2^{(3)}$ が、LiNGAM の形式で書ければ、因果順序が 2 番目の変数を特定できる。

変数 x_1 と x_2 を目的変数に、x_3 を説明変数にして回帰分析をして、残差 $r_1^{(3)}$ と $r_2^{(3)}$ を求める。

$$
r_1^{(3)} = x_1 - \frac{\mathrm{cov}(x_3, x_1)}{\mathrm{var}(x_3)} x_3 \tag{1}
$$

ここで、

$$
\begin{aligned}
\mathrm{cov}(x_3, x_1) &= E[x_3x_1] - E[x_3]E[x_1] && (2) \\
&= E[x_3(b_{13}x_3 + e_1)] - E[x_3]E[b_{13}x_3 + e_1] && (3) \\
&= b_{13}E[x_3^2] + E[x_3e_1] - b_{13}E[x_3]^2 - E[x_3]E[e_1] && (4) \\
&= b_{13}E[x_3^2] + E[x_3]E[e_1] - b_{13}E[x_3]^2 - E[x_3]E[e_1] && (5) \\
&= b_{13}E[x_3^2] - b_{13}E[x_3]^2 && (6) \\
&= b_{13}(E[x_3^2] - E[x_3]^2) && (7) \\
&= b_{13}\mathrm{var}(x_3) && (8)
\end{aligned}
$$

よって、式 (1) は以下となる。

$$
\begin{aligned}
r_1^{(3)} &= x_1 - b_{13}x_3 && (9) \\
&= e_1 && (10)
\end{aligned}
$$

次に $r_2^{(3)}$ を求める。

$$r_2^{(3)} = x_2 - \frac{\mathrm{cov}(x_3, x_2)}{\mathrm{var}(x_3)} x_3 \tag{11}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
\mathrm{cov}(x_3, x_2) &= E[x_3 x_2] - E[x_3]E[x_2] & (12)\\
&= E[x_3(b_{21}x_1 + e_2)] - E[x_3]E[b_{21}x_1 + e_2] & (13)\\
&= E[x_3(b_{21}(b_{13}x_3 + e_1) + e_2)] - E[x_3]E[b_{21}(b_{13}x_3 + e_1) + e_2] & (14)\\
&= E[x_3(b_{21}b_{13}x_3 + b_{21}e_1 + e_2)] - E[x_3]E[b_{21}b_{13}x_3 + b_{21}e_1 + e_2] & (15)\\
&= b_{21}b_{13}E[x_3^2] + b_{21}E[x_3 e_1] + E[x_3 e_2] \\
&\quad - b_{21}b_{13}E[x_3]^2 - b_{21}E[x_e]E[e_1] - E[x_3]E[e_2] & (16)\\
&= b_{21}b_{13}(E[x_3^2] - E[x_3]^2) & (17)\\
&= b_{21}b_{13}\mathrm{var}(x_3) & (18)
\end{aligned}$$

よって、式 (11) は以下となる。

$$\begin{aligned}
r_2^{(3)} &= x_2 - b_{21}b_{13}x_3 & (19)\\
&= x_2 - b_{21}(x_1 - e_1) & (20)\\
&= x_2 - b_{21}x_1 + b_{21}e_1 & (21)\\
&= e_2 + b_{21}e_1 & (22)
\end{aligned}$$

まとめると、x_3 に関する項は含まれない形で、$r_1^{(3)}$ と $r_2^{(3)}$ に関する LiNGAM の形式で書ける。

$$\begin{aligned}
r_1^{(3)} &= e_1 & (23)\\
r_2^{(3)} &= b_{21}r_1^{(3)} + e_2 & (24)
\end{aligned}$$