

## 5. Кинематика твердого тела: поступательное и плоское движение.

### Число степеней свободы системы.

**1) Число степеней свободы системы  $i$**  – число независимых параметров, с помощью которых описывается движение системы (*с помощью которых может быть задано положение системы в пространстве*).

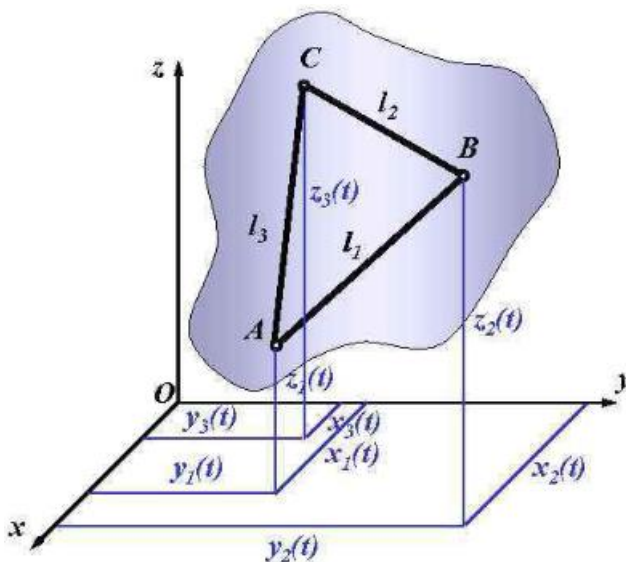
Пример: положение материальной точки (МТ) в пространстве определяется значениями трех ее координат (декартовых  $x, y, z$ ; сферических  $r, \theta, \varphi$  и т.д.) В соответствии с этим число степеней свободы МТ  $i = 3$ .

Описать движение одной МТ можно через 3 уравнения ( $x=x(t), y=y(t), z=z(t)$ ). Движение  $N$  материальных точек описывается  $3N$  уравнениями ( $x_1(t) \dots x_N(t), y_1(t) \dots y_N(t), z_1(t) \dots z_N(t)$ ).

Пусть имеется механическая система, состоящая из произвольного числа  $N$  МТ. Если эти точки движутся без всяких ограничений, то для мгновенного определения их положения надо задать  $3N$  координат  $\Rightarrow i=3N$ . Однако в некоторых случаях свобода перемещения точек ограничена. На  $3N$  координат налагаются доп. условия, называемые *связями* ( $f$ ). Тогда данная механическая система будет иметь  $i=3N-f$ .

**2) Абсолютно твердое тело (АТТ)** – макроскопическое тело, размеры и форма которого в процессе движения сохраняются. (*Тело состоит из большого числа МТ, но изменением его размера и формы можно пренебречь*)

1-й способ вычисления степеней свободы:



Положение АТТ в пространстве можно указать, задав координаты любых трех его точек, не лежащих на одной прямой. Для  $N=3$  число степеней свободы системы  $i = 3N - n_{\text{связей}} = 3*3 - 3 = 6$ . В процессе этого движения размеры и форма АТТ не изменяются, значит расстояния между этими точками будут фиксированными ( $n_{\text{связей}} = \text{кол-во отрезков, соединяющих точки} = 3$ ).

2-ой способ вычисления степеней свободы:

Положение АТТ в пространстве можно задать тремя координатами какой-либо его точки (напр., центра тяжести) и углами поворота вокруг трех осей ДСК, проходящих через эту точку. Получаем  $i = 3 + 3 = 6$ .

Получив количество степеней свободы двумя способами, можем сказать, что любое движение АТТ можно разложить на поступательное и вращательное.

**3) Поступательное движение (параллельный перенос) АТТ** – это движение, при котором перемещение всех точек одинаково. При поступательном движении все точки АТТ двигаются по одинаковым траекториям, и любая прямая, связанная с телом, остается параллельной своему первоначальному положению.

**Поступательное движение твердого тела можно описывать через движение одной его МТ**, т.к. скорости и ускорения всех точек одинаковы. Доказательство:

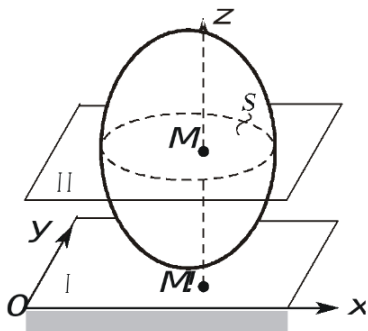
Рассмотрим промежуток времени  $dt$ :

$i = 1 \dots N$ , где  $i$  – номер точки

$d\vec{r}_i = d\vec{r}$  – перемещение каждой точки (все одинаковы)  $\Rightarrow \vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$  – скорости движения всех точек одинаковы и  $\vec{a}_i = \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \vec{a}$  – ускорения всех точек тоже одинаковы.

**4) Плоское движение АТТ** – это движение, при котором траектории всех точек тела лежат в параллельных плоскостях. Траектории точек при плоском движении – плоские кривые.

Так как траектории всех точек лежат в параллельных плоскостях, то для описания движения достаточно следить за одной плоскостью АТТ.



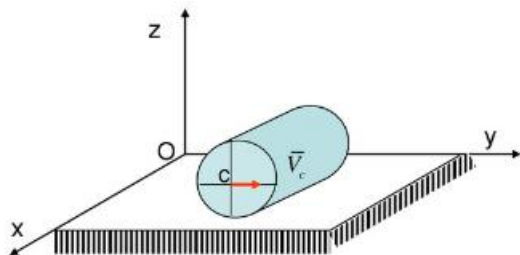
Док-во: I – неподвижная плоскость, S – сечение тела плоскостью II, параллельной пл. I

Тело твердое  $\Rightarrow MM' = const.$

$I \parallel II \Rightarrow MM'$  остается  $\perp I \Rightarrow$  движение  $MM'$  поступательно  $\Rightarrow$  все точки прямой  $MM'$  движутся одинаково  $\Rightarrow$  изучаем движение только сечения S в плоскости II

Плоское движение АТТ можно представить как совокупность двух основных движений:

- поступательное движение тела вместе с некоторой точкой тела (полюсом)
- вращательное движение вокруг оси, проходящей через полюс перпендикулярно плоскости движения



Пример: качение колеса по прямолинейному рельсу; движение конуса, основание которого скользит по данной неподвижной плоскости.

$\omega = \left| \frac{d\varphi}{dt} \right|$ ;  $\varepsilon = \left| \frac{d\omega}{dt} \right| = \left| \frac{d^2\varphi}{dt^2} \right|$  – угловая скорость и угловое ускорение

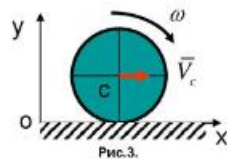


Рис.3.

Число степеней свободы при плоском движении  $i = 3$ . Выберем точку тела А – полюс. Две координаты зададут перемещение полюса, а третья – координата угла поворота – задаст вращение вокруг полюса:

$x_A = f_1(t), y_A = f_2(t), \varphi = f_3(t)$  – уравнение плоского движения АТТ.

