45 - Анализ волнового уравнения и его решения

📝 Этот билет ПОЛНОСТЬЮ основан на предыдущем: тут мы ссылаемся на уравнения оттуда, да и в целом, эти 2 билета лучше учить как один.

А мы продолжаем 🏋. Как сказал Гагарин: поехали! 🏁

(🆘)

Уравнения $(5, 6)$ или $(5д, 6д)$ имеют одинаковую структуру – это дифференциальные уравнения второго порядка в частных производных по времени и пространству. Попробуем выяснить, что представляют собой решения подобных уравнений. Чтобы не усложнять ещё сильнее и без того непростую задачу поиска, будем для описания пространства, в котором действует наше электромагнитное поле, использовать декартову систему координат. Тогда операторы, входящие в уравнения, можно записать следующим образом:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad \Rightarrow$$

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0;$$

$$\Delta\vec{B} - \frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2\vec{B}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\vec{B}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\vec{B}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = 0$$

Уравнения $(5, 6)$ или $(5д, 6д)$ – векторные уравнения. При переходе к проекциям векторов $\vec{E}$ и $\vec{B}$, соответствующим выбранной системе координат, получится шесть одинаковых уравнений:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0 \quad \text{или} \quad \square\, E_x = 0;$$

и аналогично для остальных компонент вектора $\vec{E}$: $\square\, E_y = 0$; $\square\, E_z = 0$;

и вектора $\vec{B}$: $\square\, B_x = 0$; $\square\, B_y = 0$; $\square\, B_z = 0$.

Поскольку все уравнения имеют одинаковый вид, рассмотрим их решения для произвольной функции координат и времени $a(x, y, z, t)$

$$\boxed{\frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2 a}{\partial t^2} = 0.} \quad (5п)$$

Упростим нашу задачу, предположим, что a зависит только от x и t и не зависит от y и z, то есть $a = a(x,t)$ Тогда уравнение для a упрощается – из него уходят производные по y и z

$$\frac{\partial^2 a}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2 a}{\partial t^2} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2 a}{\partial t^2} \qquad (5\text{п}').$$

Производные по x и t могут быть равны если, например, a зависит от этих переменных одинаково. Представим решение в виде функции, одновременно зависящей от координаты x точки в пространстве и от времени:

$$a = a(x - ct) = a(\xi)$$

где $\xi = x - ct$ (x и t – переменные, c – некоторая константа, совпадающая с той, что стоит перед производной по времени). Проверим, является ли предложенная нами функция решением этого дифференциального уравнения. Для этого в первую очередь найдём все производные второго порядка, присутствующие в уравнении.

$$\frac{\partial a}{\partial x} = \frac{\partial a}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial a}{\partial \xi}, \quad \text{т. к.}\cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x - ct\ ) = 1, \qquad \text{то } \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} \quad \text{и}$$

$$\frac{\partial^2 a}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\cdot\frac{\partial a}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial a}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 a}{\partial \xi^2}.$$

С производной по времени ситуация аналогичная

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \frac{\partial a}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial t} = -c\frac{\partial a}{\partial \xi}, \qquad \text{т. к.}\cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(x - ct\ ) = -c, \qquad \text{то } \frac{\partial}{\partial t} = -c\frac{\partial}{\partial \xi}.$$

$$\frac{\partial^2 a}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial a}{\partial t}\right) = -c\frac{\partial}{\partial \xi}\left(-c\frac{\partial a}{\partial \xi}\right) = (-c)^2\cdot\frac{\partial}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial a}{\partial \xi} = c^2\cdot\frac{\partial^2 a}{\partial \xi^2}$$

Теперь подставим все найденные производные в само уравнение (5п):

$$\frac{\partial^2 a}{\partial \xi^2} - \frac{1}{c^2}\cdot c^2\cdot\frac{\partial^2 a}{\partial \xi^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 a}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 a}{\partial \xi^2} = 0.$$

Полученное равенство свидетельствует о том, что функция вида $a = a(x - ct)$ действительно является решением уравнения (5п). Несложно показать, что решением уравнения (5п$'$) является также функция вида $a = a(x + ct) = a(\eta)$, $\eta = x + ct$, для этого достаточно в предыдущих формулах заменить $-c$ на $+c$.

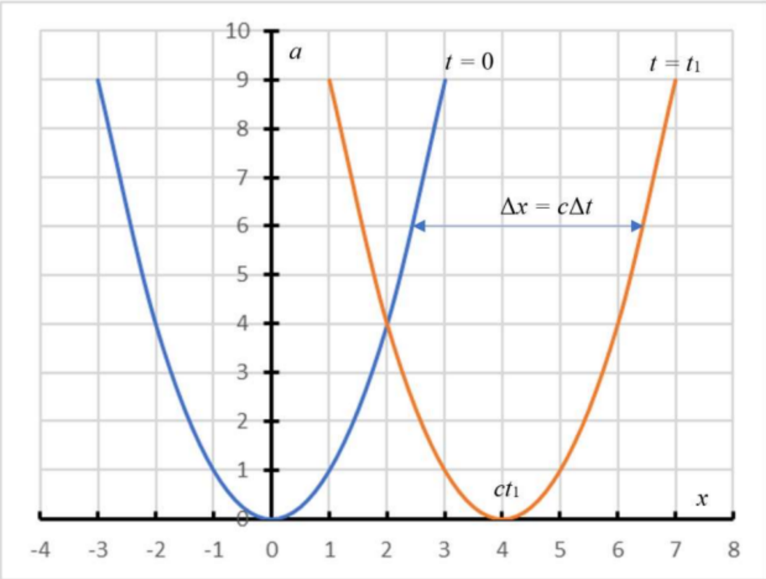
Что же у нас получилось, и какими свойствами обладает полученное решение?

Для ответа на поставленный вопрос рассмотрим какую-нибудь конкретную функцию такого вида, и изучим её поведение. Пусть

$$a = \xi^2 = (x - ct)^2, \quad \xi = x - ct.$$

Выберем два момента времени: $t = 0$ и $t = t_1$ – и построим соответствующие графики зависимости $a(x,t)$: $x = \xi + ct$.

Видно, что с течением времени график функции a перемещается вдоль координаты x, не изменяя своей формы. Это значит, что найденное решение описывает *волну*, распространяющуюся в пространстве (в нашем случае в положительном направлении оси OX). За промежуток времени t_1 все точки функции смещаются вдоль оси на расстояние равное ct_1, т.е. константа c, стоящая в функции, есть скорость распространения волны. Аналогичным образом ведут себя все функции, зависящие от $\xi = x - ct$. Все функции, зависящие $\eta = x + ct$ также описывают воны, но распространяющиеся в противоположном направлении. Уравнение вида (5п), решением которого является волновая функция, называется *волновым уравнением*.



Волновое уравнение является простейшим из уравнений, описывающих распространение волн в пространстве. Большинство реальных волновых процессов описывается более сложными и часто нелинейными уравнениями, как, например, волны на поверхности жидкости.

P.S.: Записано 🎬, но это было больно, так что, честно говоря, лучше написать все это добро на лист А4 (и не говорить об этом Лукину)