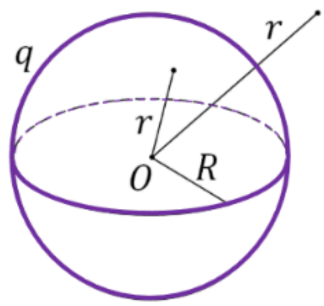
5. Применение теоремы Гаусса (сферическая симметрия).

❖ **Поле равномерно заряженной сферы**

Дано:
R – радиус заряженной сферы;
q – заряд сферы

Найти:
$E(r),\quad 0 \le r < R$ (внутри)
$E(r),\quad r > R$ (снаружи)



1. Берем вспомогательную поверхность - сферу радиусом r с центром в точке O.
Считаем поток через поверхность сферы:

$$\Phi_S = \oint\limits_{\text{сфера}} \vec{E}\, d\vec{S} = \oint\limits_{\text{сфера}} E(r) \cdot \frac{\vec{r}}{r} \cdot d\vec{S} =$$

$$= \oint\limits_{\text{сфера}} E(r) \cdot \frac{r \cdot dS \cdot \cos 0}{r} = \oint\limits_{\text{сфера}} E \cdot dS = E \oint\limits_{\text{сфера}} dS = E \cdot S_{\text{сф}} = E \cdot 4\pi r^2.$$

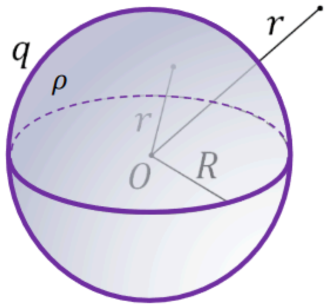
2. Считаем заряд, попавший внутрь нашей вспомогательной сферы.
а) r < R - никакая часть заряда не попадает внутрь всп. сферы. Следовательно, q(внутр) = 0
б) r >= R - внутри всп. сферы оказывается весь заряд заряженной сферы радиусом R.
q(внутр) = q
3. Приравниваем левую и правую части теоремы Гаусса.

$a)\ \ 0 \le r < R$: $\qquad E \cdot 4\pi r^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad E = 0.$

$b)\ \ r > R$:

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} \quad \Longrightarrow \quad E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

❖ Поле равномерно заряженного шара



Дано:
R – радиус заряженного шара;
q – заряд шара или $\rho = const$ – плотность заряда

Найти:
$E(r)$, $\quad 0 \le r < R$ (внутри)
$E(r)$, $\quad r \ge R$ $\qquad$ (снаружи)

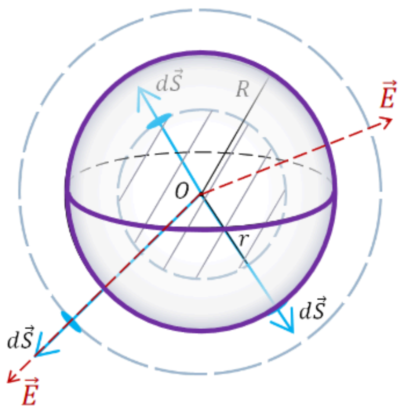
Шаг 1: S – сфера радиуса r; $\quad a)\ 0 \le r < R$, $\quad b)\ r \ge R$.

Шаг 2: для $\quad a)\ 0 \le r < R\ $ и для $\quad b)\ r \ge R$:

$$\Phi_S = \oint\limits_{\text{сфера}} \vec{E}\, d\vec{S} = \cdots = E \cdot 4\pi r^2.$$

Шаг 3: считаем заряд, попавший внутрь вспомогательной сферы $q^{\text{внутр}}$.

$a)$ сначала рассмотрим ситуацию, когда вспомогательная поверхность находится внутри



заряженного шара $0 \le r < R$, заряд, попавший внутрь, можно представить как произведение плотности на объём пространства внутри вспомогательной сферы V_s (т.к. по условию $\rho = const$)

$$q^{\text{внутр}} = \rho \cdot V_s = \rho \frac{4}{3}\pi r^3.$$

$b)$ заряженный шар находится внутри вспомогательной сферы $r \ge R$:

в этом случае весь заряд шара будет находиться внутри вспомогательной сферы

$$q^{\text{внутр}} = q = \rho \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Шаг 4: приравниваем левые и правые части

$a)\ 0 \le r < R$

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi r^3}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r;$$

$b)\ r \ge R$

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi R^3}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \frac{R^3}{r^2};$$