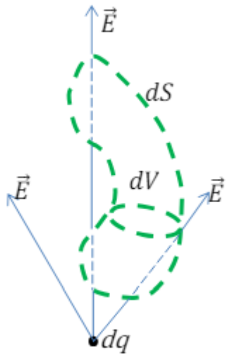
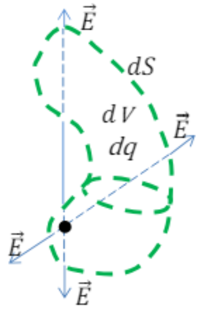
7. Теорема Гаусса в локальной форме. Дивергенция. Формула Гаусса - Остроградского

Вернёмся к электростатике: если внутри замкнутой поверхности нет источников поля – положительных зарядов или стоков поля – отрицательных зарядов, а они есть снаружи, то силовые линии пересекают замкнутую поверхность четное число раз, и $d\Phi_{dS} = 0$ (см. §2).



Если же внутри есть заряд dq, то по теореме Гаусса

$$d\Phi_{dS} = \frac{dq}{\varepsilon_0}.$$



Заряд, распределённый по объёму dV, ограниченному поверхностью dS, можно выразить через объёмную плотность заряда $dq = \rho dV$,

$$d\Phi = \frac{\rho dV}{\varepsilon_0} \quad \Longrightarrow \quad \frac{d\Phi}{dV} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}} -$$

дифференциальная (локальная) форма теоремы Гаусса.

Дивергенция -

отношение потока через поверхность к объёму, ограниченному этой поверхностью. Все размеры поверхности должны стремиться к нулю, чтобы дивергенция была локальной операцией; это линейный дифференциальный оператор на векторном поле, характеризующий поток данного поля через поверхность достаточно малой окрестности точки области определения поля; является скалярной функцией координат точки поля.

Линейный дифференциальный оператор:

для любых векторных полей $\vec{E}$ и $\vec{B}$ и для всех вещественных чисел α и β

$$\operatorname{div}(\alpha\vec{E} + \beta\vec{B}) = \alpha \operatorname{div}\vec{E} + \beta \operatorname{div}\vec{B}$$

$$\boxed{\frac{d\Phi}{dV} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{V_S \to 0} \frac{\oint_S \vec{E}\,d\vec{S}}{V_S} = \operatorname{div}\vec{E}} -$$

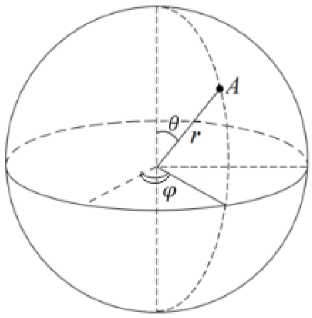
дивергенция векторного поля $\vec{E}$.

- div $\vec{E}$ > 0, в точке пространства есть + заряд (источник поля)
- div $\vec{E}$ < 0, в точке пространства есть - заряд (сток поля)
- div $\vec{E}$ = 0, в точке пространства зарядов нет, либо они компенсируют друг друга

Дивергенция в декартовой системе координат

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}.}$$

Дивергенция в сферической системе координат



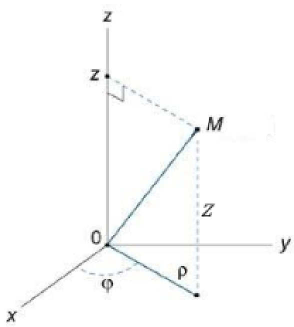
(без вывода)

$$\vec{E} = \vec{E}(r, \varphi, \theta)$$

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 E_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta\, E_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial E_\varphi}{\partial\varphi}.$$

Если $\vec{E} = \vec{E}(r)$ – сферически симметричное электрическое поле, то

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{E} = \frac{1}{r^2}\frac{d(r^2 E_r)}{dr}.}$$



Дивергенция в цилиндрической системе координат

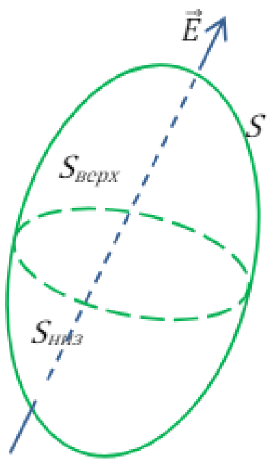
(без вывода)

$$\vec{E} = \vec{E}(\rho, \varphi, z)$$

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho E_\rho)}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial E_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

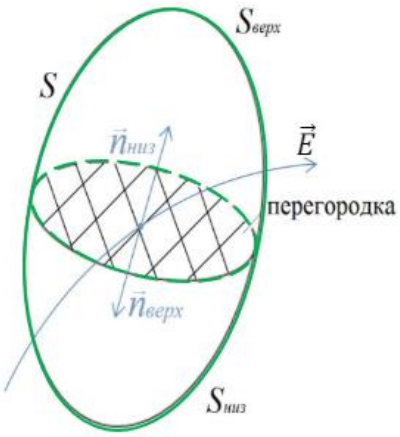
Формула Гаусса - Остроградского $\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}$

$$\Phi_S = \Phi_{S_{\text{верх}}} + \Phi_{S_{\text{низ}}}.$$



$$\Phi_{S_{\text{верх}}}^{\text{замкн}} = \Phi_{S_{\text{верх}}} + \Phi_{\text{перегор.верх}}$$

$$\Phi_{S_{\text{низ}}}^{\text{замкн}} = \Phi_{S_{\text{низ}}} + \Phi_{\text{перегор.низ}}$$



Тогда

$$\Phi_{S_{\text{верх}}}^{\text{замкн}} + \Phi_{S_{\text{низ}}}^{\text{замкн}} = \Phi_{S_{\text{верх}}} + \Phi_{S_{\text{низ}}} + \Phi_{\text{перегор.верх}} + \Phi_{\text{перегор.низ}}$$

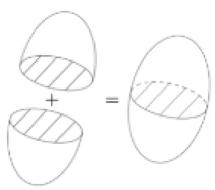
$$\Phi_{\text{перегор.верх}} = \int\limits_{S_{\text{перегор}}} \vec{E} \cdot d\vec{S}_{\text{верх}} = \int\limits_{S_{\text{перегор}}} \vec{E} \cdot \vec{n}_{\text{верх}} dS$$

$$\Phi_{\text{перегор.низ}} = \int\limits_{S_{\text{перегор}}} \vec{E} \cdot d\vec{S}_{\text{низ}} = \int\limits_{S_{\text{перегор}}} \vec{E} \cdot \vec{n}_{\text{низ}} dS$$

Вектор $\vec{n}$ верх смотрит наружу замкнутой поверхности, относительно которой считается поток. Аналогично к $\vec{n}$ низ.

$$\Phi_{\text{перегор.верх}} + \Phi_{\text{перегор.низ}} = \int\limits_{S_{\text{перегор}}} \vec{E} \cdot \vec{n}_{\text{верх}} dS + \int\limits_{S_{\text{перегор}}} \vec{E} \cdot \vec{n}_{\text{низ}} dS =$$

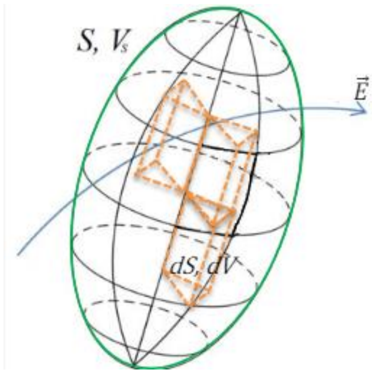
$$= \int\limits_{S_{\text{перегор}}} \vec{E} \cdot \vec{n}_{\text{верх}} dS - \int\limits_{S_{\text{перегор}}} \vec{E} \cdot \vec{n}_{\text{верх}} dS = 0; \quad \text{т. к. } \vec{n}_{\text{низ}} = -\vec{n}_{\text{верх}}.$$



Следовательно, $\Phi_{S_{\text{верх}}}^{\text{замкн}} + \Phi_{S_{\text{низ}}}^{\text{замкн}} = \Phi_{S_{\text{верх}}} + \Phi_{S_{\text{низ}}} = \Phi_S$ – т.е. каково бы ни было внутреннее устройство замкнутой поверхности (сколько бы перегородок не разбивали её на составляющие), поток определяется только ее внешней поверхностью.

=> потоки через все внутренние перегородки взаимно уничтожаются =>

Пусть S – замкнутая поверхность, расположенная в электрическом поле, $V(S)$ – объем, ограниченный ею. Разобьём этот объём множеством перегородок на малые объёмы dV. dΦ – потоки через поверхности, их ограничивающие.



$$\Phi_S = \sum_i^N \Phi_i = \int_{V_S} d\Phi.$$

$$\frac{d\Phi}{dV} = \operatorname{div} \vec{E} \quad \Longrightarrow \quad d\Phi = \operatorname{div} \vec{E} \cdot dV.$$

$$\Phi_S = \int_{V_S} \operatorname{div} \vec{E}\, dV.$$

$$\Phi_S = \oint_S \vec{E} d\vec{S}.$$

$\boxed{\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \int_{V_S} \operatorname{div} \vec{E}\, dV}$ – формула справедлива для любого векторного поля, можно переходить от интеграла по замкнутой поверхности, к интегралу, вычисляемому по объему, заключённому внутри этой поверхности