

20. Вращение твердого тела. Тензор инерции

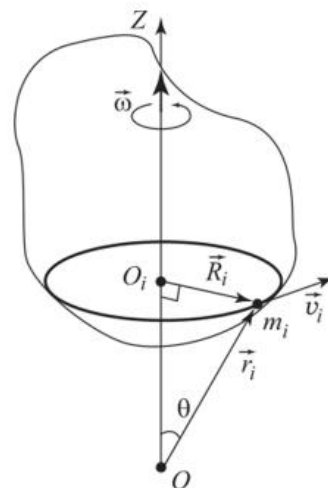
//на всякий случай: нам Лукин на лекции, когда выводил это все, писал через интеграл по dm по всему телу. Например, так было у Лукина: $\int [\vec{r} dm \vec{v}]$. Но в инете такую запись почему-то не используют, поэтому здесь будет так $= \sum_i [\vec{r}_i, m_i \vec{v}_i]$

Рассмотрим случай вращения твердого тела вокруг некоторой произвольной оси OO_i . Момент импульса L :

$$\vec{L} = \sum_i [\vec{r}_i, \vec{p}_i] = \sum_i [\vec{r}_i, m_i \vec{v}_i] = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i$$

$$\text{Т. к. } \vec{v} = [\vec{\omega} \vec{r}],$$

$$\vec{L} = \sum_i m_i [\vec{r}_i, [\vec{\omega}, \vec{r}_i]] = \sum_i m_i (\vec{\omega} r_i^2 - \vec{r}_i (\vec{r}_i \cdot \vec{\omega})).$$



Отсюда проекция момента импульса на ось X:

$$L_x = \omega_x \sum_i m_i (r_i^2 - x_i^2) - \omega_y \sum_i m_i x_i y_i - \omega_z \sum_i m_i x_i z_i = \omega_x I_{xx} - \omega_y I_{xy} - \omega_z I_{xz}.$$

Аналогично вычисляются две другие проекции вектора L :

$$L_y = \omega_x I_{yx} - \omega_y I_{yy} - \omega_z I_{yz}, \quad L_z = \omega_x I_{zx} - \omega_y I_{zy} - \omega_z I_{zz}.$$

Введенные здесь девять коэффициентов образуют квадратную матрицу, которая называется тензором инерции

$$I_{mn} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}.$$

Диагональные компоненты тензора инерции — это моменты инерции тела относительно осей X , Y и Z . Недиагональные компоненты тензора называются центробежными моментами инерции тела. В случае, когда масса твердого тела непрерывно распределена по его объему, центробежные моменты инерции будут определяться так:

$$I_{xy} = \int_m xy \, dm, \quad I_{xz} = \int_m xz \, dm, \quad I_{yz} = \int_m yz \, dm.$$

Можно выбрать такой базис, в котором центробежные моменты инерции равны нулю. Тогда тензор будет таким:

$$I_{mn} = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, тензор инерции любого тела зависит от точки, относительно которой он рассчитан. Когда ось вращения твердого тела закреплена и совпадает с одной из осей координат, например с осью Z , то вектор угловой скорости направлен по оси Z ($\omega_x = \omega_y = 0$, $\omega_z = \omega$) и $L_z = I_{zz}\omega = I\omega$. Однако если ось вращения твердого тела не закреплена, то ее нельзя считать все время направленной вдоль фиксированной оси Z и необходимо вычислять все компоненты тензора инерции.