Закон Ома (локальная форма)

Существуют среды (например, металлы), для которых в широких пределах плотность электрического тока пропорциональна напряжённости электрического поля: $\vec{j} \sim \vec{E}$. Это закон Ома.

Вывод закона Ома

Предположим, что электрическое поле, возбуждающее электрический ток в проводящей среде, может меняться со временем. В качестве проводящей среды рассмотрим металлы (последующие рассуждения могут быть справедливы и в случае других проводящих сред электролитов, ионизованных газов и пр.) Данная среда обладает: m – масса носителя тока (электрона), e – заряд носителя тока (положительный), n – концентрация носителей тока, $\vec{u}$ – средняя скорость упорядоченного движения носителей тока, $\vec{E}$ – напряжённость внешнего электрического поля.

При включении поля на беспорядочное движение электронов накладывается упорядоченное – **дрейфовое** – движение в направлении силовых линий поля. Если внешнее электрическое поле однородно, то все носители тока движутся с одной и той же дрейфовой скоростью $\vec{u}$. Полная скорость электрона складывается из беспорядочной (тепловой) скорости $\vec{v}_т$ и упорядоченной скорости $\vec{u}$: $\vec{v} = \vec{v}_т + \vec{u}$. Движение электрона в классической механике описывается уравнением (II – закон Ньютона): $m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \vec{F}_{ст}$,

где $\vec{F} = e\vec{E}$ – сила, действующая на носитель со стороны электрического поля, $\vec{F}_{ст}$ – сила, которую он испытывает при столкновениях с ионами кристаллической решётки (сила сопротивления).

Усредним полученное выражение по всем носителям проводящей среды: $\langle m\dfrac{d\vec{v}}{dt}\rangle = \langle e\vec{E} + \vec{F}_{ст}\rangle$.

Масса всех носителей одинакова – m, время наблюдения тоже, $\langle\vec{v}\rangle = \langle\vec{v}_т + \vec{u}\rangle = \vec{u}$, тогда:

$$\langle m\frac{d\vec{v}}{dt}\rangle = m\frac{d\langle\vec{v}\rangle}{dt} = m\frac{d\vec{u}}{dt}.$$

т.к. электрическое поле, действует на все носители тока одинаково, то усредняем правую часть: $\langle e\vec{E} + \vec{F}_{ст}\rangle = \langle e\vec{E}\rangle + \langle\vec{F}_{ст}\rangle = e\vec{E} + \langle\vec{F}_{ст}\rangle$, чтобы определить усреднённое значение силы $\langle\vec{F}_{ст}\rangle$, разложим ее в ряд Тейлора по степеням $\vec{u}$, ограничившись первыми членами ряда:

$$\langle\vec{F}_{ст}\rangle = 0 - \alpha\cdot\vec{u} + O(u^2).$$

Первый член тейлоровского разложения должен быть равен 0, в противном случае под действием этой силы носители начнут дрейфовать даже при отсутствии внешнего поля. Столкновения электронов препятствуют их движению, значит $\langle\vec{F}_{ст}\rangle$ должна быть направлена против их скорости, поэтому второй член разложения со знаком минус. Если мы предположим, что *скорость упорядоченного движения электронов $\vec{u}$ мала*, всеми последующими членами ряда можно пренебречь: $\langle\vec{F}_{ст}\rangle = -\alpha\cdot\vec{u}.$ На основании размерности величин выводим α:

$$[\alpha] = \frac{[F_{ст}]}{[u]} = \frac{\text{Н}}{\frac{\text{м}}{\text{с}}} = \frac{\text{кг}\cdot\frac{\text{м}}{\text{с}^2}}{\frac{\text{м}}{\text{с}}} = \frac{\text{кг}}{\text{с}} = \frac{[m]}{[t]} \quad\Longrightarrow\quad \alpha = \frac{m}{\tau},$$

Будем считать, что m – это масса носителя тока, а τ – некоторое характерное время, в итоге: $\langle\vec{F}_{ст}\rangle = -\dfrac{m}{\tau}\cdot\vec{u}.$, а после усреднения уравнение движения носителя: $m\cdot\dfrac{d\vec{u}}{dt} = e\cdot\vec{E} - \dfrac{m}{\tau}\cdot\vec{u}$

или: $\tau\cdot\frac{d\vec{u}}{dt}+\vec{u}=\frac{e\cdot\tau}{m}\vec{E}$. Исследуем решение этого уравнения. Учтем, что скорость упорядоченного движения направлена вдоль электрического поля $\vec{u}\uparrow\uparrow\vec{E}$, поэтому от векторов мы можем перейти к проекциям на направление поля:

$$\tau\cdot\frac{du}{dt}+u=\frac{e\cdot\tau}{m}E.$$

Чтобы выяснить физический смысл τ, рассмотрим две простые ситуации:

1. Допустим, что до момента $t = 0$ носители тока под действием поля двигались с постоянной скоростью $u = u_0$. А в момент $t = 0$ поле выключили ($E = 0$). Тогда наше уравнение

$$\tau\cdot\frac{du}{dt}+u=0.$$

приобретает вид: $u|_{t=0}=u_0$ – скорость носителей в начальный момент времени. Видно, что дрейфовая скорость после выключения поля спадает до 0, при этом за время τ она уменьшается в е раз, а за время 5τ почти в 150 раз. Поскольку τ характеризует время перехода из одного стационарного состояния в другое, оно называется временем релаксации.

2. Пусть теперь до момента $t = 0$ поле отсутствовало, тогда направленное движение носителей также отсутствовало ($u = 0$), а потом его включили, и оно больше не изменялось

$$\tau\cdot\frac{du}{dt}+u=\frac{e\cdot\tau}{m}E,$$

($E = const$): $u|_{t=0}=0$ – скорость носителей в начальный момент

Будем искать решение этого уравнения как сумму двух слагаемых

$\tilde{u}=\tilde{u}(t)$ и $\frac{e\tau}{m}E=const$: $u=\tilde{u}+\frac{e\tau}{m}E$. Подстановки u в наше уравнение:

$$\tau\cdot\frac{d}{dt}\left(\tilde{u}+\frac{e\tau}{m}E\right)+\left(\tilde{u}+\frac{e\tau}{m}E\right)=\frac{e\cdot\tau}{m}E;$$

$$\tau\cdot\frac{d\tilde{u}}{dt}+\tau\cdot\underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{e\tau}{m}E\right)}_{=0}+\tilde{u}=\frac{e\cdot\tau}{m}E-\frac{e\cdot\tau}{m}E$$

$$\tau\cdot\frac{d\tilde{u}}{dt}+\tilde{u}=0.$$

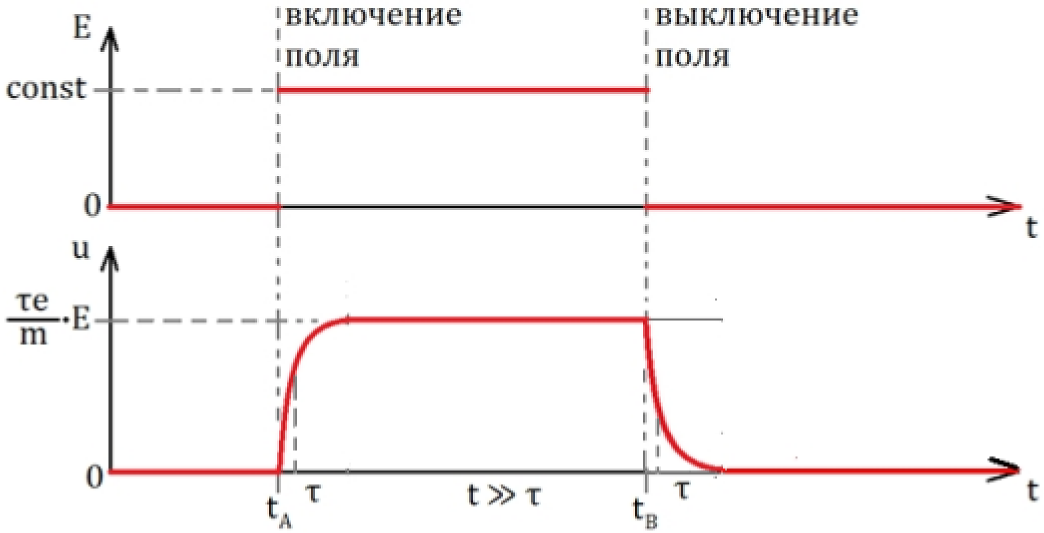
По аналогии из уравнения в первой ситуации $\tilde{u}=\tilde{u}_0\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$, тогда окончательно для самого решения u получается: $u=\frac{e\tau}{m}E+\tilde{u}_0\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$. Найдём неизвестную константу $\tilde{u}_0$:

$$0=\frac{e\tau}{m}E+\tilde{u}_0\exp\left(-\frac{0}{\tau}\right)=\frac{e\tau}{m}E+\tilde{u}_0 \quad\Rightarrow\quad \tilde{u}_0=-\frac{e\tau}{m}E.$$

$$u=\frac{e\tau}{m}E-\frac{e\tau}{m}E\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)=\frac{e\tau}{m}E\left(1-\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$$

Снова мы видим, что τ – это характерное время перехода из одного стационарного состояния в другое. Экспонента в правой части быстро затухает и при $t\gg\tau$ скорость направленного движения становится равной: $u=\frac{e\tau}{m}E$ (*)

Рассмотрим полученные решения на графиках:



Видно, что за исключением коротких переходных процессов, справедливо соотношение (*).

На самом деле мгновенно включить и выключить поле невозможно, и если переключение происходит за время $t \gg \tau$, то скорость направленного движения будет «успевать» следовать за изменением поля.

Рассмотрим теперь случай переменного поля. Допустим, что оно меняется с частотой ω: $E = E_0 \sin \omega t$.

Тогда уравнение для скорости u примет вид: $$\tau \cdot \frac{du}{dt} + u = \frac{e \cdot \tau}{m} E_0 \sin \omega t.$$

Если предположить, что наше решение тоже изменяется по гармоническому закону:

$u = u_0 \sin \omega t + u_1 \cos \omega t,$ то сосчитав производную по времени от нашего решения u:

$$\tau \cdot \frac{du}{dt} = \tau \cdot \frac{d}{dt}(u_0 \sin \omega t + u_1 \cos \omega t) = \tau \cdot \frac{d}{dt}(u_0 \sin \omega t) + \tau \cdot \frac{d}{dt}(u_1 \cos \omega t) =$$

$$= \tau u_0 \omega \cos \omega t - \tau u_1 \omega \sin \omega t = \tau \omega (u_0 \cos \omega t - u_1 \sin \omega t),$$

$$\omega \tau (u_0 \cos \omega t - u_1 \sin \omega t) + (u_0 \sin \omega t + u_1 \cos \omega t) = \frac{e \cdot \tau}{m} E_0 \sin \omega t.$$

$$(\omega \tau \cdot u_0 + u_1) \cos \omega t + (u_0 - \omega \tau \cdot u_1) \sin \omega t = \frac{e \cdot \tau}{m} E_0 \sin \omega t.$$

Очевидно, что для выполнения равенства необходимо, чтобы коэффициент при косинусе в левой части был равен 0: $\omega \tau \cdot u_0 + u_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad u_1 = -\,\omega \tau \cdot u_0.$ Если предположить, что $\omega \tau \ll 1$, то $|u_1| \ll |u_0|$ и слагаемым с u_1 в решении можно пренебречь по сравнению с u_0: $u = u_0 \sin \omega t$.

Окончательно: $$u_0 \sin \omega t = \frac{e \cdot \tau}{m} E_0 \sin \omega t.$$

Т.к. $$E = E_0 \sin \omega t \text{ и } u = u_0 \sin \omega t + \cancel{u_1 \cos \omega t} = u_0 \sin \omega t, \text{ так } u_1 \ll u_0$$

$$\vec{u} \uparrow\uparrow \vec{E}.$$

$$\vec{j} = e \cdot n \cdot \vec{u}.$$

Получим: $$u = \frac{e \cdot \tau}{m} E, \quad \boxed{\vec{u} = \frac{e \cdot \tau}{m} \vec{E},} \quad \vec{j} = e \cdot n \cdot \frac{\tau e}{m} \cdot \vec{E} = \frac{\tau e^2 n}{m} \cdot \vec{E}.$$

Коэффициент пропорциональности $\frac{\tau e^2 n}{m}$ зависит только от свойств проводящей среды и называется удельной проводимостью. Часто используется также обратная величина, называемая удельным сопротивлением:

$\boxed{\sigma = \frac{\tau e^2 n}{m}}$ — удельная проводимость, $\boxed{\rho = \frac{1}{\sigma} = \frac{m}{\tau e^2 n}}$ — удельное сопротивление.

Единицей удельного сопротивления служит $[\rho]$ = Ом · м (ом на метр), единицей удельной проводимости - $[\sigma] = \frac{1}{[\rho]} = \frac{1}{\text{Ом} \cdot \text{м}} = \frac{\text{См}}{\text{м}}$ (сименс на метр). В результате получаем:

$$\boxed{\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E} = \frac{\vec{E}}{\rho}}$$

— закон Ома в локальной форме.

Проверка допущений, сделанных при выводе закона Ома

Рассматривать допущения мы будем в меди, для оценок нам также нужна концентрация носителей тока (электронов). Ее мы найдем исходя из того, что каждый атом меди отдает один электрон «в общее пользование», то есть концентрация носителей равна концентрации атомов:

молярная масса $\mu = 63{,}5\ \frac{\text{г}}{\text{моль}}$;

плотность $\rho = 8900\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$;

удельное сопротивление $\rho_{Cu} = 16 \cdot 10^{-9}$ Ом · м.

$$n = \frac{N_A}{V_{1\ \text{моля}}} = \frac{N_A}{\frac{\mu}{\rho}} = \frac{\rho \cdot N_A}{\mu} = \frac{8900\frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \cdot 6 \cdot 10^{23}\ \text{моль}^{-1}}{63{,}5 \cdot 10^{-3}\ \frac{\text{кг}}{\text{моль}}} = 8{,}4 \cdot 10^{28}\ \text{м}^{-3}.$$

Первое предположение - скорость упорядоченного движения u мала ($u \ll v_т$):

Вычислим u, для этого воспользуемся выражением для плотности тока $\vec{j} = e \cdot n \cdot \vec{u}$. Допустимая плотность тока примерно равна $j_{max} = 10\frac{\text{А}}{\text{мм}^2} = 10^7\frac{\text{А}}{\text{м}^2}$, тогда:

$$u_{max} = \frac{j_{max}}{en} = \frac{10^7\frac{\text{А}}{\text{м}^2}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\text{Кл} \cdot 8{,}4 \cdot 10^{28}\ \text{м}^{-3}} \approx 7{,}4 \cdot 10^{-4}\frac{\text{м}}{\text{с}} = 0{,}74\ ^{\text{мм}}/_{\text{с}}$$

Скоростью теплового движения носителей, которая для электронов в металле по порядку величины равна $v_т \approx 10^6\frac{\text{м}}{\text{с}}$. сравним ее с u: $0{,}74\ ^{\text{мм}}/_{\text{с}} \lll\ll 10^6\frac{\text{м}}{\text{с}}$ Таким образом, предположение, что $u \ll v$т выполняется с огромным запасом и справедливо не только для меди, но для всех металлов и большинства электролитов.

Второе предположение - внешнее электрическое поле E изменяется медленно ($\omega\tau \ll 1$).

Вычислим время релаксации τ: $\rho_{Cu} = \frac{1}{\sigma} = \frac{m}{\tau e^2 n}$,

$$\tau = \frac{m}{\rho_{Cu} \cdot e^2 n} = \frac{9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{кг}}{16 \cdot 10^{-9}\ \text{Ом} \cdot \text{м} \cdot (1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{Кл})^2 \cdot 8{,}4 \cdot 10^{28}\ \text{м}^{-3}} \approx 2{,}6 \cdot 10^{-14}\ \text{с}$$

Наибольшей из используемых в быту частот, наверное, обладает Wi-Fi 5 (IEEE 802.11ac), который работает на частоте f = 5 ГГц. Для этой частоты

$$\omega\tau = 2\pi f\tau = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 5 \cdot 10^9\text{Гц} \cdot 2{,}6 \cdot 10^{-14}\ \text{с} \approx 8{,}2 \cdot 10^{-4} \ll 1.$$

Таким образом и второе предположение оказывается справедливым для широкого диапазона частот. **Тем не менее, данные оценки справедливы лишь для большинства, но не для всех.** Примером исключения из закона Ома могут служить ионизированные газы.