11. Связь между напряженностью и потенциалом. Теорема единственности.

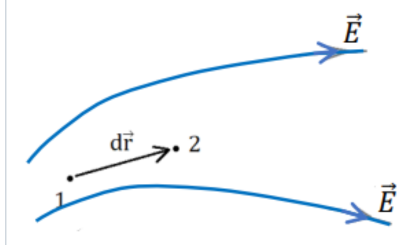
$\varphi = \varphi(\vec{r})$ - рассматриваемое поле потенциальное(консервативное)

$\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r} = q\vec{E} \cdot d\vec{r};\ \delta A = -dW = qd\varphi;$ Получаем: $\vec{E} \cdot d\vec{r} = -d\varphi;$

Введем в ДСК, тогда: $\vec{E} = E_x\vec{i} + E_y\vec{j} + E_z\vec{k};\ d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$

Пусть перемещение идет вдоль x, тогда: $dr = dx\vec{i};\ (E_x\vec{i} + E_y\vec{j} + E_z\vec{k})dx\vec{i} = -d\varphi$

$E_x i \cdot dxi = -d\varphi;\ E_x dx = -d\varphi;\ E_x = \dfrac{-d\varphi}{dx} \Rightarrow E_x = \dfrac{\delta\varphi}{\delta x}$; Соответственно: $E_y = \dfrac{\delta\varphi}{\delta y};\ E_z = \dfrac{\delta\varphi}{\delta z}$



$\vec{E} = -\dfrac{d\varphi}{dx}\vec{i} - \dfrac{d\varphi}{dy}\vec{j} - \dfrac{d\varphi}{dz}\vec{k} = -\left(\vec{i}\dfrac{\delta}{\delta x} + \vec{j}\dfrac{\delta}{\delta y} + \vec{k}\dfrac{\delta}{\delta z}\right)\varphi \Rightarrow \vec{E} = -\nabla\varphi = -grad\varphi$; (Векторно дифференциальный оператор)

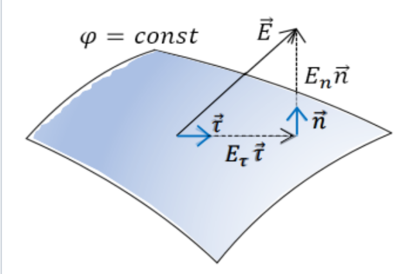
Если действует скаляр $= grad\varphi$ (вектор градиент)

Эквипотенциальная поверхность (поверхность равного потенциала) $\varphi = const$

$\vec{E} = E_n\vec{n} + E_\tau\vec{\tau};\ dr = dr\vec{\tau};\ \vec{E}d\vec{r} = -d\varphi;\ (E_n\vec{n} + E_\tau\vec{\tau})dr\vec{\tau} = E_\tau dr = -d\varphi$

$d\varphi = 0$ - Нет изменения; $E_\tau dr = 0;\ dr \neq 0 \Rightarrow E_\tau = 0$

$\vec{E} = E_n\vec{n}$, т.е. он вблизи эквипотенциальной поверхности E направлено $\perp$



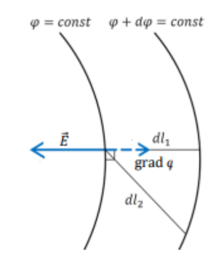
Рассмотрим 2 эквипотенциальные поверхности

$dl_2 > dl_1$

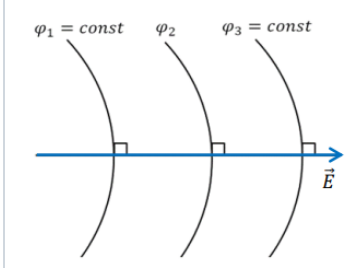
$\dfrac{d\varphi}{dl_2} < \dfrac{d\varphi}{dl_1}$ - изменение быстрее

$grad\varphi$ - направление наискорейшего увеличения

$\vec{E}$ - наискорейшего уменьшения



На практике $\varphi_3 > \varphi_2 > \varphi_1$



Теорема единственности

Теорема единственности гласит, что нахождение потенциала по известной плотности заряда $\rho = \rho(r)$ в некоторой области пространство имеет единственное решение, если известны значения потенциала в каждой точке поверхности S, ограничивающей эту область. Если $S \to \infty$, то $\varphi \to 0$

$$\begin{cases} \Delta\varphi = \dfrac{-\rho}{\varepsilon_0} & \text{- Теорема единственности} \\ \varphi|_s = \varphi_0 & \text{- Граничные условия} \end{cases} \text{ - имеет единственное решение}$$

Дано: $\rho = \rho(r)$

$$\nabla(-\nabla\varphi) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \begin{cases} \text{Th.Гаусса в дифференциальной форме: } div\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow \nabla\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \vec{E} = -grad\varphi \Rightarrow \vec{E} = -\nabla\varphi \end{cases} \Rightarrow -\Delta\varphi \text{ - Лапласиан}$$

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \text{ - Уравнение Пауссона}$$

част. случ. $\rho = 0:\ \Delta\varphi = 0$ - Уравнение Лапласса.