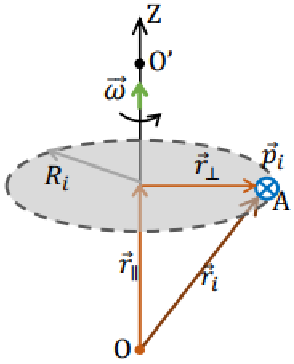
21 - Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси. Момент инерции.

Вращение систем характеризуется моментом импульса $L^{\rightarrow}$.

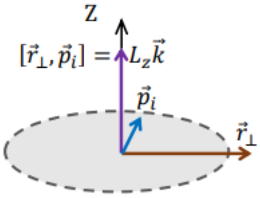


Рассмотрим точку А АТТ. В процессе вращения АТТ вокруг неподвижной оси наша точка движется по окружности радиуса R_i. Пусть ось Z СК совмещена с осью вращения АТТ ОО’, О – начало отсчета. Вектор угловой скорости $\omega^{\rightarrow}$ согласно направлению вращения АТТ направлен вдоль оси вертикально вверх. $\vec{\omega} = \omega_z\vec{k} = \omega\vec{k}$.

$\vec{L}_i = [\vec{r}_i; \vec{p}_i]$ – момент импульса точки А относительно точки отсчёта О.

Представим радиус-вектор точки как сумму двух составляющих $\vec{r}_i = \vec{r}_{\parallel} + \vec{r}_{\perp}$, где $\vec{r}_{\parallel}$ – составляющая радиус-вектора параллельная оси вращения АТТ, $\vec{r}_{\perp}$ – составляющая перпендикулярная ей.

$$\vec{L}_i = [\vec{r}_i, \vec{p}_i] = [\vec{r}_{\perp}, \vec{p}_i] + [\vec{r}_{\parallel}, \vec{p}_i] = \vec{L}_{xy_i} + L_{z_i}\vec{k}.$$



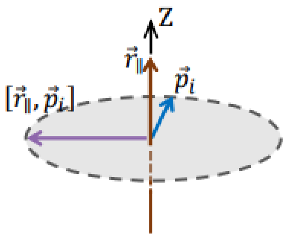
- $[\vec{r}_{\perp}, \vec{p}_i]$: по построению этот вектор параллелен оси вращения АТТ, т.е. это проекция момента импульса на ось вращения (ось OZ) L_z.

$$|L_{z_i}| = |[\vec{r}_{\perp}, \vec{p}_i]|$$

$$|L_{z_i}| = |\vec{r}_{\perp}| \cdot |\vec{p}_i| \cdot \sin\left(\overset{90^\circ}{\widehat{\vec{r}_{\perp}, \vec{p}_i}}\right) =$$

$$= R_i \cdot p_i = R_i \cdot m_i v_i = R_i \cdot m_i \omega_z R_i = m_i {R_i}^2 \omega$$

ω – угловая скорость вращения АТТ. Все точки АТТ вращаются с одной угловой скоростью.



- $[\vec{r}_{\parallel}, \vec{p}_i]$: по построению этот вектор перпендикулярен оси вращения АТТ, т.е. это проекция момента импульса на плоскость OXY

$$\vec{L}_{xy_i} = [\vec{r}_{\parallel}, \vec{p}_i]$$

Для всего АТТ, поскольку момент импульса – аддитивная величина:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_i$$

Соответственно для его проекций справедливы аналогичные выражения:

Мы говорим о вращении АТТ вокруг неподвижной оси только тогда, когда тело закреплено на ней, в противном случае, это произвольное вращение. Поэтому, $L^{\rightarrow}{}_{xy}$ – вместе с телом просто поворачивается вокруг оси и на само вращение АТТ не влияет.

Для описания вращения АТТ вокруг неподвижной оси используют L_z – *момент импульса тела относительно неподвижной оси*:

$$L_z = \sum_{i=1}^{N} L_{z_i} = \sum_{i=1}^{N} m_i {R_i}^2 \omega_z = \omega \cdot \sum_{i=1}^{N} m_i {R_i}^2; \qquad \boxed{L_z = I\omega_z = I\omega.}$$

I – момент инерции твердого тела относительно оси вращения:

$$\boxed{I = \sum_{i=1}^{N} m_i {R_i}^2.}$$

Единица измерения момента инерции – $[I] = \text{кг} \cdot \text{м}^2$.

Момент импульса системы МТ может изменяться только под действием момента всех внешних сил:

$$\frac{d\vec{L}_{\text{сист}}}{dt} = \vec{M}^{\text{внеш}}.$$

Это векторное уравнение эквивалентно трём скалярным уравнениям, получающимся путём проецирования на неподвижные оси ДСК. Для АТТ, вращающегося вокруг неподвижной оси, совмещённой с осью OZ, скалярное уравнение примет следующий вид:

$$\frac{dL_z}{dt} = \frac{d(I\omega_z)}{dt} = I\frac{d\omega_z}{dt} = M_z$$

$$\boxed{I\beta_z = M_z} -$$

уравнение динамики АТТ, вращающегося вокруг неподвижной оси.