29 - Контур с током во внешнем магнитном поле.

TL;DR

- Если замкнутый контур находится в постоянном магнитном поле, то в сила Ампера, находимая для всего проводника по формуле $\vec{F} = \oint\limits_{\Gamma} = \oint\limits_{\Gamma} I \cdot [d\vec{l}, \vec{B}_0] = I \cdot \oint\limits_{\Gamma} [d\vec{l}, \vec{B}_0]$, становится равна нулю $\vec{F} = \vec{0}$
- Чтобы просчитать поведение контура одних сил не достаточно - нужно просчитать еще и моменты:
  - Момент есть сумма всех моментов сил ампера действующих на проводник
  - Если провести из центра отрезки проводника к началу и концу вектора dl и пустить по ним ток туда и обратно, путем некоторых доказательств можно получить, что $\vec{M} = \oint\limits_{\Gamma} d\vec{M}_{dl} = \oint\limits_{\Gamma} d\vec{M}_{треуг}$
  - Авторы искренне убеждают нас, что посчитать момент для этой силы проще. Я им поверю, но доказательство этого... *материться запрещено*, рекомендую записать на лист с формулами, так как выучить это невозможно
  - В итоговом варианте получается:

$$\vec{M} = \oint\limits_{\Gamma} I \cdot [d\vec{S}_{треуг}, \vec{B}_0]$$

  - В случае если постоянен ток, можно упростить до:

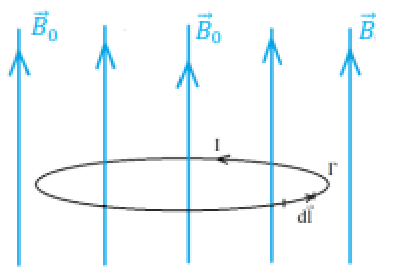
$$\vec{M} = I \cdot [\vec{S}_{\Gamma}, \vec{B}_0]$$

    Где $\vec{S}_{\Gamma}$ есть площадь контура
  - Если $\vec{p}_m \uparrow\uparrow \vec{B}_0$ - возникнет **устойчивое** равновесие, а если $\vec{p}_m \uparrow\downarrow \vec{B}_0$ - возникнет **неустойчивое** равновесие
  - Поскольку ток скалярная величина, можно ввести замену $\vec{p}_m = I \cdot \vec{S}_{\Gamma}$, После чего $\vec{M} = [\vec{p}_m, \vec{B}_0]$, а модуль при этом $|\vec{M}| = |\vec{p}_m| \cdot |\vec{B}_0| \sin \left(\widehat{\vec{p}_m, \vec{B}_0}\right)$
  - Моменты будут действовать так, чтобы $\vec{p}_m$ стал параллелен $\vec{B}$

Полный текст билета

> Существует ещё один объект, поведение которого в магнитном поле аналогично поведению диполей в электрическом поле - это замкнутый проводник (контур) с током

Поместим в постоянное магнитное поле с индукцией B_0 контур Γ с током I



На все малые кусочки будет действовать сила Ампера, тогда:

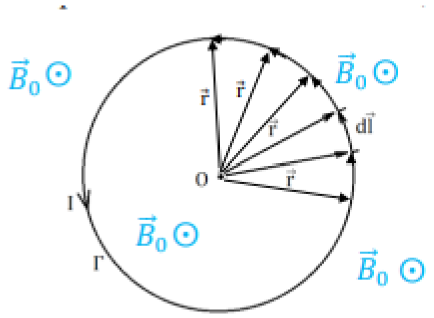
$$\vec{F} = \oint_\Gamma = \oint_\Gamma I \cdot [d\vec{l}, \vec{B}_0] = I \cdot \oint_\Gamma [d\vec{l}, \vec{B}_0]$$

скажем, что $\vec{B}_0$ - константа, тогда единственным что меняется в интеграле будет $d\vec{l}$, по вектор смещения по замкнутому контуру равен нулю:

$$\oint_\Gamma d\vec{l} = 0 \to \vec{F} = I \cdot [0, \vec{B}_0] = 0$$

> Значит, в однородном магнитном поле суммарная сила, действующая на контур с током равна нулю, и в таком поле он либо будет покоиться, либо перемещаться равномерно и прямолинейно

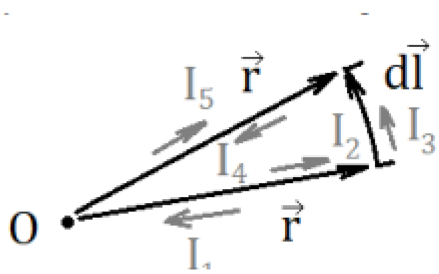
Теперь рассчитаем момент сил, действующих на контур

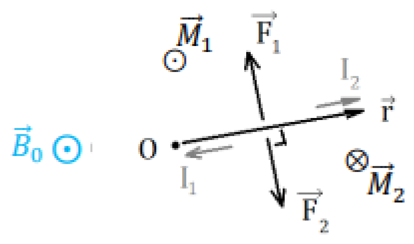


на dl действует сила $d\vec{M}_{dl} = [\vec{r}, d\vec{F}]$, тогда на весь проводник:

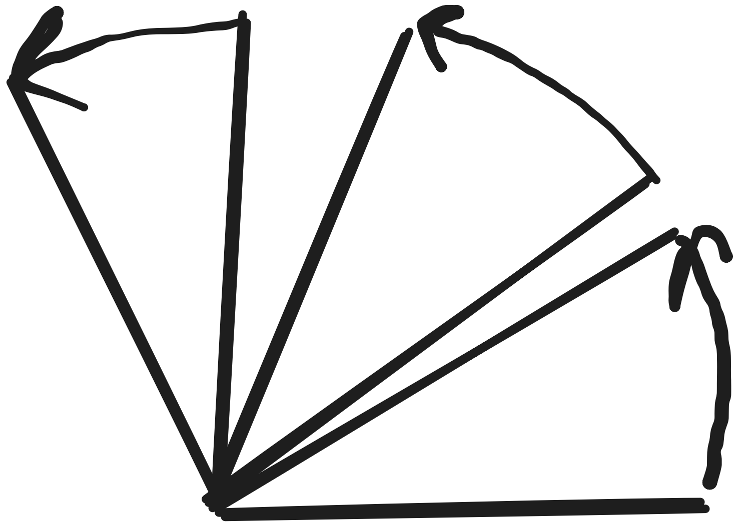
$$\vec{M} = \oint_\Gamma d\vec{M}_{dl}$$

Достроим дополнительные проводники, которые каким-то магическим образом не меняют картины обтекания током витка и не оказывают влияния на моменты. Это происходит потому что мы пустили токи по одному и тому же месту в разных направлениях и они убили как друг друга, так и создаваемый момент сил





Как я понял авторы держали в голове какое-то такое разбиение, при котором ток сначала идет к центру, потом обратно и так повторяется на каждом кусочке. Только разбиение несколько меньше моего и зазора между сегментами на самом деле нет. *надеюсь это хоть как-то поможет пониманию*:



Чтобы доказать утверждение про не влияние токов на моменты используется следующее:

$$\vec{F}_{A_1} = \underset{\text{по всей длине провода}}{\int d\vec{F}} = \int I_1 \cdot [d\vec{l}, \vec{B}_0] = I_1 \cdot [\underset{\text{по всей длине провода}}{\int d\vec{l}}, \vec{B}_0] = I_1 \cdot [\vec{r}, \vec{B}_0].$$

$$\vec{F}_1 = I_1 \cdot [\vec{r}, \vec{B}_0] = I \cdot [\vec{r}, \vec{B}_0], \quad \vec{F}_2 = I_2 \cdot [\vec{r}, \vec{B}_0] = -I \cdot [\vec{r}, \vec{B}_0] = -\vec{F}_1 \quad \Longrightarrow \quad \vec{F}_1 \uparrow\downarrow \vec{F}_2.$$

Силы действуют в противоположных направлениях. Тоже самое можно сказать и об их моментах:

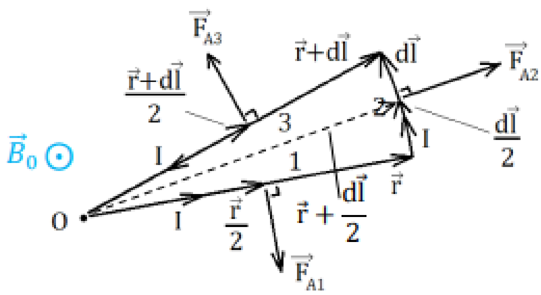
$$\vec{M}_1 = [\vec{r}, \vec{F}_1], \quad \vec{M}_2 = [\vec{r}, \vec{F}_2] = -[\vec{r}, \vec{F}_1] = -\vec{M}_1 \quad \Longrightarrow \quad \vec{M}_1 \uparrow\downarrow \vec{M}_2.$$

Далее становится понятно, что момент сил можно найти как сумму моментов сил всех маленьких треугольников:

$$\vec{M} = \oint_{\Gamma} d\vec{M}_{dl} = \oint_{\Gamma} d\vec{M}_{треуг}$$

Уровень сложности: Ад и Ад

Все, что описано дальше крайне рекомендую в чистом виде переписать на листочек для формул, иначе это невозможно запомнить - только понять



$$d\vec{M}_1 = [\vec{r}_{\text{к}\,F_{A1}}, \vec{F}_{A1}] = \left[\frac{\vec{r}}{2}, I \cdot [\vec{r}, \vec{B}_0]\right]$$

$$d\vec{M}_2 = [\vec{r}_{\text{к}\,F_{A2}}, \vec{F}_{A2}] = \left[\left(\vec{r} + \frac{d\vec{l}}{2}\right), I \cdot [d\vec{l}, \vec{B}_0]\right]$$

$$d\vec{M}_3 = [\vec{r}_{\text{к}\,F_{A3}}, \vec{F}_{A3}] = \left[\frac{\vec{r} + d\vec{l}}{2}, (-I) \cdot [(\vec{r} + d\vec{l}), \vec{B}_0]\right]$$

В последнем выражении (для $d\vec{M}_3$) минус появился из-за того, что на участке 3 ток I течёт в направлении противоположном вектору $(\vec{r} + d\vec{l})$.

Суммируем полученные выражения и «упорно упрощаем их до приемлемого вида»:

$$d\vec{M}_{\text{треуг}} = \left[\frac{\vec{r}}{2}, I \cdot [\vec{r}, \vec{B}_0]\right] + \left[\left(\vec{r} + \frac{d\vec{l}}{2}\right), I \cdot [d\vec{l}, \vec{B}_0]\right] + \left[\frac{\vec{r} + d\vec{l}}{2}, (-I) \cdot [(\vec{r} + d\vec{l}), \vec{B}_0]\right] =$$

$$= I \cdot \left(\left[\frac{\vec{r}}{2}, [\vec{r}, \vec{B}_0]\right] + \left[\left(\vec{r} + \frac{d\vec{l}}{2}\right), [d\vec{l}, \vec{B}_0]\right] - \left[\frac{(\vec{r} + d\vec{l})}{2}, [(\vec{r} + d\vec{l}), \vec{B}_0]\right]\right) =$$

Раскрываем все круглые скобки, пользуясь свойствами векторного произведения:

$$[(\vec{a}_1+\vec{a}_2),\vec{b}]=[\vec{a}_1,\vec{b}]+[\vec{a}_2,\vec{b}]$$

первое слагаемое не изменилось, из второго получилось в итоге два слагаемых, из третьего – четыре:

$$=I\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\cancel{\left[\vec{r},[\vec{r},\vec{B}_0]\right]}+\left[\vec{r},[d\vec{l},\vec{B}_0]\right]+\frac{1}{2}\cdot\cancel{\left[d\vec{l},[d\vec{l},\vec{B}_0]\right]}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\cdot\cancel{\left[\vec{r},[\vec{r},\vec{B}_0]\right]}-\frac{1}{2}\cdot\left[\vec{r},[d\vec{l},\vec{B}_0]\right]-\frac{1}{2}\cdot\left[d\vec{l},[\vec{r},\vec{B}_0]\right]-\frac{1}{2}\cdot\cancel{\left[d\vec{l},[d\vec{l},\vec{B}_0]\right]}\right)=$$

сократив одинаковые, но противоположные по знаку скобки, и произведя вычитание, получаем, что в нашем выражении осталось всего два слагаемых:

$$=I\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\left[\vec{r},[d\vec{l},\vec{B}_0]\right]-\frac{1}{2}\cdot\left[d\vec{l},[\vec{r},\vec{B}_0]\right]\right)=\frac{1}{2}\cdot I\cdot\left(\left[\vec{r},[d\vec{l},\vec{B}_0]\right]-\left[d\vec{l},[\vec{r},\vec{B}_0]\right]\right)$$

$$d\vec{M}_{\text{треуг}}=\frac{I}{2}\cdot\left(\left[\vec{r},[d\vec{l},\vec{B}_0]\right]-\left[d\vec{l},[\vec{r},\vec{B}_0]\right]\right)$$

Для следующих преобразований нам потребуется вспомнить свойство двойного векторного произведения:

$$[\vec{a},[\vec{b},\vec{c}]]=\vec{b}\cdot(\vec{a}\cdot\vec{c})-\vec{c}\cdot(\vec{a}\cdot\vec{b})$$

$$\left[\vec{r},[d\vec{l},\vec{B}_0]\right]=d\vec{l}\cdot(\vec{r}\cdot\vec{B}_0)-\vec{B}_0\cdot(\vec{r}\cdot d\vec{l})$$

$$\left[d\vec{l},[\vec{r},\vec{B}_0]\right]=\vec{r}\cdot(d\vec{l}\cdot\vec{B}_0)-\vec{B}_0\cdot(d\vec{l}\cdot\vec{r})$$

$$d\vec{M}_{\text{треуг}}=\frac{I}{2}\cdot\left(d\vec{l}\cdot(\vec{r}\cdot\vec{B}_0)-\cancel{\vec{B}_0\cdot(\vec{r}\cdot d\vec{l})}-\vec{r}\cdot(d\vec{l}\cdot\vec{B}_0)+\cancel{\vec{B}_0\cdot(d\vec{l}\cdot\vec{r})}\right)=$$

Т.к. скалярное произведение векторов обладает свойством коммутативности, то два из четырёх слагаемых сокращаются, а оставшиеся могут быть собраны в новое двойное векторное произведение:

$$=\frac{I}{2}\cdot\left(d\vec{l}\cdot(\vec{r}\cdot\vec{B}_0)-\vec{r}\cdot(d\vec{l}\cdot\vec{B}_0)\right)=\frac{I}{2}\cdot\left(d\vec{l}\cdot(\vec{B}_0\cdot\vec{r})-\vec{r}\cdot(\vec{B}_0\cdot d\vec{l})\right)=\frac{I}{2}\cdot\left[\vec{B}_0,[d\vec{l},\vec{r}]\right].$$

Теперь воспользуемся антикоммутативностью векторного произведения: $[\vec{a},\vec{b}]=-[\vec{b},\vec{a}]$

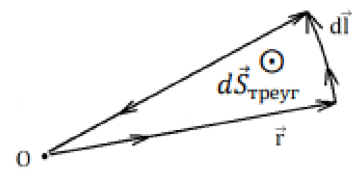
$$d\vec{M}_{\text{треуг}}=\frac{I}{2}\cdot\left[\vec{B}_0,[d\vec{l},\vec{r}]\right]=-\frac{I}{2}\cdot\left[[d\vec{l},\vec{r}],\vec{B}_0\right]=-\frac{I}{2}\cdot[-[\vec{r},d\vec{l}],\vec{B}_0]=\frac{I}{2}\cdot\left[[\vec{r},d\vec{l}],\vec{B}_0\right].$$

Окончательно имеем очень компактное выражение:

$$d\vec{M}_{\text{треуг}}=I\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot[\vec{r},d\vec{l}],\vec{B}_0\right]$$

Выясним, что за вектор первым стоит в нашем векторном произведении: $\frac{1}{2}\cdot[\vec{r},d\vec{l}]$. Модуль его равен

$$\left|\frac{1}{2}\cdot[\vec{r},d\vec{l}]\right|=\frac{1}{2}\cdot|\vec{r}|\cdot|d\vec{l}|\sin(\widehat{\vec{r},d\vec{l}})=dS_{\text{треуг}}$$



Это площадь нашего треугольного сектора. Соответственно само векторное произведение – вектор площади сектора:

$$\frac{1}{2}\cdot[\vec{r},d\vec{l}] = d\vec{S}_{треуг},$$

направленный согласно правилу «правого винта» на нас $\odot$.

$$d\vec{M}_{треуг} = I\cdot[d\vec{S}_{треуг},\vec{B}_0].$$

Момент сил, действующих в однородном магнитном поле на контур с током равен:

$$\vec{M} = \oint_{\Gamma} d\vec{M}_{треуг} = \oint_{\Gamma} I\cdot[d\vec{S}_{треуг},\vec{B}_0] =$$

Магнитное поле $\vec{B}_0$ однородно, то есть одинаково в пределах любого из треугольного сектора, то мы опять множитель $\vec{B}_0$ можем вынести из-под знака интеграла, как это делали в начале параграфа:

$$= I\cdot\left[\oint_{\Gamma} d\vec{S}_{треуг}, \vec{B}_0\right] = I\cdot[\vec{S}_{\Gamma},\vec{B}_0].$$

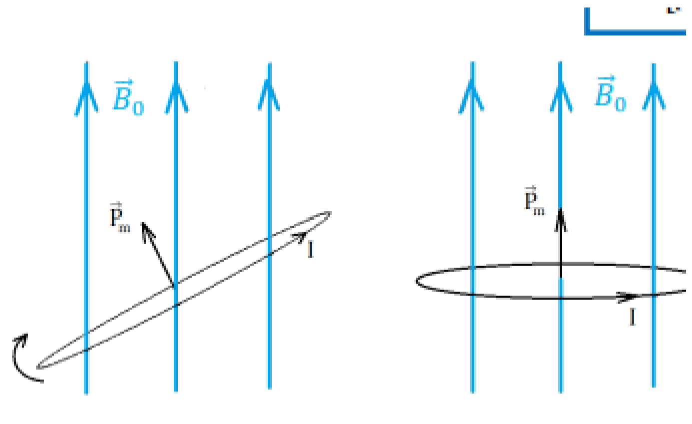
Площадь, охватываемая нашим контуром:

$$\vec{S}_{\Gamma} = \oint_{\Gamma} d\vec{S}_{треуг}$$

Так как ток - скалярная величина, можно произвести следующее действие:

$$\vec{p}_m = I\cdot\vec{S}_{\Gamma}$$

$$\vec{M} = [\vec{p}_m,\vec{B}_0]$$



Модуль очевидным образом найдется из:

$$|\vec{M}| = |\vec{p}_m|\cdot|\vec{B}_0|\sin\left(\widehat{\vec{p}_m,\vec{B}_0}\right)$$

Если $\vec{p}_m \uparrow\uparrow \vec{B}_0$ - возникнет **устойчивое** равновесие, а если $\vec{p}_m \uparrow\downarrow \vec{B}_0$ - возникнет **неустойчивое** равновесие

При этом если контур находится в неоднородном поле, то сила обращаться в ноль не будет и придется производит более тяжелые вычисления

> Кроме этого, на контур будет действовать момент этой силы стремящийся повернуть контур так, чтобы его магнитный момент стал параллелен полю: $\vec{p}_m \parallel \vec{B}$. Пользуясь аналогией с электрическим диполем, мы можем сразу сказать, что магнитный диполь, ориентированный по направлению поля, будет втягиваться в область сильного поля, а ориентированный против поля – выталкиваться.