7. Теорема Гаусса в локальной форме. Дивергенция. Формула Гаусса - Остроградского

Теорема Гаусса в локальной форме:
Теорема Гаусса, выраженная в интегральной форме, имеет вид:
$\oint_S E \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} q_{\text{внутр}} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho \, dV$

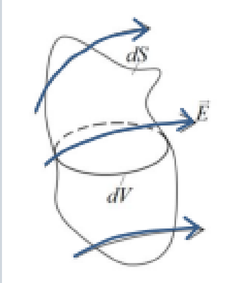
Для расширения применения теоремы, переводим её в дифференциальную форму. Рассмотрим электрическое поле в пространстве и малую замкнутую поверхность (dS) с объемом (dV).

Дивергенция - линейный-дифференциальный оператор на векторном поле, характеризующий поток данного поля через поверхность достаточно малой окрестности точки области определения поля.

dS - малая замкнутая поверхность, dV - объем, ограниченный этой поверхностью.

Дивергенция - отношение потока через поверхность к объёму, ограниченному этой поверхностью. $V_s \to 0$

$\frac{d\Phi}{dV} \equiv \lim_{V_s \to 0} \frac{\oint_S \vec{E} d\vec{S}}{V_s} = \operatorname{div} \vec{E}$



Дивергенция является линейным дифференциальным оператором на векторном поле, характеризующим поток поля через малую окрестность точки: $\operatorname{div}(\alpha E + \beta E) = \alpha \operatorname{div} E + \beta \operatorname{div} E$

- Если внутри замкнутой поверхности есть заряд (dq), то по теореме Гаусса: $\operatorname{div} E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$
- $\operatorname{div} \vec{E} > 0$, если в этой точке пространства есть положительный заряд (источник поля).
- $\operatorname{div} \vec{E} < 0$, если в этой точке пространства есть отрицательный заряд (сток поля).
- $\operatorname{div} \vec{E} = 0$, если в этой точке пространства зарядов нет, либо они компенсируют друг друга.

Формула Гаусса-Остроградского:
Формула связывает поток векторного поля через замкнутую поверхность с интегралом от дивергенции по объёму:
$\int_V (\operatorname{div} E) \, dV = \oint_S E \cdot d\mathbf{S}$

Вывод формулы:

S - замкнутая поверхность, V_s- объём внутри
Разобьем на множество перегородок $dV, d\Phi$

$$\Phi_s = \sum_i^N \Phi_i = \int d\Phi = \int div \vec{E} dV$$
$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{d\Phi}{dV};\ d\Phi = \operatorname{div} \vec{E} \cdot dV;\ \Phi_s = \oint \vec{E} d\vec{S}$$
$$\Rightarrow \oint \vec{E} d\vec{S} = \int_{V_s} div \vec{E} dV$$