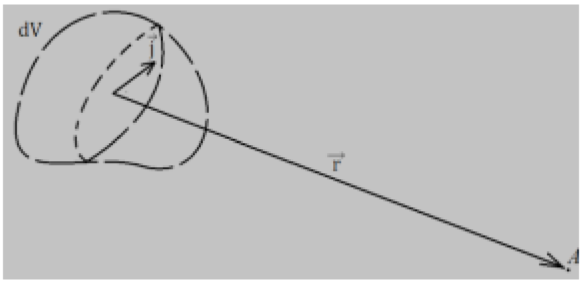
Закон Био – Савара.

Магнитное поле одного движущегося заряда равно: $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot q \cdot \frac{[\vec{v}, \vec{r}]}{r^3}),$

Принцип суперпозиции: $\vec{B}_{\text{системы}} = \sum_{i=1}^{N} \vec{B}_i,$

Используя формулы выше, найдём закон, определяющий магнитное поле. Рассмотрим проводящую среду, по которой течёт постоянный ток плотности $\vec{j}$. Выделим в ней малый объём dV. Положим, что заряд положительных носителей тока в этой среде – e, концентрация носителей тока – n, а средняя скорость упорядоченного движения носителей – $\vec{u}$. Также будем считать, что размеры объёма много меньше расстояния от него до точки пространства.



Найдем магнитное поле $d\vec{B}$ $(\vec{v})$, которое создают носители тока в объёме dV, движущиеся со скоростью $\vec{v}$. Согласно принципу суперпозиции все такие носители создают в $(\cdot)A$ магнитное поле:

$$d\vec{B}(\vec{v}) = dN(\vec{v}) \cdot \vec{B}^{\boxed{1}} = dN(\vec{v}) \cdot \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot e \cdot \frac{[\vec{v}, \vec{r}]}{r^3}.$$

$$d\vec{B} = \int\limits_{\text{по всем значениям } \vec{v}} d\vec{B}(\vec{v}) = \int\limits_{\text{по всем значениям } \vec{v}} dN(\vec{v}) \cdot \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot e \cdot \frac{[\vec{v}, \vec{r}]}{r^3}.$$

Число носителей тока, движущиеся со скоростью $\vec{v}$, выразим через концентрацию носителей, имеющих данную скорость $dn(\vec{v})$ и объём цилиндра dV: $dN(\vec{v}) = dn(\vec{v}) \cdot dV$, и сосчитаем интеграл:

$$d\vec{B} = \int\limits_{\text{по всем значениям } \vec{v}} dn(\vec{v}) \cdot dV \cdot \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot e \cdot \frac{[\vec{v}, \vec{r}]}{r^3} = dV \cdot \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot e \cdot \int\limits_{\text{по всем значениям } \vec{v}} dn(\vec{v}) \cdot \frac{[\vec{v}, \vec{r}]}{r^3}.$$

$$\frac{dn(\vec{v})}{n} = \frac{dN(\vec{v})}{N}$$

$$d\vec{B} = dV \cdot \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot e \cdot n \cdot \int\limits_{\text{по всем значениям } \vec{v}} \frac{dN(\vec{v})}{N} \cdot \frac{[\vec{v}, \vec{r}]}{r^3} = dV \cdot \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot e \cdot n \cdot \int\limits_{\text{по всем значениям } \vec{v}} \frac{dN(\vec{v})}{N} \cdot \left[\vec{v}, \frac{\vec{r}}{r^3}\right].$$

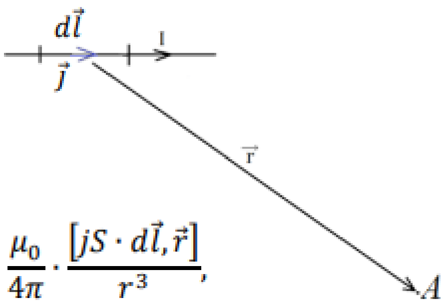
r –радиус-вектор, описывающий расстояние от объёма до $(\cdot)A$, одновременно определяет и расстояние от любого носителя тока в этом объёме до искомой точки, т.е. r одинаков для всех носителей тока (не зависит от v), следо вательно его можно вынести за знак интеграла:

$$d\vec{B} = dV \cdot \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot e \cdot n \cdot \left[\int\limits_{\text{по всем значениям } \vec{v}} \frac{dN(\vec{v})}{N} \cdot \vec{v}, \frac{\vec{r}}{r^3}\right] = dV \cdot \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot e \cdot n \cdot \left[\langle\vec{v}\rangle, \frac{\vec{r}}{r^3}\right] = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \left[e \cdot n \cdot \vec{u}, \frac{\vec{r}}{r^3}\right] \cdot dV = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \left[\vec{j}, \frac{\vec{r}}{r^3}\right] \cdot dV.$$

$\langle\vec{v}\rangle = \vec{u}$, а $\vec{j} = e \cdot n \cdot \vec{u}$,

$$\boxed{d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{[\vec{j}, \vec{r}]}{r^3} \cdot dV.}$$ - выражение для магнитного поля объёмного элемента тока

Если рассмотреть частный случай, когда ток I течёт вдоль бесконечно тонкого провода с площадью сечения S. Взять бесконечно малый участок провода длины dl и представим объём этого участка как $dV = Sdl$, то получим выражение для линейного элемента тока:



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{[\vec{j},\vec{r}]}{r^3}\cdot dV = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{[\vec{j},\vec{r}]}{r^3}\cdot Sdl = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{[\vec{j}\cdot Sdl,\vec{r}]}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{[jS\cdot d\vec{l},\vec{r}]}{r^3},$$

т.к. в этом случае направление тока совпадает с направлением оси провода: $j \uparrow\uparrow dl$. Учитывая, что плотность тока можно выразить через силу тока и площадь сечения тонкого провода $j = \frac{I}{S}$, получаем выражение для магнитного поля линейного элемента тока:

$$\boxed{d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot I\cdot\frac{[d\vec{l},\vec{r}]}{r^3}.}$$

Формулы для магнитного поля объёмного элемента тока и для магнитного поля линейного элемента тока выражают закон Био – Савара. Полное поле $\vec{B}$ в соответствии с принципом суперпозиции будет нахо диться интегрированием:

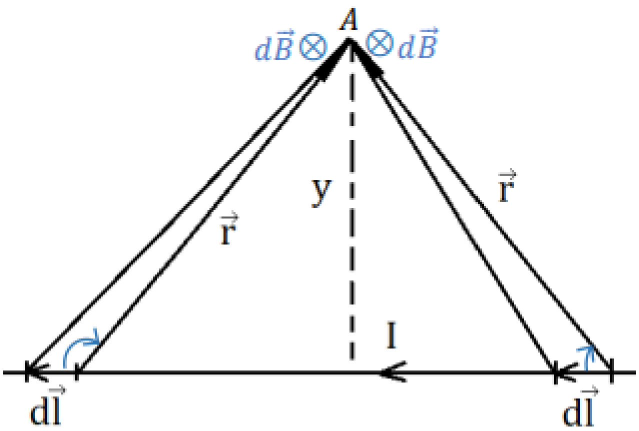
$$\vec{B} = \int d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\int\frac{[\vec{j},\vec{r}]}{r^3}\cdot dV,$$

ю всему объёму проводящей среды с током

$$\vec{B} = \int d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot I\cdot\int\frac{[d\vec{l},\vec{r}]}{r^3}.$$

по всей длине провода с током

Простейший пример – вычисление индукции магнитного поля очень длинного тонкого прямолинейного провода с постоянным током I на расстоянии y от него.



Разобьём наш провод на много малых элементов длиной $d\vec{l}$. Согласно закону Био – Савара:

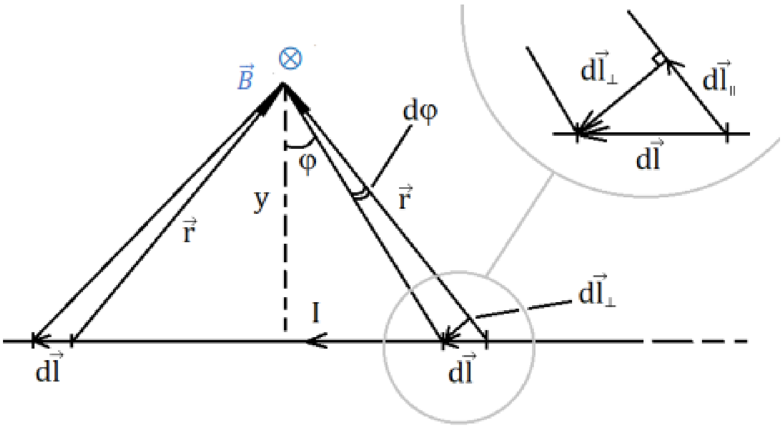
$$\vec{B} = \int d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot I\cdot\int\frac{[d\vec{l},\vec{r}]}{r^3}$$

по всей длине провода с током

Согласно правилу «правого винта» векторы магнитной индукции направлены от нас за плоскость рисунка. По правилам сложения

$$|\vec{B}| = \int|d\vec{B}| = \int dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot I\cdot\int\frac{|[d\vec{l},\vec{r}]|}{r^3}$$

по всей длине провода с током   по всей длине провода с током



Чтобы упростить задачу, представим вектор элемента длины провода dl как сумму двух слагаемых: $dl = dl \parallel + dl \perp$.

Тогда: $[d\vec{l},\vec{r}] = [(d\vec{l}_{\parallel} + d\vec{l}_{\perp}),\vec{r}] = [d\vec{l}_{\parallel},\vec{r}] + [d\vec{l}_{\perp},\vec{r}] = [d\vec{l}_{\perp},\vec{r}]$, т.к. по построению $d\vec{l}_{\parallel} \upuparrows \vec{r} \;\Rightarrow$ $[d\vec{l}_{\parallel},\vec{r}] = 0$.

$$\left|[d\vec{l},\vec{r}]\right| = \left|[d\vec{l}_{\perp},\vec{r}]\right| = |d\vec{l}_{\perp}| \cdot |\vec{r}| \cdot \sin\left(\widehat{d\vec{l}_{\perp}\vec{r}}\right) = dl_{\perp} \cdot r \cdot 1, \qquad \left(\widehat{d\vec{l}_{\perp}\vec{r}}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Подставляем в выражение для магнитной индукции и получаем:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I \cdot \int\limits_{\text{по всей длине провода с током}} \frac{\left|[d\vec{l},\vec{r}]\right|}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I \cdot \int \frac{dl_{\perp} \cdot r}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I \cdot \int\limits_{\text{по всей длине провода с током}} \frac{dl_{\perp}}{r^2} =$$

С учётом малости отрезка: $dl \to 0$, справе дливы следующие выражения:

$$r = \frac{y}{\cos\varphi}, \qquad dl_{\perp} = r \cdot d\varphi.$$

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I \cdot \int\limits_{\text{по всей длине провода с током}} \frac{dl_{\perp}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I \cdot \int \frac{d\varphi}{r} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{y} \cdot \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \, d\varphi =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{y} \cdot \left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{y} \cdot 2 = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I}{y}$$

$$\boxed{B = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I}{y}}$$

— магнитное поле очень длинного тонкого прямолинейного провода с постоянным током.