Авостьянова Анна
гр. 5130904/30002

$y = \frac{4x}{(x+1)^2}$

1. $x \in \mathbb{R} / \{-1\}$

2. а) $f(0)=0$ б) $\frac{4x}{(x+1)^2} \gtrless 0$ в) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{4x}{(x+1)^2}=0$ г) $f(-x)\ne f(x)$ $\ne -f(x)$ Общего вида

$- \quad -1 \quad - \quad 0 \quad + \quad x$

3. а) вертикальные асимптоты

$\lim\limits_{x\to -1^\pm} \frac{4x}{(x+1)^2} = \pm\infty$

б) Наклонные асимптоты ~~горизонтальной~~

$k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{4x}{(x+1)^2 x}\right)=0$ $y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{4x}{(x+1)^2}-0x\right)=0$, $y=0$

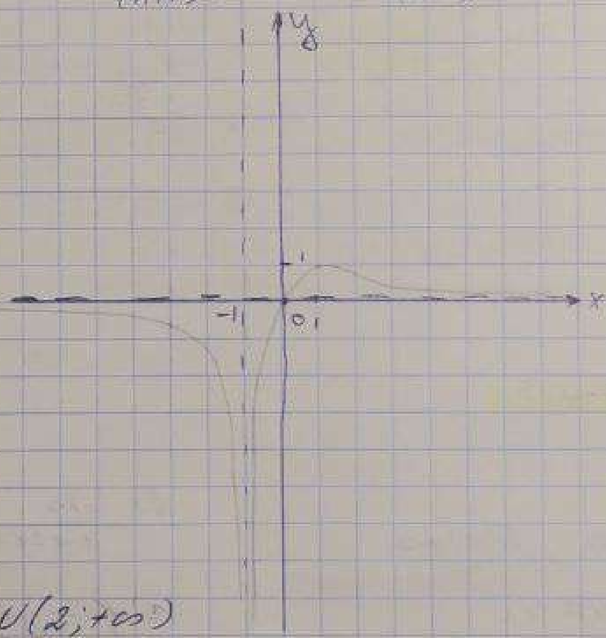
4. $y' = \frac{4(x+1)^2-4x\cdot 2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{4x^2+8x+4-8x^2-8x}{(x+1)^4} = \frac{-4x^2+4}{(x+1)^4} = \frac{4(1-x)}{(x+1)^3}$

$f'(-1)$ - острый
$f'(1)=1$ - гладкий

$- \quad -1 \quad + \quad 1 \; (max) \quad - \quad x$

5. $y'' = \frac{-4(x+1)^3-3(x+1)^2(4-4x)}{(x+1)^6} = \frac{-4x^3-12x^2-12x-4-12x^2-24x-12+12x^3+24x^2+12x}{(x+1)^6} = \frac{8x^3-24x-16}{(x+1)^6} = \frac{8(x-2)(x+1)^2}{(x+1)^6} = \frac{8(x-2)}{(x+1)^4}$

$- \quad -1 \quad - \quad 2 \quad + \quad x$



$y = \ln\frac{x}{x-2} - 2$

1. $\frac{x}{x-2}>0 \Rightarrow x\in(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$

$+ \quad 0 \quad - \quad 2 \quad + \quad x$

2. а) $\ln\frac{x}{x-2}-2=0$

$\frac{x}{x-2}=e^2$

$x=e^2x-2e^2$ $\Rightarrow f\left(\frac{2e^2}{e^2-1}\right)=0$

$x=\frac{2e^2}{e^2-1}$

б) $\ln\frac{x}{x-2}-2\gtrless 0$

$\frac{x}{x-2}\gtrless e^2$

$\frac{x-e^2x+2e^2}{x-2}\gtrless 0$

$\frac{x(1-e^2)+2e^2}{x-2}\gtrless 0$

$\frac{x+\frac{2e^2}{1-e^2}}{x-2}\gtrless 0$

$+ \quad 2 \quad + \quad \frac{2e^2}{e^2-1} \quad + \quad x$

в) $f(-x) \neq f(x)$, $\neq -f(x)$ } общего вида

г) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\ln \frac{x}{x-2} - 2\right) = -2$

3. а) вертикальные асимптоты

$\lim\limits_{x\to 0^{\pm}} \left(\ln \frac{x}{x-2} - 2\right) = \pm\infty$, $\lim\limits_{x\to 2^{\pm}} \left(\ln \frac{x}{x-2} - 2\right) = \pm\infty$

б) Наклонные асимптоты

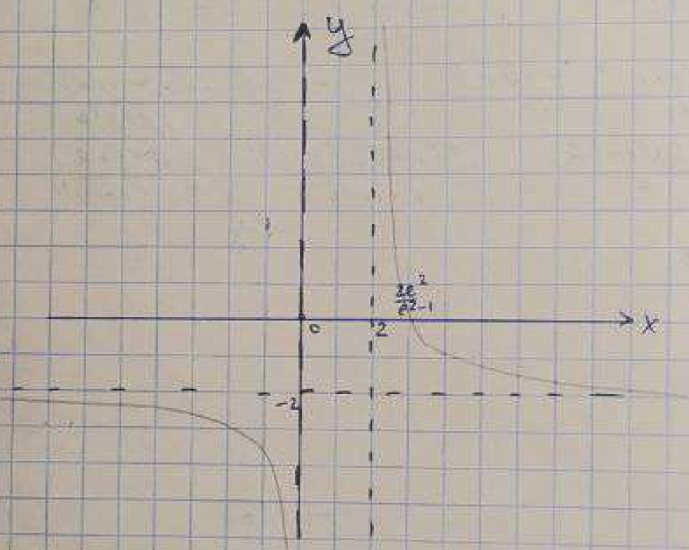
$k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\frac{\ln \frac{x}{x-2} - 2}{x} \right) = 0$, $b = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\ln \frac{x}{x-2} - 2 - 0x\right) = -2$

$y = -2$ - наклонная

4. $y' = \frac{x-2}{x} \cdot \frac{(x-2)-x}{(x-2)^2} = \frac{-2}{x(x-2)}$

$f'(0)$ - острый
$f'(2)$ - острый

5. $y'' = \frac{2(x-2+x)}{x^2(x-2)^2} = \frac{4x-4}{x^2(x-2)^2}$



$y = \sqrt[3]{x^2(x-4)^2}$

1. $x \in R$

2. а) $f(0)=0$, $f(4)=0$.

б) $\sqrt[3]{x^2(x-4)^2} \geq 0$

в) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{x^2(x-4)^2} = +\infty$

г) $f(-x) \neq f(x)$, $\neq -f(x)$ } общего вида

3. а) Вертикальные асимптоты отсутствуют
б) Наклонные асимптоты отсутствуют

4. $y' = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} (x-4)^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3} x^{\frac{2}{3}} (x-4)^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3} \left(\frac{(x-4)^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{x}} + \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{x-4}} \right) = \frac{2}{3} \left(\frac{x-4+x}{\sqrt[3]{x(x-4)}} \right)$

$= \frac{4(x-2)}{3\sqrt[3]{x(x-4)}}$

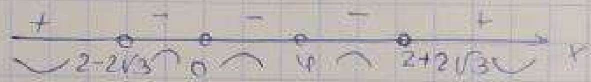
$f'(0)$ - острый
$f'(2)$ - гладкий
$f'(4)$ - острый
$f(0)=0$ $f(4)=0$
$f(2) = 2\sqrt[3]{2}$

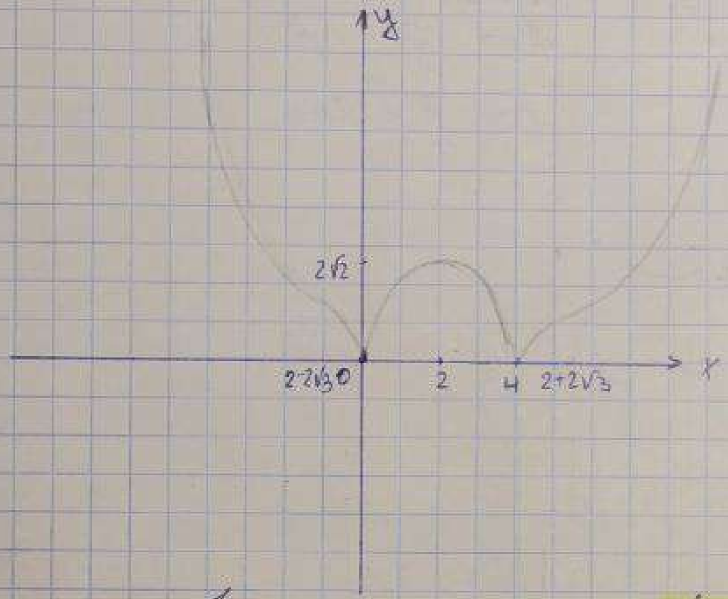
$$5.\ y'' = 4\cdot 3(x^2-4x)^{-\frac{1}{3}} + (4x-8)\,3\left(-\frac{1}{3}\right)(2x-4)(x^2-4x)^{-\frac{4}{3}} = \frac{12}{\sqrt[3]{x^2-4x}} - \frac{(4x-8)(2x-4)}{\sqrt[3]{x^2-4x}\,(x^2-4x)}$$

$$= \frac{12}{\sqrt[3]{x^2-4x}} - \frac{8x^2-16x-16x+32}{\sqrt[3]{x^2-4x}\,(x^2-4x)} = \frac{4}{\sqrt[3]{x^2-4x}}\left(\frac{3x^2-12x-2x^2+8x-8}{x^2-4x}\right) =$$

$$= \frac{4}{\sqrt[3]{x^2-4x}}\left(\frac{x^2-4x-8}{x^2-4x}\right) = \frac{4\,(x-(2-2\sqrt{3}))\,(x-(2+2\sqrt{3}))}{\sqrt[3]{x^2-4x}\,(x^2-4x)}$$

$x=4$
$x=0$
$x=2-2\sqrt{3}$
$x=2+2\sqrt{3}$





$$y = \frac{1}{(\sin x+\cos x)^2} = \frac{1}{\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x} = \frac{1}{1+\sin 2x}$$

1. $1+\sin 2x \neq 0$
$\sin 2x \neq -1$
$2x \neq -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$
$x \neq -\frac{\pi}{4} + \pi n$

2 а) $f(x)=0$ – отсуствуют
б) $\frac{1}{1+\sin 2x} \geq 0$.
$f(x)>0 \quad \forall x,\ x\in D(x)$

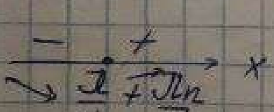
в) $\left.\begin{array}{l} f(-x)\neq f(x) \\ \quad\ \ \neq -f(x)\end{array}\right\}$ общего вида

г) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{1+\sin 2x}$ несущ.

3. а) вертикальные асимптоты ~~отсуствуют~~
$\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{4}\pm} 1/(1+\sin 2x) = +\infty$
б) Наклонные асимптоты отсуствуют.

4 $y' = -(1+\sin 2x)^{-2}\cdot\cos 2x\cdot 2 = \frac{-2\cos 2x}{(1+\sin 2x)^2}$

$\begin{cases} -2\cos 2x = 0 \\ (1+\sin 2x)^2 \neq 0\end{cases}$ $\begin{cases}\cos 2x = 0 \\ 1+\sin 2x\neq 0\end{cases}$ $\begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2}+\pi n \\ \sin 2x \neq -1\end{cases}$ $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2} \\ x\neq -\frac{\pi}{4}+\pi n\end{cases}$



$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0{,}5$ – гладкий экстремум
$f'\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ – острый экстремум

5. $y'' = \frac{4\sin 2x(1+\sin 2x)^2 - 2(1+\sin 2x)(-2\cos^2 2x)}{(1+\sin 2x)^4} =$

$= \frac{(1+\sin 2x)(4\sin 2x(1+\sin 2x)+8\cos^2 2x)}{(1+\sin 2x)^4} = \frac{4\sin 2x(1+\sin 2x)+8\cos^2 2x}{(1+\sin 2x)^3}$

$= \frac{-4\sin^2 2x+4\sin 2x+8}{(1+\sin 2x)^3}$

$-4\sin^2 2x + 4\sin 2x + 8 = 0$ Пусть $t = \sin 2x$, $t \in [-1; 1]$

$-4t^2 + 4t + 8 = 0$

$t^2 - t - 2 = 0$

$D = 1 + 8 = 9$

$t = \frac{1 \pm 3}{2}$ $\left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = -1 \end{array}\right. \Rightarrow$ $\sin 2x = -1$

$2x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$

$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$