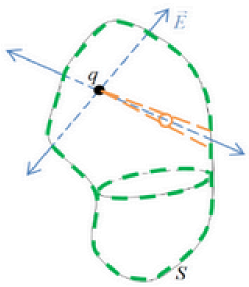
# 4. Теорема Гаусса для электрического поля в вакууме: формулировка и доказательство.

Теорема Гаусса в интегральной форме:

$$\boxed{\oint\limits_S \vec{E}\, d\vec{S} = \frac{q^{\text{внутр}}}{\varepsilon_0}}$$

Доказательство:

$$\Phi = \oint\limits_{\text{сфера}} d\Phi = \oint\limits_{\text{сфера}} \vec{E} d\vec{S} = \oint\limits_{\text{сфера}} \frac{kq}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \cdot d\vec{S} = \oint\limits_{\text{сфера}} kq \frac{\vec{r} \cdot d\vec{S}}{r^3} = kq \oint\limits_{\text{сфера}} \frac{\vec{r} \cdot d\vec{S}}{r^3} =$$

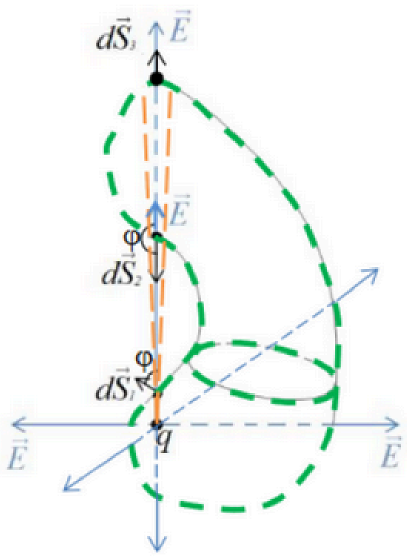



$$= kq \oint\limits_{\text{сфера}} \frac{r \cdot dS \cdot \cos\varphi}{r^3} = kq \oint\limits_{\text{сфера}} \frac{dS_r}{r^2} = kq \oint\limits_{\text{сфера}} d\Omega = kq \cdot \Omega_{\text{полн}} =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot q \cdot 4\pi = \frac{q}{\varepsilon_0}.$$

Данный вывод справедлив не только для сферы, но и для любой выпуклой замкнутой поверхности, когда заряд – источник поля, находится внутри.

Более сложный случай:




$$d\Phi = d\Phi_1 + d\Phi_2 + d\Phi_3 \sim \frac{\vec{r}_1 \cdot d\vec{S}_1}{{r_1}^3} + \frac{\vec{r}_2 \cdot d\vec{S}_2}{{r_2}^3} + \frac{\vec{r}_3 \cdot d\vec{S}_3}{{r_3}^3}.$$

$$\frac{\vec{r}_1 \cdot d\vec{S}_1}{{r_1}^3} = \left| \frac{\vec{r}_2 \cdot d\vec{S}_2}{{r_2}^3} \right| = \frac{\vec{r}_3 \cdot d\vec{S}_3}{{r_3}^3} = d\Omega.$$

$$d\Phi = \underbrace{d\Phi_1}_{\substack{>0,\ \text{т.к.} \\ \cos\varphi > 0}} + \underbrace{d\Phi_2}_{<0} + \underbrace{d\Phi_3}_{>0} \sim d\Omega - d\Omega + d\Omega = d\Phi_1.$$

Если заряд находится внутри выпукло-вогнутой замкнутой поверхности, силовые линии вектора напряженности пересекают поверхность нечетное количество раз. Поток через нечетное количество площадок равен потоку через одну.

Если заряд находится вне выпукло-вогнутой замкнутой поверхности, силовые линии пересекают поверхность четное количество раз.

Поток через четное количество площадок равен нулю (чередование знаков в сумме).