31 - Вычисление магнитных полей по теореме о циркуляции (провод, труба с током, безграничная проводящая плоскость).

TL;DR

TL;DR'а не будет, он принял ислам. в общем и целом здесь в несколько ужатом виде приводятся решения задач, которые разбирались у нас на практиках по физике, а потому их нужно просто через себя пропустить и проблем они доставить не должны будут

Источник решений, если вам покажется, что чего-то не хватает - идете сюда

Алгоритм решения

Формулировка теоремы о циркуляции:

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot I_{\Gamma}$$

Шаги по решению:

1. Выбрать вспомогательный контур, по которому будет расчитываться циркуляция. Его выбор обусловлен симметриями поля
2. Расчитывается циркуляция по данному контуру - интеграл в левой части
3. Расчитываются постоянные токи, охватываемые выбранным контуром - ищем правую часть
4. приравниваем левую и правую части и выражаем $\vec{B}$

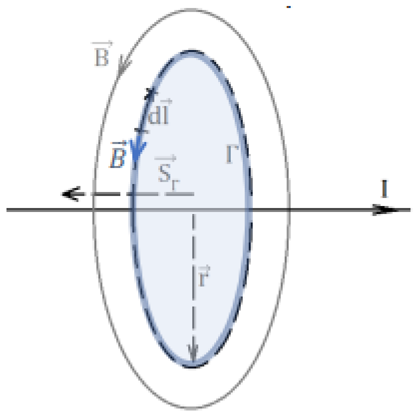
Ахтунг

Поскольку в названии билета указаны только 3 задачи - именно эти 3 задачи и были разобраны. В соответствующем конспекте также разбираются задачи с:

- бесконечным полнотелым цилиндром. Что достаточно хорошо соотностися с задачей номер 2 с небольшими корректировками
- Магнитных полей, силовые линии которых параллельны оси системы (так бывает например у катушек)
- Магнитное поле тороида (бублика)
  Если кому-то нужны действительно эти решения, они находятся по следующей ссылке

Задача 1: магнитное поле бесконечного прямолинейного проводника с током

Дано	Найти
I - ток, текущий по проводнику	$B(r)$



Шаги:

1. Вспомогательный контур - окружность, совпадающая с одной из силовых линий магнитного поля, радиусом r.
2. Найдем циркуляцию. Заметим, что $\vec{B} \uparrow\downarrow \vec{dl}$, кроме того $\vec{B}$ во всех точках контура одинакова

$$C_\Gamma = \oint_\Gamma \vec{B} \cdot \vec{dl} = -\oint_{\text{окруж.}} dl = -B \cdot L_\Gamma = -B \cdot 2\pi r$$

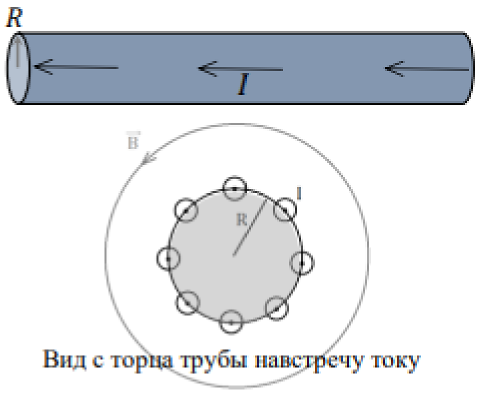
3. Считаем ток, охватываемый контуром. Мы выбрали направление обхода так, что оно противонаправлено с током, поэтому он ток проводинка войдет полностью, но с противоположным знаком: $I_\Gamma = -I$

$$-B \cdot 2\pi = \mu_0 \cdot (-I) \Rightarrow B = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I}{r}$$

Тот же результат, что и интегрирование полей по Био-Савару-Лапласу

Задача 2: магнитное поле бесконечно длинной трубы с током (пустотелой)

Дано	Найти
R - радиус трубы I - сила тока	$B(r)$ внутри трубы и снаружи

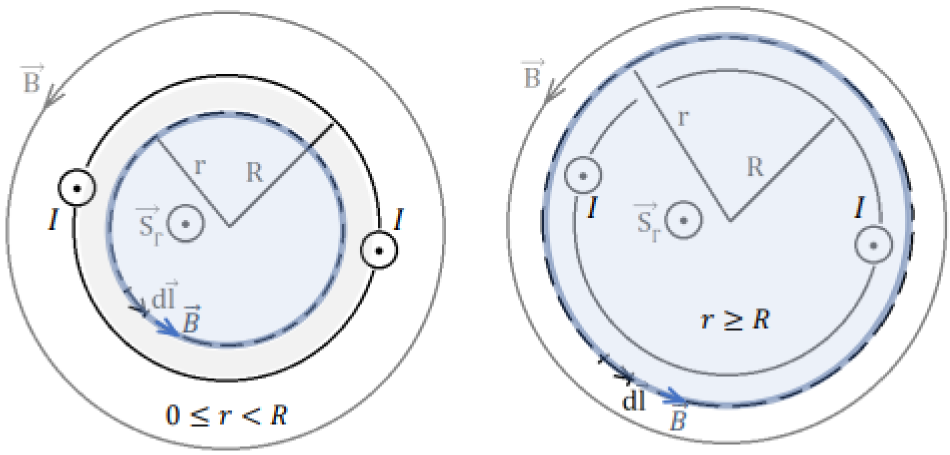


Вид с торца трубы навстречу току

Представим, что труба на самом деле состоит из очень большого числа очень маленьких проводков. Тогда поле этой трубы есть сумма всех полей этих проводков

Шаги:

1. Заметить, что для отдельного проводка мы считали поле в предыдущем примере и сразу написать: $C_\Gamma = B \cdot 2\pi$. (нюанс в том, что в этот раз мы выбрали противоположное направление обхода, поэтому минус у нас не образовался)
2. нарисовать вспомогательный контур в виде окружности, центр которой совпадает с центром сечения трубы

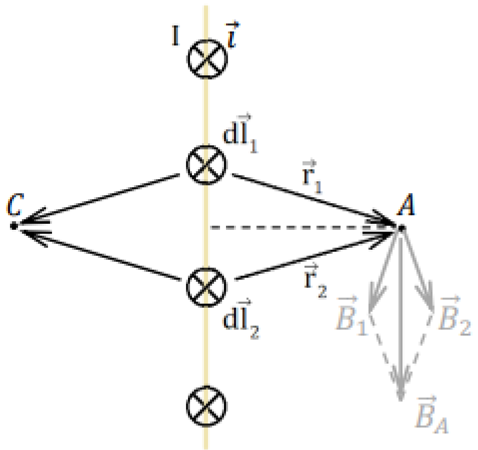


3. На глаз прикинуть, что:
   1. если радиус нашего контура меньше радиуса трубы (то есть он внутри трубы), то ток через него никакой не течет, то бишь и циркуляция равна нулю, а стало быть и поле тоже равно нулю. $B = 0$
   2. Если радиус нашего контура больше радиуса трубы, то весь ток, текущий по трубе, будет течь через контур. $B \cdot 2\pi r = \mu_0 \cdot I$, откуда легко выразится B
   Замечание
   То есть вне трубы поле ведет себя как обычно поле проводника, а внутри трубы поля просто нет

Задача 3: Магнитное поле безграничной плоскости с током

Введем понятие линейной плотности тока $\vec{i}$ - вектор, направленный вдоль линий тока, модуль которого есть ток, проходящий через единицу длины

Дано	Найти
i - линейная плотность тока	B



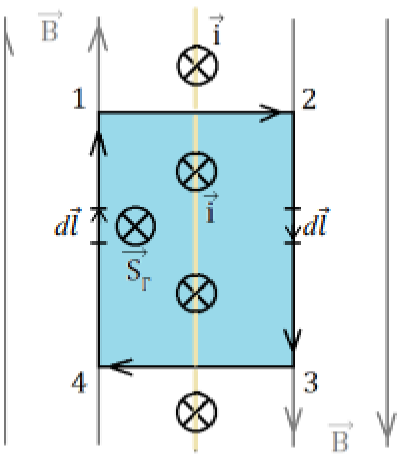
Рассмотрим 2 тонкие нити с током, симметрично расположенные относительно точки наблюдения A, на рисунке значащиеся в точках $d\vec{l}_1$ и $d\vec{l}_2$. Тогда результирующее поле этих дух нитей, как видно на рисунке будет:

$$\vec{B}_A = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$$

Так как они расположены на одном расстоянии от точки A и ничем не отличаются, можно сказать, $|\vec{B}_1| = |\vec{B}_2|$

Очевидно, что всю поверхность бесконечной плоскости можно разбить на такие нити. **Так как каждая сумма полей этих двух нитей параллельна параллельна плоскости, то это же справедливо и для всей плоскости**

Возьмем прямоугольник 12341, как на рисунке и начнем обходить его по часовой стрелке



Наши подсчеты (с вашего позволения тут скриншот) буду выглядит следующим образом:

$$C_\Gamma = \oint\limits_\Gamma \vec{B}\cdot d\vec{l} = \oint\limits_{12341} \vec{B}\cdot d\vec{l} = \int\limits_{1\to2} \underbrace{\vec{B}\cdot d\vec{l}}_{\substack{=0,\\ \vec{B}\perp d\vec{l}}} + \int\limits_{2\to3} \underbrace{\vec{B}\cdot d\vec{l}}_{\vec{B}\downdownarrows d\vec{l}} + \int\limits_{3\to4} \underbrace{\vec{B}\cdot d\vec{l}}_{\substack{=0,\\ \vec{B}\perp d\vec{l}}} + \int\limits_{4\to1} \underbrace{\vec{B}\cdot d\vec{l}}_{\vec{B}\upuparrows d\vec{l}} =$$

$$= \int\limits_{2\to3} B_{23}\cdot dl + \int\limits_{4\to1} B_{41}\cdot dl = 2\cdot B \int\limits_{2\to3} dl = 2\cdot Bl, \qquad B_{23} = B_{41}$$

Для понимания: Поскольку мы имеем дело со скалярными произведениями, места, где вектор магнитной индукции параллелен $\vec{dl}$, у нас всегда будут получаться нули, а значит такие интегралы можно просто отбрасывать

Введем вертикальный размер нашего прямоугольного контура l, тогда ток, проходящий через контур будет равен $I_\Gamma = l\cdot i$,

Теперь при помощи этой величины посчитаем вектор магнитной индукции:

$$2\cdot B\cdot l = \mu_0\cdot l\cdot i \Rightarrow B = \frac{\mu_0\cdot i}{2}$$

Вот и ответ