

23. Кинетическая энергия твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси. Аналогия между движением материальной точки и вращением твердого тела. Динамика плоского движения твердого тела.

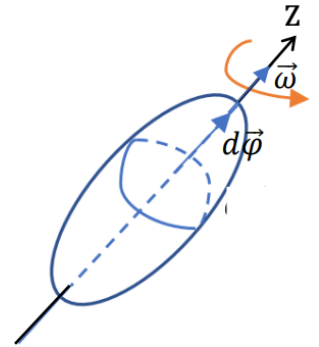
1. Кинетическая энергия АТТ (абсолютно твердого тела), вращающегося вокруг неподвижной оси.

Рассмотрим тело, вращающееся с угловой скоростью $\vec{\omega}$ вокруг неподвижной оси OZ (декартова система координат) [см. рис.].

Пусть за время dt тело поворачивается на угол $d\vec{\varphi}$:

$d\vec{\varphi} = d\varphi \cdot \vec{k}$, \vec{k} – единичный вектор (орт) оси Z.

Тогда работа δA сил, действующих на тело:



$$\delta A = \vec{M} \cdot d\vec{\varphi} = \boxed{\vec{M}^{\text{внеш}} d\vec{\varphi}} = \frac{d\vec{L}}{dt} d\vec{\varphi} = \frac{d\vec{L}}{dt} d\varphi \cdot \vec{k} = \frac{d(\vec{L} \cdot \vec{k})}{dt} d\varphi = \boxed{\frac{dL_z}{dt} d\varphi} =$$

Момент импульса изменяется
только под действием суммарного момента
всех внешних сил

$$\vec{L} \cdot \vec{k} = L_z = I\omega$$

$$= \frac{d(I\omega)}{dt} \cdot d\varphi = I \cdot \frac{d\omega}{dt} \cdot d\varphi = I \cdot d\omega \cdot \frac{d\varphi}{dt} = I \cdot d\omega \cdot \omega = I \cdot d\left(\frac{\omega^2}{2}\right) = d\left(\frac{I \cdot \omega^2}{2}\right)$$

Так как работа всех сил, действующих на тело, равна приращению его кинетической энергии, получим:

$$\delta A = dE_{\text{кин}}$$

$$dE_{\text{кин}} = d\left(\frac{I \cdot \omega^2}{2}\right) \Rightarrow \boxed{E_{\text{кин}} = \frac{I \cdot \omega^2}{2}}$$

2. Аналогия между движением МТ (материальной точки) и вращением АТТ.

МТ	АТТ, вращающееся вокруг неподвижной оси
$d\vec{r}$	$d\vec{\varphi}$
$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$	$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$
m	I
$p = mv$	$L_z = I\omega$
$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$	$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$
$\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r}$	$\delta A = \vec{M} \cdot d\vec{\varphi}$
$m\vec{a} = \vec{F}$	$I\beta_z = M_z$
$E_{\text{кин}} = \frac{mv^2}{2}$	$E_{\text{кин}} = \frac{I \cdot \omega^2}{2}$

3. Динамика плоского движения твердого тела.

Плоское движение АТТ – это движение, при котором траектории всех точек тела лежат в параллельных плоскостях.

При плоском движении АТТ его центр масс (С) движется в определенной плоскости, неподвижной в системе отсчета, а вектор угловой скорости $\vec{\omega}$ все время остается перпендикулярным этой плоскости. То есть в системе центра масс АТТ тело просто вращается относительно неподвижной оси, проходящей через точку С и перпендикулярной плоскости движения. Следовательно, плоское движение АТТ можно описывать двумя уравнениями:

$$m\vec{a}_C = \vec{F}$$

— уравнение движения центра масс системы (поступательное движение АТТ как целого тела).

$$I_C\beta_z = M_z$$

— уравнение динамики АТТ, вращающегося вокруг неподвижной оси, где M_z – суммарный момент всех внешних сил относительно оси, проходящей через центр масс (С).

Кинетическая энергия АТТ при плоском движении тоже складывается из энергии движения центра масс (поступательного движения) и энергии вращения вокруг неподвижной оси, проходящей через точку С:

$$E_{\text{кин}} = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{I_C \cdot \omega^2}{2}$$