Доп. №6

Евстигнеева Анна
гр 5130904/30002

Вариант 12

$x^2+y^2-2xy-2x+2y-7=0$.

1. Квадратичная форма: $Q(x,y) = x^2+y^2-2xy$
2. Построим матрицу квадратичной формы
$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Проверка

$X^TAX = (x\ y)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x\ y)\begin{pmatrix} x-y \\ -x+y \end{pmatrix} =$

$= x^2 - xy - xy + y^2 = x^2-2xy+y^2 = Q(x,y)$

3. Знакоопределенность квадратичной формы
По критерию Сильвестра:

$\left.\begin{array}{l} \delta_1 = 1\ (>0) \\ \delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1-1=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ форма знакопеременна

4. Приведем квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа

$x^2-2xy+y^2$

- Выделим полный квадрат: $(x-y)^2$
- Произведем замену $\begin{cases} x = x'+y' \\ y = x'-y' \end{cases}$

Тогда: $(x-y)^2 = (x'+y'-x'+y')^2 = (2y')^2 = 4(y')^2$

Матрица примененного преобразования:
$P=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Матрица квадратичной формы:
$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Проверка

$P^TAP = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

5. Приведем квадратичную форму к каноническому виду методом ортогональных преобразований.
Найдем собственные числа матрицы квадратичной формы $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$\det(A-\lambda E)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1-\lambda)^2-1=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 1-\lambda=1 \\ 1-\lambda=-1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda=0 \\ \lambda=2 \end{array}\right.$

Получили канонический вид квадратичной формы:

$$Q(x',y') = 0(x')^2 + 2(y')^2 = 2(y')^2$$

Найдем собственные векторы:

$\lambda_1 = 0$

$$\begin{cases} a - b \\ -a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = b \quad \bar{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{e}_1 \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

собственный вектор

орт. вектор

$\lambda_2 = 2$

$$\begin{cases} -a - b = 0 \\ -a - b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = -b \quad \bar{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{e}_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Матрица ортогонального преобразования:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Произведем замену, при которой квадратичная форма примет канонический вид:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} x' + \frac{1}{\sqrt{2}} y' \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} x' - \frac{1}{\sqrt{2}} y' \end{cases}$$

<u>Проверка</u>

$$P^T A P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0; & 0 \\ \sqrt{2}; & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0; & 0 \\ 0, & 2 \end{pmatrix}$$

$$0(x')^2 + 2(y')^2 - 2x + 2y - 7 = 0$$

$$2(y')^2 - 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} x' + \frac{1}{\sqrt{2}} y'\right) + 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} x' - \frac{1}{\sqrt{2}} y'\right) - 7 = 0$$

$$2(y')^2 - \sqrt{2} x' - \sqrt{2} y' + \sqrt{2} x' - \sqrt{2} y' - 7 = 0$$

$$2(y')^2 - 2\sqrt{2} y' - 7 = 0$$

$$((\sqrt{2} y')^2 - 2\sqrt{2} y' + 1) - 8 = 0$$

$$(\sqrt{2} y' - 1)^2 = 8$$

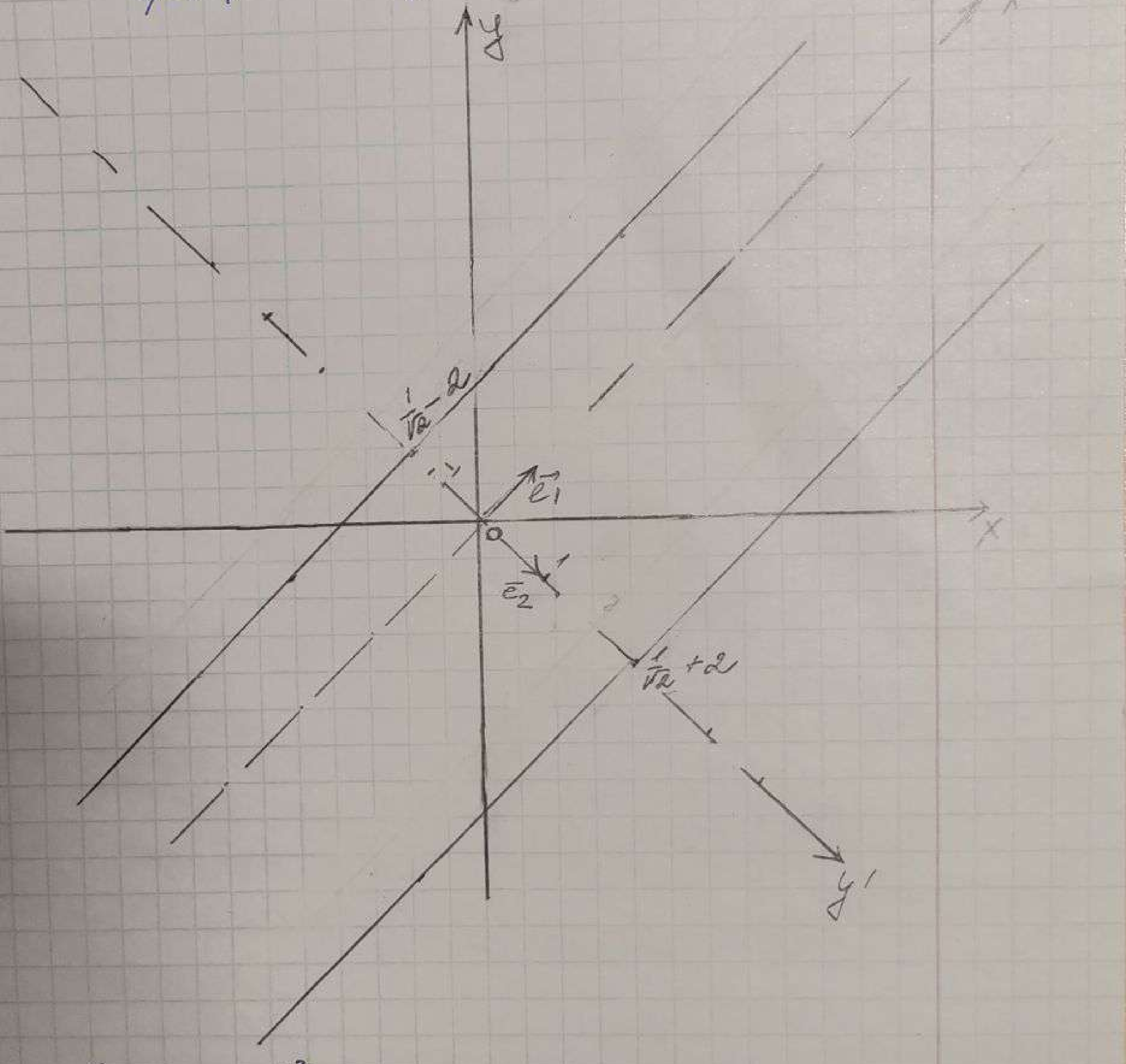
$$\frac{(\sqrt{2} y' - 1)^2}{(2\sqrt{2})^2} = 1$$

В новой системе координат $Ox'y'$ уравнение кривой примет вид:

$$\frac{(\sqrt{2} y' - 1)^2}{(2\sqrt{2})^2} = 1$$ – пара параллельных прямых

6. Построение графика кривой

Севостьянова Анна



$$\frac{(\sqrt{2}y' - 1)^2}{(2\sqrt{2})^2} = 1$$

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{2}y' - 1 = 2\sqrt{2} \\ \sqrt{2}y' - 1 = -2\sqrt{2} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \sqrt{2}y' = 1 + 2\sqrt{2} \\ \sqrt{2}y' = 1 - 2\sqrt{2} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} y' = \frac{1}{\sqrt{2}} + 2 \\ y' = \frac{1}{\sqrt{2}} - 2 \end{array}\right.$$