

Содержание:

| | |
|---|--|
| 1. Численные методы решения нелинейного уравнения с одной неизвестной..... | |
| 1.1. Постановка задачи..... | |
| 1.2. Шаговый метод..... | |
| 1.3. Метод половинного деления..... | |
| 1.4. Метод Ньютона..... | |
| 1.5. Метод простой итерации..... | |
| 2. Численные методы решения системы линейных уравнений..... | |
| 2.1. Постановка задачи..... | |
| 2.2. Метод Гаусса..... | |
| 2.3. Метод простой итерации..... | |
| 2.4. Метод Зейделя..... | |
| 3. Численные методы решения задачи аппроксимации..... | |
| 3.1. Постановка задачи..... | |
| 3.2. Решение задачи интерполяции (кусочно-линейной и квадратичной интерполяции) методом неопределенных коэффициентов..... | |
| 3.3. Решение задачи интерполяции (кусочно-линейной и квадратичной интерполяции) с помощью полинома Лагранжа..... | |
| 3.4. Решение задачи аппроксимации (нахождение полиномов первой и второй степени) методом наименьших квадратов..... | |
| 4. Численные методы решения. Реализация в пакете Excel..... | |

| | | | | | | |
|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--|------|
| Инв. № подл. | Подп. и дата | Взам. инв. № | Инв. № дубл. | Подп. и дата | | Лист |
| Изм. | Лист | № докум. | Подп. | Дата | | |

1. Численные методы решения нелинейного уравнения с одной неизвестной.

1.1 Постановка задачи.

Дано нелинейное уравнение $2x^2 - 11x + 12 = 0$, интервал поиска корня $[2; 5]$ и шаг $h = 0,3$.

Требуется:

- отделить первый корень уравнения шаговым методом;

- уточнить значение корня методом половинного деления с точностью $\epsilon = 0,01$;

- уточнить значение корня методом Ньютона с точностью $\epsilon = 0,001$;

- уточнить значение корня методом простой итерации с точностью $\epsilon = 0,03$.

1.2 Шаговый метод.

Построим таблицу в соответствии с алгоритмом.

| a | b | F(a) | F(b) | F(a)*F(b) < 0 |
|-----|-----|-------|-------|---------------|
| 2 | 2,3 | -2 | -2,72 | нет |
| 2,3 | 2,6 | -2,72 | -3,08 | нет |
| 2,6 | 2,9 | -3,08 | -2,72 | нет |
| 2,9 | 3,2 | -2,72 | -2 | нет |
| 3,2 | 3,5 | -2 | -0,92 | нет |
| 3,5 | 3,8 | -0,92 | 0,52 | да |
| 3,8 | 4,1 | 0,52 | 2,32 | нет |
| 4,1 | 4,4 | 2,32 | 4,48 | нет |
| 4,4 | 4,7 | 4,48 | 7 | нет |

$$F(2) = 2 \cdot 2^2 - 11 \cdot 2 + 12 = -2$$

$$F(2,3) = 2 \cdot (2,3)^2 - 11 \cdot 2,3 + 12 = -2,72$$

$$F(2,6) = 2 \cdot (2,6)^2 - 11 \cdot 2,6 + 12 = -3,08$$

$$F(2,9) = 2 \cdot (2,9)^2 - 11 \cdot 2,9 + 12 = -3,08$$

Изм. № подл. Подп. и дата. Взам. инв. №. Инв. № докл. Подп. и дата. Инв. № подл.

$$F(3,2) = 2 \cdot (3,2)^2 - 11 \cdot 3,2 + 12 = -2,72$$

$$F(3,5) = 2 \cdot (3,5)^2 - 11 \cdot 3,5 + 12 = -2$$

$$F(3,8) = 2 \cdot (3,8)^2 - 11 \cdot 3,8 + 12 = -0,92$$

$$F(4,1) = 2 \cdot (4,1)^2 - 11 \cdot 4,1 + 12 = 0,52$$

$$F(4,4) = 2 \cdot (4,4)^2 - 11 \cdot 4,4 + 12 = 2,32$$

$$F(4,7) = 2 \cdot (4,7)^2 - 11 \cdot 4,7 + 12 = 4,48$$

$$F(5) = 2 \cdot 5^2 - 11 \cdot 5 + 12 = 7$$

Ответ: корень расположен на интервале $[3,8; 4,1]$.

1.3 Метод половинного деления.

| a | x | b | F(a) | F(x) | F(a)+F(x) < 0 |
|------|-------|-------|--------|--------|---------------|
| 3,8 | 3,95 | 4,1 | -0,92 | -0,245 | Нет |
| 3,95 | 4,025 | 4,1 | -0,245 | 0,126 | Да |
| 3,95 | 3,99 | 4,025 | -0,245 | -0,05 | Нет |
| 3,99 | 4,008 | 4,025 | -0,05 | 0,04 | Да |
| 3,99 | 4,0 | 4,008 | -0,05 | 0 | Корень |

$$\varepsilon = 0,01.$$

$$x = \frac{a+b}{2}$$

$$x = \frac{3,8+4,1}{2} = 3,95$$

$$F(3,95) = 2 \cdot (3,95)^2 - 11 \cdot 3,95 + 12 = -0,245$$

$$x = \frac{3,95+4,1}{2} = 4,025$$

$$F(4,025) = 2 \cdot (4,025)^2 - 11 \cdot 4,025 + 12 = 0,126$$

$$x = \frac{3,95+4,025}{2} = 3,99$$

$$F(3,99) = 2 \cdot (3,99)^2 - 11 \cdot 3,99 + 12 = -0,05$$

$$x = \frac{3,99+4,025}{2} = 4,008$$

$$F(4,008) = 2 \cdot (4,008)^2 - 11 \cdot 4,008 + 12 = 0,04$$

$$x = \frac{3,99+4,008}{2} = 4,0$$

Подп. и дата

Инт. № докл.

Взам. инв. №

Подп. и дата

Инт. № подл.

| | | | | |
|------|------|----------|-------|------|
| Изм. | Лист | № докум. | Подп. | Дата |
|------|------|----------|-------|------|

Лист

$$F(4,0) = 2 \cdot (4,0)^2 - 11 \cdot 4,0 + 12 = 0$$

Ответ: Корнем на интервале отрезка $[3,8; 4,1]$ будет являться $x = 4,0$ с погрешностью $\epsilon = 0,01$.

1.4 Метод Ньютона.

| i | x_i | $F(x_i)$ | $F'(x_i)$ | $F(x_i) \leq 0,001$ |
|-----|-------|----------|-----------|---------------------|
| 0 | 4,1 | 0,52 | 5,4 | нет |
| 1 | 4,004 | 0,34 | 5,016 | нет |
| 2 | 3,936 | -0,31 | 4,744 | да |

$$\epsilon = 0,001$$

$$F'(x) = 4x - 11$$

$$F''(x) = 4$$

$$F(3,8) = -0,92$$

$$F(4,1) = 0,52$$

$$F'(4,1) = 4 \cdot 4,1 - 11 = 5,4$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{F(x_i)}{F'(x_i)}$$

$$x_1 = 4,1 - \frac{0,52}{5,4} = 4,004$$

$$F(4,004) = 2 \cdot (4,004)^2 - 11 \cdot 4,004 + 12 = 0,34$$

$$F'(4,004) = 4 \cdot 4,004 - 11 = 5,016$$

$$x_2 = 4,004 - \frac{0,34}{5,016} = 3,936$$

$$F(3,936) = 2 \cdot (3,936)^2 - 11 \cdot 3,936 + 12 = -0,31$$

$$F'(3,936) = 4 \cdot 3,936 - 11 = 4,744$$

Ответ: Методом Ньютона получили корень $x = 3,936$, с точностью $\epsilon = 0,001$.

Имя, № подл.

Подп. и дата

Имя, № подл.

Подп. и дата

Имя, № подл.

| | | | | |
|-----|---------|----------|-------|------|
| Имя | № подл. | № докум. | Подп. | Дата |
|-----|---------|----------|-------|------|

Лист

1.5 Метод простой итерации

$$\varepsilon = 0,03$$

$$|\varphi'(x)| < 1$$

$$\textcircled{1} \quad x = 2x^2 - 10x + 12$$

$$\varphi(x) = 2x^2 - 10x + 12$$

$$\varphi'(x) = 4x - 10$$

$$\varphi'(3,8) = 5,2$$

$$\varphi'(4,1) = 6,4$$

Условие не выполнено

$$|5,2| > 1$$

$$|6,4| > 1$$

$$\textcircled{2} \quad x = \sqrt{\frac{11x - 12}{2}}$$

$$x = \sqrt{\frac{11}{2}x - 6}$$

$$\varphi(x) = \sqrt{5,5x - 6}$$

$$\varphi'(x) = \frac{2}{\sqrt{5,5x - 6}}$$

$$\varphi'(3,8) = \frac{2}{\sqrt{5,5 \cdot 3,8 - 6}} = 0,55$$

$$\varphi'(4,1) = \frac{2}{\sqrt{5,5 \cdot 4,1 - 6}} = 0,49$$

Условие сход. выполнено.

$$|0,55| < 1 ; |0,49| < 1$$

$$x_{i+1} = \sqrt{5,5x_i - 6}$$

| i | x_i | $F(x_i)$ | $ F(x_i) < 0,03$ |
|-----|-------|----------|-------------------|
| 0 | 3,8 | -0,92 | нет |
| 1 | 3,86 | -0,66 | нет |
| 2 | 3,90 | -0,46 | нет |
| 3 | 3,931 | -0,338 | нет |
| 4 | 3,95 | -0,23 | нет |
| 5 | 3,97 | -0,15 | нет |
| 6 | 3,98 | -0,1 | нет |

Изм. № подл.

Взам. инв. №

Инд. № докл.

Подп. и дата

Инд. № подл.

| | | | | |
|------|------|-----------|-------|------|
| Изм. | Лист | № док.им. | Подп. | Дата |
|------|------|-----------|-------|------|

Лист

| i | x_i | $F(x_i)$ | $ F(x_i) < 0,03$ |
|-----|-------|----------|-------------------|
| 7 | 3,99 | -0,05 | нет |
| 8 | 4,0 | 0 | корень |

$$x_1 = \sqrt{5,5 \cdot 3,8 - 6} = 3,86$$

$$F(3,86) = 2 \cdot (3,86)^2 - 11 \cdot 3,86 + 12 = -0,66$$

$$x_2 = \sqrt{5,5 \cdot 3,86 - 6} = 3,90$$

$$F(3,90) = 2 \cdot (3,90)^2 - 11 \cdot 3,90 + 12 = -0,46$$

$$x_3 = \sqrt{5,5 \cdot 3,90 - 6} = 3,931$$

$$F(3,931) = 2 \cdot (3,931)^2 - 11 \cdot 3,931 + 12 = -0,338$$

$$x_4 = \sqrt{5,5 \cdot 3,931 - 6} = 3,95$$

$$F(3,95) = 2 \cdot (3,95)^2 - 11 \cdot 3,95 + 12 = -0,23$$

$$x_5 = \sqrt{5,5 \cdot 3,95 - 6} = 3,97$$

$$F(3,97) = 2 \cdot (3,97)^2 - 11 \cdot 3,97 + 12 = -0,15$$

$$x_6 = \sqrt{5,5 \cdot 3,97 - 6} = 3,98$$

$$F(3,98) = 2 \cdot (3,98)^2 - 11 \cdot 3,98 + 12 = -0,1$$

$$x_7 = \sqrt{5,5 \cdot 3,98 - 6} = 3,99$$

$$F(3,99) = 2 \cdot (3,99)^2 - 11 \cdot 3,99 + 12 = -0,05$$

$$x_8 = \sqrt{5,5 \cdot 3,99 - 6} = 4,0$$

$$F(4,0) = 2 \cdot 4^2 - 11 \cdot 4 + 12 = 0$$

Ответ: Уточненное значение корня $x \approx 4,0$.

2. Численные методы решения
системы линейных уравнений.

2.1 Постановка задачи.

Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} -9x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1 \\ -4x_1 - 2x_2 + 7x_3 = -1 \end{cases}$$

Подп. и дата

Инд. № докл.

Взам. инв. №

Подп. и дата

Инд. № подл.

| | | | | |
|------|------|----------|-------|------|
| Изм. | Лист | № докум. | Подп. | Дата |
|------|------|----------|-------|------|

Лист

- Требуется решить систему уравнений, используя:
- метод Гаусса (решение в обыкновенных дробях);
 - метод простой итерации (3 итерации);
 - метод Зейделя (3 итерации).

2.2 Метод Гаусса.

$$\begin{array}{l} A_1 \quad -9 \quad 2 \quad 3 \quad | \quad 4 \\ A_2 \quad 1 \quad -5 \quad 3 \quad | \quad 1 \\ A_3 \quad -4 \quad -2 \quad 7 \quad | \quad -1 \end{array}$$

I Прямой код.

$$\begin{array}{l} A_1 \quad 1 \quad -5 \quad 3 \quad | \quad 1 \\ A_2 \quad -9 \quad 2 \quad 3 \quad | \quad 4 \quad A_2 + 9A_1 \\ A_3 \quad -4 \quad -2 \quad 7 \quad | \quad -1 \quad A_3 + 4A_1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} A_1 \quad 1 \quad -5 \quad 3 \quad | \quad 1 \\ A_2 \quad 0 \quad -43 \quad 30 \quad | \quad 13 \quad A_2 : (-43) \\ A_3 \quad 0 \quad -22 \quad 19 \quad | \quad 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} A_1 \quad 1 \quad -5 \quad 3 \quad | \quad 1 \\ A_2 \quad 0 \quad 1 \quad -0,7 \quad | \quad -0,3 \\ A_3 \quad 0 \quad -22 \quad 19 \quad | \quad 3 \quad A_3 + 22 \cdot A_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} A_1 \quad 1 \quad -5 \quad 3 \quad | \quad 1 \\ A_2 \quad 0 \quad 1 \quad -0,7 \quad | \quad -0,3 \\ A_3 \quad 0 \quad 0 \quad 3 \quad | \quad -3 \end{array}$$

II Обратный код

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1 \\ \quad x_2 - 0,7x_3 = -0,3 \\ \quad \quad 3x_3 = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 5(-1) - 3(-1) + 1 = -1 \\ x_2 = -0,3 + 0,7 \cdot (-1) = -1 \\ x_3 = -1 \end{cases}$$

Проверка:

$$-9(-1) + 2(-1) + 3(-1) = 4$$

$$9 - 2 - 3 = 4$$

$$4 = 4$$

$$-1 - 5(-1) + 3(-1) = 1$$

$$-1 + 5 - 3 = 1$$

$$1 = 1$$

$$-4(-1) - 2(-1) + 7(-1) = -1$$

$$4 + 2 - 7 = -1$$

$$-1 = -1$$

Ответ: $x_1 = -1$, $x_2 = -1$, $x_3 = -1$ - решение системы уравнений.

2.3 Метод простой итерации.

Дана система уравнений третьего порядка:

$$\begin{cases} -9x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1 \\ -4x_1 - 2x_2 + 7x_3 = -1 \end{cases}$$

$$|-9| > |2| + |3| - \text{вып.}$$

$$|-5| > |1| + |3| - \text{вып.}$$

$$|7| > |-4| + |2| - \text{вып.}$$

$$x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = 0$$

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = \frac{4 - 2x_2^{(k-1)} - 3x_3^{(k-1)}}{-9} \\ x_2^{(k)} = \frac{x_1^{(k-1)} + 3x_3^{(k-1)} - 1}{-5} \\ x_3^{(k)} = \frac{4x_1^{(k-1)} + 2x_2^{(k-1)} - 1}{7} \end{cases}$$

Инд. № докл.

Инд. № докл.

Взам. инв. №

Подп. и дата

Инд. № подл.

Изм. / лист № докум. Подп. Дата

Лист

$k=1$

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \frac{4-2 \cdot 0-3 \cdot 0}{-9} = -\frac{4}{9} = -0,44 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2^{(1)} = -\frac{1}{5} = -0,2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3^{(1)} = -\frac{1}{7} = -0,143 \end{cases}$$

$$|x_1^{(0)} - x_1^{(1)}| = |0 - 0,44| = 0,44 > \varepsilon \text{ не т}$$

$$|x_2^{(0)} - x_2^{(1)}| = |0 - 0,2| = 0,2 > \varepsilon \text{ не т}$$

$$|x_3^{(0)} - x_3^{(1)}| = |0 - 0,143| = 0,143 > \varepsilon \text{ не т}$$

 $k=2$

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = \frac{4-2x_2^{(1)}-3x_3^{(1)}}{-9} = \frac{4+0,8+0,45}{-9} = -0,583 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2^{(2)} = \frac{x_1^{(1)}-3x_3^{(1)}-1}{5} = \frac{-0,44+0,429-1}{5} = -1,011 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3^{(2)} = \frac{4x_1^{(1)}+2x_2^{(1)}-1}{7} = \frac{-7,04-0,4-1}{7} = -1,21 \end{cases}$$

$$|x_1^{(1)} - x_1^{(2)}| = |-0,44 + 0,583| = 0,143 > \varepsilon \text{ не т}$$

$$|x_2^{(1)} - x_2^{(2)}| = |-0,2 + 1,011| = 0,811 > \varepsilon \text{ не т}$$

$$|x_3^{(1)} - x_3^{(2)}| = |-0,143 + 1,21| = 1,063 > \varepsilon \text{ не т}$$

 $k=3$

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = \frac{4-2x_2^{(2)}-3x_3^{(2)}}{-9} = \frac{4+2,022+3,63}{-9} = -1,07 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2^{(3)} = \frac{x_1^{(2)}-3x_3^{(2)}-1}{5} = \frac{-0,583+3,63-1}{5} = -1,024 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3^{(3)} = \frac{4x_1^{(2)}+2x_2^{(2)}-1}{7} = \frac{-2,332-2,022-1}{7} = -0,76 \end{cases}$$

$$|x_1^{(2)} - x_1^{(3)}| = |-0,583 + 1,07| = 0,487 > \varepsilon \text{ не т}$$

$$|x_2^{(2)} - x_2^{(3)}| = |-1,011 + 1,024| = 0,013 > \varepsilon \text{ не т}$$

$$|x_3^{(2)} - x_3^{(3)}| = |-1,21 + 0,76| = 0,45 > \varepsilon \text{ не т}$$

.....

Ответ: $x_1 = 1,07$, $x_2 = -1,024$, $x_3 = -0,76$ решение системы линейных алгебраических уравнений, полученное с точностью $\varepsilon = 0,5$.

Подп. и дата

Инд. № докл.

Взам. инв. №

Подп. и дата

Инд. № подл.

| | | | | |
|------|------|----------|-------|------|
| Изм. | Лист | № докум. | Подп. | Дата |
| | | | | |

Лист

2.4 Метод Зейделя.

Дана система уравнений третьего порядка:

$$\begin{cases} -9x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1 \\ -4x_1 - 2x_2 + 7x_3 = -1 \end{cases}$$

$$\chi_1^{(0)} = \chi_2^{(0)} = \chi_3^{(0)} = 0$$

$$|-9| > |2| + |3| \text{ - benar}$$

$$|-5| \geq |1| + |3| - \text{bound-ae}$$

$$|7| > |-4| + |2| - \text{bom-cu}$$

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = \frac{4 - 2x_2^{(k-1)} - 3x_3^{(k-1)} - 9}{x_1^{(k)} + 3x_3^{(k-1)} - 1} \\ x_2^{(k)} = \frac{5}{4x_1^{(k)} + 2x_2^{(k)} - 1} \\ x_3^{(k)} = \frac{7}{4x_1^{(k)} + 2x_2^{(k)} - 1} \end{cases}$$

$k=1$

$$\left\{ \begin{aligned} x_1^{(1)} &= \frac{4 - 2x_2^{(0)} - 3x_3^{(0)}}{-9} = \frac{4 - 2 \cdot 0 - 3 \cdot 0}{-9} = -\frac{4}{9} = -0.44 \\ x_2^{(1)} &= \frac{x_1^{(1)} + 3x_3^{(0)} - 1}{5} = \frac{-0.44 + 3 \cdot 0 - 1}{5} = -0.288 \\ x_3^{(1)} &= \frac{4x_1^{(1)} + 2x_2^{(1)} - 1}{7} = \frac{4(-0.44) + 2(-0.288) - 1}{7} = -0.696 \end{aligned} \right.$$

$$|x_1^{(0)} - x_1^{(1)}| = |0 + 0,44| = 0,44 > \varepsilon \text{ нет}$$

$$|x_2^{(0)} - x_2^{(1)}| = |0 + 0.288| = 0.288 > \epsilon \quad \text{нет}$$

$$|K_3^{(0)} - K_3^{(1)}| = |0 + 0,696| = 0,696 > \epsilon \text{ не}$$

$k=2$

$$x_1 = \frac{4 - 2x_2 - 3x_3}{-9} = \frac{4 - 2(-0.288) - 3(-0.656)}{-9} = -0.74$$

$$x_2^{(2)} = \frac{x_1^{(2)} - 3x_3^{(1)} - 1}{5} = \frac{-0.74 + 3(-0.696) - 1}{5} = -0.92$$

$$x_3^{(2)} = \frac{4x_1^{(2)} + 2x_2^{(2)} - 1}{7} = \frac{4(-0,74) + 2(-0,92) - 1}{7} = -0,829$$

$$|x_1^{(1)} - x_1^{(2)}| = |-0,44 + 0,74| = |0,3| = 0,3 > \varepsilon \quad \text{нет}$$

$$|x_2^{(1)} - x_2^{(2)}| = |-0,238 + 0,92| = |0,682| = 0,682 > \varepsilon \quad \text{нет}$$

$$|x_3^{(1)} - x_3^{(2)}| = |-0,696 + 0,829| = |0,133| = 0,133 > \varepsilon \quad \text{нет}$$

$$k = 3$$

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = \frac{4 - 2x_2^{(2)} - 3x_3^{(2)}}{-9} = \frac{4 - 2(-0,92) - 3(-0,829)}{-9} = -0,93 \\ x_2^{(3)} = \frac{x_1^{(3)} + 3x_3^{(2)} - 1}{5} = \frac{-0,93 + 3(-0,829) - 1}{5} = -0,884 \\ x_3^{(3)} = \frac{x_1^{(3)} + 2x_2^{(3)} - 1}{7} = \frac{-0,93 + 2(-0,884) - 1}{7} = -0,528 \end{cases}$$

$$|x_1^{(2)} - x_1^{(3)}| = |-0,74 + 0,93| = 0,19 > \varepsilon \quad \text{нет}$$

$$|x_2^{(1)} - x_2^{(3)}| = |-0,92 + 0,884| = |-0,036| = 0,036 > \varepsilon \quad \text{нет}$$

$$|x_3^{(2)} - x_3^{(3)}| = |-0,829 + 0,528| = |-0,301| = 0,301 > \varepsilon \quad \text{нет}$$

Ответ: $x_1 = -0,93$, $x_2 = -0,884$, $x_3 = -0,528$ решение системы линейных алгебраических уравнений, найденных с точностью $\varepsilon = 0,6$.

3. Численные методы решения задачи аппроксимации.

3.1 Постановка задачи.

Дана табличная функция.

| | | | | | |
|-----|----|----|----|----|---|
| x | -5 | -3 | -1 | 2 | 4 |
| y | 0 | -1 | 2 | -2 | 2 |

Требуется:

- решить задачу интерполяции (кусочно-линейная и кусочно-параболическая) методом неопределённых коэффициентов;

| | |
|--------------|--------------|
| И-д. № подл. | Подп. и дата |
| Взам. инд. № | И-д. № дубл. |
| Подп. и дата | |
| Изм. | Лист |
| № докум. | Подп. |
| Дата | Лист |

- решить задачу интерполяции (кусочно-линейная и кусочно-параболическая) с помощью полинома Лагранжа;
- решить задачу аппроксимации (найти полиномы первой и второй степени) методом наименьших квадратов.

3.2 Решение задачи интерполяции методом неопределённых коэффициентов.

Интерполиция (кусочно - линейная).

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_1 = y_1 \\ a_0 + a_1 x_2 = y_2 \end{cases}$$

$$A) \begin{cases} a_0 + a_1(-5) = 0 \\ a_0 + a_1(-3) = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = 5a_1 \\ a_0 - 3a_1 = -1 \end{cases} \Rightarrow 5a_1 - 3a_1 = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2a_1 = -1$$

$$\begin{cases} a_1 = -0,5 \\ a_0 = -2,5 \end{cases} \Rightarrow y = -2,5 - 0,5x$$

$$B) \begin{cases} a_0 + a_1(-3) = -1 \\ a_0 + a_1(-1) = 2 \end{cases} \quad - \begin{cases} a_0 - 3a_1 = -1 \\ a_0 - a_1 = 2 \end{cases} \Rightarrow -2a_1 = -3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 = 1,5 \\ a_0 = -1 + 3 \cdot 1,5 = 3,5 \end{cases} \Rightarrow y = 3,5 + 1,5x$$

$$c) \begin{cases} a_0 + a_1(-1) = 2 \\ a_0 + a_1(2) = -2 \end{cases} \quad - \begin{cases} a_0 - a_1 = 2 \\ a_0 + 2a_1 = -2 \end{cases} \Rightarrow -3a_1 = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 = -1,33 \\ a_0 = 2 - 1,33 = 0,67 \end{cases} \Rightarrow y = 0,67 - 1,33x$$

$$D) \begin{cases} a_0 + a_1(2) = -2 \\ a_0 + a_1(4) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 + 2a_1 = -2 \\ a_0 + 4a_1 = 2 \end{cases} \Rightarrow -2a_1 = -4 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_0 = -2 - 4 = -6 \end{cases} \Rightarrow y = -6 + 2x$$

Интерполяция (линейно-параболическая).

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 = y_1 \\ a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 = y_2 \\ a_0 + a_1 x_3 + a_2 x_3^2 = y_3 \end{cases}$$

$$A) \begin{cases} a_0 + a_1(-5) + a_2(-5)^2 = 0 \\ a_0 + a_1(-3) + a_2(-3)^2 = -1 \\ a_0 + a_1(-1) + a_2(-1)^2 = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} a_0 - 5a_1 + 25a_2 = 0 \\ a_0 - 3a_1 + 9a_2 = -1 \\ a_0 - 1a_1 + 1a_2 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_0 - 5a_1 + 25a_2 = 0 \\ a_0 - 3a_1 + 9a_2 = -1 \\ a_0 = 2 + a_1 - a_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 + a_1 - a_2 - 5a_1 + 25a_2 = 0 \\ 2 + a_1 - a_2 - 3a_1 + 9a_2 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4a_1 + 23a_2 = -2 \\ -2a_1 + 8a_2 = -3 \end{cases} \quad \begin{cases} -4a_1 + 23a_2 = -2 \\ -4a_1 + 16a_2 = -6 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 7a_2 &= 4 & -2a_1 + 8 \cdot 0,5 &= -3 & a_0 &= 2 + 3,5 - 0,5 = 5 \\ a_2 &= 4/7 = 0,5 & a_1 &= 3,5 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} a_0 = 5 \\ a_1 = 3,5 \\ a_2 = 0,5 \end{cases} \Rightarrow y = 5 + 3,5x + 0,5x^2$$

$$B) \begin{cases} a_0 + a_1(-1) + a_2(-1)^2 = 2 \\ a_0 + a_1(2) + a_2(2)^2 = -2 \\ a_0 + a_1(4) + a_2(4)^2 = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} a_0 - a_1 + a_2 = 2 \\ a_0 + 2a_1 + 4a_2 = -2 \\ a_0 + 4a_1 + 16a_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_0 = 2 + a_1 - a_2 \\ a_0 + 2a_1 + 4a_2 = -2 \\ a_0 + 4a_1 + 16a_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 + a_1 - a_2 + 2a_1 + 4a_2 = -2 \\ 2 + a_1 - a_2 + 4a_1 + 16a_2 = 2 \end{cases}$$

| | | | | | | | | | | | | | | |
|------|------|----------|-------|------|------|------|----------|-------|------|------|------|----------|-------|------|
| Изм. | Лист | № докум. | Подп. | Дата | Изм. | Лист | № докум. | Подп. | Дата | Изм. | Лист | № докум. | Подп. | Дата |
|------|------|----------|-------|------|------|------|----------|-------|------|------|------|----------|-------|------|

$$\begin{cases} 3a_1 + 3a_2 = -4 \\ 5a_1 + 15a_2 = 0 \end{cases} \quad | :5 \quad \begin{cases} 3a_1 + 3a_2 = -4 \\ a_1 + 3a_2 = 0 \end{cases} \quad | \cdot 3 \quad \begin{cases} 3a_1 + 3a_2 = -4 \\ 3a_1 + 9a_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 0 - 6a_2 &= -4 \\ a_2 &= 0,6\bar{7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_1 &= -3 \cdot (0,6\bar{7}) \\ a_1 &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_0 &= 2 + (-2) - 0,6\bar{7} \\ a_0 &= -0,6\bar{7} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} a_0 = -0,6\bar{7} \\ a_1 = -2 \\ a_2 = 0,6\bar{7} \end{cases} \Rightarrow y = 0,6\bar{7}x^2 - 2x - 0,6\bar{7}$$

3.3 Решение задачи интерполяции с помощью полинома Лагранжа.

Интерполяция (кусочно-линейная).

$$L_1(x) = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} \cdot y_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \cdot y_2$$

$$A) L_1(x) = \frac{x+3}{-5+3} \cdot 0 + \frac{x+5}{-3+5} \cdot (-1) = -\frac{x}{2} - 2,5 \Rightarrow y = -0,5x - 2,5$$

$$B) L_2(x) = \frac{x+1}{-3+1} \cdot (-1) + \frac{x+3}{-1+3} \cdot 2 = \frac{x}{2} + 0,5 + x + 3 \Rightarrow y = 1,5x + 3,5$$

$$\begin{aligned} C) L_3(x) &= \frac{x-2}{-1-2} \cdot 2 + \frac{x+1}{2+1} \cdot (-2) = -\frac{2x}{3} + \frac{4}{3} - \frac{2x}{3} - \frac{2}{3} = \frac{4x}{3} + \frac{2}{3} \Rightarrow \\ &\Rightarrow y = -1,33x + 0,6\bar{7} \end{aligned}$$

$$D) L_4(x) = \frac{x-4}{2-4} \cdot (-2) + \frac{x-2}{4-2} \cdot 2 = x-4 + x-2 \Rightarrow y = 2x-6$$

Ответ: совпадает.

Интерполяция (кусочно-параболическая)

$$L(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} \cdot y_1 + \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} \cdot y_2 + \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \cdot y_3$$

$$\begin{aligned} A) L_1(x) &= \frac{(x+3)(x+1)}{(-5+3)(-5+1)} \cdot 0 + \frac{(x+5)(x+1)}{(-3+5)(-3+1)} \cdot (-1) + \frac{(x+5)(x+3)}{(-1+5)(-1+3)} \cdot 2 = \\ &= \frac{x^2+6x+5}{4} + \frac{x^2+8x+15}{4} = \frac{2x^2}{4} + \frac{14x}{4} + \frac{20}{4} \Rightarrow y = 0,5x^2 + 3,5x + 5 \end{aligned}$$

| | | | | | | | | | | |
|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|------|------|----------|-------|------|------|
| И-в. № подл. | Подп. и дата | Взам. инв. № | И-в. № дубл. | Подп. и дата | Изм. | Лист | № докум. | Подп. | Дата | Лист |
| | | | | | | | | | | |

Получили 2 уравнения.

$$Z \cdot A = B$$

$$Z = \begin{pmatrix} m & \sum x_i & \sum x_i^2 \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 55 \\ -3 & 55 & -81 \\ 55 & -81 & 979 \end{pmatrix}$$

$$\sum x_i = -3 ; \sum x_i^2 = 55 ; \sum x_i^3 = -81 ; \sum x_i^4 = 979$$

$$A = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i \cdot y_i \\ \sum x_i^2 \cdot y_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 17 \end{pmatrix}$$

$$\sum y_i = 1 ; \sum x_i \cdot y_i = 5 ; \sum x_i^2 \cdot y_i = 17$$

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 & 55 \\ -3 & 55 & -81 \\ 55 & -81 & 979 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 17 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 5a_0 - 3a_1 + 55a_2 = 1 \\ -3a_0 + 55a_1 - 81a_2 = 5 \\ 55a_0 + 81a_1 - 979a_2 = 17 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l|l} A_1 & 5 \quad -3 \quad 55 \quad 1 \\ A_2 & -3 \quad 55 \quad -81 \quad 5 \\ A_3 & 55 \quad -81 \quad 979 \quad 17 \end{array} \quad \begin{array}{l} B_1 = A_1 / 5 \\ B_2 = A_2 + B_1 \cdot 3 \\ B_3 = A_3 - B_1 \cdot 55 \end{array} \quad \begin{array}{l} 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} -0,6 \quad 11 \quad 0,2 \\ 53,2 \quad -48 \quad 5,6 \\ -48 \quad 374 \quad 5 \end{array}$$

$$C_1 = B_1 \quad 1 \quad -0,6 \quad 11 \quad 0,2$$

$$C_2 = B_2 / 53,2 \quad 0 \quad 1 \quad -0,9 \quad 0,1$$

$$C_3 = B_3 + C_2 \cdot 48 \quad 0 \quad 0 \quad 330,8 \quad 9,8$$

| | | | | |
|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| Инд. № подл. | Подп. и дата | Взам. инв. № | Инд. № докл. | Подп. и дата |
| Изм. | Лист | № докум. | Подп. | Дата |
| | | | | Лист |

$$D_1 = C_1 \quad 1 \quad -0,6 \quad 11 \quad 0,2$$

$$D_2 = C_2 \quad 0 \quad 1 \quad -0,9 \quad 0,1$$

$$D_3 = C_3/330,8 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0,03$$

$$\begin{cases} a_0 - 0,6a_1 + 11a_2 = 0,2 \\ a_1 - 0,9a_2 = 0,1 \\ a_2 = 0,03 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = 0,2 + 0,6(0,127) - 11 \cdot (0,03) = -0,05 \\ a_1 = 0,1 + 0,9 \cdot 0,03 = 0,127 \\ a_2 = 0,03 \end{cases}$$

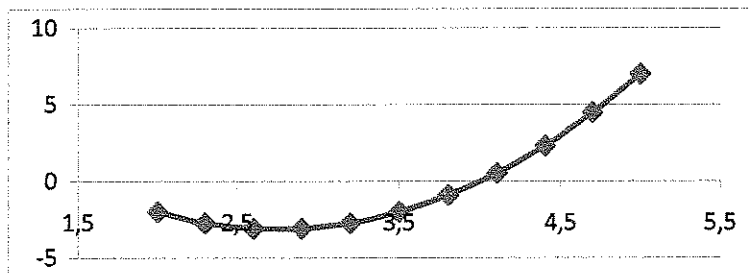
$$\begin{cases} a_0 = -0,05 \\ a_1 = 0,127 \\ a_2 = 0,03 \end{cases} \Rightarrow y = 0,03x^2 + 0,127x - 0,05$$

| | | | | | | | | | |
|------|------|----------|-------|------|------|------|----------|-------|------|
| Изм. | Лист | № докум. | Подп. | Дата | Изм. | Лист | № докум. | Подп. | Дата |
| | | | | | | | | | |

Численные методы решения нелинейного уравнения

Шаговый метод

| x | F(x) |
|-----|-------|
| 2 | -2 |
| 2,3 | -2,72 |
| 2,6 | -3,08 |
| 2,9 | -3,08 |
| 3,2 | -2,72 |
| 3,5 | -2 |
| 3,8 | -0,92 |
| 4,1 | 0,52 |
| 4,4 | 2,32 |
| 4,7 | 4,48 |
| 5 | 7 |



Методы уточнения корня

Метод половинного деления

$\epsilon = 0,001$

| a | x | b | F(a) | F(x) | F(a)*F(x) | $ F(x) < \epsilon$ |
|--------|----------|---------|-----------|-----------|-----------|---------------------|
| 3,8 | 3,95 | 4,1 | -0,92 | -0,245 | 0,2254 | |
| 3,95 | 4,025 | 4,1 | -0,245 | 0,12625 | -0,030931 | |
| 3,95 | 3,9875 | 4,025 | -0,245 | -0,062188 | 0,015236 | |
| 3,9875 | 4,00625 | 4,025 | -0,062188 | 0,031328 | -0,001948 | |
| 3,9875 | 3,996875 | 4,00625 | -0,062188 | -0,015605 | 0,00097 | корень |

Метод Ньютона

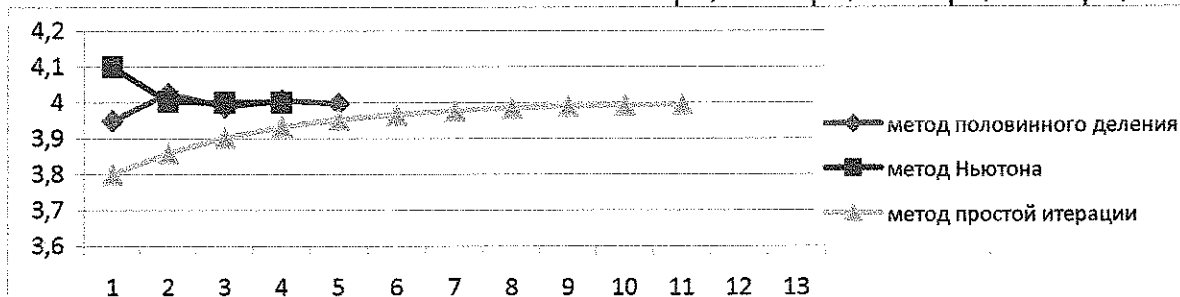
$\epsilon = 0,00001$

| x | F(x) | F'(x) | $ F(x) < \epsilon$ |
|----------|----------|----------|---------------------|
| 4,1 | 0,52 | 5,4 | |
| 4,003704 | 0,018546 | 5,014815 | |
| 4,000005 | 2,74E-05 | 5,000022 | |
| 4 | 5,99E-11 | 5 | корень |

Метод простой итерации

$\epsilon = 0,03$

| x | F(x) | S(x) | $ F(x) < \epsilon$ |
|----------|-----------|----------|---------------------|
| 3,8 | -0,92 | 3,860052 | |
| 3,860052 | -0,66057 | 3,9026 | |
| 3,9026 | -0,468028 | 3,932467 | |
| 3,932467 | -0,328542 | 3,953299 | |
| 3,953299 | -0,229145 | 3,967763 | |
| 3,967763 | -0,159107 | 3,977775 | |
| 3,977775 | -0,110136 | 3,984691 | |
| 3,984691 | -0,076075 | 3,989461 | |
| 3,989461 | -0,052471 | 3,992748 | |
| 3,992748 | -0,036154 | 3,995011 | |
| 3,995011 | -0,024894 | 3,996569 | корень |



Инв. № подл. Подп. и дата. Инв. № докл. Подп. и дата. Инв. №. Взам. инв. №. Подп. и дата.

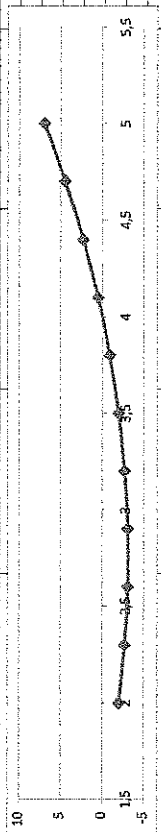
Лист

Изм. Лист № докум. Подп. Дата

Копировал

Формат А4

| Изм. | | Лист | № докум. | Подп. | Дата |
|----------------------------------|---|------|----------|-------|------|
| Численные методы решения нелиней | | | | | |
| 1 | A | B | C | D | E |
| 2 | | | | | |
| 3 | | | | | |
| 4 | x | | | | |
| 5 | | | | | |
| 6 | | | | | |
| 7 | | | | | |
| 8 | | | | | |
| 9 | | | | | |
| 10 | | | | | |
| 11 | | | | | |
| 12 | | | | | |
| 13 | | | | | |
| 14 | | | | | |
| 15 | | | | | |
| 16 | | | | | |
| 17 | | | | | |
| Методы уточнения корня | | | | | |
| Метод половинного деления | | | | | |
| 18 | | | | | |
| 19 | | | | | |
| 20 | | | | | |
| 21 | | | | | |
| 22 | | | | | |
| 23 | | | | | |
| 24 | | | | | |
| 25 | | | | | |
| 26 | | | | | |
| 27 | | | | | |
| Метод Ньютона | | | | | |
| 28 | | | | | |
| 29 | | | | | |
| 30 | | | | | |
| 31 | | | | | |
| 32 | | | | | |
| 33 | | | | | |
| 34 | | | | | |
| 35 | | | | | |
| 36 | | | | | |
| 37 | | | | | |
| 38 | | | | | |
| 39 | | | | | |
| 40 | | | | | |
| 41 | | | | | |
| 42 | | | | | |
| 43 | | | | | |
| 44 | | | | | |
| 45 | | | | | |
| 46 | | | | | |
| 47 | | | | | |
| 48 | | | | | |
| 49 | | | | | |



Метод половинного деления
 Метод Ньютона
 Метод простой итерации

Численные методы решения систем линейных уравнений

| i | ai1 | ai2 | ai3 | bi |
|---|-----|-----|-----|----|
| 1 | -9 | 2 | 3 | 4 |
| 2 | 1 | -5 | 3 | 1 |
| 3 | -4 | -2 | 7 | -1 |

Метод Гаусса

| | | | | |
|----|----|----|---|----|
| A1 | -9 | 2 | 3 | 4 |
| A2 | 1 | -5 | 3 | 1 |
| A3 | -4 | -2 | 7 | -1 |

| | | | | |
|----|---|--------|--------|--------|
| B1 | 1 | -0,222 | -0,333 | -0,444 |
| B2 | 0 | -4,778 | 3,3333 | 1,4444 |
| B3 | 0 | -2,889 | 5,6667 | -2,778 |

| | | | | |
|----|---|--------|---------|--------|
| C1 | 1 | -0,222 | -0,3333 | -0,444 |
| C2 | 0 | 1 | -0,6977 | -0,302 |
| C3 | 0 | 0 | 3,6512 | -3,651 |

| | | | | |
|----|---|--------|--------|--------|
| D1 | 1 | -0,222 | -0,333 | -0,444 |
| D2 | 0 | 1 | -0,698 | -0,302 |
| D3 | 0 | 0 | 1 | -1 |

x3= -1

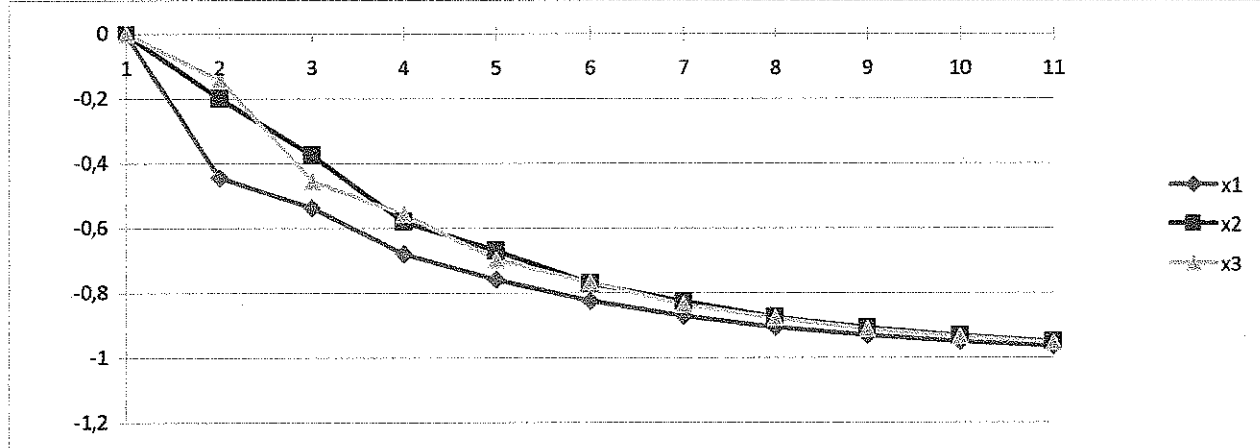
x2= -1

x1= -1

Метод простой итерации

e= 0,01

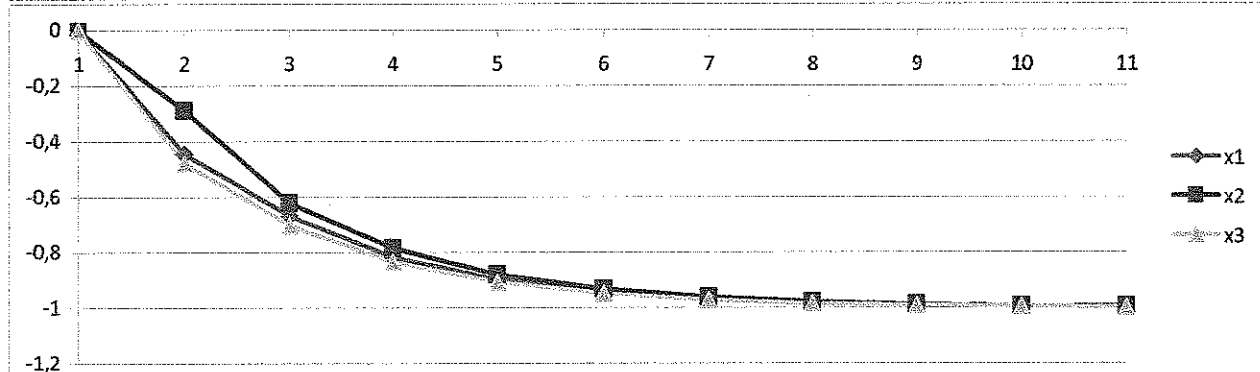
| | | | | | | | | | | | | | |
|----|---|--------|---------|--------|--------|---------|---------|--------|--------|--------|-----------|---------|----------|
| x1 | 0 | -0,444 | -0,5365 | -0,679 | -0,759 | -0,8254 | -0,8714 | -0,906 | -0,931 | -0,95 | -0,963065 | -0,973 | -0,98019 |
| x2 | 0 | -0,2 | -0,3746 | -0,58 | -0,67 | -0,7696 | -0,8257 | -0,875 | -0,907 | -0,933 | -0,950401 | -0,9638 | -0,97343 |
| x3 | 0 | -0,143 | -0,454 | -0,556 | -0,696 | -0,7678 | -0,8344 | -0,877 | -0,911 | -0,934 | -0,951933 | -0,9647 | -0,9742 |
| | | | | | | | | | | | | | корни |



Метод Зейделя

e= 0,01

| | | | | | | | | | | | |
|----|---|--------|---------|--------|--------|---------|---------|--------|--------|--------|-----------|
| x1 | 0 | -0,444 | -0,6684 | -0,817 | -0,897 | -0,9421 | -0,9675 | -0,982 | -0,99 | -0,994 | -0,996777 |
| x2 | 0 | -0,289 | -0,6213 | -0,785 | -0,88 | -0,9324 | -0,9621 | -0,979 | -0,988 | -0,993 | -0,996237 |
| x3 | 0 | -0,479 | -0,7023 | -0,834 | -0,907 | -0,9476 | -0,9706 | -0,983 | -0,991 | -0,995 | -0,997083 |
| | | | | | | | | | корни | корни | корни |

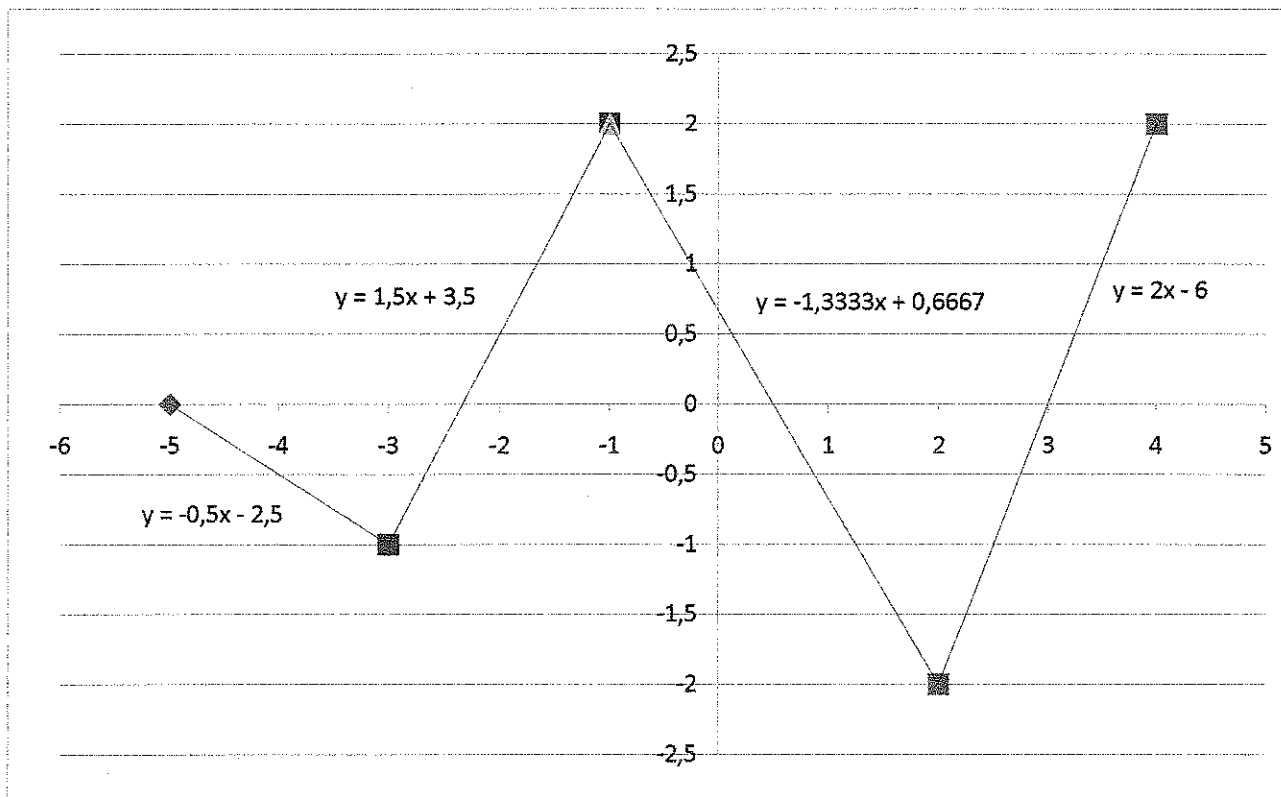


| | | | |
|--------------|--------------|--------------|--------------|
| Инв. № подл. | Взам. инв. № | Инв. № дубл. | Подп. и дата |
|--------------|--------------|--------------|--------------|

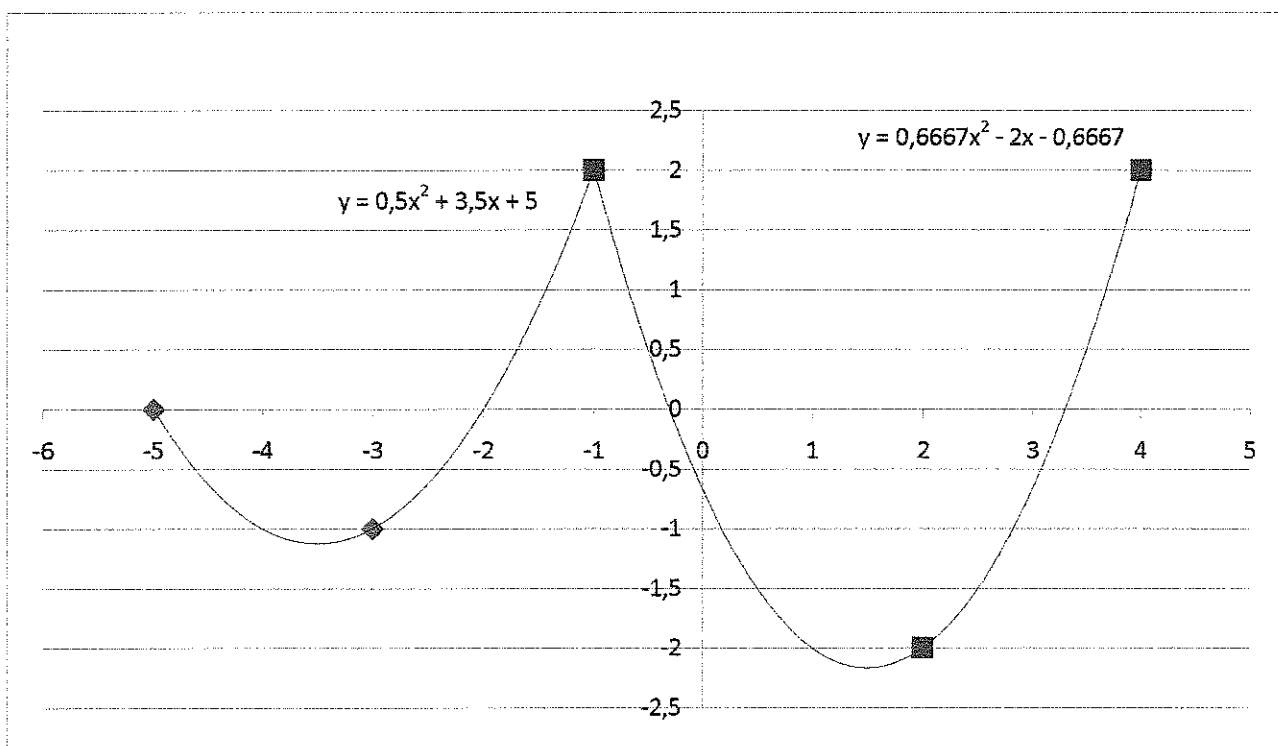
| | | | | | |
|------|------|----------|-------|------|------|
| Изм. | Лист | № докум. | Подп. | Дата | Лист |
|------|------|----------|-------|------|------|

| | | | | | |
|---|----|----|----|----|---|
| X | -5 | -3 | -1 | 2 | 4 |
| Y | 0 | -1 | 2 | -2 | 2 |

Кусочно-линейная интерполяция



Квадратичная интерполяция

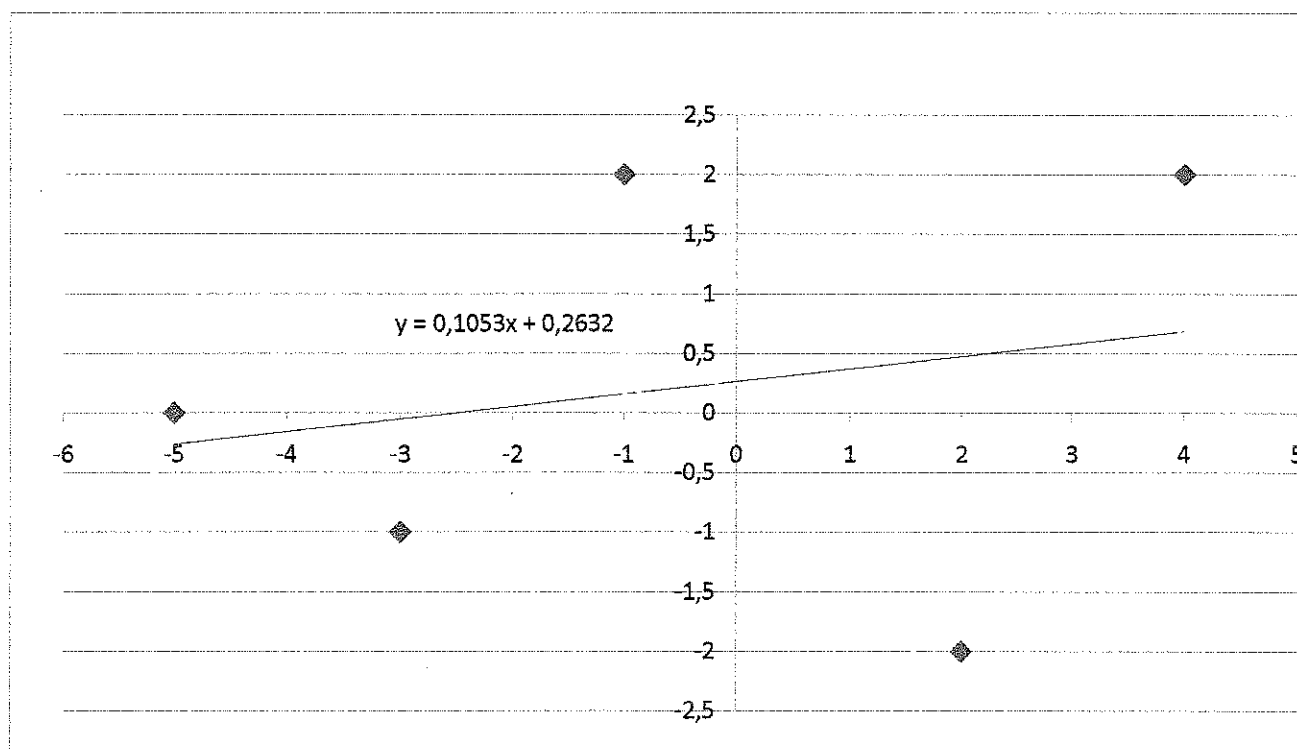


| | | | | |
|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| Инв. № подл. | Подп. и дата | Взам. инв. № | Инв. № дубл. | Подп. и дата |
|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|

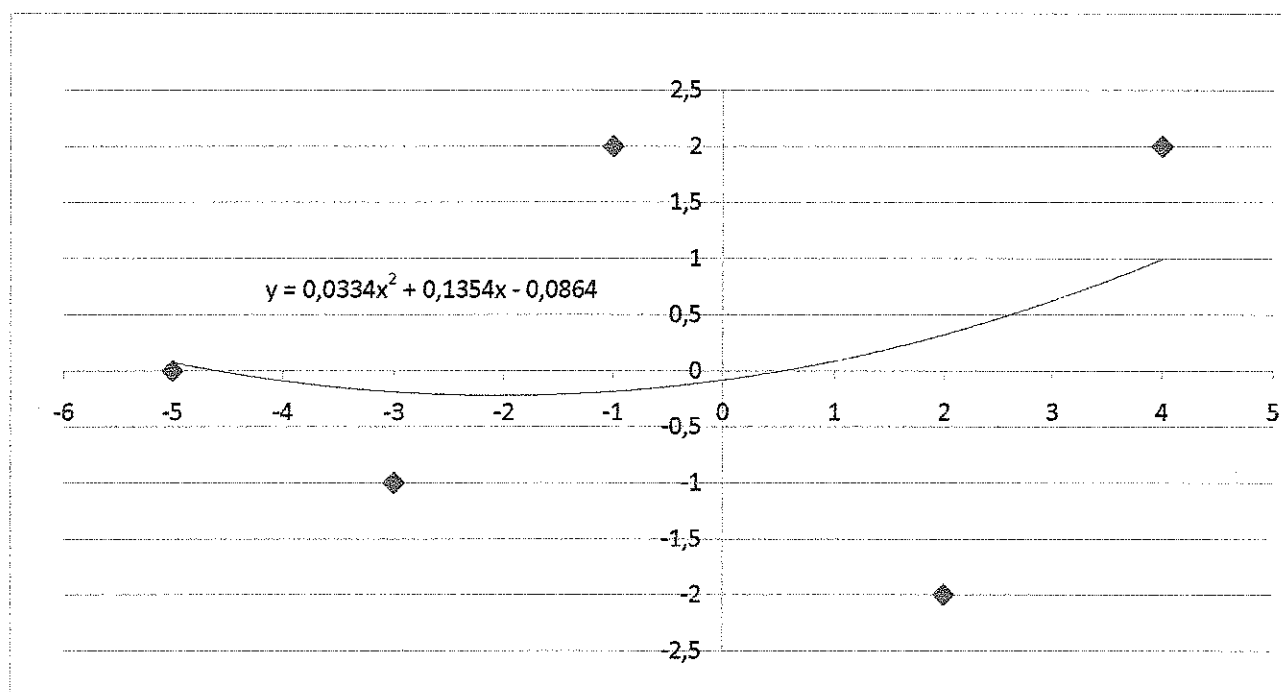
| | | | | |
|------|------|----------|-------|------|
| Изм. | Лист | № докум. | Подп. | Дата |
|------|------|----------|-------|------|

| |
|------|
| Лист |
|------|

Аппроксимация полиномом 1 степени



Аппроксимация полиномом 2 степени



| | |
|--------------|--------------|
| Инв. № подл. | Подп. и дата |
| Взам. инв. № | Инв. № дубл. |
| Подп. и дата | |

| | | | | |
|------|------|----------|-------|------|
| Изм. | Лист | № докум. | Подп. | Дата |
| | | | | |

Лист

Копировал

Формат А4