Система уравнений Максвелла

Открытие Максвеллом тока смещения завершило создание макроскопической теории электромагнитного поля. Оно как раз и позволило Максвеллу сформулировать ту самую *единую теорию электрических и магнитных явлений* ⏩

Краеугольным камнем теории электромагнитного поля является система уравнений Максвелла, состоящая из четырех фундаментальных уравнений.

В интегральной форме *система фундаментальных уравнений электродинамики в неподвижных средах* содержит следующие уравнения:

$$\boxed{\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_{S_{\Gamma}} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}} \quad (1)$$

– циркуляция вектора $\vec{E}$ по любому замкнутому контуру Г равна производной по времени от магнитного потока через любую поверхность S_{Γ}, ограниченную данным контуром, взятой со знаком минус. При этом под электрическим полем $\vec{E}$ понимается не только вихревое электрическое поле, но и электростатическое (циркуляция последнего равна нулю (см. §7)).

$$\boxed{\oint_{S} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_{V_S} \rho \cdot dV} \quad (2)$$

– поток вектора $\vec{D}$ сквозь любую замкнутую поверхность S равен алгебраической сумме сторонних зарядов, оказавшихся внутри ограниченного этой поверхностью объёма V_S.

$$\boxed{\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_{S_{\Gamma}} \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) \cdot d\vec{S}} \quad (3)$$

– циркуляция вектора $\vec{H}$ по любому замкнутому контуру Г равна полному току (сумме токов проводимости и тока смещения) через произвольную поверхность S_{Γ}, ограниченную данным контуром.

$$\boxed{\oint_{S} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0} \quad (4)$$

– поток вектора $\vec{B}$ сквозь произвольную замкнутую поверхность S всегда равен нулю.

Из первого и третьего уравнений Максвелла следует то, что электрическое и магнитное поля нельзя рассматривать как независимые:

изменении во времени одного из этих полей приводит к возникновению другого, поэтому имеет смысл лишь совокупность этих полей, описывающая *единое электромагнитное поле* 😇

В частном случае, когда ни электрическое, ни магнитное поля не зависят от времени – стационарны: $\vec{E} = const, \vec{B} = const$, уравнения Максвелла распадаются на две группы *независимых* уравнений:

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \qquad\qquad \oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I$$

$$\text{и}$$

$$\oint_{S} \vec{D} \cdot d\vec{S} = q \qquad\qquad \oint_{S} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

В таком случае электрическое и магнитное поля независимы друг от друга. Их действительно можно изучать раздельно, как мы и делали в течение всего семестра.

В дифференциальной (локальной) форме уравнения Максвелла $(1)-(4)$ выглядят следующим образом:

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \vec{D} &= \rho, \\ \operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0. \end{aligned}} \qquad \begin{aligned} &(1\text{д}) \\ &(2\text{д}) \\ &(3\text{д}) \\ &(4\text{д}) \end{aligned}$$

Уравнения (1д) и (2д) свидетельствуют о том, что электрическое поле $\vec{E}$ может возникнуть по двум причинам. Во-первых, его *источниками являются электрические заряды, как сторонние, так и связанные:* $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$;

$$\operatorname{div} \vec{D} = \varepsilon_0 \operatorname{div} \vec{E} + \operatorname{div} \vec{P}; \qquad \operatorname{div} \vec{P} = -\rho' \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{div} \vec{E} \sim \rho + \rho'.$$

Во-вторых, вихревое электрическое поле возникает всегда, когда имеющееся *магнитное поле меняется во времени* (явление электромагнитной индукции).

Уравнение (3д) свидетельствует о том, что магнитное поле $\vec{B}$ *может возбуждаться либо движущимися электрическими зарядами* (*электрическими токами*), *либо переменными электрическими полями*, или обоими вариантами одновременно: $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J}$;

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \vec{B} - \operatorname{rot} \vec{J}; \quad \operatorname{rot} \vec{J} = \vec{j}_m \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{rot} \vec{B} \sim \left(\vec{j} + \vec{j}_m + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \right) + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Уравнение (4д) постулирует факт отсутствия в природе источников магнитного поля, подобных электрическим зарядам (магнитных зарядов). Благодаря этому, можно утверждать, что уравнения $(1)-(4)$ или $(1\text{д})-(4\text{д})$ не симметричны относительно электрического и магнитного полей.

Уравнения Максвелла $(1\text{д})-(4\text{д})$ совместно с формулой для силы Лоренца

$$\vec{F}_{\text{л}} = q\vec{E} + q\left[\vec{v}, \vec{B}\right], \qquad \text{т.к.}\ \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{\text{л}}$$

составляют фундаментальную систему уравнений, которой достаточно для описания любых электромагнитных явлений, в которых не проявляются квантовые эффекты. Интегрируя эти уравнения, можно найти сами поля $\vec{E}$ и $\vec{B}$.

Свойства системы уравнений Максвелла.

- ✓ уравнения Максвелла – *линейны* и содержат только первые производные векторов $\vec{B}$ и $\vec{E}$ по времени и пространственным координатам и первые степени плотности электрических зарядов ρ и плотности электрических токов $\vec{j}$. Свойство линейности уравнений Максвелла также связано с принципом суперпозиции: если два каких-нибудь поля удовлетворяют системе уравнений Максвелла, то их сумма тоже ей удовлетворяет.

- ✓ в общем случае уравнения Максвелла не симметричны относительно электрического и магнитного полей, так как магнитных зарядов, в отличие от электрических, в природе не существует. Однако в частном случае, в нейтральной однородной непроводящей среде, в которой $\rho = 0$ и $\vec{j}$=0, уравнения всё же приобретают почти симметричный вид:

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \qquad \operatorname{div}\vec{D} = 0,$$
$$\operatorname{rot}\vec{H} = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}, \qquad \operatorname{div}\vec{B} = 0.$$

- ✓ в число фундаментальных уравнений Максвелла не включено уравнение непрерывности, выражающее закон сохранения электрического заряда,

$$\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = -\frac{dq}{dt} \quad \text{или} \quad \operatorname{div} \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

т.к. это уравнение является следствием уравнений (2), (3) или (2д) и (3д). Сосчитаем дивергенцию правой и левой частей уравнения (3д):

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{H}) = \operatorname{div}\left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right).$$

Как мы вспомнили в предыдущем параграфе $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{H}) = 0$, значит будет обращаться в ноль и правая часть уравнения:

$$\operatorname{div}\left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{div} \vec{j} + \operatorname{div} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0.$$

Меняя местами производную по времени и производную по пространству (дивергенцию), получаем

$$\operatorname{div} \vec{j} = -\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{div} \vec{D}).$$

Окончательно, учитывая уравнение (2д):

$$\operatorname{div} \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

− дифференциальная форма закона сохранения заряда.

Из уравнений Максвелла следует важный вывод о существовании принципиально нового физического явления: электромагнитное поле способно существовать самостоятельно − без электрических зарядов и токов. При этом изменение его состояния обязательно имеет волновой характер. Поля такого рода называют *электромагнитными волнами.*