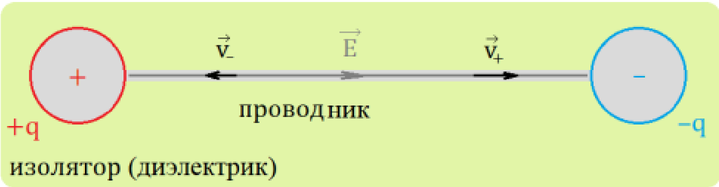
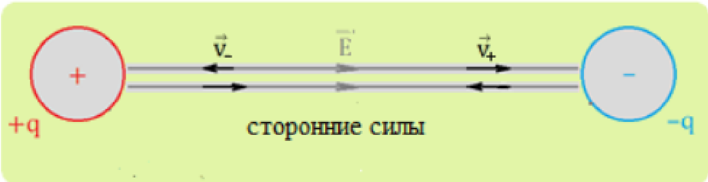
Обобщённый закон Ома

Рассмотрим следующий пример. Поместим два металлических шарика в изолирующую среду. Сообщив им одинаковые по величине, но противоположные по знаку заряды, мы создадим в пространстве электрическое поле $\vec{E}$, направленное от положительно заряженного шарика к отрицательно заряженному. Между шариками возникнет разность потенциалов: $\varphi_{+q} - \varphi_{-q}$. Т.к. окружающая среда изолятор ничего с зарядами шариков в этом случае происходить не будет. Теперь соединим шарики проводником. Кулоновские силы $F = e\vec{E}$, начнут перемещать положительные носители от левого шарика к правому, а отрицательные – от правого к левому. По проводнику потечёт электрический ток. Как итог, через некоторое время шарики разрядятся, поле $\vec{E}$ исчезнет и ток прекратится.



Для того чтобы напряжённость поля $\vec{E}$, а с ней и электрический ток оставались неизменными, необходимы какие-то дополнительные (сторонние) силы, непрерывно возвращающие заряды обратно и совершающие работу по переносу зарядов в направлении, противоположном действию электрического поля.



Физическая природа сторонних сил может быть весьма различной. Например: химических реакции в аккумуляторах, магнитная сила Лоренца в электрогенераторах, фотоэффект в Фотоэлементах и т.д.

По аналогии с кулоновскими силами $F = e\vec{E}$ сторонние силы принято выражать через напряжённость поля сторонних сил $\vec{E}_{\text{стор}}$: $\vec{F}_{\text{стор}} = e\vec{E}_{\text{стор}}$. Запишем уравнение движения для одного носителя тока в проводящей среде предположив, что теперь в этой среде ещё действуют и сторонние силы:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \vec{F}_{\text{ст}} + \vec{F}_{\text{стор}},$$

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = e\left(\vec{E} + \vec{E}_{\text{стор}}\right) + \vec{F}_{\text{ст}}.$$

После усреднения:

$$\tau \cdot \frac{du}{dt} + u = \frac{e \cdot \tau}{m}\left(E + E_{\text{стор}}\right),$$

приближенным решением которого в предположении малости скорости упорядоченного движения ($u \ll v_{\text{т}}$) и медленности изменения внешнего поля $\vec{E}$ ($\omega\tau \ll 1$), будет выражение:

$$u = \frac{e \cdot \tau}{m}\left(E + E_{\text{стор}}\right)$$ или соответствующее ему векторное выражение $$\vec{u} = \frac{e \cdot \tau}{m}\left(\vec{E} + \vec{E}_{\text{стор}}\right).$$

Теперь используем выражение для плотности тока $\vec{j} = e \cdot n \cdot \vec{u}$ и получим:

$$\vec{j} = \frac{\tau e^2 n}{m} \cdot \left(\vec{E} + \vec{E}_{\text{стор}}\right).$$

Таким образом, под совокупным действием поля $\vec{E}$ и поля сторонних сил $\vec{E}$ стор в проводящей среде возникает ток плотности:

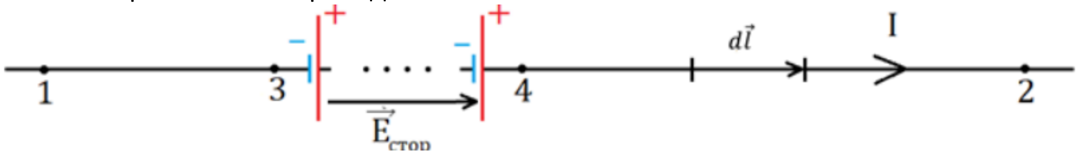
$$\boxed{\vec{j} = \sigma \cdot \left(\vec{E} + \vec{E}_{\text{стор}}\right) = \frac{\vec{E} + \vec{E}_{\text{стор}}}{\rho}}$$

– обобщённый закон Ома или закон Ома для неоднородной среды в дифференциальной форме.

Приближение тонкого провода. Закон Ома в интегральной форме.

Рассмотрим важнейший случай, когда электрические токи текут вдоль тонких проводов. В этом случае: направление тока (или вектора плотности j) совпадает с направлением оси провода (с элементом длины провода dl): $j \uparrow\uparrow dl$; плотность тока j можно принять одинаковой во всех точках сечения провода, хотя сама площадь поперечного сечения провода S в различных местах его может быть неодинаковой (меняться по длине провода).

Возьмём отрезок такого провода от сечения 1 к сечению 2:



На нем есть участок действия сторонних сил 3 → 4. Для любого элемента длины dl этого отрезка выполняется обобщённый закон Ома (умножим выражение на ρ): $\rho\vec{j} = \vec{E} + \vec{E}_{стор}$. Полученное выражение скалярно умножим на малый элемент длины провода dl , взятый по направлению тока от сечения 1 к сечению 2:

$$\rho\vec{j} \cdot d\vec{l} = (\vec{E} + \vec{E}_{стор}) \cdot d\vec{l}\,;$$

$$\int_1^2 \rho\vec{j} \cdot d\vec{l} = \int_1^2 (\vec{E} + \vec{E}_{стор}) \cdot d\vec{l}\,. \qquad (*)$$

1. Интеграл, стоящий в левой части равен:

$$\int_1^2 \rho\vec{j} \cdot d\vec{l} = \int_1^2 \rho j \cdot dl = \int_1^2 \rho \frac{I}{S} \cdot dl = I \int_1^2 \rho \frac{dl}{S} = I \int_1^2 dR = IR,$$

$dR = \rho \dfrac{dl}{S}$ – сопротивление участка отрезка длиной dl, а интеграл от этого выражения полное сопротивление отрезка провода от сечения 1 к сечению 2: $R = \displaystyle\int_1^2 dR.$

Если провод изготовлен из однородного материала и всюду имеет одинаковую толщину, то получается известная формула: $R = \rho \dfrac{l}{S}.$

2. Интеграл, стоящий в правой части равен:

$$\int_1^2 (\vec{E} + \vec{E}_{стор}) \cdot d\vec{l} = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_1^2 \vec{E}_{стор} \cdot d\vec{l}.$$

Т.к. электрическое поле $\vec{E}$ постоянных токов – потенциальное поле (место одного переместившегося носителя тока тут же занимает другой такой же носитель – распределение зарядов во времени не изменяется). То первый интеграл здесь – это разность потенциалов($\varphi_1 - \varphi_2$).

Второй интеграл достаточно распространить на ту часть отрезка провода, которая приходится на неоднородный участок провода от сечения 3 к сечению 4. Он представляет собой электродвижущую силу (ЭДС) $\mathcal{E}$, действующую на данном отрезке:

$$\boxed{\mathcal{E}_{12} = \int_1^2 \vec{E}_{стор} \cdot d\vec{l} = \int_3^4 \vec{E}_{стор} \cdot d\vec{l}.}$$

Если ЭДС способствует движению положительных носителей тока то она считается положительной $\mathcal{E}12 > 0$. Если же препятствует – $\mathcal{E}12 < 0$.

Часто электродвижущей силе дают другое определение, эквивалентное нашему. ЭДС – работа сторонних сил по перемещению единичного положительного заряда:

$$\mathcal{E}_{12} = \frac{q\int_3^4 \vec{E}_{\text{стор}} \cdot d\vec{l}}{q} = \frac{\int_3^4 q\vec{E}_{\text{стор}} \cdot d\vec{l}}{q} = \frac{\int_3^4 \vec{F}_{\text{стор}} \cdot d\vec{l}}{q} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\mathcal{E}_{12} = \frac{A_{\text{стор}}}{q}}$$

После всех указанных преобразований для левой и правой частей $(*)$ получаем:

$$\boxed{IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}} \quad (**)$$

– интегральная форма обобщённого закона Ома для тонкого провода – закон Ома для неоднородной цепи.

Стоит подчеркнуть, что R, входящее в это выражение – сопротивление всего отрезка провода от сечения 1 к сечению 2 (включая сопротивление участка со сторонними силами).

Разность потенциалов $\varphi_2 - \varphi_1$ называется напряжением на концах рассматриваемого отрезка провода U, Если ЭДС равна 0 (сторонние силы отсутствуют), то $(**)$ принимает вид: $IR = \varphi_1 - \varphi_2$.

Разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ называется в этом случае падением напряжения на сопротивлении рассматриваемого отрезка провода U: $\boxed{IR = U}$ – закон Ома для однородной цепи.

Если конечная и начальная точки провода 1 и 2 совпадают, то $\varphi 1 - \varphi 2 = 0$. Формула $(**)$ переходит в закон Ома для замкнутой цепи: $\boxed{IR = \mathcal{E}}$