35 - Теорема Гаусса и теорема о циркуляции магнитного поля в веществе. Связь между векторами J , $\vec{B}$ и $\vec{H}$.

Этот билет во многом ссылается на предыдущий

Теорема Гаусса и теорема о циркуляции магнитного поля в веществе

Теорема Гаусса для магнитного поля

Убеждаемся, что все осталось как было

Теорема Гаусса выражает фундаментальный факт отсутствия в природе магнитных зарядов и была выражена нами для токов проводимости:

$$\oint_S \vec{B}_0 \cdot d\vec{S} = 0$$

Однако по из аналогичных соображений это же соотношение верно и для токов проводимости (силовые линии остаются замкнутыми)

$$\oint_S \vec{B}' \cdot d\vec{S} = 0$$

А соответственно и сумма полей не даст нам потока отличного от нуля:

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint_S (\vec{B}_0 + \vec{B}') \cdot d\vec{S} = \oint_S \vec{B}_0 \cdot d\vec{S} + \oint_S \vec{B}' \cdot d\vec{S} = 0 + 0 = 0.$$

А вот для теоремы о циркуляции намечаются изменения

Теорема о циркуляции вектора B в веществе

В магнетиках, если есть внешнее поле, возникают токи намагничивания. То есть циркуляция теперь определяется не только токами проводимости I, но и токами намагничивания I_m:

$$\oint_\Gamma \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot (I + I_m),$$

Появление токов проводимости делает эту теорему малополезной для нахождения $\vec{B}$ (токи проводимости слишком сложно считать даже при наличии симметрий, получим диффуры)

Для решения проблемы введем циркуляцию вектора намагничивания:

$$\oint_{\Gamma} \vec{J} \cdot d\vec{l} = I_m$$

Будем полагать, что циркуляция идет по одному и тому же контуру. Поделим обе части теоремы Гаусса на μ_0, получим:

$$\oint_{\Gamma} \frac{\vec{B}}{\mu_0} \cdot d\vec{l} = I + I_m = I + \oint_{\Gamma} J \cdot d\vec{l}$$

Перенесем интегралы в одну часть и соберем:

$$\oint_{\Gamma} \frac{\vec{B}}{\mu_0} \cdot d\vec{l} - \oint_{\Gamma} \vec{J} \cdot d\vec{l} = I \Rightarrow \oint_{\Gamma} \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} \right)$$

Теперь назовем величину в скобках *вектор напряжённости магнитного поля или просто вспомогательный вектор* $\vec{H}$ (важно понимать, что у нее нет глубокого философского или физического смысла - с ней просто считать проще). Размерность его впадает с размерностью намагниченности:

$$[H] = [J] = \frac{А}{м}$$

Теперь теорему Гаусса можно переписать в виде:

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I$$

> Циркуляция вектора $H^{\to}$ по произвольному замкнутому контуру равна алгебраической сумме токов проводимости, охватываемых этим контуром – теорема о циркуляции магнитного поля в веществе (интегральная форма)

Знаки нового закона совпадают со знаками вектора $\vec{B}$.

Путаница с терминологией

по историческим причинам напряжённостью магнитного поля в веществе называют вектор $\vec{H}$, а вектор $\vec{B}$ получил неудачное название магнитной индукции. Такая нерациональная терминология сложилась потому, что исторически учение о магнетизме развивалось по аналогии с электростатикой. Источниками магнитного поля считались магнитные заряды, а их, как было установлено позднее, в действительности не существует. Но, терминология осталась прежней

Найдем дифференциальную форму этой теоремы , уже знакомым по предыдущим билетам образом применив к ней формулу Стокса. Нужно это для расширения области ее применимости:

$$\left.\begin{aligned}\oint_{\Gamma} \vec{H}\cdot d\vec{l} &= \int_{S_\Gamma} \operatorname{rot}\vec{H}\cdot d\vec{S}.\\ I &= \int_{S_\Gamma} \vec{j}\cdot d\vec{S}.\end{aligned}\right\} \Rightarrow \int_{S_\Gamma} \operatorname{rot}\vec{H}\cdot d\vec{S} = \int_{S_\Gamma} \vec{j}\cdot d\vec{S} \Rightarrow \boxed{\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{j}}$$

Связь Между векторами $\vec{J}$, $\vec{B}$, и $\vec{H}$

Слабые магнетики (диамагнетики и парамагнетики)

У диамагнетиков и парамагнетиков зависимость между векторами $\vec{J}$ и $\vec{H}$:

$$\vec{J} = \chi \cdot \vec{H}$$

Где χ - магнитная восприимчивость вещества. (по факту просто перегонный коэффициент. Чистая математика)
В отличии от диэлектрической восприимчивости ϰ, χ бывает как положительной (для парамагнетиков), так и отрицательной (для диамагнетиков)

Для нахождения зависимости $\vec{B}$ от $\vec{H}$ произведем следующие преобразования:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J}.$$

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot (\vec{H} + \vec{J}) = \mu_0 \cdot (\vec{H} + \chi \cdot \vec{H}) = \mu_0 \cdot (1 + \chi) \cdot \vec{H} \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{B} = \mu_0 \cdot \mu \cdot \vec{H},}$$

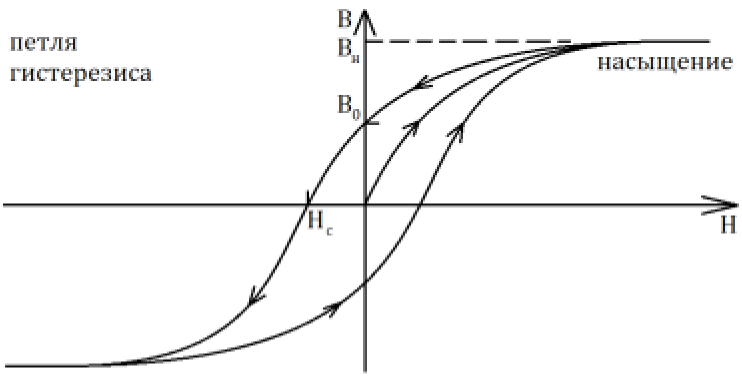
Где μ - магнитная проницаемость среды: $\mu = 1 + \chi$. При чем у диамагнетиков и парамагнетиков μ не так и далеко от единицы:

диамагнетики: $\mu_{H_2(\text{газ})} = 0{,}999937$, $\mu_{\text{вода}} = 0{,}999987$, $\mu_{\text{серебро}} = 0{,}999981$, $\mu_{\text{золото}} = 0{,}999963$;

парамагнетики: $\mu_{\text{воздух(газ)}} = 1{,}000038$, $\mu_{\text{алюминий}} = 1{,}000023$, $\mu_{\text{платина}} = 1{,}000253$.

Сильные магнетики (ферромагнетики)

Зависимость $\vec{J}$ от $\vec{H}$ имеет сложный характер - она не линейна и зависит от предыстории. В общем и целом мы делали лабу по этой теме - дамы и господа - его величество гистрезис:



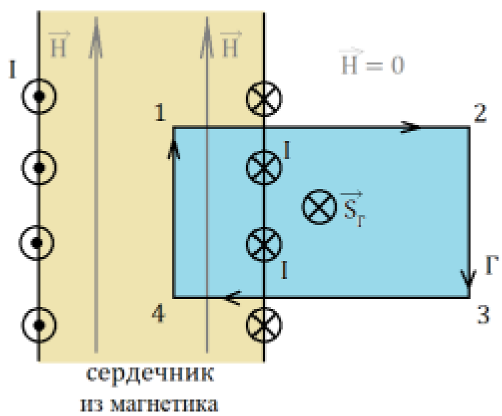
В общем случае если мы помрем нахрен находить поля $\vec{B}$, потому что $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'$, а искать $\vec{B}'$ вы не найдете, так как она зависит от "конфигурации токов намагничивания". Не то, чтобы найти это нельзя, но это удовольствие, пожалуй, только для Дани: решение системы дифференциальных уравнений в частных производных

Единственный случай где останется жив кто-то кроме Дани - когда все поле $\vec{B}_0$ заполнено однородным и изотропным ферромагнетиком. Тогда поле просто увеличится в μ раз

Пример: магнитное поле бесконечного длинного соленоида, заполненного однородным изотропным магнетиком

Дано	Найти
R - радиус основания соленоида I - сила тока в проводе n - число витков провода на единицу длины соленоида μ - магнитная проницаемость магнетика ($\mu > 1$)	$B(r)$ внутри и снаружи

> В силу симметрии задачи и однородности и изотропности магнетика вектор $\vec{H}$ оказывается таким же, как и в вакууме - он однороден внутри бесконечного длинного соленоида и равен нулю вне его. *Если кто-то понял, что имелось в виду и как они до этого дошли авторы - просьба написать мне в личку и пояснить*



Для нахождения вектора H воспользуемся:

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I$$

возьмем прямоугольник 12341 как на рисунке и обойдем по часовой стрелке:

$$C_{\Gamma} = \oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \oint\limits_{12341} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int\limits_{1\to 2} \underbrace{\vec{H} \cdot d\vec{l}}_{\substack{=0,\\ \vec{B}\perp d\vec{l}}} + \int\limits_{2\to 3} \underbrace{\vec{H}}_{=0} \cdot d\vec{l} + \int\limits_{3\to 4} \underbrace{\vec{H} \cdot d\vec{l}}_{\substack{=0,\\ \vec{B}\perp d\vec{l}}} + \int\limits_{4\to 1} \vec{H} \cdot d\vec{l} =$$

$$= \int\limits_{4\to 1} H_{41} \cdot dl = H \cdot \int\limits_{4\to 1} dl = H \cdot l.$$

Протекающий ток найдем узнав, сколько витков соленоида мы пересекаем нашей вспомогательной площадкой:

$$I_{\Gamma} = N \cdot I = n \cdot l \cdot I$$

Ток при обходе по часовой получается положительным, следовательно:

$$H \cdot l = n \cdot l \cdot I \Rightarrow H = n \cdot I$$

Как уже было сказано, для ферромагнетика, который заполняет целиком внешнее поле. Магнитное поле увеличивается в μ раз - проверим же это:

$$B = \mu_0 \cdot \mu \cdot H = \mu \cdot \mu_0 \cdot n \cdot I = \mu \cdot B_0$$

Что и требовалось показать