Энергия электрического поля

$W_{пот}(\vec{r}) = q\varphi(\vec{r})$ – потенциальная энергия заряда, находящегося в электрическом поле;

$W_{сист} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i\varphi_i$ – энергия взаимодействия системы неподвижных зарядов;

$W = \frac{1}{2}\int\limits_{\substack{\text{по всему}\\ \text{пространству}}} \varphi dq = \frac{1}{2}\int \rho\varphi dV$ – полная энергия зарядов, распределенных непрерывно.

Найдём формулу, выражающую энергию через напряжённость поля для однородного электрического поля, например, поле в плоском конденсаторе.

$$W = \frac{1}{2}\int\limits_{\substack{\text{по всему}\\ \text{пространству}}} \varphi dq = \frac{1}{2}\left(\int\limits_{\substack{\text{"+"}\\ \text{пластина}}} \varphi dq + \int\limits_{\substack{\text{"–"}\\ \text{пластина}}} \varphi dq\right) =$$

Т.к. обкладки конденсатора – проводники, значит потенциал на них во всех точках одинаков, и его можно вынести из-под знака интеграла:

$$= \frac{1}{2}\left(\varphi_+ \int\limits_{\substack{\text{"+"}\\ \text{пластина}}} dq + \varphi_- \int\limits_{\substack{\text{"–"}\\ \text{пластина}}} dq\right) = \frac{1}{2}(q\varphi_+ + (-q)\varphi_-) = \frac{q}{2}(\varphi_+ - \varphi_-) = \frac{qU}{2},$$

где $U = \varphi+ - \varphi-$ – разность потенциалов на обкладках конденсатора.

Используя формулу, определяющую взаимную емкость двух проводников($C = \frac{q}{U}$)получим:

$$\boxed{W = \frac{qU}{2} = \frac{CU^2}{2} = \frac{q^2}{2C}}$$

Эти формулы были получены из формулы для полной энергии, следовательно, они учитывают энергию взаимодействия зарядов одной обкладки с другой и собственную энергию обкладок.

Т.к. конденсатор – плоский, то справедливы следующие формулы: $C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$, $U = E \cdot d$

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 S}{d}\frac{(E \cdot d)^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}Sd = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \cdot V$$

V – объём пространства между обкладками конденсатора – пространство, занимаемое электрическим полем.

Введём понятие объёмной плотности w энергии поля: $\boxed{w = \frac{\varepsilon_0 \cdot E^2}{2}}$ – объёмная плотность энергии электрического поля.

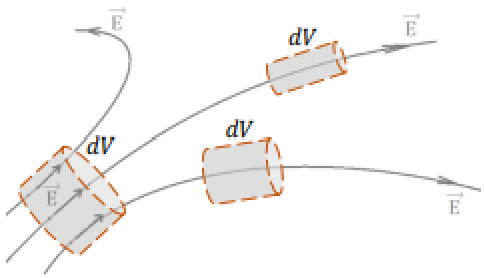
И тогда получаем:

$$\boxed{W = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \cdot V = w \cdot V}$$

– полная энергия однородного электрического поля, заполняющего объём V.

Полученную формулу можно обобщить и на случай неоднородных электрических полей.

Представим пространство, заполненное электрическим полем, как систему малых объёмов dV, в которых эл. Поле можно считать однородным, тогда полная энергия всего пространства будет суммой всех dV:



$$W = \int\limits_{\substack{\text{по всему}\\ \text{пространству}}} dW = \int\limits_{\substack{\text{по всему}\\ \text{пространству}}} w dV;$$

$$\boxed{W = \int\limits_{\substack{\text{по всему}\\ \text{пространству}}} \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \cdot dV}$$

– полная энергия электрического поля.

Подынтегральное выражение в этом уравнении $dW = wdV$, имеет смысл энергии, с некоторой плотностью w заключённой в объёме dV. Т.е. электрическая энергия, подобно веществу, распределена в пространстве с некоторой плотностью. Т.е. **электрическая энергия локализована в самом поле**. В электростатическом поле, которое неотделимо от зарядов вопрос о локализации электрической энергии решить невозможно. Переменные электромагнитные поля могут существовать самостоятельно.

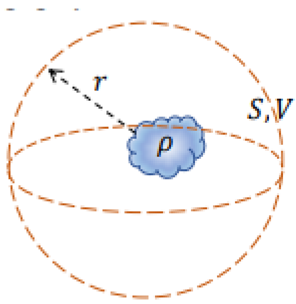
Следовательно, формула, связывающая энергию электрического поля с зарядами и потенциалами тел, может использоваться только для электростатического поля.

$$W = \frac{1}{2} \int\limits_{\substack{\text{по всему}\\ \text{пространству}}} \varphi dq = \frac{1}{2} \int\limits_{\substack{\text{по всему}\\ \text{пространству}}} \varphi \rho dV$$

А формула справа работает как в случае статических электрических полей, так и в случае переменных.

$$W = \frac{1}{2} \int\limits_{\substack{\text{по всему}\\ \text{пространству}}} \varepsilon_0 E^2 \cdot dV$$

Однако с математической точки зрения в случае электростатического поля оба выражения эквивалентны:



Рассмотрим пространство, электрическое поле в котором создаётся зарядом с объёмной плотностью ρ. S – замкнутая поверхность (сфера), охватывающая все точки поля, V – объём пространства внутри неё, т.е. объём, внутри которого заключено электрическое поле. Сосчитаем дивергенцию от произведения потенциала этого поля на вектор напряжённости его:

$$\operatorname{div}(\varphi \cdot \vec{E}) = \nabla(\varphi \cdot \vec{E}) = \vec{E} \cdot \nabla\varphi + \varphi \cdot \nabla\vec{E} = \vec{E} \cdot \operatorname{grad}\varphi + \varphi \cdot \operatorname{div}\vec{E} = \vec{E} \cdot (-\vec{E}) + \varphi \cdot \frac{\rho}{\varepsilon_0} = -E^2 + \frac{\varphi\rho}{\varepsilon_0}.$$

Проинтегрируем, полученное выражение по пространству, внутри которого заключено электрическое поле, т.е. по объёму V:

$$\int\limits_{\substack{\text{по всему}\\ \text{пространству}}} \operatorname{div}(\varphi \cdot \vec{E})\, dV = \int\limits_V \left(-E^2 + \frac{\varphi\rho}{\varepsilon_0}\right) dV.$$

Определённый интеграл по объёму, стоящий слева, можно преобразовать в интеграл по поверхности, которая его ограничивает, использовав формулу Гаусса – Остроградского

$$\int\limits_V \operatorname{div}(\varphi\vec{E})\, dV = \oint\limits_S (\varphi\vec{E})\, d\vec{S},$$

а интеграл по поверхности ограничен сверху следующим выражением:

$$\oint\limits_S (\varphi\vec{E})\, d\vec{S} \le \varphi_{max} \cdot E_{max} \cdot S.$$

Т.к. радиус r нашей сферы S достаточно велик, а заряд плотностью ρ конечен, то этот заряд можно считать точечным. Его потенциал, напряжённость и поверхность равны соответственно:

$$\varphi_{max} \sim \frac{1}{r}, \quad E_{max} \sim \frac{1}{r^2}, \quad S = 4\pi r^2 \sim r^2.$$

$$\int_V \operatorname{div}(\varphi \vec{E})\, dV \leq \varphi_{max} \cdot E_{max} \cdot S \sim \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot r^2 = \frac{1}{r} \xrightarrow[r \to \infty]{} 0$$

– интеграл по сфере S, а с ним и интеграл по объёму V в пределе при $r \to \infty$ обращаются в нуль, т.е.

$$\int_V \operatorname{div}(\varphi \vec{E})\, dV = 0. \qquad 0 = \int_V \left(-E^2 + \frac{\varphi\rho}{\varepsilon_0}\right) dV = -\int_V E^2 dV + \int_V \frac{\varphi\rho}{\varepsilon_0} dV \Rightarrow$$

$$\int\limits_{\substack{\text{по всему}\\\text{пространству}}} \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} dV = \frac{1}{2} \int\limits_{\substack{\text{по всему}\\\text{пространству}}} \varphi\rho dV$$

- выражения для энергий в случае электростатического поля эквивалентны.

Представим себе систему двух заряженных тел в вакууме. Согласно принципу суперпозиции результирующее электрическое поле в окружающем пространстве будет равно сумме напряжённостей полей обоих тел: $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$.
Его квадрат – $E^2 = (\vec{E}_1 + \vec{E}_2)^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2\,\vec{E}_1 \vec{E}_2$. Полная энергия данной системы тел будет равна:

$$W = \int\limits_{\substack{\text{по всему}\\\text{пространству}}} \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} dV = \int_V \frac{\varepsilon_0 E_1{}^2}{2} dV + \int_V \frac{\varepsilon_0 E_2{}^2}{2} dV + \int_V \varepsilon_0 \vec{E}_1 \vec{E}_2 dV.$$

$$W = W_1 + W_2 + W_{12}.$$

Полученные формулы позволяют сделать следующие выводы:

- собственная энергия каждого заряженного тела – величина всегда положительная ($W1$, $W2$, $W > 0$), энергия взаимодействия может быть как положительной, так и отрицательной величиной ($W12 \lesseqgtr 0$).
- при всех возможных перемещениях заряженных тел, не изменяющих распределения зарядов на них, собственная энергия тел остаётся постоянной ($W1 + W2 = const$). В этих случаях изменения полной энергии определяются всецело только изменениями энергии взаимодействия ($\Delta W = \Delta W12$).
- в отличие от вектора напряжённости системы заряженных тел $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ энергия электрического поля – величина неаддитивная $W \neq W1 + W2$ из-за энергии взаимодействия. В частности, при возрастании напряжённости электрического поля в n раз энергия поля возрастает в n^2 раз.