Волновое уравнение

 систему уравнений Максвелла в дифференциальной форме (1д) - (4д) Напоминание, значит: эти уравнения 💯 из предыдущего билета №43

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \qquad \operatorname{div}\vec{D} = \rho, \qquad \operatorname{rot}\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \qquad \operatorname{div}\vec{B} = 0.$$

Договоримся, что описываемая среда – вакуум, и в ней отсутствуют сторонние заряды и токи проводимости. Это немного упростит вид рассматриваемых уравнений, но никак не скажется на общности вывода. Получается:

$$\varepsilon = 1,\ \ \mu = 1,\ \ \rho = 0,\ \ \vec{j} = 0 \ \ \Rightarrow \quad \vec{D} = \varepsilon_0\vec{E}, \qquad \vec{B} = \mu_0\vec{H}.$$

Наша система приобретает следующий вид.

Первое уравнение не изменяется:

$$\boxed{\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad (1).}$$

Второе уравнение:

$$\operatorname{div}\varepsilon_0\vec{E} = 0, \quad \boxed{\operatorname{div}\vec{E} = 0 \qquad (2)}.$$

Третье уравнение:

$$\operatorname{rot}\frac{\vec{B}}{\mu_0} = \frac{\partial\left(\varepsilon_0\vec{E}\right)}{\partial t}, \qquad \operatorname{rot}\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0 \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \ \ .$$

В §18 была введена *электродинамическая константа,* в состав которой входит произведение $\mu_0\varepsilon_0$:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\mu_0\varepsilon_0} = \frac{1}{c} \quad \Rightarrow \quad \mu_0\varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}.$$

Окончательно третье уравнение:

$$\boxed{\operatorname{rot}\vec{B} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad (3).}$$

Четвёртое уравнение остаётся прежним: $\boxed{\operatorname{div}\vec{B} = 0 \quad (4)}.$

Начнём преобразования. Вычислим ротор обеих частей уравнения (1)

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{E} = \operatorname{rot}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right).$$

Сосчитаем левую и правую части отдельно. Вычислим $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{E}$ как двойное векторное произведение, которое можно представить как разность двойных скалярных произведений:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{E} = \left[\nabla, \left[\nabla, \vec{E}\right]\right] = \nabla \cdot \left(\nabla \cdot \vec{E}\right) - \vec{E} \cdot (\nabla \cdot \nabla) = \operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{E}) - (\nabla \cdot \nabla) \cdot \vec{E}.$$

Оператор $(\nabla \cdot \nabla)$ действует на вектор $\vec{E}$, хотя и стоит после него. Мы поменяли их местами, чтобы оператор действовал в обычном направлении. Скалярное умножение оператора набла на самого себя приводит к скалярному оператору, называемому оператором Лапласа (см. §6), $(\nabla \cdot \nabla) = \nabla^2 = \Delta$. Согласно уравнению (2) нашей системы уменьшаемое этой разности обращается в ноль:

$$\operatorname{div}\vec{E} = 0$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{E} = -\nabla^2\vec{E} = -\Delta\vec{E}.$$

В правой части меняем местами производную по координатам (rot) и по времени, так как порядок дифференцирования не имеет значения:

$$\operatorname{rot}\left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\vec{B}.$$

Подставляя $\operatorname{rot}\vec{B}$ из уравнения (3), получаем

$$-\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\vec{B} = -\frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = -\frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}.$$

Приравняв преобразованные левую и правую части, получаем:

$$-\Delta\vec{E} = -\frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} \qquad \text{или} \qquad \Delta\vec{E} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}.$$

$$\boxed{\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0} \qquad (5)$$

– уравнение для вектора $\vec{E}$ электромагнитного поля.

Последнее выражение можно записать и в другом виде, используя оператор Д’Аламбера:

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{E} = \Box\,\vec{E} = 0$$

где $\Box = \Delta - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ – оператор Д’Аламбера.

$$\boxed{\Box\,\vec{E} = 0} \qquad (5\text{д})$$

– уравнение для вектора $\vec{E}$ электромагнитного поля (через оператор Д’Аламбера).

Теперь преобразуем уравнение (3) нашей системы, также взяв ротор от обеих частей:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{B} = \operatorname{rot}\left(\frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right).$$

Сосчитаем  левую и правую  части по-отдельности:

По аналогии с вычислениями выше и учетом уравнения (4) левая часть:

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{B} = \mathrm{grad}\big(\mathrm{div}\,\vec{B}\big) - \nabla^2\vec{B} = -\Delta\vec{B}.$$

Правая часть с учётом уравнения (1):

$$\mathrm{rot}\left(\frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) = \frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\,\vec{E} = \frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\cdot\left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}.$$

Приравняв левые и правые части после преобразований, получаем:

$$-\Delta\vec{B} = -\frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} \quad \text{или} \quad \Delta\vec{B} = \frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}.$$

$$\boxed{\Delta\vec{B} - \frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = 0} \qquad (6)$$

− уравнение для вектора $\vec{B}$ электромагнитного поля или с использованием оператора Д'Аламбера:

$$\boxed{\Box\,\vec{B} = 0} \qquad (6д).$$

На этом все, таким доказательством Лукин  будет очень доволен.

До встречи в следующем билете, он будет еще прекраснее этого!