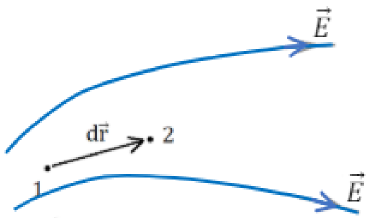
11. Связь между напряженностью и потенциалом. Теорема единственности

предположим, что в любой точке пространства нам известен потенциал: $\varphi = \varphi(r)$

рассматриваемое нами электрическое поле – потенциальное (консервативное)

Совершив в нашем пространстве малое перемещение dr, перейдём из точки 1 в бесконечно близкую ей точку 2:



δA: $\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r} = q\vec{E} \cdot d\vec{r}$. исходя из консервативности нашего поля: $\delta A = -qd\varphi$.

$$q\vec{E} \cdot d\vec{r} = -qd\varphi \quad \text{или} \quad \vec{E} \cdot d\vec{r} = -d\varphi.$$

В декартовой системе координат:

$$d\vec{r} = d\vec{r}_x + d\vec{r}_y + d\vec{r}_z = dx \cdot \vec{\imath} + dy \cdot \vec{\jmath} + dz \cdot \vec{k}. \qquad \vec{E} = E_x\vec{\imath} + E_y\vec{\jmath} + E_z\vec{k}.$$

$$\vec{E} \cdot d\vec{r} = \left(E_x\vec{\imath} + E_y\vec{\jmath} + E_z\vec{k}\right) \cdot dx\vec{\imath} = E_x dx$$

$$E_x dx = -d\varphi \quad \Longrightarrow \quad E_x = -\frac{d\varphi}{dx}\bigg|_{\substack{y = const \\ z = const}} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}.$$

$$\vec{E} \cdot d\vec{r} = E_y dy; \quad E_y dy = -d\varphi \quad \Longrightarrow \quad E_y = -\frac{d\varphi}{dy}\bigg|_{\substack{x = const \\ z = const}} = -\frac{\partial\varphi}{\partial y};$$

$$E_z dz = -d\varphi \quad \Longrightarrow \quad E_z = -\frac{d\varphi}{dz}\bigg|_{\substack{x = const \\ y = const}} = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

$$\vec{E} = E_x\vec{\imath} + E_y\vec{\jmath} + E_z\vec{k} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{\imath} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{\jmath} - \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k} = -\left(\vec{\imath}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \vec{\jmath}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) =$$

$$= -\left(\vec{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\varphi = -\nabla\varphi$$

сумма трёх подобных частных производных по координатам, умноженных на соответствующие единичные векторы, называется *оператором набла* (оператором Гамильтона)

$$\boxed{\nabla \stackrel{\text{def}}{=} \vec{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}}$$

когда оператор набла действует на скалярную функцию, результатом является *вектор градиента*

$$\boxed{\nabla\varphi = \text{grad}\,\varphi.}$$

Таким образом, связь между напряжённостью и потенциалом электростатического поля может быть выражена формулой $\boxed{\vec{E} = -\nabla\varphi}$ или $\boxed{\vec{E} = -\text{grad}\,\varphi.}$

Уравнение Пуассона и Лапласа. Теорема единственности

Предположим, что в некотором пространстве нам известно распределение электрического заряда $\rho = \rho(r)$. Попробуем найти потенциал $\varphi(r)$ этого электрического поля: теорему Гаусса в дифференциальной форме + связь между напряжённостью и потенциалом электростатического поля

$$\text{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \vec{E} = -\text{grad}\,\varphi.$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \text{и} \quad \vec{E} = -\nabla\varphi.$$

$$\nabla \cdot (-\nabla\varphi) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}. \qquad -\nabla \cdot (\nabla\varphi) = -\nabla^2\varphi = -\Delta\varphi,$$

$\boxed{\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$ – уравнение Пуассона; если $\rho = 0$ => $\boxed{\Delta\varphi = 0.}$

В математической физике доказана так называемая *теорема единственности,* согласно которой задача о нахождении потенциала $\varphi(\vec{r})$ по известному распределению плотности заряда $\rho = \rho(\vec{r})$ в некоторой области пространства *имеет единственное решение*, если известны значения потенциала в каждой точке поверхности S, ограничивающей эту область. Если поверхность S уходит в бесконечность, то там потенциал должен быть равен нулю.

$$\begin{cases} \Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \varphi|_S = \varphi_0 \end{cases} \text{– имеет единственное решение.}$$

В математике задача, в которой искомая функция подчиняется определенным граничным условиям, т.е. принимает заданные значения на границе некоторой области, называется краевой, или граничной задачей. Итак, *краевая задача для уравнений Пуассона и Лапласа имеет единственное решение* – теорема единственности.