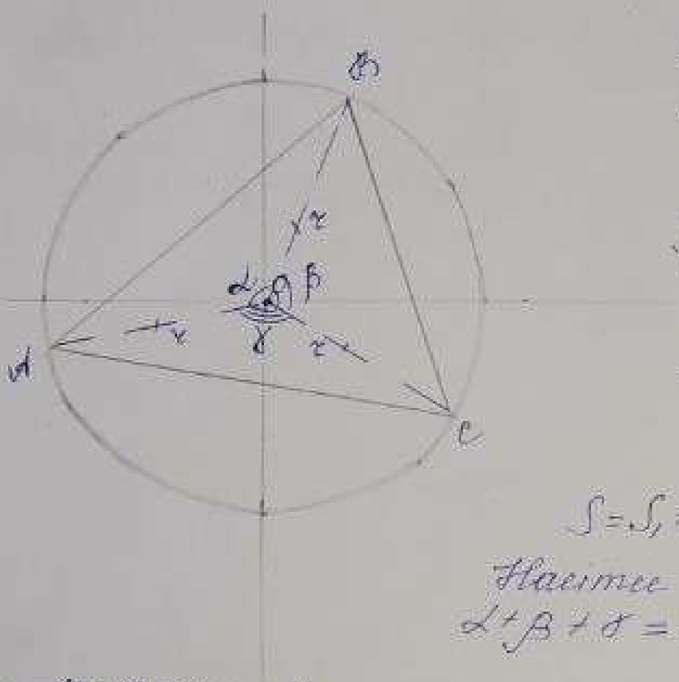
Доп №5

Вариант 12

Севостьянова Анна
гр. 5130904/30002



$AO = BO = CO = r$

$\angle AOB = \alpha$, $\angle BOC = \beta$, $\angle AOC = \gamma$

$S_{AOB} = S_1 = \frac{1}{2} AO \cdot BO \sin\angle AOB = \frac{1}{2} r^2 \sin\alpha$

$S_{BOC} = S_2 = \frac{1}{2} BO \cdot CO \sin\angle BOC = \frac{1}{2} r^2 \sin\beta$

$S_{COA} = S_3 = \frac{1}{2} CO \cdot AO \sin\angle AOC = \frac{1}{2} r^2 \sin\gamma$

$S = S_1 + S_2 + S_3 = \frac{1}{2} r^2 (\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)$ –

Найти максимум

$\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$, где $\alpha, \beta, \gamma > 0$ – ур-е связи

ф. Лагранжа

$$F(\alpha, \beta, \gamma, \lambda) = \frac{1}{2} r^2 (\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma) + \lambda(\alpha + \beta + \gamma - 2\pi)$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial \alpha} = \frac{1}{2} r^2 \cos\alpha + \lambda \\ \frac{\partial F}{\partial \beta} = \frac{1}{2} r^2 \cos\beta + \lambda \\ \frac{\partial F}{\partial \gamma} = \frac{1}{2} r^2 \cos\gamma + \lambda \end{array}\right| \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} r^2 \cos\alpha + \lambda = 0 \\ \frac{1}{2} r^2 \cos\beta + \lambda = 0 \\ \frac{1}{2} r^2 \cos\gamma + \lambda = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma = 2\pi \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda = -\frac{1}{2} \cos\alpha \\ \lambda = -\frac{1}{2} r^2 \cos\beta \\ \lambda = -\frac{1}{2} r^2 \cos\gamma \\ \alpha + \beta + \gamma = 2\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = -\frac{1}{2} r^2 (\cos\alpha - \cos\beta) \;|\; : \left(-\frac{1}{2} r^2\right) \\ 0 = -\frac{1}{2} r^2 (\cos\beta - \cos\gamma) \;|\; : \left(-\frac{1}{2} r^2\right) \\ 0 = -\frac{1}{2} r^2 (\cos\alpha - \cos\gamma) \;|\; : \left(-\frac{1}{2} r^2\right) \\ \alpha + \beta + \gamma = 2\pi \end{cases} \quad \text{т.к. } r \neq 0.$$

$$\begin{cases} \cos\alpha = \cos\beta \\ \cos\beta = \cos\gamma \\ \cos\alpha = \cos\gamma \\ \alpha + \beta + \gamma = 2\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \beta \\ \beta = \gamma \\ \alpha = \gamma \\ \lambda = -\frac{\sqrt{3}}{4} r^2 \end{cases} \Rightarrow \quad \alpha = \beta = \gamma = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{ll} F''_{\alpha\alpha} = -\frac{1}{2} r^2 \sin\alpha & F''_{\alpha\beta} = 0 \\ F''_{\beta\beta} = -\frac{1}{2} r^2 \sin\beta & F''_{\alpha\gamma} = 0 \\ F''_{\gamma\gamma} = -\frac{1}{2} r^2 \sin\gamma & F''_{\beta\gamma} = 0 \end{array} \Rightarrow$$

в точке $\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$

$F''_{\alpha\alpha} = -\frac{\sqrt{3}}{4} r^2$

$F''_{\beta\beta} = -\frac{\sqrt{3}}{4} r^2$

$F''_{\gamma\gamma} = -\frac{\sqrt{3}}{4} r^2$

$-\frac{\sqrt{3}}{4} d\alpha^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} d\beta^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} d\gamma^2 < 0 \Rightarrow$ точка максимума

Тогда $AO = BO = CO = r$ и $\angle AOB = \angle BOC = \angle COA \Rightarrow$
$\triangle AOB = \triangle BOC = \triangle COA \Rightarrow AB = BC = AC \Rightarrow \triangle ABC$ - равносторонний.

Значит, треугольник, вписанный в круг, имеет наибольшую площадь, когда он равносторонний.