30 - Теорема Гаусса и теорема о циркуляции для магнитного поля в вакууме.

TL;DR

- Поскольку линии магнитного поля всегда замкнуты, для любого замкнутого объема поток вектора магнитной индукции будет равен нулю: $\Phi = \oint_s \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$
  - Это также говорит о том, что не существует такой вещи как носитель магнитного заряда
  - Магнитное поле - это **не** потенциальное поле
- В общем случае циркуляция вектора магнитной индукции находится по формуле $C_\Gamma = \oint_\Gamma \vec{B} \cdot d\vec{l}$
- Расчеты по этой формуле примеров позволяют поставить общую формулу для циркуляции через замкнутый контур Γ

$$\oint\limits_\Gamma \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot I$$

- Это можно строго доказать, но доказательство трудоемко и не приведено в билетах
  - Токи считаются положительными, если сонаправлены с вектором ориентированной площадки контура $\vec{S}_\Gamma$, которая в свою очередь связана по правилу правого винта с направлением обхода контура
- На случай, если проводник по которому течет ток имеет объем, то нас интересует только та часть, которая непосредственно течет через внутреннюю часть контура:

$$\oint_\Gamma \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot \int\limits_{S_\Gamma \cap V} \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

Полный текст билета

> Линии магнитного поля всегда замкнуты, т.е. они не имеют ни начала, ни конца. Это значит, что число линий вектора $B^{\to}$, выходящих из любого объёма, ограниченного поверхностью S, всегда равно числу линий, входящих в этот объём. В §2 мы обсуждали представление о потоке вектора − как о полном числе силовых линий, пересекающих поверхность:

$$d\Phi_1 = \vec{B}\cdot d\vec{S}_1 = B\cdot dS\cdot\cos(\pi-\alpha) < 0;$$

$$d\Phi_2 = \vec{B}\cdot d\vec{S}_2 = B\cdot dS\cdot\cos(\alpha) > 0;$$

$$\Phi = \oint_S d\Phi = 0.$$

$$\boxed{\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0}$$

В локальной форме:

$$\mathrm{div}\vec{B} = 0$$

> Теорема Гаусса для магнитного поля выражает фундаментальный экспериментальный факт отсутствия в природе магнитных зарядов. Поля, не имеющие в строгом смысле источников (дивергенция которых всюду равна нулю), называются бездивергентными или соленоидальными полями. Следовательно, магнитное поле есть поле соленоидальное

Циркуляция вектора магнитной индукции:

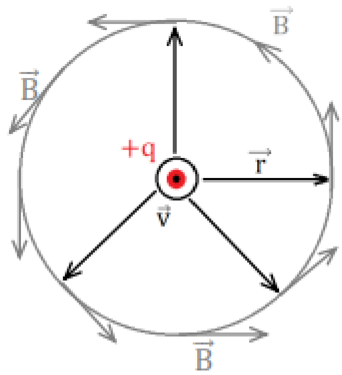
$$C_\Gamma = \oint_\Gamma \vec{B}\cdot d\vec{l}$$

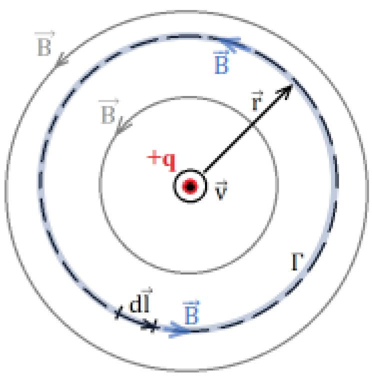
Расчеты примеров

Пример 1: магнитное поле движущейся заряженной частицы

В общем случае для движущегося заряда:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot q\cdot\frac{[\vec{v},\vec{r}]}{r^3}$$





Если разговор идет об единственном заряде, то можно построить контуры на которых магнитная индукция, проходящая через них, будет постоянным вектором, сонаправленным в dl. Такими контурами будут концентрические окружности. Сосчитаем циркуляцию

$$= \oint\limits_{\Gamma} B \cdot dl = B \cdot \oint\limits_{\Gamma} dl = B \cdot L_{\Gamma} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot q \cdot \frac{v \cdot r \cdot \sin(\widehat{\vec{v},\vec{r}})}{r^3} \cdot 2\pi r.$$

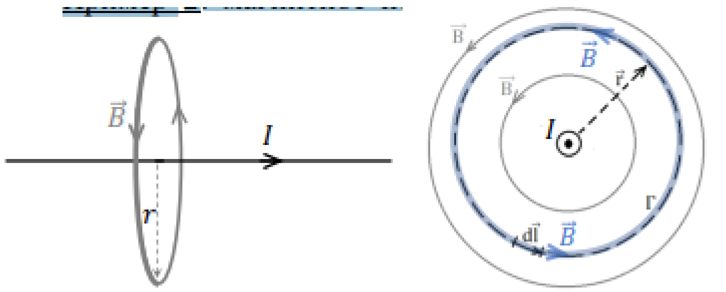
$$\vec{v} \perp \vec{r} \quad \Longrightarrow \quad \sin(\widehat{\vec{v},\vec{r}}) = 1, \;\; \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot q \cdot \frac{v \cdot r \cdot 1}{r^3} \cdot 2\pi r = \frac{\mu_0}{2} \cdot q \cdot \frac{v}{r}$$

Циркуляция для данного поля не равна нулю:

$$\oint\limits_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot \frac{q \cdot v}{2r}$$

При чем размерность множителя $\frac{q \cdot v}{r}$ являются амперы - то есть мера силы тока

Пример 2: магнитное поле длинного тонкого прямолинейного провода с постоянным



Вид сбоку   Вид сверху вдоль провода

В общем случае для тонкого прямолинейного проводника:

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I}{r}$$

Необходимыми контурами в нашем случае вновь станут концентрические окружности.

> Будем обходить контур против часовой стрелки: в каждой точке контура будет выполняться условие

$$\oint\limits_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint\limits_{\Gamma} B \cdot dl = B \cdot \oint\limits_{\Gamma} dl = B \cdot L_{\Gamma} = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I}{r} \cdot 2\pi r = \mu_0 \cdot I$$

То есть:

$$\oint\limits_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot I$$

Как и в первом примере получилось произведение магнитной постоянной на силу тока, охватываемую контуром Γ. Что это значит для нас? Что магнитное поле - не потенциальное поле.

Теорема о циркуляции

Запишем в общем виде теорему о циркуляции:

$$\oint\limits_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot I$$

Где I - суммарный ток, протекающий через плоскость, охватываемую контуром

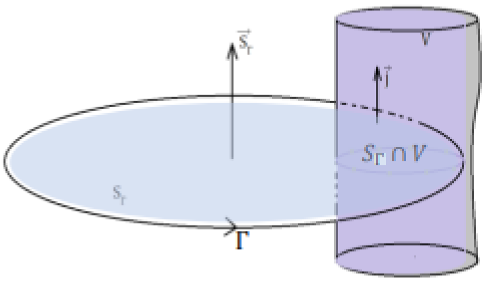
Несколько слов про знаки

Так как ток может течь в обоих направлениях, пару слов про знаки. Площадь, ограниченная контуром S_Γ - векторная величина, которая имеет некоторую произвольность в плане направления. Так вот: Ток считается положительным, если его направление связано с направлением обхода по контуру по правилу «правого винта», т.е совпадает по направлению с вектором $\vec{S}_\Gamma$

Хвала лектору

Можно доказать теорему о циркуляции и из соображений закона Био-Савара-Лапласа, однако это доказательство трудоемко, поэтому опущено в конспектах

Если проводник имеет размеры



Если проводник имеет размеры и не полностью попадает в выбранный нами контур, то задача приходит к тому, чтобы понять, а сколько амперов протекает через тот кусочек проводника, который отсекается нашим контуром:

$$I_\Gamma = \int\limits_{S_\Gamma \cap V} \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

Тогда в переписанном виде:

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot \int\limits_{S_\Gamma \cap V} \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

В областях, где ток не течет циркуляция будет равна нулю, а потому это можно выкинуть