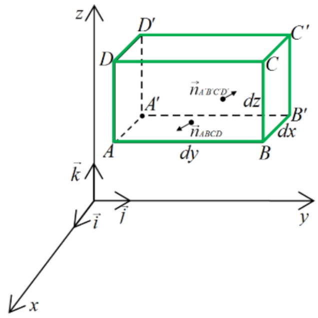
8. Дивергенция в декартовой системе координат

Напряжённость электрического поля в этом пространстве может быть записана как функция положения точки в пространстве

$\vec{E} = \vec{E}(x, y, z).$

Построим в некоторой точки этого пространства $A'(x, y, z)$ малую замкнутую поверхность (параллелепипед) и сосчитаем поток вектора $\vec{E}$ через нее $d\Phi_{ABCDA'B'C'D'}$. Размеры нашего параллелепипеда dx, dy и dz.



Вычислим поток через весь параллелепипед как сумму потоков через его грани.

$$d\Phi_{ABCDA'B'C'D'} = d\Phi_{ABCD} + d\Phi_{A'B'C'D'} + d\Phi_{AA'D'D} + d\Phi_{BB'C'C} + d\Phi_{AA'B'B} + d\Phi_{CC'D'D} =$$

$$= d\Phi_{(x)} + d\Phi_{(y)} + d\Phi_{(z)},$$

где $d\Phi_{(x)}, d\Phi_{(y)}$ и $d\Phi_{(z)}$ – потоки через грани, перпендикулярные осям OX, OY и OZ соответственно.

Найдём поток $d\Phi_{(x)}$ (для $d\Phi_{(y)}$ и $d\Phi_{(z)}$ рассуждения будут аналогичными):

$$d\Phi_{(x)} = d\Phi_{ABCD} + d\Phi_{A'B'C'D'}.$$

$d\Phi_{ABCD} = \vec{E} \cdot d\vec{S}_{ABCD}.$

Представим скалярное произведение векторов $\vec{E}$ и $d\vec{S}_{ABCD}$ через их компоненты (см. §2 из раздела «Механика»):

$$\vec{E} = E_x\vec{\imath} + E_y\vec{\jmath} + E_z\vec{k}, \qquad d\vec{S}_{ABCD} = dS_{ABCD}\vec{n}_{ABCD} = dS_{ABCD}\vec{\imath} = dydz \cdot \vec{\imath},$$

$d\Phi_{ABCD} = \left(E_x\vec{\imath} + E_y\vec{\jmath} + E_z\vec{k}\right) \cdot (dydz\vec{\imath}) = E_x \cdot dydz.$

Стоит отметить, что в данном выражении величина $E_x = E_x(x + dx,\ y,\ z)$, так как все точки грани $ABCD$ имеют координату $x + dx$.

$d\Phi_{A'B'C'D'} = \vec{E} \cdot d\vec{S}_{A'B'C'D'}.$

$$\vec{E} = E_x\vec{\imath} + E_y\vec{\jmath} + E_z\vec{k}, \qquad d\vec{S}_{A'B'C'D'} = dS_{A'B'C'D'} \cdot \vec{n}_{A'B'C'D'} = dydz \cdot (-\vec{\imath}),$$

т. к. $\vec{n}_{ABCD} = \vec{\imath} \quad \uparrow\downarrow \quad \vec{n}_{A'B'C'D'}.$

$$d\Phi_{A'B'C'D'} = \left(E_x\vec{\imath} + E_y\vec{\jmath} + E_z\vec{k}\right) \cdot dydz \cdot (-\vec{\imath}) = -E_x \cdot dy \cdot dz.$$

В этом выражении величина считается уже в самой точке $A'(x,\ y,\ z)$: $E_x = E_x(x,\ y,\ z)$.

Таким образом, поток через грани параллелепипеда перпендикулярные оси OX

$$d\Phi_{(x)} = E_x(x+dx, y, z) \cdot dydz - E_x(x, y, z) \cdot dydz = \left(E_x(x+dx, y, z) - E_x(x, y, z)\right) \cdot dydz.$$

Умножим и разделим получившееся выражение на dx:

$$d\Phi_{(x)} = \frac{E_x(x+dx, y, z) - E_x(x, y, z)}{dx} \cdot dxdydz.$$

$$\frac{E_x(x+dx, y, z) - E_x(x, y, z)}{dx} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial E_x}{\partial x} -$$

частная производная E_x по x. А произведение $dxdydz = dV$ – объём нашего параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$. Окончательно получаем, что

$$d\Phi_{(x)} = \frac{\partial E_x}{\partial x} \cdot dV.$$

Как было указано выше потоки через грани параллелепипеда перпендикулярные осям OY и OZ получаются аналогичным способом:

$$d\Phi_{(y)} = \cdots = \frac{\partial E_y}{\partial y} dV; \qquad d\Phi_{(z)} = \cdots = \frac{\partial E_z}{\partial z} dV.$$

Таким образом, поток через малую замкнутую поверхность, построенную в окрестности точки $A'(x, y, z)$, равен

$$d\Phi_{ABCDA'B'C'D'} = d\Phi_{(x)} + d\Phi_{(y)} + d\Phi_{(z)} = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right) dV.$$

Используя определение (1), получим что в декартовой системе координат оператор дивергенции имеет вид:

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}.}$$