№1

Производная	Интеграл	Дифференциал
$C' = 0$	$\int dx = x + C$	$x dx = \frac{1}{2} dx^2$
$x' = 1$	$\int x\, dx = \frac{x^2}{2} + C$	$x^2 dx = \frac{1}{3} dx^3$
$(x^n)' = nx^{n-1}$	$\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \ (n \neq -1)$	$x^n dx = \frac{1}{n+1} d(x^{n+1})$
$(e^x)' = e^x$	$\int e^x\, dx = e^x + C$	$e^x dx = d(e^x)$
$(a^x)' = a^x \ln a$	$\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$a^x dx = \frac{d(a^x)}{\ln a}$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C \ (x \neq 0)$	$\frac{1}{x} dx = d(\ln x)$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$	$\cos x dx = d(\sin x)$
$(\sin x)' = \cos x$	$\int \cos x\, dx = \sin x + C$	$\sin x dx = -d(\cos x)$
$(\cos x)' = -\sin x$	$\int tg\, x\, dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + C$	$\frac{1}{\cos^2 x} dx = d(tg\ x)$
$(tg\ x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\int ctg\, x\, dx = \ln\lvert\sin x\rvert + C$	$\frac{1}{\sin^2 x} dx = -d(ctg\ x)$
$(ctg\ x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tg\, x + C$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = d(\arcsin x)$
$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctg\, x + C$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = -d(\arccos x)$
$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\lvert tg\,(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})\rvert + C$	$\frac{1}{1+x^2} dx = d(arctg\ x)$
$(arctg\ x)' = \frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\lvert tg\,\frac{x}{2}\rvert + C$	$\frac{1}{1+x^2} dx = -d(arcctg\ x)$
$(arcctg\ x)' = -\frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$	
$(sh\ x)' = ch\, x$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a+x^2}} = \ln\lvert x + \sqrt{a+x^2}\rvert + C$	
$(ch\ x)' = sh\, x$	$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$	
$(th\ x)' = \frac{1}{ch^2 x}$	$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left\lvert\frac{a+x}{a-x}\right\rvert + C$	
$(cth\ x)' = -\frac{1}{sh^2 x}$	$\int \sqrt{a^2-x^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin\frac{x}{a} + C$	
$(x^x)' = x^x(1 + \ln x)$	$\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm$ $\pm \frac{a^2}{2} \ln\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\rvert + C$	
$(Cf)' = Cf'$ $(f+g)' = f' + g'$ $(fg)' = f'g + fg'$ $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ $(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$	$\int Cf(x)\, dx = C \int f(x)\, dx$ $\int (f(x) + g(x))\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$ $\int df(x) = f(x) + C$	$d(Cf) = Cdf$ $d(f+g) = df + dg$ $d(fg) = gdf + fdg$ $d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gdf - fdg}{g^2}$

1. $(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$
2. $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$
3. $(e^u)' = e^u \cdot u'$
4. $(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$
5. $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$
6. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
7. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
8. $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
9. $(\mathrm{tg}\ u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$
10. $(\mathrm{ctg\ u})' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$
11. $(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
12. $(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
13. $(\mathrm{arctg}\ u)' = \frac{u'}{1+u^2}$
14. $(\mathrm{arcctg}\ u)' = -\frac{u'}{1+u^2}$
15. $(\mathrm{sh}\, u)' = \mathrm{ch}\, u \cdot u'$
16. $(\mathrm{ch}\, u)' = \mathrm{sh}\, u \cdot u'$
17. $(\mathrm{th}\, u)' = \frac{u'}{\mathrm{ch}^2 u}$
18. $(\mathrm{cth}\, u)' = -\frac{u'}{\mathrm{sh}^2 u}$

№2

Таблица основных интегралов

1. $\int du = u + C$.
2. $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \ (n \neq -1)$.
3. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$.
4. $\int e^u du = e^u + C$.
5. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$.
6. $\int \sin u du = -\cos u + C$.
7. $\int \cos u du = \sin u + C$.
8. $\int tgudu = -\ln|\cos u| + C$.
9. $\int ctgudu = \ln|\sin u| + C$.
10. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = tgu + C$.
11. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -ctgu + C$.
12. $\int \frac{du}{\sin u} = \int \operatorname{cos}ecudu = \ln\left|tg\frac{u}{2}\right| + C$.
13. $\int \frac{du}{\cos u} = \int \sec udu = \ln\left|tg\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{2}\right)\right| + C$.
14. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = arcsin\frac{u}{a} + C$.
15. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a}\right| + C$.
16. $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{u}{a} + C$.
17. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C$.

№3

Интегрирование по частям

Интегрируя обе части равенства $d(uv) = u\,dv + v\,du$, получим

откуда $\int d(uv) = \int u dv + \int v\,du;\quad uv = \int u\,dv + \int v\,du,$

$$\int u dv = uv - \int v\,du. \qquad (1)$$

С помощью этой формулы вычисление интеграла $\int u dv$ сводится к вычислению интеграла $\int v\,du$, если последний окажется проще исходного.

> **Если под знаком интеграла есть комбинация**
>
> > Тригонометрическая функция
> > Показательная функция
> >
> > > То многочлен - u

> **Если**
>
> > Логарифмическая функция - u
> > Обратная тригонометрическая функция (arc-и) - u
> >
> > > Все остальное v

№4

> *Смотри номера выше а точнее №1, №2, №3*

Пример 1:

$$\int \frac{5x-4}{x^2+4x+5}dx = \int \frac{\frac{5}{2}(2x+4-\frac{28}{5})}{x^2+4x+5}dx = \int \frac{\frac{5}{2}(2x+4)-14}{x^2+4x+5}dx =$$

$$= \frac{5}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+5}dx - \int \frac{14}{x^2+4x+5}dx = [t = x^2+4x+5]$$

$$\frac{5}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+5}\frac{dt}{2x+4} - \int \frac{14}{(x+2)^2+1}dx = \frac{5}{2}\ln|x^2+4x+5| - 14\arctan(x+2)$$

Пример 2:

$$\int \frac{4x-1}{x^2-2x+5}dx = \int \frac{2(2x-2+\frac{3}{2})}{x^2-2x+5}dx = \int \frac{2(2x-2)+3}{x^2-2x+5}dx =$$

$$= [t = x^2-2x+5] = 2\int \frac{2x-2}{x^2-2x+5}\frac{dx}{2x-2} + \left(\int \frac{3}{x^2-2x+5}dx\right)^* =$$

$$= \left[{}^* = \int \frac{3}{(x-1)^2+2^2}\right] = 2\ln|x^2-2x+5| - \frac{3}{2}\arctan(\frac{x-1}{2}) + C$$

№5

Ну тут просто у степеней ищем общее кратное всех степеней и после подставляем и проверяем

№6

> *Смотри номера выше а точнее [№1](), [№2](), [№3]()*

$$x = a\sin\theta, dx = a\cos\theta\, d\theta \ - \textit{для выражений вида } (a^2 - x^2).$$

$$x = a\cos\theta, dx = -a\sin\theta\, d\theta \ - \textit{для выражений вида } (x^2 - a^2).$$

$$x = a\tan\theta, dx = a\sec^2\theta\, d\theta \ - \textit{для выражений вида } (x^2 + a^2).$$

№7

Схема такова, как это работает я хз, по ответам всё сходится

Пример 1:

$$F(x) = \int_2^x t^3 e^{3t-6}\, dt\ ,\ F'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_2^x t^3 e^{3t-6}\, dt\right)$$

$$F'(x) = x^3 e^{3x-6}\ ,\ F'(2) = 2^3 e^{3(2)-6} = 8e^0 = 8$$

Пример 2:

$$F(x) = \int_{-1}^x t^3 \arctan(t-1)\, dt\ ,\ F'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_{-1}^x t^3 \arctan(t-1)\, dt\right)$$

$$F'(x) = x^3 \arctan(x-1)\ ,\ F'(1) = 1^3 \arctan(1-1) = 0$$

Таблицы обратных тригонометрических и тригонометрических функций

a	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
arcsin	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
arccos	π	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

a	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
arctg	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
arcctg	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

Угол / Функция	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$	$270°$	$360°$
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	—	0
$\operatorname{ctg}\alpha$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	—	0	—

№8

Смотри: №1 №3 №7

№9

Четность/нечетность функции

Тут как я понял чаще всего функция нечетная, поэтому вычислять ничего не надо и ответ 0, но стоит проверить.

$$\textit{Четная функция}:\ y(-x) = y(x) \mid \textit{Нечетная функция}:\ y(-x) = -y(x)$$

$$\sin(-x) = -\sin(x)\ ,\ \ \arcsin(-x) = -\arcsin(x)$$

$$\cos(-x) = \cos(x)\ ,\ \ \arccos(-x) \neq \pm\arccos(x)$$

$$\tan(-x) = -\tan(x)\ ,\ \ \arctan(-x) = -\arctan(x)$$

$$\cot(-x) = -\cot(x)\ ,\ \operatorname{arccot}(-x) = -\operatorname{arccot}(x)$$

$$\sec(-x) = \sec(x)\ ,\ \operatorname{arcsec}(-x) \neq \pm\operatorname{arcsec}(x)$$

$$\csc(-x) = -\csc(x)\ ,\ \operatorname{arccsc}(-x) = -\operatorname{arccsc}(x)$$

№10

Найти площадь, ограниченную графиками функций $f(x)$ и $g(x)$
Смотри: *№2*

$\textit{Находим пересечение}: \ f(x) = g(x), \ x_1, \ x_2$

$\textit{Решаем ограниченный интеграл}: S = |\int_{x_1}^{x_2}(|f(x) - g(x)|)|$

№11

$S = \int_{\alpha}^{\beta} r^2 \, d\varphi$

Пока видел только такие типы: $S = \int_0^{2\pi}(n(1 \pm \cos\varphi)^2 d\varphi)$

Может пригодиться: $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$, $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$

№12, 13

Если кривая задана одним уравнением: $ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \, dx$
Если кривая задана параметрически: $ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \, dt$
Если кривая задана в полярных координатах
$L = \sqrt{\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r^2} d\varphi$
В 13 добавляются интегралы

№14

Тут просто дам теорию с GPT

Для определения, является ли интеграл собственным или несобственным, а также сходящимся или расходящимся, важно понимать несколько ключевых понятий и критериев. Давайте разберем эти понятия подробно.

1. Собственные и несобственные интегралы

Собственный интеграл:

- Это интеграл, у которого обе границы конечны, и подынтегральная функция непрерывна на всём промежутке интегрирования.
- Например, $\int_a^b f(x)dx$, где a и b конечные числа, и $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$.

Несобственный интеграл:

- Это интеграл, у которого одна или обе границы бесконечны, или подынтегральная функция имеет разрыв в пределах интервала интегрирования.
- Примеры включают $\int_a^{\infty} f(x) \, dx$, $\int_{-\infty}^{b} f(x) \, dx$, $\int_a^b f(x) \, dx$ где $f(x)$ имеет разрыв в интервале $[a, b]$

2. Сходимость и расходимость интегралов

Сходящийся интеграл:

- Интеграл считается сходящимся, если предел интеграла существует и является конечным числом.
- Для собственных интегралов это означает, что стандартные методы интегрирования дают конечный результат.
- Для несобственных интегралов это означает, что соответствующий предел существует и конечен. Например, $\int_a^b f(x) \, dx \quad \text{(существует и конечен)}$

Расходящийся интеграл:

- Интеграл считается расходящимся, если предел интеграла не существует или равен бесконечности.
- Для несобственных интегралов это означает, что соответствующий предел не существует или бесконечен. Например, $\int_a^b f(x) \, dx \quad \text{(не существует или бесконечен)}$

Примеры и тесты на сходимость

Собственные интегралы

Сходящийся собственный интеграл:

$\int_0^1 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$

Расходящийся собственный интеграл: Такие примеры встречаются редко, поскольку для собственных интегралов мы обычно имеем дело с непрерывными функциями на конечных интервалах, что гарантирует сходимость.
$\int_0^1 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$

Несобственные интегралы

Сходящийся несобственный интеграл:

$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^\infty = 0 - (-1) = 1$

Расходящийся несобственный интеграл:

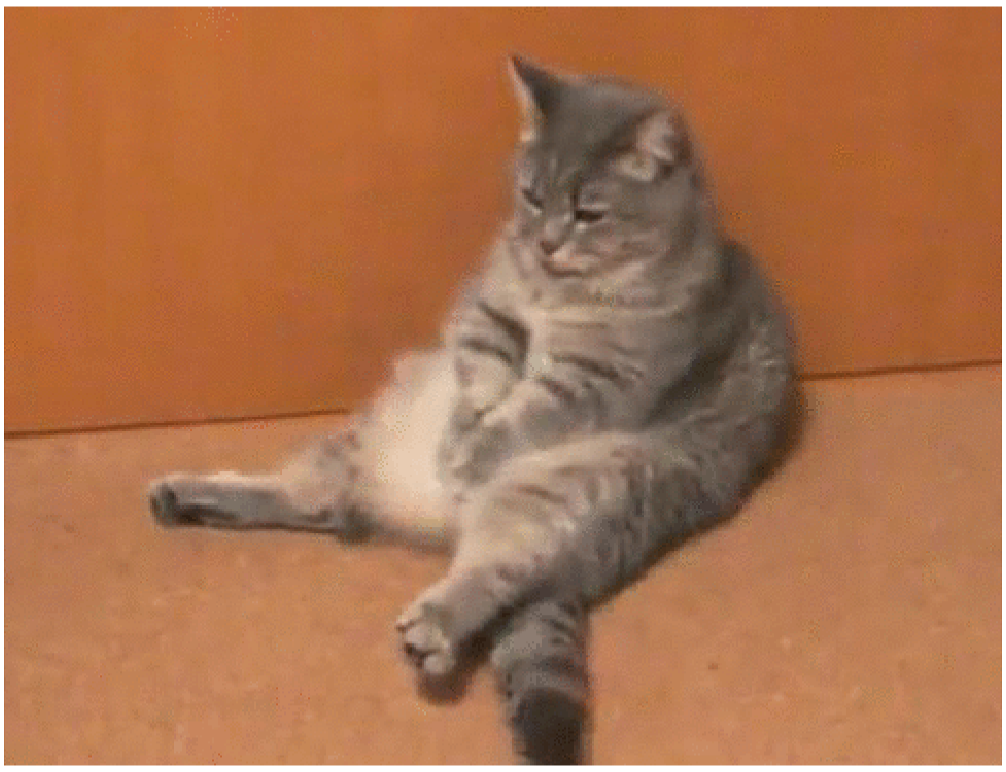
$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = [\ln x]_1^\infty = \lim_{b\to\infty}(\ln b - \ln 1) = \infty$

Проверка сходимости и расходимости

Для проверки сходимости или расходимости несобственных интегралов используются несколько методов:

1. **Сравнительный тест:**
   Если $f(x) \leq g(x)$ для всех x и $\int_a^\infty g(x)\,dx$ сходится, то $\int_a^\infty f(x)\,dx$ тоже сходится.
2. **Интегральный тест:**
   Если $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$ сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leq 1$.
3. **Тест на абсолютную сходимость:**
   Если $\int_a^b |f(x)|\,dx$ сходится, то $\int_a^b f(x)\,dx$ тоже сходится.

№15,16

Я хз, если у вас есть теория, дайте пожалуйста


№17

Для решения задач на определение линий уровня функции двух переменных, нужно понимать, что линии уровня — это множество точек на плоскости $((x, y))$, где функция принимает одно и то же значение. Линии уровня функции $(z = f(x, y))$ задаются уравнением $(f(x, y) = c)$, где (c) — постоянное значение.

Основные типы уравнений линий уровня

1. **Прямые**
   - Уравнения вида $(ax + by = c)$ представляют прямые. Если после подстановки значения (z) уравнение функции можно привести к линейному виду, линии уровня будут прямыми.
2. **Параболы**

- Уравнения вида ($y^2 = 4ax$) или ($x^2 = 4ay$) представляют параболы. Если после подстановки значения (z) уравнение функции можно привести к этому виду, линии уровня будут параболами.

3. **Гиперболы**
   - Уравнения вида ($\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$) *или* ($\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$) представляют гиперболы. Если после подстановки значения (z) уравнение функции можно привести к этому виду, линии уровня будут гиперболами.
4. **Окружности**
   - Уравнение вида ($x^2 + y^2 = r^2$) представляет окружность с центром в начале координат и радиусом (r). Если после подстановки значения (z) уравнение функции можно привести к этому виду, линии уровня будут окружностями.
5. **Эллипсы**
   - Уравнение вида ($\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$) представляет эллипс. Если после подстановки значения (z) уравнение функции можно привести к этому виду, линии уровня будут эллипсами.

Пример анализа для функции ($z = \frac{y^2}{x}$)

Рассмотрим функцию ($z = \frac{y^2}{x}$). Для определения линий уровня подставим ($z = c$):

[$c = \frac{y^2}{x}$]
[$y^2 = cx$]

В данном случае видно, что уравнение ($y^2 = cx$) является уравнением параболы.

Примеры других функций

1. **Пример 1:** ($z = x + y$)
   - Линии уровня: ($c = x + y$)
   - Приведём к линейному виду: ($y = c - x$)
   - Линии уровня: Прямые
2. **Пример 2:** ($z = x^2 + y^2$)
   - Линии уровня: ($c = x^2 + y^2$)
   - Приведём к виду окружности: ($x^2 + y^2 = c$)
   - Линии уровня: Окружности
3. **Пример 3:** ($z = x^2 - y^2$)
   - Линии уровня: ($c = x^2 - y^2$)
   - Приведём к виду гиперболы: ($\frac{x^2}{c} - \frac{y^2}{c} = 1$)
   - Линии уровня: Гиперболы
4. **Пример 4:** ($z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$)
   - Линии уровня: ($c = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$)
   - Приведём к виду эллипса: ($\frac{x^2}{a^2/c} + \frac{y^2}{b^2/c} = 1$)
   - Линии уровня: Эллипсы

Общий алгоритм решения задачи

1. **Записать уравнение функции** ($z = f(x, y)$).
2. **Подставить константу** ($z = c$), получив уравнение вида ($f(x, y) = c$).
3. **Привести уравнение к стандартной форме**:
   - Линейное уравнение ($ax + by = c$) указывает на прямые.
   - Уравнение вида ($y^2 = kx$) или ($x^2 = ky$) указывает на параболы.
   - Уравнение вида ($x^2 + y^2 = r^2$) указывает на окружности.
   - Уравнение вида ($\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$) указывает на гиперболы.
   - Уравнение вида ($\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$) указывает на эллипсы.
4. **Определить форму линий уровня** на основании полученного уравнения.

Заключение

Линии уровня функции двух переменных могут быть различными кривыми на плоскости ((x, y)), такими как прямые, параболы, гиперболы, окружности и эллипсы. Определение типа линии уровня сводится к подстановке константы в уравнение функции и приведения его к стандартной форме, соответствующей одной из известных кривых.

№18

Алгоритм для решения заданий

1. **Определение линии уровня:**
   - Запишите уравнение функции ($z = f(x, y)$).
   - Замените (z) на константу (c) и выразите уравнение в явной форме: ($f(x, y) = c$).
   - Преобразуйте полученное уравнение в стандартную форму (если возможно), чтобы определить тип кривой (прямая, парабола, гипербола, окружность, эллипс).
2. **Вычисление частных производных:**
   - Запишите функцию ($z = f(x, y)$).
   - Найдите частную производную функции по (x)(($\frac{\partial z}{\partial x}$)).
   - Найдите частную производную функции по (y)(($\frac{\partial z}{\partial y}$)).
   - Подставьте координаты точки ($M(x_0, y_0)$) в найденные производные для получения конкретных значений.
3. **Применение к конкретному заданию:**
   - Выполните подстановку точки (M) в уравнение функции или её частные производные в зависимости от условия задания.

Пример решения

Пример 1:

Дано: ($z = 2^{x/y}$), точка ($M(0, \ln 2)$).

1. Определение линии уровня:

- Записываем уравнение: ($z = 2^{x/y}$).
- Линия уровня: ($c = 2^{x/y}$).
- Преобразуем уравнение: ($\ln(c) = \frac{x\ln(2)}{y}$).
- Получаем: ($y\ln(c) = x\ln(2)$).
- Приводим к стандартной форме: ($y = \frac{x\ln(2)}{\ln(c)}$).
- Это уравнение прямой.

2. Вычисление частных производных:

- ($z = 2^{x/y}$).
- Найдём частную производную по (x):
  [$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(2^{x/y}\right) = 2^{x/y} \cdot \ln(2) \cdot \frac{1}{y}$]
- Найдём частную производную по (y):
  [$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(2^{x/y}\right) = 2^{x/y} \cdot \ln(2) \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right)$]
- Подставим ($M(0, \ln 2)$) в частную производную по (x):
  [$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_M = 2^{0/\ln 2} \cdot \ln(2) \cdot \frac{1}{\ln 2} = 1 \cdot \ln(2) \cdot \frac{1}{\ln 2} = 1$]

Ответ:
[$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_M = 1$]

Пример 2:

Дано: ($z = 2^{x^3 - xy}$), *точка* ($M(1, 1)$).

1. Определение линии уровня:

- Записываем уравнение: ($z = 2^{x^3 - xy}$).
- Линия уровня: ($c = 2^{x^3 - xy}$).
- Преобразуем уравнение: ($\ln(c) = \ln(2) \cdot (x^3 - xy)$).
- Получаем: ($x^3 - xy = \frac{\ln(c)}{\ln(2)}$).
- Это уравнение сложно привести к стандартной форме (необходим дополнительный анализ), но оно представляет собой кривую в общем виде.

2. Вычисление частных производных:

- ($z = 2^{x^3 - xy}$).
- Найдём частную производную по (x):
  [$\frac{\partial z}{\partial x} = 2^{x^3 - xy} \cdot \ln(2) \cdot \left(3x^2 - y\right)$]
- Найдём частную производную по (y):
  [$\frac{\partial z}{\partial y} = 2^{x^3 - xy} \cdot \ln(2) \cdot (-x)$]

- Подставим $(M(1, 1))$ в частную производную по (x):
  $[\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_M = 2^{1^3-1\cdot 1} \cdot \ln(2) \cdot (3 \cdot 1^2 - 1) = 2^0 \cdot \ln(2) \cdot (3-1) = 1 \cdot \ln(2) \cdot 2 = 2\ln(2)]$

Ответ:
$[\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_M = 2\ln(2)]$

№19

Для решения задач по нахождению полного дифференциала функции двух переменных в заданной точке с заданными приращениями аргументов, следуйте следующему алгоритму:

Алгоритм

1. **Записать функцию** $(z = f(x, y))$**.**
2. **Найти частные производные функции** $(f(x, y))$ **по переменным** (x) **и** (y)**.**
   - $(\frac{\partial z}{\partial x})$
   - $(\frac{\partial z}{\partial y})$
3. **Подставить координаты точки** $(M(x_0, y_0))$ **в частные производные.**
4. **Вычислить полный дифференциал** (dz) **с использованием формулы:**
   $[dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)} \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)} \cdot dy]$
5. **Подставить значения приращений** (dx)**и** (dy) **в формулу для полного дифференциала.**
6. **Вычислить значение полного дифференциала** (dz)**.**

Примеры решения

Пример 1:

Функция: $(z = xy^2 + x - y^2 + 5)$
Точка: $(M(1, -1])$
Приращения: $(dx = 1)$, $(dy = -1)$

1. **Найти частные производные:**
   $[\frac{\partial z}{\partial x} = y^2 + 1]$
   $[\frac{\partial z}{\partial y} = 2xy - 2y]$
2. **Подставить точку** $(M(1, -1))$ **в частные производные:**
   $[\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,-1)} = (-1)^2 + 1 = 1 + 1 = 2]$
   $[\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(1,-1)} = 2 \cdot 1 \cdot (-1) - 2 \cdot (-1) = -2 + 2 = 0]$
3. **Вычислить полный дифференциал:**
   $[dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,-1)} \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(1,-1)} \cdot dy]$
   $[dz = 2 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) = 2 + 0 = 2]$

Ответ:
$[dz = 2]$

Пример 2:

Функция: $(z = x^3 + xy^2)$
Точка: $(M(1, 2))$
Приращения: $(dx = 0.1)$, $(dy = -0.2)$

1. **Найти частные производные:**
   $[\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + y^2]$
   $[\frac{\partial z}{\partial y} = 2xy]$
2. **Подставить точку** $(M(1, 2))$ **в частные производные:**
   $[\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,2)} = 3 \cdot 1^2 + 2^2 = 3 + 4 = 7]$
   $[\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(1,2)} = 2 \cdot 1 \cdot 2 = 4]$
3. **Вычислить полный дифференциал:**
   $[dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,2)} \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(1,2)} \cdot dy]$
   $[dz = 7 \cdot 0.1 + 4 \cdot (-0.2) = 0.7 - 0.8 = -0.1]$

Ответ:
$[dz = -0.1]$

№20

Для решения задач по нахождению координат вектора нормали к поверхности, заданной уравнением $(z = f(x, y))$, в заданной точке $(M(x_0, y_0, z_0))$ и заданной одной координатой нормали, следуйте следующему алгоритму:

Алгоритм

1. **Записать уравнение поверхности** $(z = f(x, y))$**.**
2. **Найти частные производные функции** $(f(x, y))$**:**
   - $(\frac{\partial z}{\partial x} = f_x(x, y))$
   - $(\frac{\partial z}{\partial y} = f_y(x, y))$
3. **Подставить координаты точки** $(M(x_0, y_0, z_0))$ **в частные производные.**
4. **Записать вектор нормали к поверхности в виде** $((A, B, C))$**, где:**
   - $(A = f_x(x_0, y_0))$
   - $(B = f_y(x_0, y_0))$
   - $(C = -1)$
5. **Использовать заданное значение одной из координат нормали, чтобы найти остальные координаты. Если нормаль дана как** $((n_1, n_2, n_3))$**, то нужно найти** (n_1) **и** (n_2) **при условии, что** (n_3) **задан.**
6. **Сравнить выражения для вектора нормали и пропорциональные компоненты для вычисления оставшихся координат.**

Пример решения

Пример 1:

Поверхность: $(z = x\sqrt{y})$
Точка: $(M(-2, 1, -2))$
Нормаль: $((\ldots, \ldots, 2))$

1. **Записать уравнение поверхности:**
   $[z = x\sqrt{y}]$
2. **Найти частные производные:**
   $[\frac{\partial z}{\partial x} = \sqrt{y}]$
   $[\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{2\sqrt{y}}]$
3. **Подставить координаты точки** $(M(-2, 1, -2))$ **в частные производные:**
   $[\frac{\partial z}{\partial x}\bigg|_{(-2,1)} = \sqrt{1} = 1]$
   $[\frac{\partial z}{\partial y}\bigg|_{(-2,1)} = \frac{-2}{2\sqrt{1}} = -1]$
4. **Записать вектор нормали:**
   $[\vec{n} = (1, -1, -1)]$
5. **Использовать условие, что** $(n_3 = 2)$**, для нахождения пропорциональности:**
   $[\vec{n} = k(1, -1, -1)$ и $n_3 = -1k = 2 \implies k = -2]$
6. **Вычислить оставшиеся координаты нормали:**
   $[n_1 = 1 \cdot (-2) = -2]$
   $[n_2 = -1 \cdot (-2) = 2]$

Ответ:
$[\vec{n} = (-2, 2, 2)]$

Пример 2:

Поверхность: $(z = xy^2)$
Точка: $(M(1, -2, 4))$
Нормаль: $((\ldots, \ldots, -1))$

1. **Записать уравнение поверхности:**
   $[z = xy^2]$
2. **Найти частные производные:**
   $[\frac{\partial z}{\partial x} = y^2]$
   $[\frac{\partial z}{\partial y} = 2xy]$

3. **Подставить координаты точки $(M(1,-2,4))$ в частные производные:**
   $[\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,-2)} = (-2)^2 = 4]$
   $[\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(1,-2)} = 2 \cdot 1 \cdot (-2) = -4]$
4. **Записать вектор нормали:**
   $[\vec{n} = (4,-4,-1)]$
5. **Использовать условие, что $(n_3 = -1)$, для нахождения пропорциональности:**
   $[\vec{n} = k(4,-4,-1) \text{ и } n_3 = -1k = -1 \implies k = 1]$
6. **Вычислить оставшиеся координаты нормали:**
   $[n_1 = 4 \cdot 1 = 4]$
   $[n_2 = -4 \cdot 1 = -4]$

Ответ:
$[\vec{n} = (4,-4,-1)]$

№21

Алгоритм

1. **Записать функцию $(z = f(x,y))$.**
2. **Найти частные производные функции $(f(x,y))$:**
   - $(\frac{\partial z}{\partial x} = f_x(x,y))$
   - $(\frac{\partial z}{\partial y} = f_y(x,y))$
3. **Подставить координаты точки $(M(x_0,y_0))$ в частные производные.**
4. **Записать вектор направления $(\vec{l} = (a,b))$.**
5. **Нормализовать вектор направления $(\vec{l})$, чтобы его длина равнялась 1 (если это необходимо).**
   - $(\vec{l_{\text{unit}}} = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right))$
6. **Вычислить производную функции по направлению вектора $(\vec{l})$ с использованием формулы:**
   $[\frac{\partial z}{\partial l}\Big|_M = \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_M \cdot l_x + \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_M \cdot l_y]$
7. **Сделать вывод о возрастании или убывании функции в этом направлении в зависимости от знака производной.**

Примеры решения

Пример 1:

Функция: $(z = x^5y^{10})$
Точка: $(M(-1,1))$
Вектор направления: $(\vec{l} = (3,4))$

1. **Записать уравнение функции:**
   $[z = x^5y^{10}]$
2. **Найти частные производные:**
   $[\frac{\partial z}{\partial x} = 5x^4y^{10}]$
   $[\frac{\partial z}{\partial y} = 10x^5y^9]$
3. **Подставить координаты точки $(M(-1,1))$ в частные производные:**
   $[\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(-1,1)} = 5 \cdot (-1)^4 \cdot 1^{10} = 5]$
   $[\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(-1,1)} = 10 \cdot (-1)^5 \cdot 1^9 = -10]$
4. **Нормализовать вектор направления $(\vec{l} = (3,4))$:**
   $[||\vec{l}|| = \sqrt{3^2+4^2} = 5]$
   $[\vec{l_{\text{unit}}} = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})]$
5. **Вычислить производную функции по направлению вектора $(\vec{l})$:**
   $[\frac{\partial z}{\partial l}\Big|_{(-1,1)} = \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(-1,1)} \cdot \frac{3}{5} + \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(-1,1)} \cdot \frac{4}{5}]$
   $[\frac{\partial z}{\partial l}\Big|_{(-1,1)} = 5 \cdot \frac{3}{5} + (-10) \cdot \frac{4}{5} = 3 - 8 = -5]$

Ответ:
$[\frac{\partial z}{\partial l}\Big|_{(-1,1)} = -5]$
В этом направлении функция убывает, так как производная отрицательна.

Пример 2:

Функция: ($z = xy^2$)
Точка: ($M(1, -2)$)
Вектор направления: ($\vec{l} = (3, 4)$)

1. **Записать уравнение функции:**
   [$z = xy^2$]
2. **Найти частные производные:**
   [$\frac{\partial z}{\partial x} = y^2$]
   [$\frac{\partial z}{\partial y} = 2xy$]
3. **Подставить координаты точки ($M(1, -2)$) в частные производные:**
   [$\frac{\partial z}{\partial x}\bigg|_{(1,-2)} = (-2)^2 = 4$]
   [$\frac{\partial z}{\partial y}\bigg|_{(1,-2)} = 2 \cdot 1 \cdot (-2) = -4$]
4. **Нормализовать вектор направления ($\vec{l} = (3, 4)$):**
   [$\|\vec{l}\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$]
   [$\vec{l_{\text{unit}}} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$]
5. **Вычислить производную функции по направлению вектора ($\vec{l}$):**
   [$\frac{\partial z}{\partial l}\bigg|_{(1,-2)} = \frac{\partial z}{\partial x}\bigg|_{(1,-2)} \cdot \frac{3}{5} + \frac{\partial z}{\partial y}\bigg|_{(1,-2)} \cdot \frac{4}{5}$]
   [$\frac{\partial z}{\partial l}\bigg|_{(1,-2)} = 4 \cdot \frac{3}{5} + (-4) \cdot \frac{4}{5} = \frac{12}{5} - \frac{16}{5} = -\frac{4}{5}$]

Ответ:
[$\frac{\partial z}{\partial l}\bigg|_{(1,-2)} = -\frac{4}{5}$]
В этом направлении функция убывает, так как производная отрицательна.

№22

Алгоритм

1. **Записать функцию ($z = f(x, y)$).**
2. **Вычислить первую частную производную функции ($f(x, y)$) по (x):**
   [$\frac{\partial z}{\partial x}$]
3. **Вычислить первую частную производную функции ($f(x, y)$) по (y):**
   [$\frac{\partial z}{\partial y}$]
4. **Подставить координаты точки ($M(x_0, y_0)$) в каждую из частных производных.**
5. **Собрать вектор градиента:**
   [$\text{grad } z(M) = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\bigg|_M, \frac{\partial z}{\partial y}\bigg|_M\right)$]

№23

Для нахождения смешанной второй производной функции ($z = f(x, y)$) в заданной точке ($M(x_0, y_0)$), следуйте следующему алгоритму:

Алгоритм

1. **Записать функцию ($z = f(x, y)$).**
2. **Вычислить первую частную производную функции ($f(x, y)$) по (x):**
   [$\frac{\partial z}{\partial x}$]
3. **Вычислить первую частную производную функции ($f(x, y)$) по (y):**
   [$\frac{\partial z}{\partial y}$]
4. **Вычислить первую частную производную ($\frac{\partial z}{\partial x}$) по ($y$) (или ($\frac{\partial z}{\partial y}$) по ($x$)):**
   [$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \quad \text{или} \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$]
5. **Подставить координаты точки ($M(x_0, y_0)$) в полученное выражение.**

Примеры решения

Пример 1:

Функция: ($z = \sqrt{\frac{x}{y}}$)
Точка: ($M(1, \frac{1}{4})$)

1. **Записать уравнение функции:**
   [$z = \sqrt{\frac{x}{y}}$]
2. **Вычислить первую частную производную по** (x)**:**
   [$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{y}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{x}{y}}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{xy}}$]
3. **Вычислить первую частную производную по** (y)**:**
   [$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{y}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{x}{2y^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{x}{y}}} = -\frac{x}{2y^2} \cdot \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} = -\frac{\sqrt{x}}{2y^{3/2}}$]
4. **Вычислить смешанную частную производную** ($\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$)**:**
   [$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{xy}}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(x^{-\frac{1}{2}} y^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{2} y^{-\frac{3}{2}}\right) = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{y^{3/2}}$]
5. **Подставить координаты точки** ($M(1, \frac{1}{4})$)**:**
   [$-\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{y^{3/2}}\Big|_{(1,\frac{1}{4})} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{(\frac{1}{4})^{3/2}} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(\frac{1}{8})} = -\frac{1}{4} \cdot 8 = -2$]

Ответ:
[$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\Big|_{(1,\frac{1}{4})} = -2$]

Пример 2:

Функция: ($z = x^2 e^{-3y}$)
Точка: ($M(2, 0)$)

1. **Записать уравнение функции:**
   [$z = x^2 e^{-3y}$]
2. **Вычислить первую частную производную по** (x)**:**
   [$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xe^{-3y}$]
3. **Вычислить первую частную производную по** (y)**:**
   [$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 \cdot (-3)e^{-3y} = -3x^2 e^{-3y}$]
4. **Вычислить смешанную частную производную** ($\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$)**:**
   [$\frac{\partial}{\partial y}\left(2xe^{-3y}\right) = 2x \cdot (-3)e^{-3y} = -6xe^{-3y}$]
5. **Подставить координаты точки** ($M(2, 0)$)**:**
   [$-6xe^{-3y}\big|_{(2,0)} = -6 \cdot 2 \cdot e^{-3 \cdot 0} = -6 \cdot 2 \cdot 1 = -12$]

Ответ:
[$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\Big|_{(2,0)} = -12$]

№24

ХЗ

№25

Алгоритм

1. **Записать функцию** ($z = f(x, y)$).
2. **Найти частные производные** ($\frac{\partial z}{\partial x}$) и ($\frac{\partial z}{\partial y}$).
3. **Решить систему уравнений**:
   [$\frac{\partial z}{\partial x} = 0$]
   [$\frac{\partial z}{\partial y} = 0$]
4. **Находить стационарные точки** ((x_0, y_0)).
5. **Вычислить вторые частные производные**:
   [$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$]
6. **Вычислить определитель матрицы Гессе** в точке ((x_0, y_0)):
   [$H = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{vmatrix}$]
7. **Определить характер стационарной точки**:
   - Если ($H > 0$) и ($\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} > 0$), то это точка локального минимума.

- Если $(H > 0)$ и $(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} < 0)$, то это точка локального максимума.
- Если $(H < 0)$, то это седловая точка.
- Если $(H = 0)$, дополнительные исследования необходимы.

Пример 1: $(z = x^2 + 6xy - 8x + 2y^2 - 10y + 13)$

1. **Частные производные**:
   $[\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 6y - 8]$
   $[\frac{\partial z}{\partial y} = 6x + 4y - 10]$
2. **Решаем систему уравнений**:
   $[2x + 6y - 8 = 0 \quad (1)]$
   $[6x + 4y - 10 = 0 \quad (2)]$

   Умножим (1) на 2:
   $[4x + 12y - 16 = 0 \quad (3)]$

   Вычтем (2) из (3):
   $[4x + 12y - (6x + 4y) = 16 - 10]$
   $[-2x + 8y = 6]$
   $[-2x = 6 - 8y]$
   $[x = -3 + 4y]$

   Подставим (x) в (1):
   $[2(-3 + 4y) + 6y - 8 = 0]$
   $[-6 + 8y + 6y - 8 = 0]$
   $[14y - 14 = 0]$
   $[y = 1]$

   Подставим $(y = 1)$ в $(x = -3 + 4y)$:
   $[x = -3 + 4(1) = 1]$

   Стационарная точка: $(M(1, 1))$.
3. **Вторые частные производные**:
   $[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2]$
   $[\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4]$
   $[\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6]$
4. **Определитель матрицы Гессе**:
   $[H = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 6 \cdot 6 = 8 - 36 = -28]$

   $(H < 0)$, следовательно, точка $(M(1, 1))$ - не имеет экстремума.

Пример 2: $(z = 3x^2 + xy + 2y^2 - 11x + 2y + 13)$

1. **Частные производные**:
   $[\frac{\partial z}{\partial x} = 6x + y - 11]$
   $[\frac{\partial z}{\partial y} = x + 4y + 2]$
2. **Решаем систему уравнений**:
   $[6x + y - 11 = 0 \quad (1)]$
   $[x + 4y + 2 = 0 \quad (2)]$

   Умножим (2) на 6:
   $[6x + 24y + 12 = 0 \quad (3)]$

   Вычтем (1) из (3):
   $[(6x + 24y + 12) - (6x + y - 11) = 0]$
   $[24y + 12 - y + 11 = 0]$
   $[23y + 23 = 0]$
   $[y = -1]$

   Подставим $(y = -1)$ в (1):
   $[6x - 1 - 11 = 0]$
   $[6x = 12]$
   $[x = 2]$

   Стационарная точка: $(M(2, -1))$.
3. **Вторые частные производные**:
   $[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6]$

$[\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4]$
$[\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1]$

4. **Определитель матрицы Гессе**:
   $[H = \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 6 \cdot 4 - 1 \cdot 1 = 24 - 1 = 23]$

   $(H > 0)$ и $(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6 > 0)$, следовательно, точка $(M(2, -1))$ - точка локального минимума.

№26

Для определения типа стационарной точки функции по второму дифференциалу, необходимо исследовать квадратичную форму, которую он представляет. Квадратичная форма записывается как:

$[d^2z(M) = A(dx)^2 + 2Bdxdy + C(dy)^2]$

где (A), (B) и (C) — коэффициенты, определенные из второго дифференциала.

Алгоритм

1. **Определите коэффициенты** (A)**,** (B) **и** (C):
   - Для дифференциала вида $(d^2z(M) = A(dx)^2 + 2Bdxdy + C(dy)^2)$, найдите (A), (B) и (C).
   - Если форма представлена как $(d^2z(M) = A(dx)^2 + Bdxdy + C(dy)^2)$, умножьте коэффициент (B) на 2, чтобы получить $(2B)$.
2. **Вычислите дискриминант** (D):
   $[D = B^2 - AC]$
3. **Анализируйте знак дискриминанта и коэффициента** (A):
   - Если $(A > 0)$ и $(D < 0)$, стационарная точка является точкой **локального минимума**.
   - Если $(A < 0)$ и $(D < 0)$, стационарная точка является точкой **локального максимума**.
   - Если $(D > 0)$, стационарная точка **не имеет экстремума**.
   - Если $(D = 0)$, необходимо **дополнительное исследование**.

Пример 1

$[d^2z(M) = -7(dx)^2 + 13dxdy - 11(dy)^2]$

1. **Определите коэффициенты**:
   - $(A = -7)$
   - $(B = \frac{13}{2})$
   - $(C = -11)$
2. **Вычислите дискриминант**:
   $[D = \left(\frac{13}{2}\right)^2 - (-7)(-11)]$
   $[D = \frac{169}{4} - 77]$
   $[D = \frac{169}{4} - \frac{308}{4}]$
   $[D = \frac{169-308}{4}]$
   $[D = \frac{-139}{4} < 0]$
3. **Анализируйте знак дискриминанта и коэффициента** (A):

   - $(A = -7 < 0)$
   - $(D < 0)$

   Следовательно, **в этой точке функция имеет локальный максимум**.

Пример 2

$[d^2z(M) = 2(dx)^2 + 7dxdy + 3(dy)^2]$

1. **Определите коэффициенты**:
   - $(A = 2)$
   - $(B = \frac{7}{2})$
   - $(C = 3)$
2. **Вычислите дискриминант**:
   $[D = \left(\frac{7}{2}\right)^2 - 2 \cdot 3]$
   $[D = \frac{49}{4} - 6]$

$[D = \frac{49}{4} - \frac{24}{4}]$
$[D = \frac{25}{4} > 0]$

3. **Анализируйте знак дискриминанта и коэффициента** (A):

   - $(A = 2 > 0)$
   - $(D > 0)$

   Следовательно, **в этой точке функция не имеет экстремума** (седловая точка).

Заключение

- Для первого примера: **в этой точке функция имеет локальный максимум**.
- Для второго примера: **в этой точке функция не имеет экстремума** (седловая точка).

№27

Теор вопрос я хз, есть практический

Алгоритм для нахождения производных сложной функции

1. **Выразите функцию** (z) через промежуточные переменные (u) и (v).
2. **Найдите частные производные** (z) по (u) и (v).
3. **Выразите частные производные** (u) и (v) по (x) и (y).
4. **Используйте правило цепочки** для вычисления производных $(\frac{\partial z}{\partial x})$ и $(\frac{\partial z}{\partial y})$.
5. **Подставьте значения** (x) и (y) в полученные производные.

Алгоритм

Шаг 1: Выразите функцию (z) через промежуточные переменные (u) и (v)

$[z = 2u^2 - v^2]$
где $(u = 2x - 3y)$ и $(v = x + 2y)$.

Шаг 2: Найдите частные производные (z) по (u) и (v)

$[\frac{\partial z}{\partial u} = 4u, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = -2v]$

Шаг 3: Найдите частные производные (u) и (v) по (x) и (y)

$[\frac{\partial u}{\partial x} = 2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -3]$
$[\frac{\partial v}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2]$

Шаг 4: Используйте правило цепочки

$[\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}]$
$[\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}]$

Шаг 5: Подставьте значения (u), (v), (x) и (y)

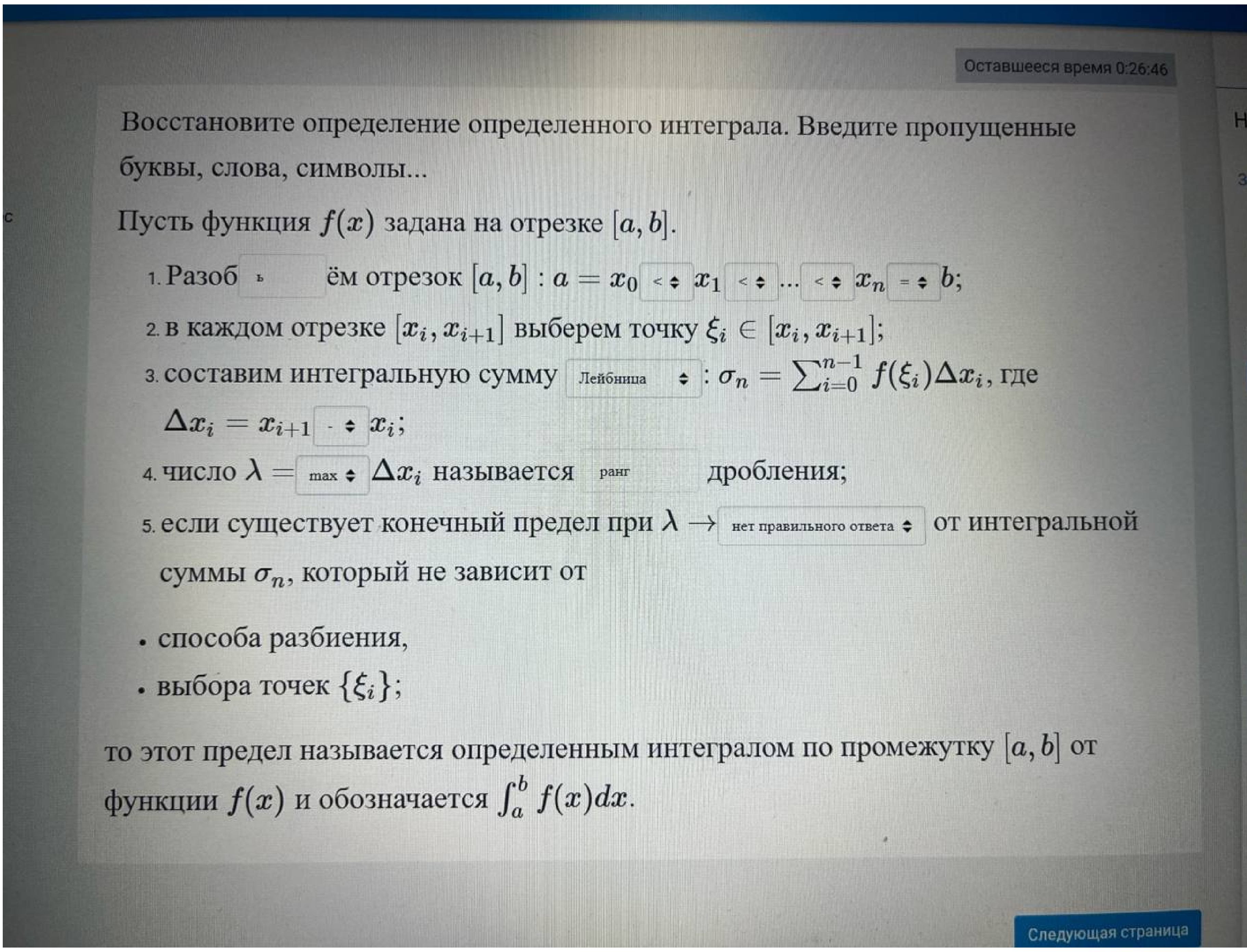
$[u = 2x - 3y = 2(1) - 3(1) = 2 - 3 = -1]$
$[v = x + 2y = 1 + 2(1) = 1 + 2 = 3]$

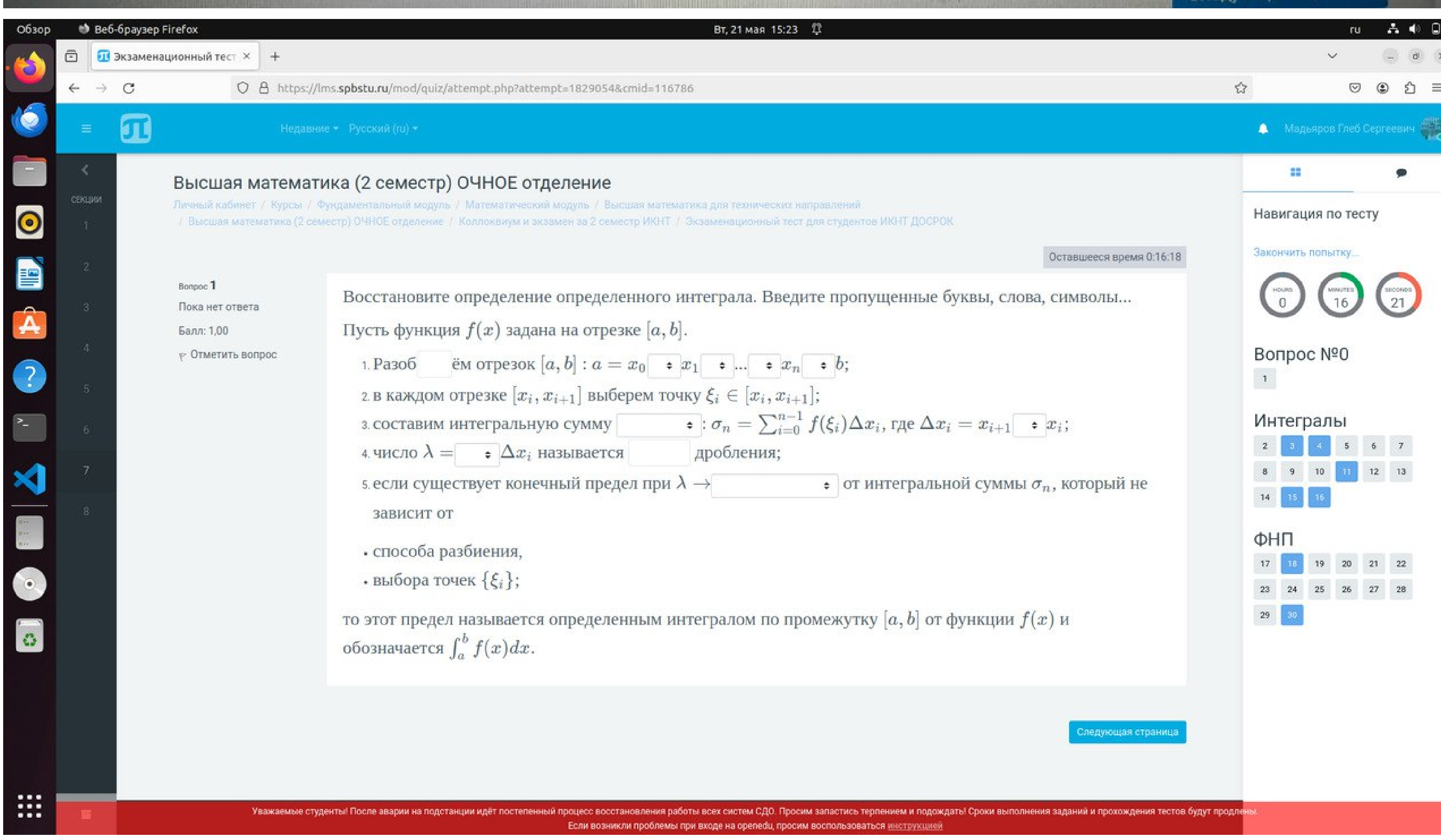
Теперь найдите производные $(\frac{\partial z}{\partial x})$ и $(\frac{\partial z}{\partial y})$:
$[\frac{\partial z}{\partial x} = 4u \cdot 2 + (-2v) \cdot 1 = 4(-1) \cdot 2 + (-2 \cdot 3) \cdot 1 = -8 - 6 = -14]$
$[\frac{\partial z}{\partial y} = 4u \cdot (-3) + (-2v) \cdot 2 = 4(-1) \cdot (-3) + (-2 \cdot 3) \cdot 2 = 12 - 12 = 0]$

Итоговые ответы

$[\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(x=1, y=1)} = -14]$
$[\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(x=1, y=1)} = 0]$

Будет ещё 0 вопрос типа:





ФНП

Теор справка

Частные производные — это производные функции нескольких переменных по одной из переменных, при фиксированных значениях других переменных. Они являются основными инструментами анализа функции нескольких переменных.

Теория

1. **Определение**:
   Пусть $(z = f(x, y))$ — функция двух переменных. Частная производная функции (f) по (x) в точке $((x, y))$

определяется как предел:
$[\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}]$
Аналогично, частная производная по (y) определяется как:
$[\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}]$
2. **Геометрический смысл**:
Частная производная по (x) (или (y)) показывает скорость изменения функции (f) в направлении оси (x) (или (y)) при фиксированном значении другой переменной.
3. **Правило цепочки**:
Для сложных функций, где переменные зависят от других переменных, используется правило цепочки для вычисления частных производных.

Алгоритм вычисления частных производных

1. **Прямая частная производная**:
   - Для функции $(z = f(x, y))$, частные производные по (x) и (y) вычисляются стандартными методами дифференцирования.
2. **Правило цепочки**:
   - Для сложных функций $(z = f(u(x, y), v(x, y)))$:
   $[\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}]$
   $[\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}]$

Пример и пошаговый алгоритм

Пример задачи: Найти частные производные функции $(z = 2u^2 - v^2)$ в точке $(M(x, y))$, если $(u = 2x - 3y)$ и $(v = x + 2y)$, при $(x = 1)$ и $(y = 1)$.

Шаг 1: Найдите выражения (u) и (v)

$[u = 2x - 3y, \quad v = x + 2y]$

Шаг 2: Найдите частные производные (u) и (v) по (x) и (y)

$[\frac{\partial u}{\partial x} = 2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -3]$
$[\frac{\partial v}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2]$

Шаг 3: Выразите (z) через (u) и (v)

$[z = 2u^2 - v^2]$

Шаг 4: Найдите частные производные (z) по (u) и (v)

$[\frac{\partial z}{\partial u} = 4u, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = -2v]$

Шаг 5: Используйте правило цепочки для вычисления частных производных (z) по (x) и (y)

$[\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}]$
$[\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}]$

Шаг 6: Подставьте значения (u), (v), (x) и (y)

$[u = 2(1) - 3(1) = -1]$
$[v = 1 + 2(1) = 3]$

Шаг 7: Вычислите частные производные

$[\frac{\partial z}{\partial x} = 4(-1) \cdot 2 + (-2 \cdot 3) \cdot 1 = -8 - 6 = -14]$
$[\frac{\partial z}{\partial y} = 4(-1) \cdot (-3) + (-2 \cdot 3) \cdot 2 = 12 - 12 = 0]$

Итог

$[\frac{\partial z}{\partial x}\bigg|_{(x=1,y=1)} = -14]$
$[\frac{\partial z}{\partial y}\bigg|_{(x=1,y=1)} = 0]$

Этот алгоритм может быть применен к любой сложной функции для нахождения частных производных, используя правило цепочки.

Всем удачи!