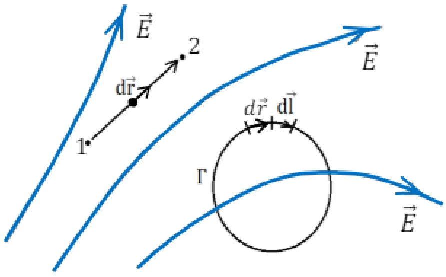
12. Циркуляция электростатического поля. Ротор.

теорема о циркуляции электростатического поля (в интегральной форме)

$\vec{E}$ – потенциальное (консервативное) поле => работа сил поля при перемещении заряда из т. 1 в т. 2 определяется только начальным и конечным положением заряда:

$$A_{12} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} q\vec{E} \cdot d\vec{r} = q\big(\varphi(\vec{r}_1) - \varphi(\vec{r}_2)\big).$$



работа консервативных сил по любому замкнутому пути равна нулю:

$$A_o = \oint_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_\Gamma q\vec{E} \cdot d\vec{l} = 0,$$

малое перемещение $d\vec{r}$ совпадает с элементом длины контура Г – $d\vec{l}$ =>

для любого электростатического поля:

$$\boxed{\oint_\Gamma \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0.}$$

Интеграл от векторного поля, стоящий в левой части этого выражения, называется *циркуляцией векторного поля* по данному замкнутому контуру Г.

(В дифференциальной форме)

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi.$$

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}; \;\; E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}; \;\; E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

	$\frac{\partial}{\partial x}$	$\frac{\partial}{\partial y}$	$\frac{\partial}{\partial z}$
$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}$	-----	$\frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)$	$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)$
$E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}$	$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)$	----	$\frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)$
$E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}$	$\frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)$	$\frac{\partial E_z}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)$	----

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) \qquad \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0$$

$$-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) \qquad \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = 0$$

$$-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) \qquad \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0$$

$$\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\vec{k} = 0.$$

$$\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \times \left(\vec{i}E_x + \vec{j}E_y + \vec{k}E_z\right) = \left[\nabla, \vec{E}\,\right].$$

Таким образом, у нас получилось, что для электростатического поля векторное произведение оператора набла и вектора напряжённости поля $\vec{E}$ равно нулю:

$$\boxed{\left[\nabla, \vec{E}\,\right] = 0} \text{ или } \boxed{\operatorname{rot} \vec{E} = 0}$$

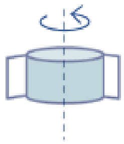
– дифференциальная (локальная) форма *теоремы о циркуляции электростатического поля*.

Ротор:

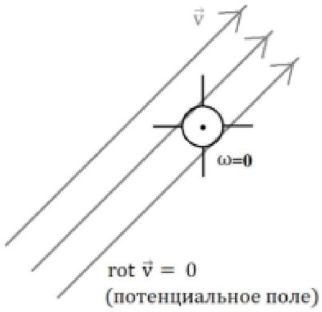
Когда же вектор ∇ векторно умножается на вектор (например, $\vec{E}$), то результатом такого действия является вектор, носящий название *ротор*:

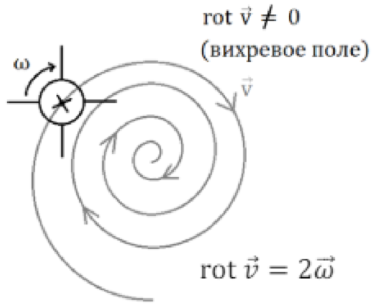
$$\nabla \times \vec{E} = \left[\nabla, \vec{E}\,\right] = \operatorname{rot} \vec{E}.$$

Физический смысл ротора:



жидкости по замкнутому каналу. В качестве интуитивного образа для ротора – завихрённости поля можно использовать представление о вращении помещённого в поток маленького (без инерции, вращаемого потоком) колеса (вертушки) с прямыми (не винтовыми) лопастями. Помещая такую вертушку в поток жидкости, по её движению можно судить о вращательных свойствах потока в данном месте: $\operatorname{rot}\vec{v} \neq 0$ в тех точках поля, где жидкость будет вращать вертушку, т.е. в этой точке поля его силовые линии искривлены настолько, что могут образовывать «вихри».





Векторное поле, ротор которого всюду равен нулю ($\operatorname{rot}\vec{v} = 0$), является *потенциальным*, в противном случае ($\operatorname{rot}\vec{v} \neq 0$) – нет.