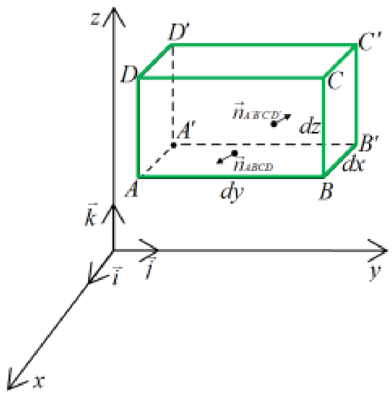
8. Дивергенция в декартовой системе координат

Определение дивергенции в декартовой системе координат:
Рассмотрим декартову систему координат $((x, y, z))$, в которой напряжённость электрического поля $(E = E(x, y, z))$.

В некоторой точке пространства $(A'(x, y, z))$ построим малую замкнутую поверхность (параллелепипед) и вычислим поток вектора (E) через неё.



Вычисление потока через грани параллелепипеда:
Поток через весь параллелепипед равен сумме потоков через его грани:
$d\Phi_{A'B'C'D'} = d\Phi_{ABCD} + d\Phi_{A'B'C'D'} + d\Phi_{AAD'D} + d\Phi_{BB'C'C} + d\Phi_{AA'B'B} + d\Phi_{CC'D'D}$

Рассмотрим поток через грани, перпендикулярные оси (OX):
$d\Phi(x) = d\Phi_{ABCD} + d\Phi_{A'B'C'D'}$

Компоненты векторов:
$E = E_x\vec{i} + E_y\vec{j} + E_z\vec{k}, \quad dS_{ABCD} = dy\,dz\,\vec{i}, \quad dS_{A'B'C'D'} = dy\,dz\,(-\vec{i})$

Поток через грани параллелепипеда:
$d\Phi_{ABCD} = (E_x\vec{i} + E_y\vec{j} + E_z\vec{k}) \cdot (dy\,dz\,\vec{i}) = E_x\,dy\,dz$
$d\Phi_{A'B'C'D'} = (E_x\vec{i} + E_y\vec{j} + E_z\vec{k}) \cdot (dy\,dz\,(-\vec{i})) = -E_x\,dy\,dz$

Разность потоков:
$d\Phi(x) = (E_x(x + dx, y, z) - E_x(x, y, z))\,dy\,dz$
$d\Phi(x) = \frac{E_x(x+dx,y,z) - E_x(x,y,z)}{dx}\,dx\,dy\,dz$

$d\Phi(x) = \frac{\partial E_x}{\partial x}\,dV$
$d\Phi_{нар} = \frac{\partial E_x}{\partial x}\,dV + \frac{\partial E_y}{\partial y}\,dV + \frac{\partial E_z}{\partial z}\,dV = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right)dV$
Получаем, что в декартовой системе координат оператор дивергенции имеет вид:
$\frac{d\Phi}{dV} = \mathrm{div}\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$