16 – Закон сохранения энергии (для системы МТ)

Пусть силы, действующие на нашу систему извне, – только консервативные, иначе говоря, система находится в стационарном поле внешних консервативных сил.

Внутренние же силы системы, силы с которыми точки взаимодействуют друг с другом, консервативные центральные силы.

Сначала рассмотрим взаимодействие между парой точек системы (i и j,

к примеру): $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$ (по III з. Ньютона).

Работа, совершаемая силами взаимодействия между точками этой пары, при их перемещении на dr_i и dr_j соответственно, равна сумме работ:

$$\delta A = \delta A_i + \delta A_j = \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_i + \vec{F}_{ji} \cdot d\vec{r}_j = \vec{F}_{ij} \cdot \left(d\vec{r}_i - d\vec{r}_j\right) = \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_{ij} = \delta A_{ij}^{\text{конс}} = -dE_{\text{пот}_{ij}}^{\text{взаим}},$$

где $d\vec{r}_{ij}$ – относительное перемещение точек.

Т.к. $\vec{F}_{ij}$ – консервативные силы, $-dE_{\text{пот}_{ij}}^{\text{взаим}}$ то – убыль потенциальной энергии взаимодействия рассматриваемой пары точек. В следствии свойства парности сил $E_{\text{пот}ij}$ будет зависеть только от расстояния между этими двумя точками.

Рассмотрим теперь одну i-ую точку системы. Силу, действующую на неё, можно представить в виде суммы всех внешних и внутренних сил:

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{\text{внеш}} + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \vec{F}_{ij}$$

II закон Ньютона для этой точки: $$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_i$$

Умножим его на её малое перемещение dr_i:

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} \cdot d\vec{r}_i = \left(\vec{F}_i^{\text{внеш}} + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \vec{F}_{ij}\right) \cdot d\vec{r}_i$$

и просуммируем по всем точкам системы от 1 до N:

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{d\vec{p}_i}{dt} \cdot d\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{N} \left(\vec{F}_i^{\text{внеш}} + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \vec{F}_{ij}\right) \cdot d\vec{r}_i$$

Левая часть:

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{d\vec{p}_i}{dt} \cdot d\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{N} d\vec{p}_i \cdot \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{N} d(m_i\vec{v}_i)\vec{v}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot d\left(\frac{v_i^2}{2}\right) = \sum_{i=1}^{N} d\left(\frac{m_i v_i^2}{2}\right) =$$

$$= d\left(\sum_{i=1}^{N} E_{\text{кин}_i}\right) =$$

Правая часть:

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{\text{внеш}} \cdot d\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{N} \delta A_i^{\text{конс}} = \sum_{i=1}^{N} \left(-dE_{\text{пот}_i}^{\text{внеш}}\right) = -dE_{\text{пот}}^{\text{внеш}}$$

Свойство двойных сумм: $\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\vec{F}_{ij}\cdot d\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\vec{F}_{ji}\cdot d\vec{r}_j$

Воспользуемся этим свойством:

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\vec{F}_{ij}\cdot d\vec{r}_i = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\vec{F}_{ij}\cdot d\vec{r}_i + \sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\vec{F}_{ji}\cdot d\vec{r}_j\right) = \{\text{по III з. Ньютона}\}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\vec{F}_{ij}\cdot d\vec{r}_i - \sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\vec{F}_{ij}\cdot d\vec{r}_j\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\vec{F}_{ij}\left(d\vec{r}_i - d\vec{r}_j\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\vec{F}_{ij}\cdot d\vec{r}_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\left(\delta A_{ij}^{\text{конс}}\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\left(-dE_{\text{пот}_{ij}}^{\text{взаим}}\right) =$$

$$= -d\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}E_{\text{пот}_{ij}}^{\text{взаим}}\right) = -dE_{\text{пот}}^{\text{взаим}}$$

Вся правая часть после преобразований:

$-dE_{\text{пот}}^{\text{внеш}} - dE_{\text{пот}}^{\text{взаим}} = -d(E_{\text{пот}}^{\text{внеш}} + E_{\text{пот}}^{\text{взаим}}) = -dE_{\text{пот}}$ –убыль полной потенциальной энергии системы.

Собирая всё вместе получаем:

$$dE_{\text{кин}} = -dE_{\text{пот}}$$

$$d(E_{\text{кин}} + E_{\text{пот}}) = 0$$

$$dE_{\text{мех}} = 0 \Longrightarrow \boxed{E_{\text{мех}} = const} \quad \textbf{(ЗСЭ)}$$

В системе с одними только консервативными силами механическая энергия остаётся неизменной. Могут происходить лишь превращения потенциальной энергии в кинетическую и обратно, но полный запас энергии измениться не может – закон сохранения энергии системы в механике.

$E_{\text{пот}}^{\text{взаим}} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}E_{\text{пот}_{ij}}^{\text{взаим}}$ - потенциальная энергия взаимодействия системы МТ (собственная потенциальная энергия)

Если на систему МТ наряду с консервативными силами действуют также диссипативные силы, то механическая энергия системы будет уменьшаться $\boxed{\Delta E_{\text{мех}} = A^{\text{дис}} < 0.}$.