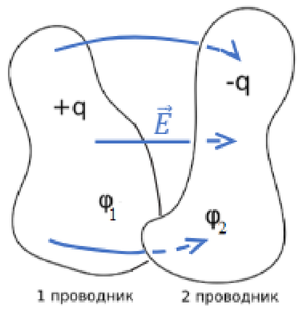
17. Электрическая емкость систем проводников. Конденсаторы

Поле неуединённого проводника вызывает перераспределение зарядов на окружающих телах – появление индуцированных зарядов

В случае систем, состоящих из двух проводников, вводится понятие взаимной емкости. Перенесем заряд q с одного проводника на другой. При этом второй проводник приобретет заряд q, а первый – заряд $-q$. Суммарный же заряд системы остается равным 0. При этом разность потенциалов между проводниками $\varphi_2 - \varphi_1 = U$, называемая *напряжением*, будет пропорциональна заряду q: $U \sim q$. Величину

$$\boxed{C = \frac{q}{U}}$$

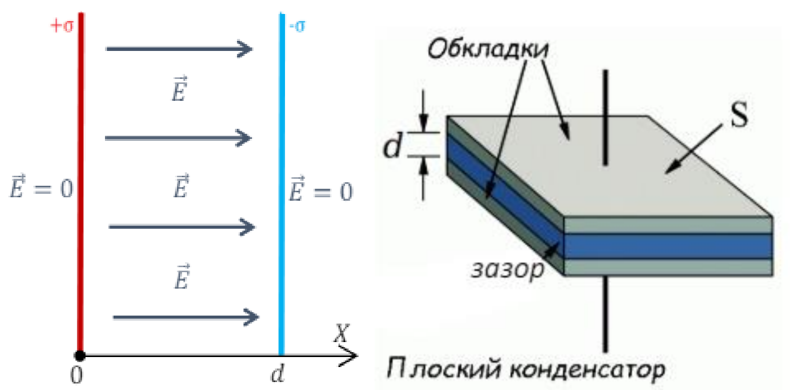
называют взаимной электроёмкостью двух проводников. Взаимная емкость проводников зависит от их формы, размеров, взаимного расположения и наличия диэлектриков.



Конденсаторы - системы проводников, на электрическое поле которых внешние тела практически не оказывают никакого влияния

Обкладки конденсатора имеют заряды противоположного знака ($+q$ и $-q$). Напряжение между обкладками конденсатора: $U = \varphi+ - \varphi-$.

Ёмкость плоского конденсатора



$$E = \begin{cases} \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{q}{S}, \text{между пластинами} \\ 0, \qquad \text{вне пластин} \end{cases}.$$

$$U = \varphi(\vec{r}_1) - \varphi(\vec{r}_2) = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_0^d E \cdot dx = E \cdot \int_0^d dx = E \cdot d.$$

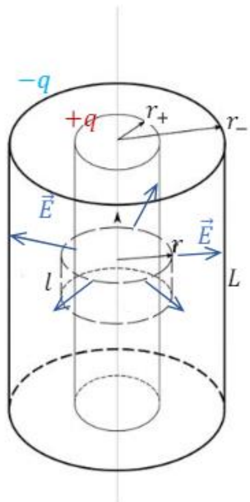
В случае однородных электростатических полей: $\boxed{U = E \cdot d.}$

$$U = E \cdot d = \frac{q}{\varepsilon_0 S} \cdot d, \qquad C = \frac{q}{U} = \frac{q \cdot \varepsilon_0 S}{q \cdot d} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}.}$$

Если расстояние d очень мало - можно пренебречь краевыми эффектами (нарушением однородности поля вблизи краёв обкладок конденсатора)

Ёмкость цилиндрического конденсатора

состоит из цилиндрических обкладок с единой осью симметрии длиной L и радиусами: $r+$ – у меньшей, $r-$ – у большей, ширина зазора $d = r- - r+ \ll r+, r-, L$.



1. в качестве вспомогательной поверхности S возьмём цилиндр с радиусом r и высотой l, такими, что $r+ < r < r-$ и $l \ll L$.
2. поток ΦS через наш вспомогательный цилиндр равен:

$$\Phi_S = \oint_{\text{цилиндр}} \vec{E} d\vec{S} = \int_{T_1} \vec{E} d\vec{S} + \int_{T_2} \vec{E} d\vec{S} + \int_{\substack{\text{боковая} \\ \text{поверхность}}} \vec{E} d\vec{S} = \cdots =$$

$$= \int_{\substack{\text{боковая} \\ \text{поверхность}}} E \cdot dS_{\text{бок}} = E \int_{\substack{\text{боковая} \\ \text{поверхность}}} dS_{\text{бок}} = E \cdot S_{\text{бок}} = E \cdot 2\pi r l.$$

3. заряд внутри цилиндра:

$$q^{\text{внутр}} = +\sigma \cdot S = +\sigma \cdot 2\pi r_+ l = \frac{q}{2\pi r_+ L} \cdot 2\pi r_+ l = q \cdot \frac{l}{L}$$

$$E \cdot 2\pi r l = \frac{q}{\varepsilon_0} \cdot \frac{l}{L} \quad \Longrightarrow \quad E = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{rL}.$$

$$U = \varphi(r_+) - \varphi(r_-) = \int_{r_+}^{r_-} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{r_+}^{r_-} E \cdot dr = \int_{r_+}^{r_-} \frac{q}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{rL} \cdot dr = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 L} \int_{r_+}^{r_-} \frac{dr}{r} =$$

$$= \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 L} (\ln r_- - \ln r_+) = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 L} \ln \frac{r_-}{r_+}.$$

Электроёмкость цилиндрического конденсатора равна

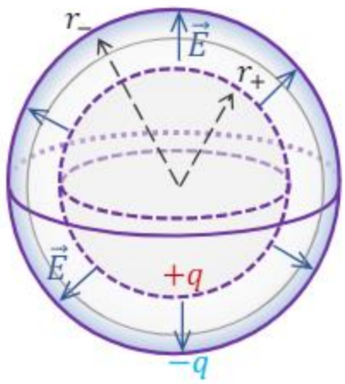
$$C = \frac{q}{U} = \frac{q \cdot 2\pi\varepsilon_0 L}{q \cdot \ln \frac{r_-}{r_+}} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{C = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln \frac{r_-}{r_+}}.}$$

4.

5. Если d мал => $\boxed{C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}.}$

Ёмкость сферического конденсатора

Сферический конденсатор представляет собой две проводящие концентрические сферы радиусами $r+$ и $r-$, зазор между которыми равен $d = r- - r+$, $d \ll r-, r+$.



1. вспомогательная замкнутая поверхность S – сфера, её радиус r: $r+ < r < r-$,

$$\Phi_S = \oint_{\text{сфера}} \vec{E}\, d\vec{S} = \dots = E \cdot S_{\text{сф}} = E \cdot 4\pi r^2.$$

2.
3. q внутр = $+q$, внутрь вспомогательной сферы попал весь заряд внутренней обкладки конденсатора

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} \quad \Longrightarrow \quad E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

$$U = \varphi(r_+) - \varphi(r_-) = \int_{r_+}^{r_-} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{r_+}^{r_-} E \cdot dr = \int_{r_+}^{r_-} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int_{r_+}^{r_-} \frac{dr}{r^2} =$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot (-1) \left(\frac{1}{r_-} - \frac{1}{r_+} \right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{r_- - r_+}{r_+ \cdot r_-}.$$

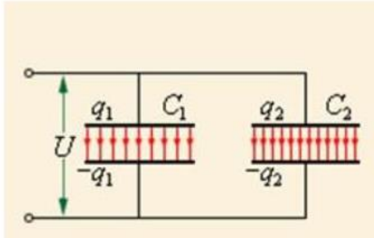
$$\boxed{C = \frac{q}{U} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{r_+ \cdot r_-}{r_- - r_+}.}$$

4.

параллельное соединение двух конденсаторов

Напряжение между обкладками обоих конденсаторов одинаковы, а заряды обкладок складываются: $q = q1 + q2$

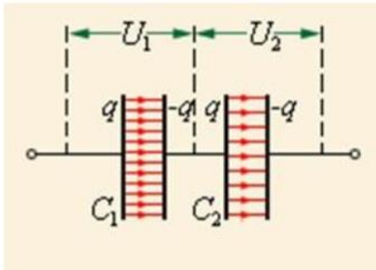
$$\frac{q}{U}=\frac{q_1+q_2}{U}=\frac{q_1}{U}+\frac{q_2}{U}.\ \boxed{C=C_1+C_2.}$$



последовательное соединение двух конденсаторов

Заряды равны и противоположны по знаку.
Таким образом заряды обоих конденсаторов одинаковы. Напряжения при последовательном соединении складываются:

$$U=U_1+U_2.$$



А поскольку $U=\frac{q}{C}$, получаем:

$$\frac{q}{C}=\frac{q}{C_1}+\frac{q}{C_2}\quad\Rightarrow\quad\boxed{\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}.}$$