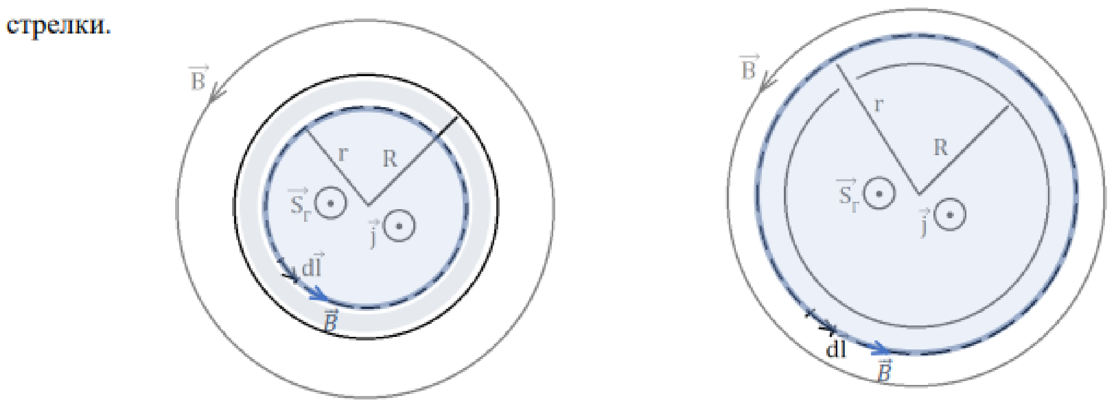
32 - Вычисление магнитных полей по теореме о циркуляции (бесконечно длинный соленоид, тороид).

в прошлый раз я думал, что мне не придется писать решение остальных задач из этого конспекта. Я ошибся

Магнитное поле бесконечно длинной трубы с током

в билете не требуется, написал так как плохо читаю

Дано	Найти
R - радиус трубы $j = const$ - плотность тока	$B(r)$ внутри и снаружи



По аналогии с тем, что мы делаем с трубой, представим себе, что полнотелый цилиндр состоит из тонких нитей. Наша задача найти левую и правую части теоремы о циркуляции:

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot \vec{l} = \mu_0 \cdot I$$

Левую часть мы уже искали в предыдущем билете

$$C_{\Gamma} = B \cdot 2\pi r$$

При этом в данном случае ток уже распределен по площади, поэтому надо бы ток этот найти:

$$I_{\Gamma} = \int_{S_{\Gamma} \cap V} \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

Вспомогательными контурами вновь станут окружности. Если радиус окружности меньше, чем радиуса цилиндра, то этот контур охватить лишь часть того тока, который протекает.

$$I_\Gamma = j \cdot S(r) = j \cdot \pi r^2$$

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 \cdot j \cdot 2\pi r^2 \Rightarrow B = \frac{\mu_0}{2} \cdot jr$$

А если радиус будет больше, то весь ток, походящий через цилиндр пройдет через вспомогательный контур:

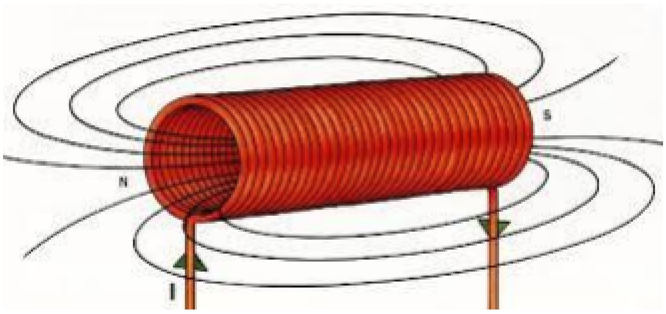
$$I_\Gamma = S = j \cdot \pi R^2$$

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 \cdot j \cdot \pi R^2 \Rightarrow B = \frac{\mu_0}{2} \cdot \frac{jR^2}{r}$$

Если вспомнить, что $j \cdot \pi R^2 = I$, то получим, что снаружи поле цилиндра не отличимое от поля бесконечно длинного проводника (подставите сами)

Бесконечно длинный соленоид

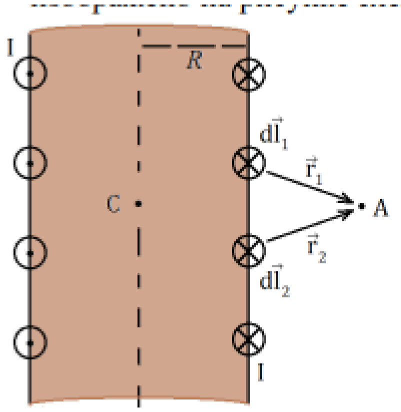
Соленоид - цилиндрическая катушка из кучи витков. Соленоид считается бесконечно длинным, если его длина много больше диаметра



Дано	Найти
R - Радиус соленоида I - Сила тока в проводе n - число витков на единицу длины в соленоиде	$B(r)$ снаружи и внутри

Сделаем несколько допущений:

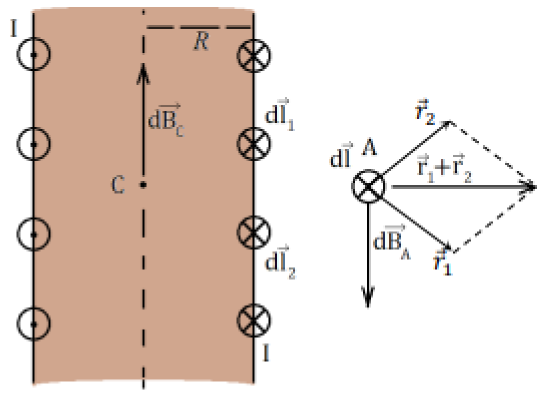
- каждый виток заменим колечком (будто он не идет в перед, а просто замкнут на себе), что допустимо, если витки достаточно тонкие
- Каждый виток сочтем достаточно тонким, чтобы считать, что ток течет по поверхности (как на рисунке)



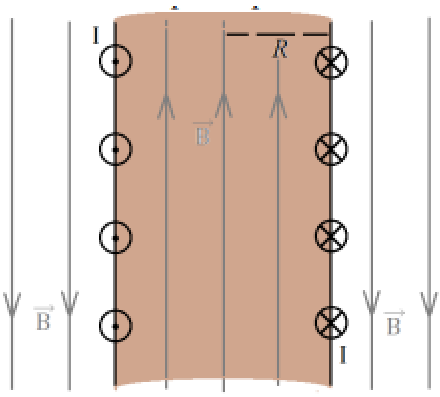
Возьмем две "нити" и рассмотрим их маленькие кусочки $Id\vec{l}_1$ и $Id\vec{l}_2$. По аналогии с нашими размышлениями о плоскости мы можем сказать, что

$$d\vec{B}_A = d\vec{B}_1 + d\vec{B}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I \cdot \frac{[d\vec{l}_1, \vec{r}_1]}{{r_1}^3} + \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I \cdot \frac{[d\vec{l}_2, \vec{r}_2]}{{r_2}^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I \cdot \frac{[d\vec{l}, (\vec{r}_1 + \vec{r}_2)]}{r^3}$$

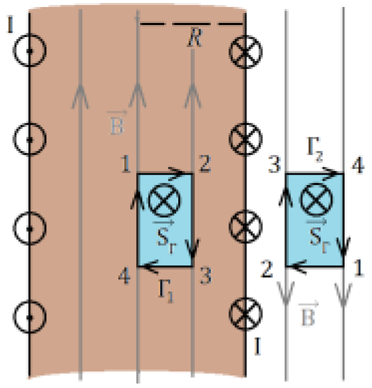
Последний член выведен из замечания, что $|\vec{r}_1| = |\vec{r}_2| = r$. Пусть ось соленоида обозначится $\vec{x}$, тогда $d\vec{l} \perp \vec{x}$, и $(\vec{r}_1 + \vec{r}_2) \perp \vec{x}$, Поэтому $d\vec{B}_A \parallel \vec{x}$.



На такие же симметричные кусочки можно разбить всю катушку (что по факту так и есть в действительности), следовательно раз ничего не поменяется, то и для поля всего соленоида это справедливо. При чем это справедливо как для точек снаружи, так и для точек внутри солененоида.



Выберем несколько вспомогательных контуров и будем обходить их по часовой стрелке



$$\oint_{\Gamma_1} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_{\Gamma_2} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_{12341} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{1\to 2} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{2\to 3} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{3\to 4} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{4\to 1} \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

Отсюда можно выкинуть стороны $1 \to 2$ и $3 \to 4$, так как для них скалярные произведения $\vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$, Останется 2 интеграла:

$$\oint_{12341} \vec{B} \cdot d\vec{l} = -\int_{2\to 3} B_{23} \cdot dl + \int_{4\to 1} B_{41} \cdot dl = -B_{23} \cdot \int_{2\to 3} dl + B_{41} \cdot \int_{4\to 1} dl =$$

$$= -B_{23} \cdot l + B_{41} \cdot l = (B_{41} - B_{23}) \cdot l,$$

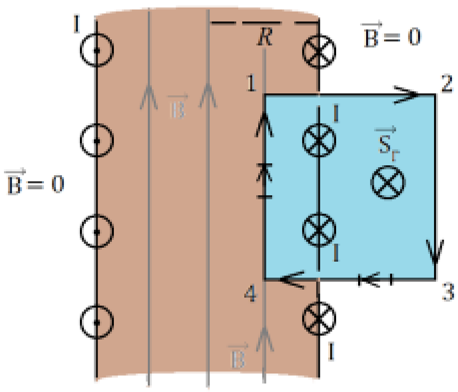
Наши контуры не охватывают ток, текущий по соленоиду, значит в обоих случаях $I_\Gamma = 0$. Тогда если предположить, что наши контуры по ширине достаточно небольшие, чтобы магнитное поле не поменялось, получим, что при любой разнице высот:

$$(B_{41} - B_{23}) \cdot l = \mu_0 \cdot 0 \Rightarrow B_{41} - B_{23} = 0, B_{41} = B_{23} = B$$

Тут правда волшебным образом в конспектах доцента говорится о том, что это позволяет сделать вывод о том, что поле однородно и не зависит от расстояния до центра соленоида (пока мы внутри соленоида). В общем принимаем на веру и идем дальше

Если соленоид конечной длины, то поле не будет однородно в строгом смысле, однако при бесконечной длине снаружи поле будет отсутствовать вовсе. Оно целиком будет сконцентрировано внутри

Чтобы найти непосредственно поле соленоида возьмем следующий вспомогательный контур



Посчитаем циркуляцию по нему:

$$C_\Gamma = \oint_\Gamma \vec{B}\cdot d\vec{l} = \oint_{12341} \vec{B}\cdot d\vec{l} = \int_{1\to2} \underbrace{\vec{B}\cdot d\vec{l}}_{\substack{=0,\\ \vec{B}\perp d\vec{l}}} + \int_{2\to3} \underbrace{\vec{B}}_{=0}\cdot d\vec{l} + \int_{3\to4} \underbrace{\vec{B}\cdot d\vec{l}}_{\substack{=0,\\ \vec{B}\perp d\vec{l}}} + \int_{4\to1} \vec{B}\cdot d\vec{l} =$$

$$= \int_{4\to1} B_{41}\cdot dl = B\cdot \int_{4\to1} dl = B\cdot l.$$

Ток течет по виткам, поэтому надо понять, сколько витков проходит через наш вспомогательный контур:

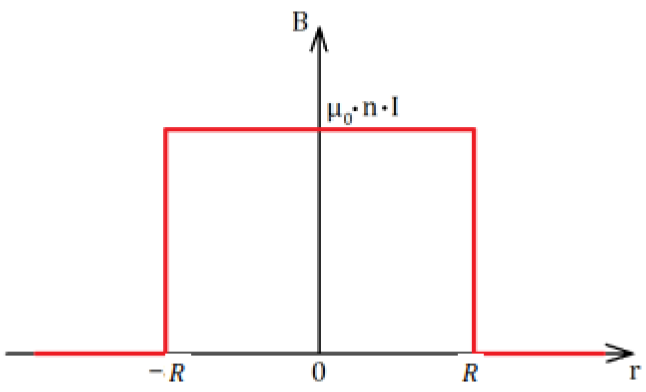
$$N = n\cdot l$$

$$I_\Gamma = N\cdot I = n\cdot l\cdot I$$

Тогда по итогу:

$$B\cdot l = \mu_0\cdot nl\cdot I \Rightarrow B = \mu_0\cdot n\cdot I$$

График поля соленоида



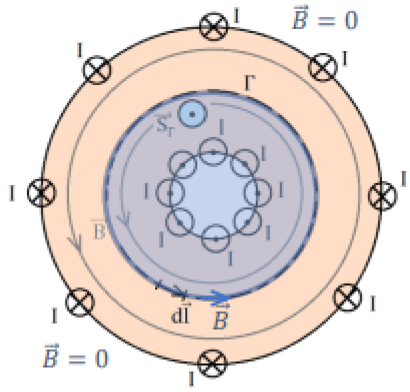
Поле тороида

Применяем все приколы, что применяли к соленоиду:

- Виток заменим замкнутым витком
- Будем считать, что ток течет будто по непрерывной поверхности

Продолжаем вспоминать соленоид - Видимо его поле тоже должно быть заключено в внутри и изогнуто вдоль оси тороида. То бишь силовые линии вектора магнитной индукции магнитного поля тороида – окружности с центром на оси тороида.

В качестве вспомогательных контуров возьмем окружности с центром в центре тороида и варьируем ее радиус. Подберем радиус, чтобы окружность попадала внутрь тороида: $r_i < r < r_e$



Поскольку для окружностей циркуляцию мы уже считали:

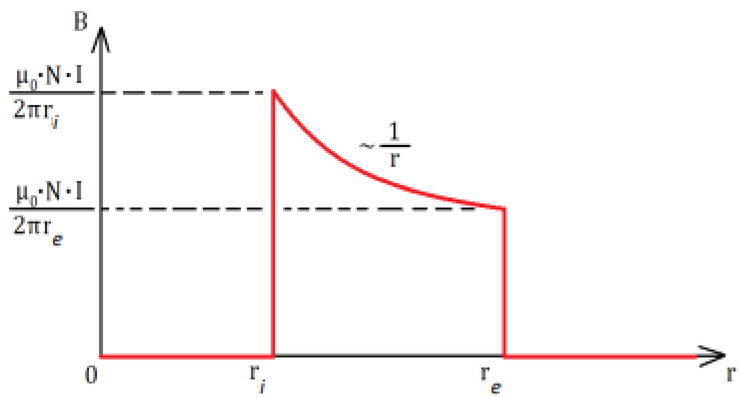
$$C_\Gamma = B \cdot 2\pi r$$

Полный ток найдем точно также через количество витков, которые пересекают нашу окружность. (как видно на рисунке каждый виток окажет влияние только один раз. при возвращении он уже будет дальше радиуса):

$$I_\Gamma = N \cdot I$$

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 \cdot N \cdot I \Rightarrow B = \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I}{2\pi r}$$

График зависимости следующий



снаружи тороида поля нет