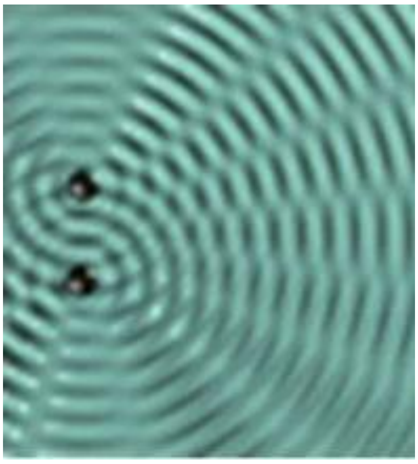
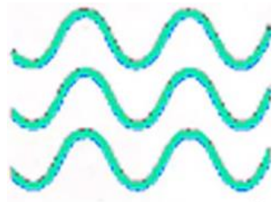
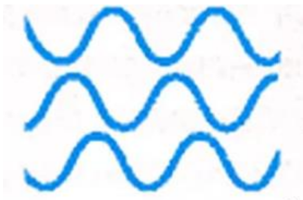
Интерференция.



Когерентные волны — это волны, имеющие одинаковые частоты, постоянную разность фаз, а колебания происходят в одной плоскости. Простым примером когерентных волн могут быть синусоидальные или монохроматические волны.



Интерференция— взаимное увеличение или уменьшение результирующей амплитуды двух или нескольких когерентных волн при их наложении друг на друга.

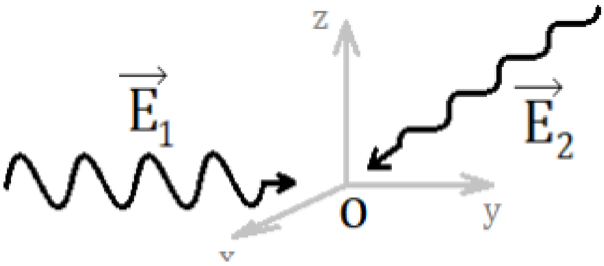


Интерференция света – частный случай общего явления интерференции волн, заключающийся в пространственном перераспределении энергии светового излучения при сложении (суперпозиции) электромагнитных волн. Это явление обычно характеризуется чередующимися в пространстве максимумами и минимумами интенсивности света. Необходимым условием интерференции любых волн является их когерентность.

Интерференционной картиной называют конкретный вид распределения интенсивности света в пространстве или на экране, куда падает свет.

Предположим, что в некоторую точку нашего пространства $(\cdot)O$ приходят две монохроматические световые волны, напряжённости электрического поля в которых:

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_{10}\cos\left(\vec{k}_1\cdot\vec{r} - \omega_1 t + \theta_{10}\right) = \vec{E}_{10}\cos(\theta_1),$$



$$\vec{E}_2 = \vec{E}_{20}\cos\left(\vec{k}_2\cdot\vec{r} - \omega_2 t + \theta_{20}\right) = \vec{E}_{20}\cos(\theta_2).$$

Согласно принципу суперпозиции, в точке O суммарная напряжённость электрического поля составит:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \vec{E}_{10}\cos\theta_1 + \vec{E}_{20}\cos\theta_2.$$

А соответствующее ей значение интенсивности света:

$$I = \langle \Pi \rangle_{\tau_{\text{разр}}} = \varepsilon_0 c \cdot \langle \vec{E}^2 \rangle_{\tau_{\text{разр}}} = \varepsilon_0 c \cdot \langle \left(\vec{E}_1 + \vec{E}_2\right)^2 \rangle_{\tau_{\text{разр}}} =$$

$$= \varepsilon_0 c \cdot \langle {E_1}^2 + {E_2}^2 + 2\cdot\vec{E}_1\cdot\vec{E}_2 \rangle_{\tau_{\text{разр}}} = \varepsilon_0 c \cdot \langle {E_1}^2 \rangle_{\tau_{\text{разр}}} + \varepsilon_0 c \cdot \langle {E_2}^2 \rangle_{\tau_{\text{разр}}} + 2\varepsilon_0 c \cdot \langle \vec{E}_1\cdot\vec{E}_2 \rangle_{\tau_{\text{разр}}} =$$

$$= I_1 + I_2 + I_{12} \neq \mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2.$$

Следовательно, интенсивность света в точке встречи двух когерентных волн оказывается не равна сумме интенсивностей встретившихся волн. Слагаемое I_{12}, учитывающее взаимодействие волн, называется **интерференционным членом**. Именно его значение определяет результат интерференции в точке встречи.

Если вектора $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ перпендикулярны, то $I_{12} = 0$ и интерференция отсутствует. Дальше будем считать, что обе волны совершают колебания вдоль одной прямой $\vec{E}1 \parallel \vec{E}2$ (Это позволит нам отвлечься от векторного характера колебаний). Так же будем считать, что частоты волн одинаковы $\omega 1 = \omega 2 = \omega$, а в точке встречи волн $(\cdot)O$ $r = 0$.

Так же вспомним:

$$I_1 = \varepsilon_0 c \cdot \langle {E_1}^2 \rangle_{\tau_{\text{разр}}} = \frac{\varepsilon_0 c \cdot {E_{10}}^2}{2}$$

– интенсивность света в первой волне.

$$I_2 = \varepsilon_0 c \cdot \langle {E_2}^2 \rangle_{\tau_{\text{разр}}} = \frac{\varepsilon_0 c \cdot {E_{20}}^2}{2}$$

– интенсивность света во второй волне.

Найдём величину интерференционного члена, вычисляя среднее значение за время разрешения произведения $E1 \cdot E2$:

$$I_{12} = 2\varepsilon_0 c \cdot \langle E_1 \cdot E_2 \rangle_{\tau_{\text{разр}}} = 2\varepsilon_0 c \cdot \langle E_{10} \cos\theta_1 \cdot E_{20} \cos\theta_2 \rangle_{\tau_{\text{разр}}} =$$

$$= 2\varepsilon_0 c \cdot E_{10} E_{20} \cdot \langle \cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 \rangle_{\tau_{\text{разр}}}.$$

$$\boxed{\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\{\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)\}}$$

$$\langle \cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 \rangle_{\tau_{\text{разр}}} = \left\langle \frac{\cos(\theta_1 - \theta_2) + \cos(\theta_1 + \theta_2)}{2} \right\rangle_{\tau_{\text{разр}}} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\langle \cos(\theta_1 - \theta_2) \rangle_{\tau_{\text{разр}}} + \langle \cos(\theta_1 + \theta_2) \rangle_{\tau_{\text{разр}}} \right) =$$

Раскроем выражения для фаз встретившихся волн $\theta 1 = \theta 10 - \omega t$ и $\theta 2 = \theta 20 - \omega t$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\langle \cos(\theta_{10} - \omega t - \theta_{20} + \omega t) \rangle_{\tau_{\text{разр}}} + \langle \cos(\theta_{10} - \omega t + \theta_{20} - \omega t) \rangle_{\tau_{\text{разр}}} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\langle \cos(\theta_{10} - \theta_{20}) \rangle_{\tau_{\text{разр}}} + \langle \cos(\theta_{10} + \theta_{20} - 2\omega t) \rangle_{\tau_{\text{разр}}} \right) =$$

Для монохроматических волн начальные фазы колебаний остаются неизменными неограниченное время, значит: $\langle \cos(\theta_{10} - \theta_{20}) \rangle_{\tau_{\text{разр}}} = \cos(\theta_{10} - \theta_{20}).$

$$\langle \cos(\theta_{10} + \theta_{20} - 2\omega t) \rangle_{\tau_{\text{разр}}} = \frac{1}{\tau_{\text{разр}}} \cdot \int_{t}^{t+\tau_{\text{разр}}} \cos(\theta_{10} + \theta_{20} - 2\omega t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{\tau_{\text{разр}}} \cdot \frac{1}{2\omega} \int_{t+\tau_{\text{разр}}}^{t} \cos(\theta_{10} + \theta_{20} - 2\omega t)\, d(\theta_{10} + \theta_{20} - 2\omega t) =$$

$$= \frac{1}{2\omega \cdot \tau_{\text{разр}}} \cdot (\sin\theta_{10} + \theta_{20} - 2\omega t) \Big|_{t + \tau_{\text{разр}}}^{t} < \frac{1}{\omega \cdot \tau_{\text{разр}}} = \frac{1}{2\pi \cdot 3 \cdot 10^{14} \cdot 10^{-10}} \ll 1.$$

$$\cos(\theta_{10} - \theta_{20}) = \cos(\theta_{20} - \omega t - \theta_{10} + \omega t) = \cos(\theta_2 - \theta_1),$$

$$\langle \cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 \rangle_{\tau_{\text{разр}}} = \frac{1}{2}\cos(\theta_2 - \theta_1) = \frac{1}{2}\cos\Delta\theta.$$

Интерференционный член равен:

$$I_{12} = 2\varepsilon_0 c \cdot E_{10}E_{20} \cdot \frac{1}{2}\cos\Delta\theta = 2 \cdot \frac{\sqrt{\varepsilon_0 c} \cdot E_{10}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{\varepsilon_0 c} \cdot E_{20}}{\sqrt{2}} \cdot \cos\Delta\theta = 2 \cdot \sqrt{I_1}\sqrt{I_2} \cdot \cos\Delta\theta,$$

а полная интенсивность в точке встречи двух монохроматических волн составит:

$$I = I_1 + I_2 + I_{12} =$$

$$= I_1 + I_2 + 2 \cdot \sqrt{I_1}\sqrt{I_2} \cdot \cos\Delta\theta.$$

Таким образом, результат интерференции в точке встречи монохроматических волн зависит от разности их фаз.

Если встречающиеся волны синфазны (фазы $\theta 2$ и $\theta 1$ одинаковы или отличаются на чётное число π), то интенсивность света в точке встречи максимальна:

$$I = I_1 + I_2 + 2 \cdot \sqrt{I_1} \cdot \sqrt{I_2} \cdot \cos\Delta\theta, \text{ где } \Delta\theta = 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$$

$$I = I_1 + I_2 + 2 \cdot \sqrt{I_1} \cdot \sqrt{I_2} \cdot 1 = \left(\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2}\right)^2.$$

В случае, когда интенсивности волн совпадают $I1 = I2$, интенсивность света в точке встречи увеличивается в четыре раза: $I = (2\sqrt{I_1})\ 2 = 4I_1$.

Если встречающиеся волны противофазны (фазы $\theta 2$ и $\theta 1$ отличаются на нечётное число π), то интенсивность света в точке встречи минимальна:

$$I = I_1 + I_2 + 2 \cdot \sqrt{I_1} \cdot \sqrt{I_2} \cdot \cos\Delta\theta, \text{ где } \Delta\theta = \pi(2m+1), m \in \mathbb{Z}$$

$$I = I_1 + I_2 + 2 \cdot \sqrt{I_1} \cdot \sqrt{I_2} \cdot (-1) = \left(\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2}\right)^2.$$

Тогда в случае, если интенсивности волн совпадают $I1 = I2$, интенсивность света в точке встречи будет равна нулю: $I = 0$.

Для некогерентных волн разность фаз колебаний хаотически изменяется, поэтому среднее значение за время разрешения:

$$\langle\cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2\rangle_{\tau_{\text{разр}}} = \frac{1}{2}\langle\cos(\theta_2 - \theta_1)\rangle_{\tau_{\text{разр}}} = \frac{1}{2}\langle\cos\Delta\theta\rangle_{\tau_{\text{разр}}} = 0,$$

Интенсивность в точке встречи волн равна сумме интенсивностей: $I = I_1 + I_2$. Перераспределение светового потока не наблюдается и интенсивность везде равна сумме интенсивностей.

Дальше идет принцип построения интерференционной картины в ситуации, когда в некоторой точке встречаются две плоские когерентные волны.

Я хз надо это или не надо это, но у Лукина это есть. Самое главное, что выражается в этом объяснении это ширина интерференционной полосы:

$$\Delta x = \frac{\pi}{k_1 \cdot \sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{\pi}{\frac{2\pi}{\lambda} \cdot \sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{\lambda}{2 \cdot \sin\frac{\alpha}{2}}.$$

И делается вывод, что, изменяя длину встречающихся волн или угол между их волновыми векторами, можно менять ширину интерференционных полос на экране. Например, чем больше длина волн, или чем меньше угол между направлениями их распространения, тем шире интерференционные полосы на экране.

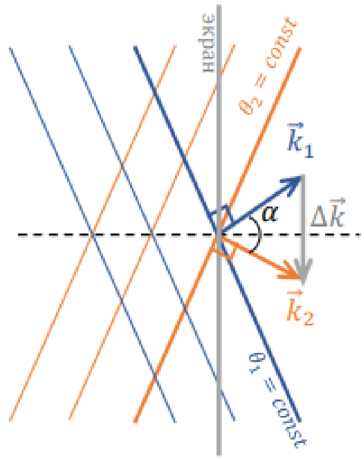
Далее я просто приложу объяснение в параграфе, потому что хз как там можно сократить:

Рассмотрим принципы построения интерференционной картины в ситуации, когда в некоторой точке встречаются две плоские (см. §32) когерентные волны:

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_{10}\cos(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega_1 t + \theta_{10}), \qquad \vec{E}_2 = \vec{E}_{20}\cos(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega_2 t + \theta_{20}).$$

Предположим, что α – угол между направлениями распространения волн: $\alpha = \widehat{\vec{k}_1\vec{k}_2}$. Кроме этого, опять для простоты изложения будем считать, что в точке встречи обе волны совершают колебания вдоль одной прямой $\vec{E}_{10} \parallel \vec{E}_{20}$. Поскольку речь идёт о когерентных волнах, справедливо, что $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ и, исходя из дисперсионного соотношения, $ck_1 = ck_2 \quad \Rightarrow$

$$|\vec{k}_1| = |\vec{k}_2|.$$



Интенсивность света в точке встречи этих волн, как мы выяснили выше, будет определяться выражением:

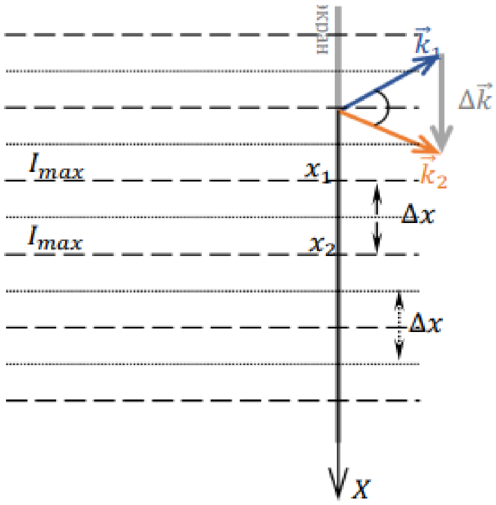
$$I = I_1 + I_2 + 2 \cdot \sqrt{I_1} \cdot \sqrt{I_2} \cdot \cos\Delta\theta$$

и зависеть от разности фаз встретившихся волн:

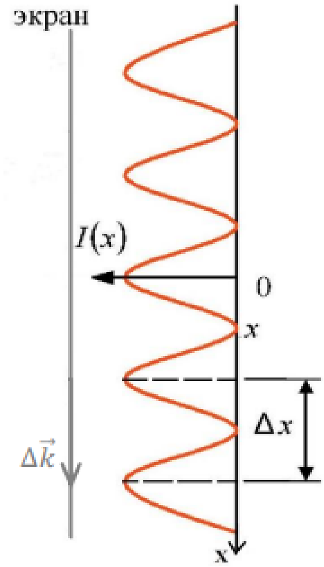
$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 = \vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega t + \theta_{20} - \vec{k}_1 \cdot \vec{r} + \omega t - \theta_{10} = (\vec{k}_2 - \vec{k}_1) \cdot \vec{r} + \theta_{20} - \theta_{10} =$$

$$= \Delta\vec{k} \cdot \vec{r} + \theta_{20} - \theta_{10}.$$

Точки пространства, где разность фаз одинакова, можно объединить в *поверхности равных разностей фаз*: $\Delta\theta = \Delta\vec{k} \cdot \vec{r} + \theta_{20} - \theta_{10} = const$. В геометрическом смысле это будут плоскости перпендикулярные вектору $\Delta\vec{k}$: $\Delta\vec{k} \cdot \vec{r} = \widehat{const}$. Вдоль этих плоскостей



интенсивность света I постоянна. Если на пути распространения наших плоских волн поместить экран параллельный вектору $\Delta\vec{k}$, то плоскости равной интенсивности пересекут его под прямыми углами. Таким образом, на экране сформируется *интерференционная картина* – чередующиеся полосы, соответствующие максимальной и минимальной интенсивности.



Совместим ось OX системы координат с направлением вектора $\Delta\vec{k}$, тогда интенсивность света в каждой точке экрана станет функцией координаты точки, как и выражение для разности фаз

$$\Delta\theta = \Delta\vec{k}\cdot\vec{r}+\theta_{20}-\theta_{10} = |\Delta\vec{k}|\cdot x+\theta_{20}-\theta_{10} = \Delta\theta(x),$$

$$I = I_1 + I_2 + 2\cdot\sqrt{I_1}\cdot\sqrt{I_2}\cdot\cos\Delta\theta = I(x).$$

Если, например, интенсивности встречающихся волн равны ($I_1 = I_2$), а разность фаз составляет $\Delta\theta = 2\pi m,\ m\in\mathbb{Z}$, то интенсивность света на экране в четыре раза превысит исходную: $I = I_1 + I_1 + 2\cdot\sqrt{I_1}\cdot\sqrt{I_1}\cdot\cos(2\pi m) = 4I_1$. В случае, когда разность фаз будет составлять $\Delta\theta = \pi(2m+1), m\in\mathbb{Z}$, интенсивность света на экране станет равна нулю.

Рассмотрим две <u>ближайшие</u> поверхности равных разностей фаз, в которых, например, интенсивность максимальна I_{max}: $(\Delta\theta)_1 = |\Delta\vec{k}|\cdot x_1+\theta_{20}-\theta_{10}$ и $(\Delta\theta)_2 = |\Delta\vec{k}|\cdot x_2+\theta_{20}-\theta_{10}$. Согласно условию максимума функции косинуса, значения этих разностей фаз должны отличаться на 2π: $(\Delta\theta)_2 = (\Delta\theta)_1 + 2\pi$ или $|\Delta\vec{k}|\cdot(x_2-x_1) = |\Delta\vec{k}|\cdot\Delta x = 2\pi$. Аналогичное соотношение будет справедливо и для двух ближайших поверхностей равных фаз, соответствующих I_{min}: $|\Delta\vec{k}|\cdot\Delta x = 2\pi$. Между двумя соседними плоскостями с минимальной интенсивностью всегда будет находиться плоскость, интенсивность света на которой максимальна и наоборот. Таким образом,

$$\Delta x = \frac{2\pi}{|\Delta\vec{k}|}$$

– ширина интерференционной полосы.

Из равнобедренного треугольника со сторонами $k_1 = k_2$ (см. рис.) можно определить длину вектора $\Delta\vec{k}$

$$|\Delta\vec{k}| = 2k_1\cdot\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Окончательно ширина интерференционной полосы равна:

$$\Delta x = \frac{\pi}{k_1 \cdot \sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{\pi}{\frac{2\pi}{\lambda} \cdot \sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{\lambda}{2 \cdot \sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Если наши плоские волны распространяются под малым углом α друг к другу, то ширина интерференционной полосы определяется выражением:

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2 \cdot \sin\frac{\alpha}{2}} \xrightarrow[\alpha \to 0]{} \frac{\lambda}{2 \cdot \frac{\alpha}{2}} = \frac{\lambda}{\alpha}.$$

Согласно этому выражению, изменяя длину встречающихся волн или угол между их волновыми векторами, можно менять ширину интерференционных полос на экране. Например, чем больше длина волн, или чем меньше угол между направлениями их распространения, тем шире интерференционные полосы на экране, расположенном вдоль вектора $\Delta\vec{k}$.