# 33 - Локальная форма теоремы о циркуляции. Формула Стокса.

## TL;DR

*понятия не имею, что тут в TL;DR писать, поэтому будут основные шаги по решению. Вдруг вы решите это раскурить*

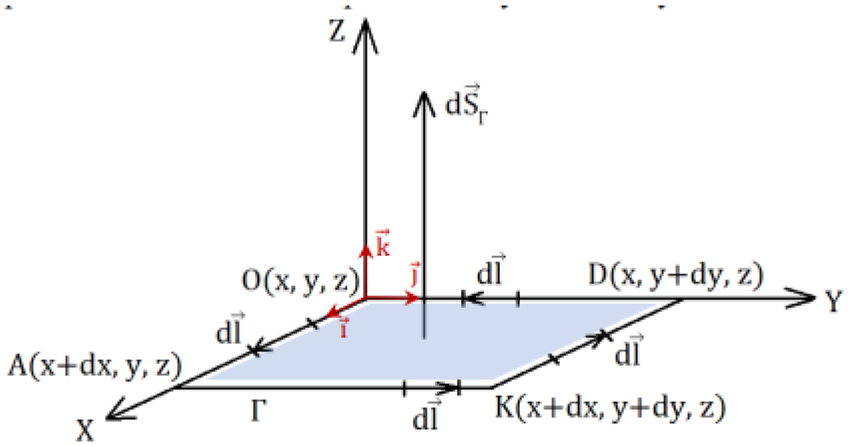
## Полный текст

### Найдем теорему о циркуляции в локальной форме

Скажем, что:

$$\vec{B} = \vec{B}(x, y, z)$$

Построим маленький прямоугольный контур в этом пространстве со сторонами $dx$ и $dy$, назовем его $dC_{OAKDO}$




Сосчитаем поток через него:

$$dC_\Gamma = \oint\limits_{OAKDO} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int\limits_{OA} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int\limits_{AK} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int\limits_{KD} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int\limits_{DO} \vec{B} \cdot d\vec{l}.$$

Перепишем вектор магнитной индукции через координаты:

$$\vec{B} = B_x \cdot \vec{i} + B_y \cdot \vec{j} + B_z \cdot \vec{k}$$

Тогда в каждом интеграле возникнет скалярное произвдение. Поскольку мы обходим прямоугольник, перемещение каждый раз будет только вдоль одной оси, а значит все остальные компоненты обнулятся (ось $z$ обнулится вообще по умолчанию, так как по ней мы вообще не двигаемся). Отсюда:

$$\int\limits_{OA} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int\limits_{OA} (B_x \cdot \vec{i} + B_y \cdot \vec{j} + B_z \cdot \vec{k}) \cdot dl \cdot \vec{i} = B_x \cdot \int\limits_{OA} dl = B_x(x, y) \cdot dx$$

Считаем, что раз $dx$ и $dy$ очень малы, поле в рамках этой площадки постоянно (если нет - всегда можно взять достаточно маленькие размеры этой площадки, чтобы микроскопические изменения поля в ее пределах не мешали расчетам).

Аналогично производим расчет для $AK$:

$$\int\limits_{AK} \vec{B} \cdot d\vec{l} = By \cdot dy$$

так как мы уже успели сместиться из точки $O(x, y)$, ближайшей к ней точкой станет A(x + dx, y)

$$\int\limits_{AK} \vec{B} \cdot d\vec{l} = B_y(x + dx, y) \cdot y$$

Остальные по аналогии:

$$\int\limits_{KD} = -Bx(x, y + dy) \cdot dx$$

$$\int\limits_{DO} \vec{B} \cdot d\vec{l} = -B_y(x, y) \cdot dy$$

Теперь подставим все это в интеграл и получим:

$$dC_\Gamma = \oint\limits_{OAKDO} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \underline{B_x(x, y) \cdot dx} + \underline{B_y(x + dx, y) \cdot dy} - \underline{B_x(x, y + dy) \cdot dx} - \underline{B_y(x, y) \cdot dy} =$$

$$= \big(B_y(x + dx, y) - B_y(x, y)\big) \cdot dy - \big(B_x(x, y + dy) - B_x(x, y)\big) \cdot dx =$$

$$= \frac{B_y(x + dx, y) - B_y(x, y)}{dx} \cdot dxdy - \frac{B_x(x, y + dy) - B_x(x, y)}{dy} \cdot dxdy =$$

$$= \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\right) \cdot dxdy = \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\right) \cdot dS_\Gamma,$$

Выражение в скобках - одна из проекций операции векторного произведения оператора набла $\nabla$ и вектора магнитной индукции $\vec{B}$ , точнее проекция на ось $OZ$

$$\left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\right) = \left(\left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}\right)\vec{\mathrm{i}} + \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}\right)\vec{\mathrm{j}} + \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\right)\vec{\mathrm{k}}\right) \cdot \vec{\mathrm{k}} =$$

$$= \left(\left(\vec{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{\mathrm{j}}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{\mathrm{k}}\frac{\partial}{\partial z}\right) \times \left(\vec{\mathrm{i}}B_x + \vec{\mathrm{j}}B_y + \vec{\mathrm{k}}B_z\right)\right) \cdot \vec{\mathrm{k}} = [\nabla, \vec{B}\,] \cdot \vec{\mathrm{k}} = \mathrm{rot}\,\vec{B}\ \cdot \vec{\mathrm{k}}.$$

ательно, полная циркуляция по прямоугольному контуру [illegible] будет равна

$$dC_\Gamma = \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\right) \cdot dS_\Gamma = \left(\mathrm{rot}\,\vec{B} \cdot \vec{\mathrm{k}}\right) \cdot dS_\Gamma = \mathrm{rot}\,\vec{B} \cdot \left(\vec{\mathrm{k}} \cdot dS_\Gamma\right) = \mathrm{rot}\,\vec{B} \cdot d\vec{S}_\Gamma,$$

*Если спросить меня что такое ротор - хз, я еще не раскурил. Но это было в прошлых конспектах, в частности препод говорит было в электричестве*

Интегральная форма говорит, что циркуляция $\vec{B}$ должна быть пропорциональна полному току. Так как мы выбрали очень маленькую площадку, то можно считать, что при любом течении токов $\vec{j} = \overrightarrow{const}$ во всех точках этой площадки. То есть:

$$dC_\Gamma = \mu_0 dI_\Gamma \Rightarrow \mathrm{rot}\vec{B} \cdot d\vec{S}_\Gamma = \mu_0 \cdot \vec{j} \cdot d\vec{S}_\Gamma$$

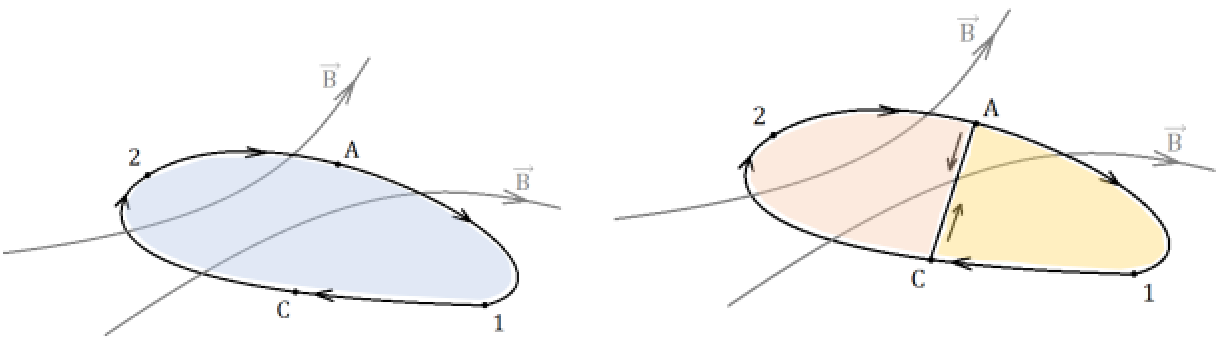
$$rot\vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{j}$$

# Формула Стокса

## Доказательство аддитивности циркулции

Наша задача на этот раздел найти формулу, с помощью которой циркуляцию вектора по определенному контуру выражают через интеграл по площади, ограниченной этим контуром.

Но чтобы это сделать для начала нужно доказать, что одна большая циркуляция вектора может быть найдена как сумма циркуляций поменьше (ну то есть циркуляций через контуры поменьше)




Берем контур и бьем его на 2 части. Перегородка посередине даст предполагаемое (мы пытаемся доказать его корректность) разбиение:

$$C_\Gamma = \oint\limits_{A1C2A} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int\limits_{A1C} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int\limits_{C2A} \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

Теперь посчитаем по отдельности интегралы, но в этот раз учтем перемычку:

$$C_1 = \oint_{A1CA} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{A1C} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{CA} \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

$$C_2 = \oint_{AC2A} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{AC} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{C2A} \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

тогда сумма их будет:

$$C_1 + C_2 = \int_{A1C} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{CA} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{AC} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{C2A} \vec{B} \cdot d\vec{l} =$$

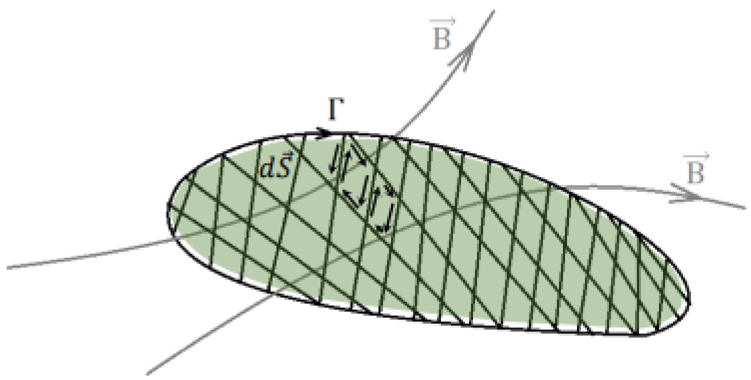
Можно сосчитать все в лоб, но посмотрим в центр. там 2 одинаковых интеграла $\int_{AC}$ и $\int_{CA}$. Так как они отличаются только направлением, мы можем их выкинуть.

$$C_1 + C_2 = \int_{A1C} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{C2A} \vec{B} \cdot d\vec{l} = C_\Gamma$$

(Равенство по исходному)
Теперь в самом левом подставим $C_1$ и $C_2$:

$$\oint_{A1CA} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \oint_{AC2A} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_{A1C2A} \vec{B} \cdot d\vec{l}.$$

## Собственно формула Стокса




Возьмем контур в пространстве и разобьем его на очень много малых кусочков площадью $dS$. Тогда мы получим 2 взгляда на нахождение циркуляции через этот контур:

$$C_\Gamma = \oint_\Gamma \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

$$C_\Gamma = \int_{S_\Gamma} dC$$

Теперь применим ход конем - ранее найденную локальную форму теоремы о циркуляции:

$$C_\Gamma = \int\limits_{S_\Gamma} rot\vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Эта форма вполне полноценно заменяет интеграл для маленьких кусочков, что был написан слегка ранее. Поэтому итоговая формула Стокса:

$$\oint\limits_\Gamma \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int\limits_{S_\Gamma} rot\vec{B} \cdot d\vec{S}$$

**В конспекте делается акцент, что при выводе мы не использовали свойства непосредственно магнитного поля, поэтому это теорема векторного поля, как и формула Остроградского-Гаусса**

Нужна эта формула для перехода от интеграла по контуру к интегралу по поверхности