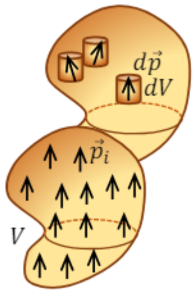
20. Вектор поляризации. Поверхностная и объемная плотности поляризационных зарядов

Для количественного описания поляризации используют поляризационный заряд q' или его плотности ρ' и σ', а также *вектор поляризации (поляризованность диэлектрика)* $\vec{P}$ – *суммарный дипольный момент единицы объёма диэлектрика*:



$$\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{dV} \text{ или}$$

$$\vec{P} = \frac{\sum \vec{p}_i}{V} -$$

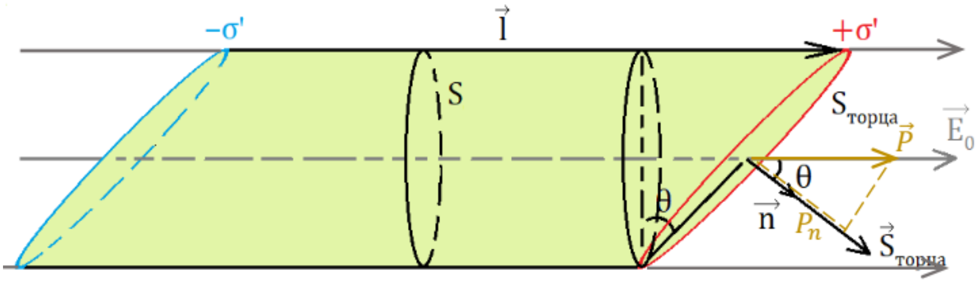
в случае, когда поляризация проходит однородно.

Единицей вектора поляризации (поляризованности) $\vec{P}$ является

$$[P] = \frac{[p_i]}{[V]} = \frac{[q]\cdot[l]}{[V]} = \frac{\text{Кл}\cdot\text{м}}{\text{м}^3} = \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}$$

– кулон на квадратный метр.

Однородный изотропный диэлектрик в форме цилиндра длиной l со скошенными торцами; Поляризация однородная => появление поляризационного заряда на торцах цилиндра с поверхностной плотностью σ'



цилиндр - один большой диполь

Sт – площадь торца цилиндра => его дипольный момент равен $\vec{p} = q'\vec{l} = \sigma' S_т \vec{l}$.
Вектор поляризации диэлектрика в этом случае будет равен:

$$\vec{P} = \frac{\sum \vec{p}_i}{V} = \frac{\vec{p}}{V} = \frac{\sigma' S_{\text{т}} \vec{l}}{V} = \frac{\sigma' S_{\text{т}} \vec{l}}{\vec{S}_{\text{т}} \cdot \vec{l}}, \quad V = S \cdot l = S_{\text{т}} \cos\theta \, l = S_{\text{т}} l \cos \widehat{\vec{S}_{\text{т}} \vec{l}} = \vec{S}_{\text{т}} \cdot \vec{l}.$$

Умножим скалярно левую и правую части выражения для вектора $\vec{P}$ на единичный вектор $\vec{n}$ внешней нормали к положительно заряженному торцу цилиндра – диэлектрика:

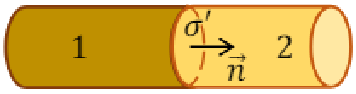
$$\vec{P} \cdot \vec{n} = \frac{\sigma' S_{\text{т}} \vec{l}}{\vec{S}_{\text{т}} \cdot \vec{l}} \cdot \vec{n} = \frac{\sigma' S_{\text{т}} \cdot \vec{n} \cdot \vec{l}}{\vec{S}_{\text{т}} \cdot \vec{l}} = \frac{\sigma' \cdot \vec{S}_{\text{т}} \cdot \vec{l}}{\vec{S}_{\text{т}} \cdot \vec{l}} = \sigma'.$$

$\vec{P} \cdot \vec{n} = P_n$ – нормальная составляющая вектора поляризации, следовательно:

$$\boxed{P_n = \sigma'.} \qquad (1)$$

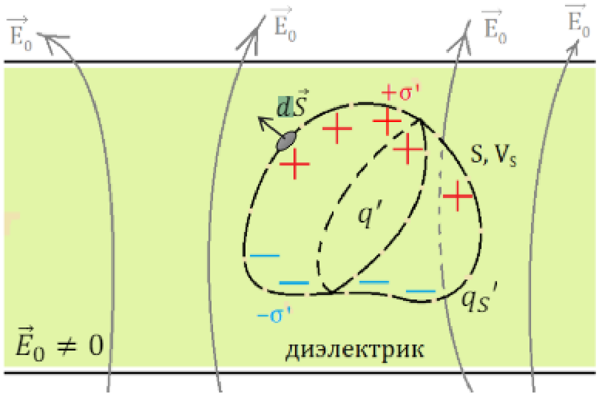
нормальная составляющая вектора поляризации Pn численно равна заряду, смещаемому при поляризации через единичную площадку в направлении нормали $\vec{n}$ к ней

разрыв нормальной составляющей вектора поляризации на границе диэлектриков (двух цилиндров) через поверхностную плотность поляризационных зарядов на этой границе: $\boxed{P_{1n} - P_{2n} = \sigma'.}$



Объёмная плотность

В интегральной форме:



выделим внутри диэлектрика объём VS , ограниченный замкнутой поверхностью S. Пока внешнее электрическое поле отсутствует никакого поляризационного заряда ни в диэлектрике, ни в части его объёма VS нет: q ' = 0. В результате включения электрического поля диэлектрик поляризуется – отрицательные заряды сместятся относительно положительных, и как следствие, на замкнутой поверхности S выступит поляризационный заряд qS '

$$q' = q'_{\text{внутри } S \text{ (до поляризации)}} - q'_{\text{через границы } S \text{ (в результате поляризации)}} =$$

$$= q' - q_S' = 0 - q_S' = -q_S' \quad \Longrightarrow \quad q' = -q_S'.$$

Для расчёта заряда, смещённого через границу замкнутой поверхности S, разобьем её на бесконечно маленькие площадки dS, распределение заряда в пределах которых можно считать равномерным, и выразим заряд dq' через поверхностную плотность: $dq' = \sigma' dS$:

$$q_S' = \oint_S dq' = \oint_S \sigma' dS =$$

$$= \oint_S P_n \cdot dS = \oint_S \vec{P} \cdot \vec{n} \cdot dS = \oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S}.$$

в результате поляризации внутри объёма VS появляется поляризационный заряд:

$$\boxed{\oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S} = -q'}$$

– поток вектора $P^{\rightarrow\rightarrow}$ сквозь произвольную замкнутую поверхность S равен взятому с обратным знаком поляризационному заряду диэлектрика в объёме VS , охватываемом этой поверхностью.

В дифференциальной форме:

используя формулу Гаусса - Остроградского

$$\oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S} = \int_{V_S} \left(\operatorname{div} \vec{P}\right) dV.$$

$$q' = \int_{V_S} \rho' \, dV.$$

$$\int_{V_S} \operatorname{div} \vec{P} \cdot dV = -\int_{V_S} \rho' \cdot dV$$

для любых замкнутых поверхностей и объёмов внутри них:– объёмная плотность поляризационного заряда равна дивергенции вектора поляризации, взятой с обратным знаком.

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{P} = -\rho'}$$