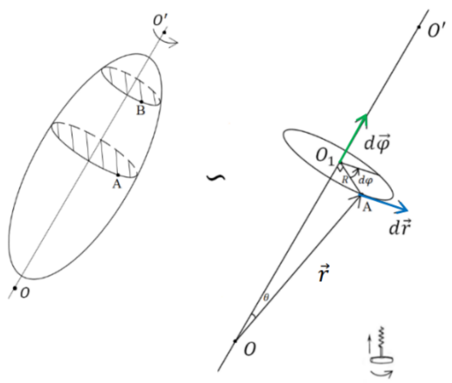
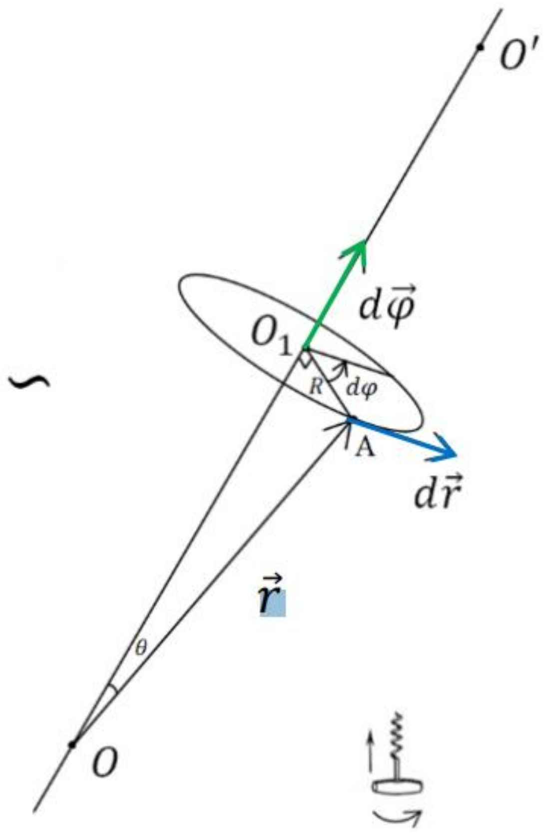
6. Кинематика твердого тела: вращение вокруг неподвижной оси. Связь линейных и угловых величин.

Вращение абсолютно твердого тела – это движение, при котором одна или несколько его точек остаются неподвижны. При вращении в трехмерном пространстве остаются неподвижными все точки, лежащие на одной линии – оси вращения. Вращение вокруг неподвижной оси является частным случаем плоского движения.



Так как траектории всех точек лежат в параллельных плоскостях, то для описания движения достаточно следить за одной такой плоскостью АТТ.



Рассмотрим поворот на малый угол $d\varphi$. Помимо величины угла, поворот характеризуется направлением оси вращения в пространстве. Эти две величины можно объединить в один вектор $d\vec{\varphi}$ - вектор угла поворота:

- длина этого вектора $|d\vec{\varphi}| = d\varphi; [d\varphi] -$ рад
- направление $d\vec{\varphi}$ совпадает с направлением оси вращения и определяется по правилу «правого винта»

Правило буравчика (винта): «Если вращать винт (буравчик) в том направлении, в котором вращается тело, то винт будет завинчиваться (или вывинчиваться) в ту сторону, куда направлена ось».

Установим связь между векторами $d\vec{\varphi}$ и $d\vec{r}$ (вектор перемещения, которое т. А тела совершила за тот же промежуток времени dt):

$$|d\vec{r}| = R|d\vec{\varphi}| = |\vec{r}| \cdot |d\vec{\varphi}| \cdot \sin\theta = |\vec{r}| \cdot |d\vec{\varphi}| \cdot \sin(\widehat{\vec{r}; d\vec{\varphi}})$$

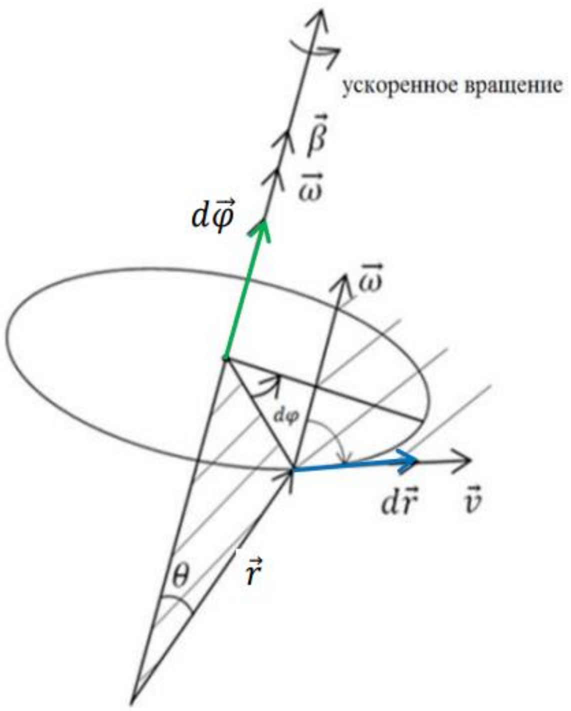
$$d\vec{r} \perp d\vec{\varphi}$$

$$d\vec{r} \perp \vec{r}$$

$$d\vec{r} \perp OAO_1$$

$d\vec{r} = [d\vec{\varphi}, \vec{r}] = d\vec{\varphi} \times \vec{r}$ – операция векторного произведения.

По аналогии с мгновенной скоростью $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ и ускорением $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ можно вывести:



$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$ – вектор угловой скорости

$$\vec{\omega} \uparrow\uparrow d\vec{\varphi}$$

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

$$[\omega] = \frac{[d\varphi]}{[dt]} = \frac{\text{рад}}{\text{с}}$$

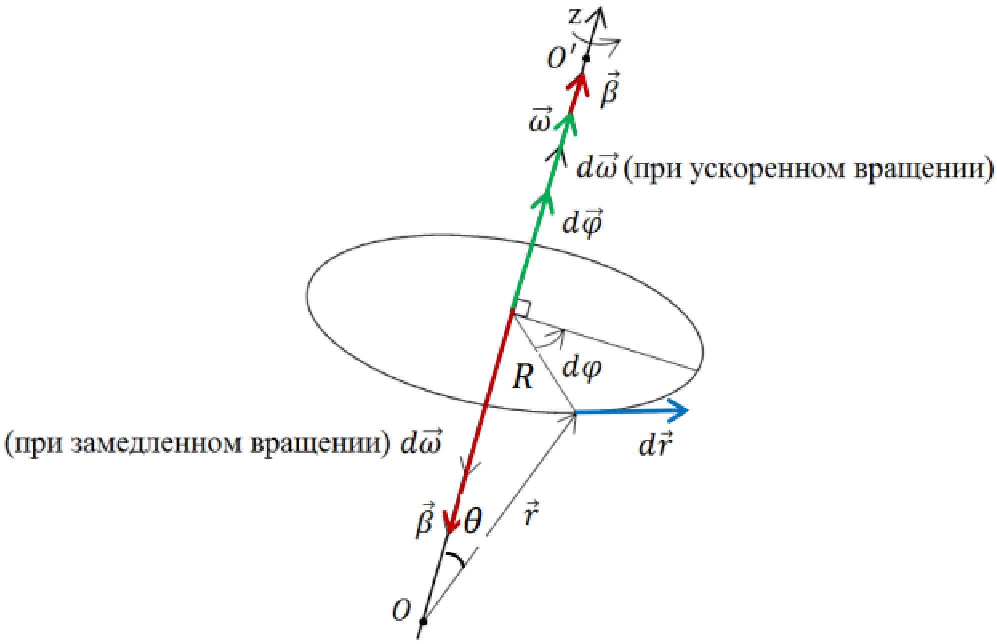
$\vec{\beta} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$ – вектор углового ускорения

$$\vec{\beta} \uparrow\uparrow d\vec{\omega}$$

$\beta = \pm\frac{d\omega}{dt}$ – ускоренное вращение / замедленное вращение

$$[\beta] = \frac{[d\omega]}{[dt]} = \frac{\text{рад/с}}{\text{с}} = \frac{\text{рад}}{\text{с}^2}$$

При вращении вокруг неподвижной оси вектор углового ускорения также направлен по оси вращения. Его направление может совпадать (при ускоренном вращении) или быть противоположным с направлением вектора угловой скорости (при замедлении).



z
O'
$\vec{\beta}$
$\vec{\omega}$
$d\vec{\omega}$ (при ускоренном вращении)
$d\vec{\varphi}$
$d\varphi$
R
$d\vec{r}$
(при замедленном вращении) $d\vec{\omega}$
$\vec{\beta}$
θ
$\vec{r}$
O

Связь линейных и угловых величин

Аксиальный вектор (псевдовектор) – вектор, модуль которого равен углу поворота, а направление определяется правилом правого винта.
$d\vec{\varphi}, \vec{\omega}, \vec{\beta}$ – аксиальные векторы

Линейные величины	**Угловые величины**
1) полярные векторы 2) направление определяется самим движением $d\vec{r}, \vec{v}, \vec{a}$	1) аксиальные векторы 2) направление определяется по правилу «правого винта» $d\vec{\varphi}, \vec{\omega}, \vec{\beta}$

Линейная	Связь величин	Угловая
$d\vec{r}$	$d\vec{r} = [d\vec{\varphi}, \vec{r}]$ $\lvert d\vec{r}\rvert = \lvert d\vec{\varphi}\rvert \cdot \underbrace{\lvert\vec{r}\rvert \cdot \sin(\widehat{d\vec{\varphi}, \vec{r}})}_{R} = d\varphi \cdot R$ $\boxed{\lvert d\vec{r}\rvert = Rd\varphi}$	$d\vec{\varphi}$
$\vec{v}$	$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{[d\vec{\varphi}, \vec{r}]}{dt} = \left[\frac{d\vec{\varphi}}{dt}, \vec{r}\right] = [\vec{\omega}, \vec{r}]$ $\lvert\vec{v}\rvert = \lvert\vec{\omega}\rvert \cdot \lvert\vec{r}\rvert \cdot \sin(\widehat{\vec{\omega}, \vec{r}}) = \lvert\vec{\omega}\rvert \cdot \underbrace{\lvert\vec{r}\rvert \cdot \sin(\widehat{d\vec{\varphi}, \vec{r}})} = \omega R$ $\boxed{v = \omega R}$	$\vec{\omega}$
$\vec{a}$	$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}[\vec{\omega}, \vec{r}] = \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt}, \vec{r}\right] + \left[\vec{\omega}, \frac{d\vec{r}}{dt}\right] = [\vec{\beta}, \vec{r}] + [\vec{\omega}, \vec{v}]$ $\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau$ *При вращении вокруг неподвижной оси* $\vec{a}_n = [\vec{\omega}, \vec{v}]; \boxed{a_n = \omega^2 R}$ $\vec{a}_\tau = [\vec{\beta}, \vec{r}]; \boxed{a_\tau = \beta R}$	$\vec{\beta}$

Пояснения, откуда что берется

Связь между линейными и угловыми величинами

Найдем вектор скорости $\vec{V}$ произвольной т.М тв.т., вращающегося вокруг неподвижной оси OO' с угловой скоростью $\vec{\omega}$. $d\vec{r} = [d\vec{\varphi}\,\vec{r}]$.

Поделим правую и левую часть этой формулы на соответствующий промежуток времени dt:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \left[\frac{d\vec{\varphi}}{dt}\vec{r}\right]$$

$$\vec{V} = [\vec{\omega}\,\vec{r}] \quad (*)$$

По правилу векторного произведения $|\vec{V}| = \omega r \sin\theta$

т.е. $V = \omega\rho$, где ρ – радиус окружности, по которой движется м.т.

Продифференцируем (*) по времени : $\dfrac{d\vec{V}}{dt} = \left[\dfrac{d\vec{\omega}}{dt}\vec{r}\right] + \left[\vec{\omega}\,\dfrac{d\vec{r}}{dt}\right]$

$$\vec{a} = [\vec{\beta}\,\vec{r}] + [\vec{\omega}\,\vec{V}] = [\vec{\beta}\,\vec{r}] + [\vec{\omega}\,[\vec{\omega}\,\vec{r}]]$$

Т.к. ось вращения неподвижна $\vec{\beta}\,||\,\vec{\omega}$, то вектор, равный $[\vec{\beta}\,\vec{r}]\,||\,\vec{a}_\tau$ – направлен по касательной к траектории.

$$|[\vec{\beta}\,\vec{r}]| = \beta r \sin\theta \qquad a_\tau = \beta\rho$$

Вектор равный $[\vec{\omega}\,[\vec{\omega}\,\vec{r}]]\,||\,\vec{a}_n$ $\vec{n}$ – направлен к оси вращения.

$$|[\vec{\omega}\,[\vec{\omega}\,\vec{r}]]| = \omega(\omega r \sin\theta) = \omega^2\rho$$

$$a_n = \omega^2\rho$$

Модуль полного ускорения $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\beta^2\rho^2 + \omega^4\rho^2} = \rho\sqrt{\beta^2 + \omega^4}$