Heurísticas e Metaheuristicas

Conceitos Básicos

Prof. Guilherme de Castro Pena

guilherme.pena@ufsj.edu.br

Sala: DCOMP 3.11

Departamento de Ciência da Computação
Universidade Federal de São João del-Rei

Material adaptado do Prof. André (UFV)

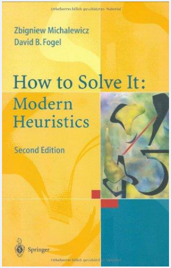
Agenda

1. Conceitos Básicos
   - Introdução
   - Espaço de Soluções
2. Dificuldades impostas pelos problemas
   - Principais afirmações
   - Exemplos
   - Restrições e Modelagem

Referência

Livro

- Esse conteúdo está baseado no livro texto:
- MICHLEWICZ, Zbigniew; FOGEL, David B. How to solve it: modern heuristics. 2nd. ed. Berlin: Springer c2010 554 p. ISBN 9783642061349.
- Capítulo 1, seções 1.1 - 1.4;



Quebra-Cabeça

Qual a idade dos meus 3 filhos?

- Dois amigos matemáticos se encontram e ao conversar sobre família, o Matemático 1 menciona que agora possui 3 filhos.
  - **Matemático 2 diz: Legal, e qual a idade deles?**
  - Matemático 1 diz: Bom, o produto das idades é 36!
  - **Matemático 2 diz: Preciso de mais dicas.**
  - Matemático 1 diz: Ok. A soma das idades deles é igual ao número daquela casa ali na frente.
  - **Matemático 2 diz: Hum.. preciso de mais dica!**
  - Matemático 1 diz: Meu filho mais velho tem olhos azuis.
  - **Matemático 2 diz: Ok, isso é suficiente. As idades deles são .., .., ...**

Quebra-Cabeça

Qual a idade dos meus 3 filhos?

- Nos perguntamos, como o matemático 2 conseguiu resolver o problema com essas dicas?
- A resposta é que ele conseguiu extrair a informação útil em cada dica e analisando as possibilidades, ele chega à conclusão correta.

Dica 1: O produto das idades é 36

- O matemático 2 verificou todas as possibilidades:

Filho 1	Filho 2	Filho 3
36	1	1
18	2	1
12	3	1
9	4	1
9	2	2
6	6	1
6	3	2
4	3	3

Quebra-Cabeça

Qual a idade dos meus 3 filhos?

- Nos perguntamos, como o matemático 2 conseguiu resolver o problema com essas dicas?
- A resposta é que ele conseguiu extrair a informação útil em cada dica e analisando as possibilidades, ele chega à conclusão correta.

Dica 1: O produto das idades é 36

- O matemático 2 verificou todas as possibilidades:

Filho 1	**Filho 2**	**Filho 3**
36	1	1
18	2	1
12	3	1
9	4	1
9	2	2
6	6	1
6	3	2
4	3	3

Quebra-Cabeça

Dica 2: A soma das idades deles é igual ao número daquela casa..

- Podemos imaginar que o matemático 2 sabe o número da casa e as seguintes possibilidades surgem:

Soma dos valores	Total
$36 + 1 + 1 =$	38
$18 + 2 + 1 =$	21
$12 + 3 + 1 =$	16
$9 + 4 + 1 =$	14
$9 + 2 + 2 =$	13
$6 + 6 + 1 =$	13
$6 + 3 + 2 =$	11
$4 + 3 + 3 =$	10

- Se fosse um dos valores 38, 21, 16, 14, 11 e 10 para o número da casa, então ele já teria a resposta.
- No entanto, ele pede mais uma dica, pois sabe que o número da casa é 13 e tem duas possibilidades de resposta.

Quebra-Cabeça

Dica 3: Meu filho mais velho tem olhos azuis.

- O matemático 2 conseguiu responder corretamente pelo trecho dessa dica: **mais velho**.
- Pois como as possibilidades eram:

$$\begin{array}{lr} 9+2+2= & 13 \\ 6+6+1= & 13 \end{array}$$

- A única resposta possível são as idades 9, 2 e 2.

Considerações:

- O que facilita a solução desse problema é que a ordem de apresentação das informações é justamente a ordem necessária para resolvê-lo.
- Dados de problemas reais não são tão organizados..
- De toda forma, considerar todas as informações disponíveis permite avaliar todas as oportunidades de achar um ponto de partida útil.

Quebra-Cabeça

Dica 3: Meu filho mais velho tem olhos azuis.

- O matemático 2 conseguiu responder corretamente pelo trecho dessa dica: **mais velho**.
- Pois como as possibilidades eram:

$$\begin{array}{lr} 9+2+2= & 13 \\ 6+6+1= & 13 \end{array}$$

- A única resposta possível são as idades 9, 2 e 2.

Considerações:

- O que facilita a solução desse problema é que a ordem de apresentação das informações é justamente a ordem necessária para resolvê-lo.
- Dados de problemas reais não são tão organizados..
- De toda forma, considerar todas as informações disponíveis permite avaliar todas as oportunidades de achar um ponto de partida útil.

Quebra-Cabeça

Dica 3: Meu filho mais velho tem olhos azuis.

- O matemático 2 conseguiu responder corretamente pelo trecho dessa dica: **mais velho**.
- Pois como as possibilidades eram:

$9 + 2 + 2 =$	13
$6 + 6 + 1 =$	13

- A única resposta possível são as idades 9, 2 e 2.

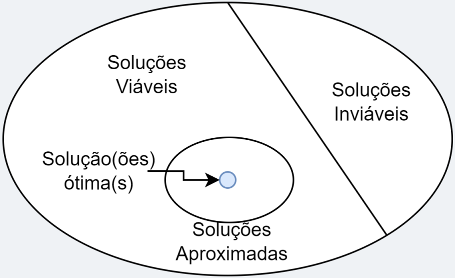
Considerações:

- O que facilita a solução desse problema é que a ordem de apresentação das informações é justamente a ordem necessária para resolvê-lo.
- Dados de problemas reais não são tão organizados..
- De toda forma, considerar todas as informações disponíveis permite avaliar todas as oportunidades de achar um ponto de partida útil.

Espaço de Soluções (Espaço de busca)

Considerações

- O espaço de soluções de um problema tem 4 classes de soluções:
  - **Soluções Viáveis:** Aquelas que satisfazem as restrições do problema.
  - **Soluções Inviáveis:** Aquelas que não satisfazem pelo menos uma restrição do problema.
  - **Soluções Aproximadas:** Soluções viáveis que se aproximam do valor da melhor solução.
  - **Solução Ótima:** A melhor solução possível para o problema em questão.



Agenda

1 Conceitos Básicos
- Introdução
- Espaço de Soluções

2 Dificuldades impostas pelos problemas
- Principais afirmações
- Exemplos
- Restrições e Modelagem

Por que alguns problemas são difíceis de se resolver?

Afirmações

- O número de possíveis soluções do **espaço de busca** é muito grande.
  - Uma **busca exaustiva (força bruta)** está fora de questão.
- O problema é tão complicado que, para facilitar a solução, são usados modelos simplificados.
  - O resultado pode ser sem significado.
- A **função de avaliação** que mede a qualidade de uma solução não é precisa ou varia com o tempo.
  - Pode ser necessária uma série de soluções.
- O problema possui várias **restrições** bem difíceis de atender.
  - Encontrar sequer uma solução viável é difícil, quanto mais otimizar.

Por que alguns problemas são difíceis de se resolver?

Afirmações

- O número de possíveis soluções do **espaço de busca** é muito grande.
  - Uma **busca exaustiva (força bruta)** está fora de questão.
- O problema é tão complicado que, para facilitar a solução, são usados modelos simplificados.
  - O resultado pode ser sem significado.
- A **função de avaliação** que mede a qualidade de uma solução não é precisa ou varia com o tempo.
  - Pode ser necessária uma série de soluções.
- O problema possui várias **restrições** bem difíceis de atender.
  - Encontrar sequer uma solução viável é difícil, quanto mais otimizar.

Por que alguns problemas são difíceis de se resolver?

Afirmações

- O número de possíveis soluções do **espaço de busca** é muito grande.
  - Uma **busca exaustiva (força bruta)** está fora de questão.
- O problema é tão complicado que, para facilitar a solução, são usados modelos simplificados.
  - O resultado pode ser sem significado.
- A **função de avaliação** que mede a qualidade de uma solução não é precisa ou varia com o tempo.
  - Pode ser necessária uma série de soluções.
- O problema possui várias **restrições** bem difíceis de atender.
  - Encontrar sequer uma solução viável é difícil, quanto mais otimizar.

Por que alguns problemas são difíceis de se resolver?

Afirmações

- O número de possíveis soluções do **espaço de busca** é muito grande.
  - Uma **busca exaustiva (força bruta)** está fora de questão.
- O problema é tão complicado que, para facilitar a solução, são usados modelos simplificados.
  - O resultado pode ser sem significado.
- A **função de avaliação** que mede a qualidade de uma solução não é precisa ou varia com o tempo.
  - Pode ser necessária uma série de soluções.
- O problema possui várias **restrições** bem difíceis de atender.
  - Encontrar sequer uma solução viável é difícil, quanto mais otimizar.

Exemplos

Dois problemas clássicos

- Só para relembrarmos os problemas e o porquê do quão rápido cresce o espaço de busca desses problemas:
  - *SAT – boolean satisfiability problem* (Problema da Satisfatibilidade)
  - *TSP – traveling salesman problem* (Problema do Caixeiro Viajante)

Exemplos

SAT – boolean satisfiability problem (Problema da Satisfatibilidade)

- O SAT é um dos problemas elementares da lógica.
- Dada uma expressão booleana, determinar valores TRUE/FALSE para as variáveis de tal forma que a expressão seja verdadeira. Supondo 100 variáveis:

$$F(x) = (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3) \wedge (\overline{x_4} \vee x_5 \vee x_6) \wedge \ldots \wedge (\overline{x_{98}} \vee x_{99} \vee \overline{x_{100}})$$

- Note que $\overline{x_2}$ é a negação de x_2.
- Qualquer atribuição TRUE/FALSE para cada variável é uma solução candidata.
- **Para 100 variáveis, o tamanho do espaço de busca é $|S| = 2^{100} \approx 10^{30}$ possibilidades.**

Exemplos

SAT – boolean satisfiability problem (Problema da Satisfatibilidade)

- O SAT é um dos problemas elementares da lógica.
- Dada uma expressão booleana, determinar valores TRUE/FALSE para as variáveis de tal forma que a expressão seja verdadeira. Supondo 100 variáveis:

$$F(x) = (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3) \wedge (\overline{x_4} \vee x_5 \vee x_6) \wedge \ldots \wedge (\overline{x_{98}} \vee x_{99} \vee \overline{x_{100}})$$

- Note que $\overline{x_2}$ é a negação de x_2.
- Qualquer atribuição TRUE/FALSE para cada variável é uma solução candidata.
- Para 100 variáveis, o tamanho do espaço de busca é $|S| = 2^{100} \approx 10^{30}$ possibilidades.

Exemplos

SAT – boolean satisfiability problem (Problema da Satisfatibilidade)

- O SAT é um dos problemas elementares da lógica.
- Dada uma expressão booleana, determinar valores TRUE/FALSE para as variáveis de tal forma que a expressão seja verdadeira. Supondo 100 variáveis:

$$F(x) = (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3) \wedge (\overline{x_4} \vee x_5 \vee x_6) \wedge \ldots \wedge (\overline{x_{98}} \vee x_{99} \vee \overline{x_{100}})$$

- Note que $\overline{x_2}$ é a negação de x_2.
- Qualquer atribuição TRUE/FALSE para cada variável é uma solução candidata.
- **Para 100 variáveis, o tamanho do espaço de busca é $|S| = 2^{100} \approx 10^{30}$ possibilidades.**

Exemplos

SAT – boolean satisfiability problem (Problema da Satisfatibilidade)

- Além desse espaço de busca enorme, a função de avaliação também não é muito clara.
- Para $F(x)$ as únicas respostas possíveis são TRUE ou FALSE.
- Se encontramos uma combinação x que fornece uma resposta **TRUE** resolvemos o problema.
- Mas e se der **FALSE**? O que é mais provável!

Sobre a função de avaliação

- Uma boa função de avaliação deveria dar uma ideia da **qualidade da solução candidata**.
  - Soluções próximas da resposta correta deveriam ser melhor avaliadas (ter um valor maior ou menor, dependendo da situação).
  - Isso serviria para guiar a busca sendo necessário algo mais do que apenas "certo" ou "errado".

Exemplos

SAT – boolean satisfiability problem (Problema da Satisfatibilidade)

- Além desse espaço de busca enorme, a função de avaliação também não é muito clara.
- Para $F(x)$ as únicas respostas possíveis são TRUE ou FALSE.
- Se encontramos uma combinação x que fornece uma resposta **TRUE** resolvemos o problema.
- Mas e se der **FALSE**? O que é mais provável!

Sobre a função de avaliação

- Uma boa função de avaliação deveria dar uma ideia da **qualidade da solução candidata**.
  - Soluções próximas da resposta correta deveriam ser melhor avaliadas (ter um valor maior ou menor, dependendo da situação).
  - Isso serviria para guiar a busca sendo necessário algo mais do que apenas "certo" ou "errado".

Exemplos

SAT – boolean satisfiability problem (Problema da Satisfatibilidade)

- Além desse espaço de busca enorme, a função de avaliação também não é muito clara.
- Para $F(x)$ as únicas respostas possíveis são TRUE ou FALSE.
- Se encontramos uma combinação x que fornece uma resposta **TRUE** resolvemos o problema.
- Mas e se der **FALSE**? O que é mais provável!

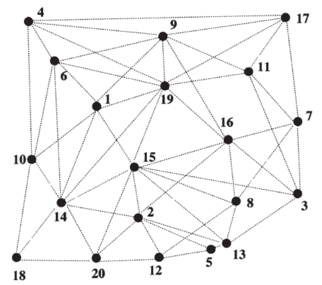
Sobre a função de avaliação

- Uma boa função de avaliação deveria dar uma ideia da **qualidade da solução candidata**.
  - Soluções próximas da resposta correta deveriam ser melhor avaliadas (ter um valor maior ou menor, dependendo da situação).
  - Isso serviria para guiar a busca sendo necessário algo mais do que apenas "certo" ou "errado".

Exemplos

TSP – traveling salesman problem (Problema do Caixeiro Viajante)

- Alguns problemas parecem menos difíceis do que o SAT porque sugerem uma função de avaliação mais clara, por exemplo o TSP.
- O caixeiro viajante deve visitar cada cidade exatamente uma vez, retornando ao ponto de partida com a menor distância total.
  - Na forma simétrica, considerando duas cidades i e j, $dist(i, j) = dist(j, i)$.

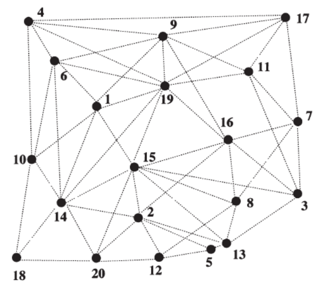


- Poderia ainda ser assimétrico, onde $dist(i, j) \neq dist(j, i)$.

Exemplos

TSP – traveling salesman problem (Problema do Caixeiro Viajante)

- Alguns problemas parecem menos difíceis do que o SAT porque sugerem uma função de avaliação mais clara, por exemplo o TSP.
- O caixeiro viajante deve visitar cada cidade exatamente uma vez, retornando ao ponto de partida com a menor distância total.
  - Na forma simétrica, considerando duas cidades i e j, $dist(i, j) = dist(j, i)$.



- Poderia ainda ser assimétrico, onde $dist(i, j) \neq dist(j, i)$.

Exemplos

TSP – traveling salesman problem (Problema do Caixeiro Viajante)

- **Cada solução candidata é uma permutação das N cidades**.
- A solução ótima é a **permutação** de custo mínimo.
- E temos $N!$ permutações possíveis.
- Na representação, as rotas $1, 2, 3, ..., 20, 1$ e $2, 3, 4, ..., 20, 1, 2$ são idênticas de mesmo custo, só começam em cidades diferentes.
- Ainda simétrico, $1, 2, 3, ..., 20, 1$ e $1, 20, 19, 18, ..., 2, 1$ também são idênticas.
- Logo, cada solução pode ser representada de $2N$ formas.
- Assim, o tamanho do espaço de busca seria: $\frac{N!}{2N} = \frac{(N-1)!}{2}$.

Exemplos

TSP – traveling salesman problem (Problema do Caixeiro Viajante)

- **Cada solução candidata é uma permutação das N cidades**.
- A solução ótima é a **permutação** de custo mínimo.
- E temos $N!$ permutações possíveis.
- Na representação, as rotas $1, 2, 3, ..., 20, 1$ e $2, 3, 4, ..., 20, 1, 2$ são idênticas de mesmo custo, só começam em cidades diferentes.
- Ainda simétrico, $1, 2, 3, ..., 20, 1$ e $1, 20, 19, 18, ..., 2, 1$ também são idênticas.
- Logo, cada solução pode ser representada de $2N$ formas.
- Assim, o tamanho do espaço de busca seria: $\frac{N!}{2N} = \frac{(N-1)!}{2}$.

Exemplos

TSP – traveling salesman problem (Problema do Caixeiro Viajante)

- **Cada solução candidata é uma permutação das N cidades**.
- A solução ótima é a **permutação** de custo mínimo.
- E temos $N!$ permutações possíveis.
- Na representação, as rotas $1, 2, 3, ..., 20, 1$ e $2, 3, 4, ..., 20, 1, 2$ são idênticas de mesmo custo, só começam em cidades diferentes.
- Ainda simétrico, $1, 2, 3, ..., 20, 1$ e $1, 20, 19, 18, ..., 2, 1$ também são idênticas.
- Logo, cada solução pode ser representada de $2N$ formas.
- Assim, o tamanho do espaço de busca seria: $\frac{N!}{2N} = \frac{(N-1)!}{2}$.

Exemplos

TSP – traveling salesman problem (Problema do Caixeiro Viajante)

- Para um mesmo N, isso é maior que o espaço de busca do SAT.
  - E cresce mais rapidamente!
  - $N = 6 : |S_{TSP}| = 60$ e $|S_{SAT}| = 64$
  - $N = 7 : |S_{TSP}| = 360$ e $|S_{SAT}| = 128$
  - $N = 8 : |S_{TSP}| = 2520$ e $|S_{SAT}| = 256$

- Considerando 10 cidades ($N = 10$): $|S_{TSP}| \approx 181.000$ possíveis soluções.
- 20 cidades ($N = 20$): $|S_{TSP}| \approx 10.000.000.000.000.000$ possíveis soluções.
- 50 cidades ($N = 50$): $|S_{TSP}| \approx$ 100.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000 .000.000.000.000.000.000 possíveis soluções. **Um valor inimaginável!**.
- É tão grande que como seres humanos, nem conseguimos pensar em conjuntos com tantos elementos.
- Minas gerais possui 471 cidades ou 853 municípios!

Exemplos

TSP – traveling salesman problem (Problema do Caixeiro Viajante)

- Para um mesmo N, isso é maior que o espaço de busca do SAT.
  - E cresce mais rapidamente!
  - $N = 6 : |S_{TSP}| = 60$ e $|S_{SAT}| = 64$
  - $N = 7 : |S_{TSP}| = 360$ e $|S_{SAT}| = 128$
  - $N = 8 : |S_{TSP}| = 2520$ e $|S_{SAT}| = 256$

- Considerando 10 cidades ($N = 10$): $|S_{TSP}| \approx 181.000$ possíveis soluções.
- 20 cidades ($N = 20$): $|S_{TSP}| \approx 10.000.000.000.000.000$ possíveis soluções.
- 50 cidades ($N = 50$): $|S_{TSP}| \approx 100.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000$ $.000.000.000.000.000.000$ possíveis soluções. **Um valor inimaginável!**.
- É tão grande que como seres humanos, nem conseguimos pensar em conjuntos com tantos elementos.
- Minas gerais possui 471 cidades ou 853 municípios!

Exemplos

TSP – traveling salesman problem (Problema do Caixeiro Viajante)

- Para um mesmo N, isso é maior que o espaço de busca do SAT.
  - E cresce mais rapidamente!
  - $N = 6 : |S_{TSP}| = 60$ e $|S_{SAT}| = 64$
  - $N = 7 : |S_{TSP}| = 360$ e $|S_{SAT}| = 128$
  - $N = 8 : |S_{TSP}| = 2520$ e $|S_{SAT}| = 256$

- Considerando 10 cidades ($N = 10$): $|S_{TSP}| \approx 181.000$ possíveis soluções.
- 20 cidades ($N = 20$): $|S_{TSP}| \approx 10.000.000.000.000.000$ possíveis soluções.
- 50 cidades ($N = 50$): $|S_{TSP}| \approx 100.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000$ $.000.000.000.000.000.000$ possíveis soluções. **Um valor inimaginável!**.
- É tão grande que como seres humanos, nem conseguimos pensar em conjuntos com tantos elementos.
- Minas gerais possui 471 cidades ou 853 municípios!

Exemplos

TSP – traveling salesman problem (Problema do Caixeiro Viajante)

- Para um mesmo N, isso é maior que o espaço de busca do SAT.
  - E cresce mais rapidamente!
  - $N = 6 : |S_{TSP}| = 60$ e $|S_{SAT}| = 64$
  - $N = 7 : |S_{TSP}| = 360$ e $|S_{SAT}| = 128$
  - $N = 8 : |S_{TSP}| = 2520$ e $|S_{SAT}| = 256$

- Considerando 10 cidades ($N = 10$): $|S_{TSP}| \approx 181.000$ possíveis soluções.
- 20 cidades ($N = 20$): $|S_{TSP}| \approx 10.000.000.000.000.000$ possíveis soluções.
- 50 cidades ($N = 50$): $|S_{TSP}| \approx 100.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000$ $.000.000.000.000.000.000$ possíveis soluções. **Um valor inimaginável!**.
- É tão grande que como seres humanos, nem conseguimos pensar em conjuntos com tantos elementos.
- Minas gerais possui 471 cidades ou 853 municípios!

Exemplos

TSP – traveling salesman problem (Problema do Caixeiro Viajante)

- Para um mesmo N, isso é maior que o espaço de busca do SAT.
  - E cresce mais rapidamente!
  - $N = 6 : |S_{TSP}| = 60$ e $|S_{SAT}| = 64$
  - $N = 7 : |S_{TSP}| = 360$ e $|S_{SAT}| = 128$
  - $N = 8 : |S_{TSP}| = 2520$ e $|S_{SAT}| = 256$

- Considerando 10 cidades ($N = 10$): $|S_{TSP}| \approx 181.000$ possíveis soluções.
- 20 cidades ($N = 20$): $|S_{TSP}| \approx 10.000.000.000.000.000$ possíveis soluções.
- 50 cidades ($N = 50$): $|S_{TSP}| \approx$ 100.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000 .000.000.000.000.000.000 possíveis soluções. **Um valor inimaginável!**.
- É tão grande que como seres humanos, nem conseguimos pensar em conjuntos com tantos elementos.
- Minas gerais possui 471 cidades ou 853 municípios!

Exemplos

TSP – traveling salesman problem (Problema do Caixeiro Viajante)

- Embora o TSP tem um espaço de busca incrivelmente maior do que o do SAT, a sua **função de avaliação é bem mais clara**.
- Dada uma tabela de distâncias entre cidades, basta realizar N somas.
- Isso porque conseguimos avaliar o mérito de uma solução da seguinte forma:
  - Por exemplo a rota $1, 2, 3, 4, ..., 20, 1$, ela teria o seguinte custo:

$$Custo = dist(1,2) + dist(2,3) + dist(3,4) + \cdots + dist(19,20) + dist(20,1)$$

- Essa função dá uma ideia da qualidade de uma solução candidata.
  - **Soluções melhores tem uma melhor avaliação**
- Essa informação pode ser útil na busca da solução ótima.
  - Mesmo num espaço de busca muito grande

Exemplos

TSP – traveling salesman problem (Problema do Caixeiro Viajante)

- Embora o TSP tem um espaço de busca incrivelmente maior do que o do SAT, a sua **função de avaliação é bem mais clara**.
- Dada uma tabela de distâncias entre cidades, basta realizar N somas.
- Isso porque conseguimos avaliar o mérito de uma solução da seguinte forma:
  - Por exemplo a rota $1, 2, 3, 4, ..., 20, 1$, ela teria o seguinte custo:

$$Custo = dist(1, 2) + dist(2, 3) + dist(3, 4) + \cdots + dist(19, 20) + dist(20, 1)$$

- Essa função dá uma ideia da qualidade de uma solução candidata.
  - **Soluções melhores tem uma melhor avaliação**
- Essa informação pode ser útil na busca da solução ótima.
  - Mesmo num espaço de busca muito grande

Restrições

As restrições nos problemas

- Problemas reais geralmente possuem (várias!) restrições.
- Um detalhe é que mais restrições diminuem o espaço de busca.
- No entanto, aumenta muito a dificuldade em tratar o problema.

Exemplo

- Já considerando o TSP como base.
- Tenho 2 caminhões para entregar produtos em 15 cidades.
- Existem produtos perecíveis e não-perecíveis.
- Os motoristas não podem ultrapassar a jornada de 8h diárias de viagem.
- assim por diante..

Restrições

As restrições nos problemas

- Problemas reais geralmente possuem (várias!) restrições.
- Um detalhe é que mais restrições diminuem o espaço de busca.
- No entanto, aumenta muito a dificuldade em tratar o problema.

Exemplo

- Já considerando o TSP como base.
- Tenho 2 caminhões para entregar produtos em 15 cidades.
- Existem produtos perecíveis e não-perecíveis.
- Os motoristas não podem ultrapassar a jornada de 8h diárias de viagem.
- assim por diante..

Restrições

Outro Exemplo - Horário escolar (*Timetable*)

- Lista de disciplinas
- Lista de professores designados a cada uma
- Lista de alunos matriculados
- Lista de salas de aula disponíveis (seus tamanhos e seus recursos)
- Existem restrições chamadas ***hard*** e ***soft***.

Restrições

Outro Exemplo - Horário escolar (*Timetable*)

- Restrições ***hard***:
  - Disciplinas de um mesmo professor devem ter horários diferentes.
  - Disciplinas com alunos em comum devem ter horários diferentes.
  - Disciplinas designadas a salas com recursos necessários.
  - Salas de cada disciplina devem ter tamanho suficiente.

- Estas **DEVEM** ser atendidas:
  - Qualquer solução que as atenda é viável.
  - De certa forma, parecido com o SAT: uma solução satisfaz ou não.
  - Mas é possível penalizar uma solução pelo número de violações.
  - Isso pode ajudar a comparar soluções e guiar a busca.

Restrições

Outro Exemplo - Horário escolar (*Timetable*)

- Restrições ***hard***:
  - Disciplinas de um mesmo professor devem ter horários diferentes.
  - Disciplinas com alunos em comum devem ter horários diferentes.
  - Disciplinas designadas a salas com recursos necessários.
  - Salas de cada disciplina devem ter tamanho suficiente.

- Estas **DEVEM** ser atendidas:
  - Qualquer solução que as atenda é viável.
  - De certa forma, parecido com o SAT: uma solução satisfaz ou não.
  - Mas é possível penalizar uma solução pelo número de violações.
  - Isso pode ajudar a comparar soluções e guiar a busca.

Restrições

Outro Exemplo - Horário escolar (*Timetable*)

- Restrições ***hard***:
  - Disciplinas de um mesmo professor devem ter horários diferentes.
  - Disciplinas com alunos em comum devem ter horários diferentes.
  - Disciplinas designadas a salas com recursos necessários.
  - Salas de cada disciplina devem ter tamanho suficiente.

- Estas **DEVEM** ser atendidas:
  - Qualquer solução que as atenda é viável.
  - De certa forma, parecido com o SAT: uma solução satisfaz ou não.
  - Mas é possível penalizar uma solução pelo número de violações.
  - Isso pode ajudar a comparar soluções e guiar a busca.

Restrições

Outro Exemplo - Horário escolar (*Timetable*)

- Restrições ***hard***:
  - Disciplinas de um mesmo professor devem ter horários diferentes.
  - Disciplinas com alunos em comum devem ter horários diferentes.
  - Disciplinas designadas a salas com recursos necessários.
  - Salas de cada disciplina devem ter tamanho suficiente.

- Estas **DEVEM** ser atendidas:
  - Qualquer solução que as atenda é viável.
  - De certa forma, parecido com o SAT: uma solução satisfaz ou não.
  - Mas é possível penalizar uma solução pelo número de violações.
  - Isso pode ajudar a comparar soluções e guiar a busca.

Restrições

Outro Exemplo - Horário escolar (*Timetable*)

- Restrições ***hard***:
  - Disciplinas de um mesmo professor devem ter horários diferentes.
  - Disciplinas com alunos em comum devem ter horários diferentes.
  - Disciplinas designadas a salas com recursos necessários.
  - Salas de cada disciplina devem ter tamanho suficiente.

- Estas **DEVEM** ser atendidas:
  - Qualquer solução que as atenda é viável.
  - De certa forma, parecido com o SAT: uma solução satisfaz ou não.
  - Mas é possível penalizar uma solução pelo número de violações.
  - Isso pode ajudar a comparar soluções e guiar a busca.

Restrições

Outro Exemplo - Horário escolar (*Timetable*)

- Restrições ***soft*** - flexíveis:
  - Disciplinas com 2 aulas por semana não deveriam usar dias consecutivos.
  - Disciplinas de um mesmo período deveriam ter aulas mais concentradas.
  - Se mais de uma sala atende o tamanho, deveria usar a menor que atende.
  - Preferência dos professores (aulas seguidas, segunda de manhã, ...)

- O atendimento é **DESEJÁVEL**, não é obrigatório atendê-las:
  - Solução que atende as restrições ***hard*** é viável, mas não necessariamente ótima.
  - É preciso quantificar as restrições ***soft*** para medir a qualidade da solução e guiar a busca.

Restrições

Outro Exemplo - Horário escolar (*Timetable*)

- Restrições ***soft*** - flexíveis:
  - Disciplinas com 2 aulas por semana não deveriam usar dias consecutivos.
  - Disciplinas de um mesmo período deveriam ter aulas mais concentradas.
  - Se mais de uma sala atende o tamanho, deveria usar a menor que atende.
  - Preferência dos professores (aulas seguidas, segunda de manhã, ...)

- O atendimento é **DESEJÁVEL**, não é obrigatório atendê-las:
  - Solução que atende as restrições ***hard*** é viável, mas não necessariamente ótima.
  - É preciso quantificar as restrições ***soft*** para medir a qualidade da solução e guiar a busca.

Restrições

Os dados também podem variar..

- Por exemplo, vamos supor um ônibus que vai direto do CTAN até o CSA.
- Conhecendo o melhor caminho, a menor distância é realizada.
- Considerando a ausência de obras ou outros obstáculos que mudariam a rota.

- Mas e se eu quiser considerar o **TEMPO** para ir do CTAN até o CSA.
- Nesse caso é um dado que varia, porque na mesma rota:
  - Sem trânsito gastaria 10 minutos.
  - Com trânsito gastaria 40 minutos.
  - E se usar a média? 25 minutos. Vai encontrar solução para uma situação que não existe!!!

Restrições

Os dados também podem variar..

- Por exemplo, vamos supor um ônibus que vai direto do CTAN até o CSA.
- Conhecendo o melhor caminho, a menor distância é realizada.
- Considerando a ausência de obras ou outros obstáculos que mudariam a rota.

- Mas e se eu quiser considerar o **TEMPO** para ir do CTAN até o CSA.
- Nesse caso é um dado que varia, porque na mesma rota:
  - Sem trânsito gastaria 10 minutos.
  - Com trânsito gastaria 40 minutos.
  - E se usar a média? 25 minutos. Vai encontrar solução para uma situação que não existe!!!

Restrições

Os dados também podem variar..

- Por exemplo, vamos supor um ônibus que vai direto do CTAN até o CSA.
- Conhecendo o melhor caminho, a menor distância é realizada.
- Considerando a ausência de obras ou outros obstáculos que mudariam a rota.

- Mas e se eu quiser considerar o **TEMPO** para ir do CTAN até o CSA.
- Nesse caso é um dado que varia, porque na mesma rota:
  - Sem trânsito gastaria 10 minutos.
  - Com trânsito gastaria 40 minutos.
  - E se usar a média? 25 minutos. Vai encontrar solução para uma situação que não existe!!!

Restrições

Os dados também podem variar..

- Isso mostra que fatores aleatórios podem ocorrer!
- Mas não são a única fonte de variação de dados!
- Em uma modelagem, é correto manter os dados atualizados.

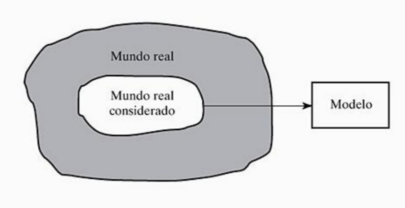
Modelagem

Modelagem de problemas

- Na resolução de um problema o passo a passo correto é:
  - **Problema** $\Rightarrow$ **Modelo** $\Rightarrow$ **Solução**.

Construção do Modelo

- Abstração do mundo real pela definição do problema
- Foco na definição das variáveis que controlam o comportamento do problema
- Tentativa de traduzir a definição do problema em relações matemáticas



Modelagem

Modelagem de problemas

- Conforme o livro descreve, exitem duas possíveis abordagens principais para o tratamento:
  - Podemos ter um **Modelo Aproximado** ($Modelo_a$) para um problema e ter uma **Solução Exata** ($Solucao_e$) para tal modelo.
    - **Problema** $\Rightarrow Modelo_a \Rightarrow Solucao_e$.
  - Ou podemos ter um **Modelo Exato** ($Modelo_e$) para um problema e ter uma **Solução Aproximada** ($Solucao_a$) para esse modelo.
    - **Problema** $\Rightarrow Modelo_e \Rightarrow Solucao_a$.
- Vamos a um exemplo no próximo slide.

Modelagem

Modelagem de problemas

- Conforme o livro descreve, exitem duas possíveis abordagens principais para o tratamento:
  - Podemos ter um **Modelo Aproximado** ($Modelo_a$) para um problema e ter uma **Solução Exata** ($Solucao_e$) para tal modelo.
    - **Problema** $\Rightarrow Modelo_a \Rightarrow Solucao_e$.
  - Ou podemos ter um **Modelo Exato** ($Modelo_e$) para um problema e ter uma **Solução Aproximada** ($Solucao_a$) para esse modelo.
    - **Problema** $\Rightarrow Modelo_e \Rightarrow Solucao_a$.
- Vamos a um exemplo no próximo slide.

Modelagem

Modelagem de problemas

- Uma companhia tem N depósitos e K centros de distribuição.
- Queremos modelar o custo de se transportar produtos de cada depósito para cada centro (Problema do Transporte).
- O transporte de X produtos do depósito 1 para o centro 2 tem o custo:

$$f_{12}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ 4 + 3.33x & \text{se } 0 < x \leq 3 \\ 19.5 & \text{se } 3 < x \leq 6 \\ 0.5 + 10\sqrt{x} & \text{se } x > 6 \end{cases}$$

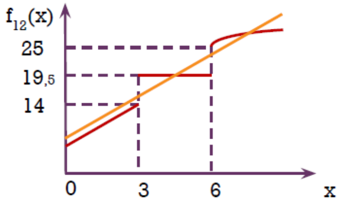
- E poderíamos ter uma função similar para cada par de depósitos e centros.
- No entanto, funções descontínuas apresentam vários problemas e complexidades a nível de algoritmos.

Modelagem

Modelagem de problemas

- A primeira abordagem seria aproximar o modelo:

$$f_{12}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ 4 + 3.33x & \text{se } 0 < x \leq 3 \\ 19.5 & \text{se } 3 < x \leq 6 \\ 0.5 + 10\sqrt{x} & \text{se } x > 6 \end{cases}$$



- Aproximando, teríamos uma função linear:

$$f_{12}(x) = 2.66x + 8.25$$

- Repetindo o processo para cada par depósito/centro teríamos então um modelo linear.
- Onde, tem-se algoritmos conhecidos que o resolvem.

Modelagem

Modelagem de problemas

- Essa situação faz parte então da primeira forma de abordagem em que temos o problema, o modelo aproximado e a solução exata:
  - **Problema** $\Rightarrow Modelo_a \Rightarrow Solucao_e$.
- **Mas note que essa solução exata seria de um modelo simplificado (relaxado) e não do problema real.**

- A segunda abordagem seria a de deixar o modelo preciso, com todas as suas descontinuidades.
- E dessa forma, utilizar de algum método não convencional (como um ***Simulated Annealing*** ou um ***Algoritmo Evolucionário***) para encontrar uma solução aproximada, próxima do ótimo.
  - **Problema** $\Rightarrow Modelo_e \Rightarrow Solucao_a$.

Modelagem

Modelagem de problemas

- Conforma o livro cita, dessas duas abordagens possíveis, **a última é frequentemente superior**, ou seja, quando se trata o problema com **o modelo exato por meio de uma solução aproximada**.
- De qualquer forma, é sempre um desafio obter soluções precisas para tais problemas complexos porque, ou nós temos que aproximar o modelo, ou temos que aproximar a solução.

Próxima Aula

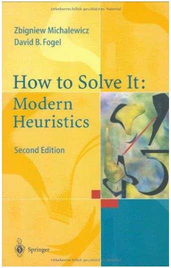
Próxima Aula

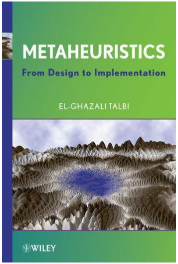
- Na próxima aula concluímos a parte 2 dos conceitos básicos:
  - Representação
  - Objetivo
  - Função de Avaliação
  - Vizinhança, Ótimo Local e Ótimo Global.

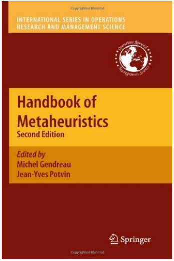
Bibliografias

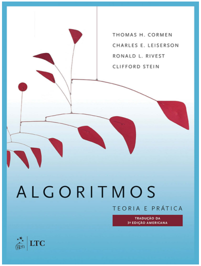
Bibliografia Básica

1. MICHLEWICZ, Zbigniew; FOGEL, David B. How to solve it: modern heuristics. 2nd. ed. Berlin: Springer c2010 554 p. ISBN 9783642061349.
2. Talbi, El-Ghazali; Metaheuristics: From Design to Implementation, Wiley Publishing, 2009.
3. GENDREAU, Michel. Handbook of metaheuristics. 2.ed. New York: Springer 2010 648 p. (International series in operations research & management science ; 146).
4. T. Cormen, C. Leiserson, R. Rivest, C. Stein, Introduction to Algorithms, The MIT Press, 3rd edition, 2009 (**Pergamum**).









Bibliografias

Bibliografia Complementar

1. GLOVER, Fred; KOCHENBERGER, Gary A. (ed.). Handbook of metaheuristics. Boston: Kluwer, 2003. 556 p. (International series in operations research & management science ; 57).
2. BLUM, Christian Et Al. Hybrid metaheuristics: an emerging approach to optimization. Berlin: Springer 2008 289 p. (Studies in Computational intelligence; 114).
3. DOERNER, Karl F. (ed.) Et Al. Metaheuristics: progress in complex systems optimization. New York: Springer 2007 408 p. (Operations research / computer science interfaces series).
4. GLOVER, Fred; LAGUNA, Manuel. Tabu search. Boston: Kluwer Academic, 1997. 382 p.
5. AARTS, Emile. Local search in combinatorial optimization. Princeton: Princeton University Press, 2003 512 p.
6. Gaspar-Cunha, A.; Takahashi, R.; Antunes, C.H.; Manual de Computação Evolutiva e Metaheurística; Belo Horizonte: Editora UFMG; Coimbra: Imprensa da Universidade de Coimbra; 2013.