$f(x) = \frac{x}{2} - \arccos\frac{2x}{1+x^2}$

Свостьянова Алена
(В 23)
гр 5130904/30002

1. $\begin{cases} \frac{2x}{1+x^2} \geq -1 \\ \frac{2x}{1+x^2} \leq 1 \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{2x+1+x^2}{1+x^2} \geq 0 \\ \frac{2x-1-x^2}{1+x^2} \leq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} \frac{(x+1)^2}{1+x^2} \geq 0 \\ \frac{(x-1)^2}{1+x^2} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow D(f) = \mathbb{R}$

2. а) $f(g)=0$, т.е $\arccos\frac{2x}{1+x^2} = \frac{x}{2}$

б) $\frac{x}{2} + \arccos\frac{2x}{1+x^2} \gtrless 0$, при $x>g \Rightarrow f(x)>0$
при $x<g \Rightarrow f(x)<0$

в) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x}{2} - \arccos\frac{2x}{1+x^2}\right) = \pm\infty$

г) $\left.\begin{matrix} f(-x) \neq f(x) \\ \neq -f(x) \end{matrix}\right\}$ общего вида

3. а) Вертикальные асимптоты отсутствуют

б) Наклонные асимптоты

$k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x}{2x} - \frac{\arccos\frac{2x}{1+x^2}}{x}\right) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{\arccos\frac{2x}{1+x^2}}{x}\right) = \frac{1}{2}$

$b = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x}{2} - \arccos\frac{2x}{1+x^2} - \frac{x}{2}\right) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(-\arccos\frac{2x}{1+x^2}\right) = -\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{\pi}{2}$ – наклонная

4. $y' = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{1-\frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}} \cdot \frac{2(1+x^2)-2x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{(1+x^2)^2}}{\sqrt{1+2x^2+x^4-4x^2}} \cdot$
$\cdot \frac{(2+2x^2-4x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2} + \frac{(1+x^2)(2-2x^2)}{\sqrt{(1-x^2)^2}\,(1+x^2)^2} = \frac{1}{2} + \frac{2-2x^2}{(x^2+1)|x^2-1|} =$

$= \frac{(x^2+1)|x^2-1|+2-2x^2}{2(x^2+1)|x^2-1|}$

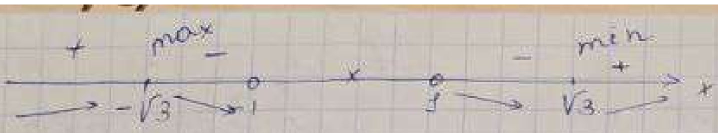
Рассмотрим 2 случая:

1. $x \in (-\infty;-1] \cup [1;+\infty)$

$= \frac{(x^2+1)(x^2-1)+2-2x^2}{2(x^2+1)(x^2-1)} = \frac{x^4-1+2-2x^2}{2(x^2+1)(x^2-1)} = \frac{x^4-2x^2+3}{2(x^2+1)(x^2-1)} = \frac{x^4-4x^2+3}{2x^4-2}$

$x^4-4x^2+3=0$, Пусть $t=x^2$ $(t\geq 0)$
$t^2-4t+3=0$
$D_1 = 4-3 = 1$
$t = 2\pm 1$ $\left[\begin{matrix} t=3 \\ t=1 \end{matrix}\right. \Rightarrow \left[\begin{matrix} x^2=3 \\ x^2=1 \end{matrix}\right.$ $\left[\begin{matrix} x=\sqrt{3} \\ x=-\sqrt{3} \\ x=1 \\ x=-1. \end{matrix}\right.$

$\frac{(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(x-1)(x+1)}{2(1+x^2)(x^2-1)}$



2. $-1<x<1$

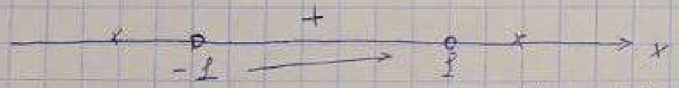
$$\frac{(x^2+1)(1-x^2)-4x^2+4}{2(1+x^2)(1-x^2)} = \frac{1-x^4-4x^2+4}{2(1+x^2)(1-x^2)} = \frac{-x^4-4x^2+5}{2(1+x^2)(1-x^2)} = \frac{-x^4-4x^2+5}{2-2x^4}$$

$x^4+4x^2-5=0$, пусть $t=x^2$, $t\geq 0 \Rightarrow t^2+4t-5$

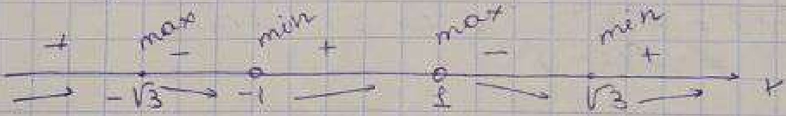
$D_1 = 4+5=9$

$t = -2\pm3$ $\quad \left[\begin{array}{l} t=-5 \\ t=1 \end{array}\right. \Rightarrow x^2=1 \quad \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$

$$\frac{(1-x)(x+1)}{2(1+x^2)(1-x^2)}$$



Объединим:



$f(-\sqrt{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{5\pi}{6}$ гладкий экстр

$f(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}$ гладк экстр

$f(-1) = -\frac{1}{2} - \pi$ острый экстр.

$f(1) = \frac{1}{2}$ острый экстр

Рассмотрим 2-ю производную на тех же пр-х

5.1 $y'' = \frac{(4x^3-8x)(2x^4-2)-(x^4-4x^2+3)8x^3}{(2x^4-2)^2} = \frac{8x^7-8x^3-16x^5+16-8x^7+32x^5-24x^3}{(2x^4-2)^2}$

$= \frac{16x^5-32x^3+16}{(2x^4-2)^2} = \frac{16x(x^4-2x^2+1)}{4(x^4-1)^2} = \frac{4x(x^2-1)^2}{((x^2-1)(x^2+1))^2}$

$x \in (+\infty; -1] \cup [1, +\infty)$

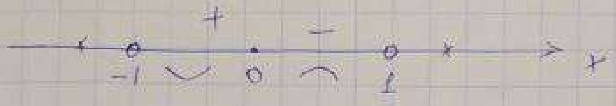
5.2 $y'' = \frac{(-4x^3-8x)(2-2x^4)-(-8x^3)(-x^4-4x^2+5)}{(2-2x^4)^2}$

$= \frac{-8x^3+8x^7-16x+16x^5-8x^7-32x^5+40x^3}{(2-2x^4)^2} =$

$= \cancel{\frac{-32x^5+32x^3+16x^4-16x}{(2-2x^4)^2}} = \cancel{\frac{-16x(2x^4-x^3-2x^2+1)}{(2-2x^4)^2}}$

$= \cancel{\frac{-x(}{(x-x^4)^2}}$

$= \frac{-16x^5+32x^3-16x}{4(1-x^4)^2} = \frac{-16x(x^4-2x^2+1)}{4(1-x^4)^2} = \frac{-4x(x^2-1)^2}{(1-x^4)^2}$



$x \in (-1;1)$

Объединим: