Cinematica Relativistica

Pietro Garofalo

March 30, 2022

Contents

Chapter 1

Le trasformazioni di Lorentz

In relatività le trasformazioni di Galileo sono sostituite dalle trasformazioni di Lorentz, prima di vederle nel dettaglio bisogna ricordarsi che le grandezze che ci interessano non sono più i semplici vettori ma i **quadrivettori contravarianti** che definiamo nel seguente modo :

$$\mathbf{X}^{\mu} = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{\mathbf{x}} \end{pmatrix}$$

Tale notazione evidenzia come i quadrivettori siano divisi in una parte temporale (la prima componente) e componenti spaziali (vettore tridimensionale), tali quaterne di valori trasformano, nel passaggio da un sistema di riferimento ad un altro, tramite le trasformazioni di Lorentz.
La metrica dei quadrivettori non è la metrica Euclidea bensì quella di **Minkowski**, se definiamo infatti due quadrivettori

$$\mathbf{A}^{\mu} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B}^{\mu} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Allora il prodotto fra i due si definisce come :

$$\mathbf{A}^{\mu} \cdot \mathbf{B}_{\mu} = a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3$$

dove $\mathbf{B}_{\mu}$ non è altro che il **quadrivettore covariante** ossia il quadrivettore contravariante ma con il segno della parte spaziale opposto .
D'ora in avanti indicheremo $\mathbf{X} \equiv \mathbf{X}^{\mu}$.

1.1 Trasformazione delle coordinate

Supponiamo di avere un sistema di riferimento O fermo (sistema del laboratorio) e un sistema $O^{'}$ in movimento con velocità V come in figura.

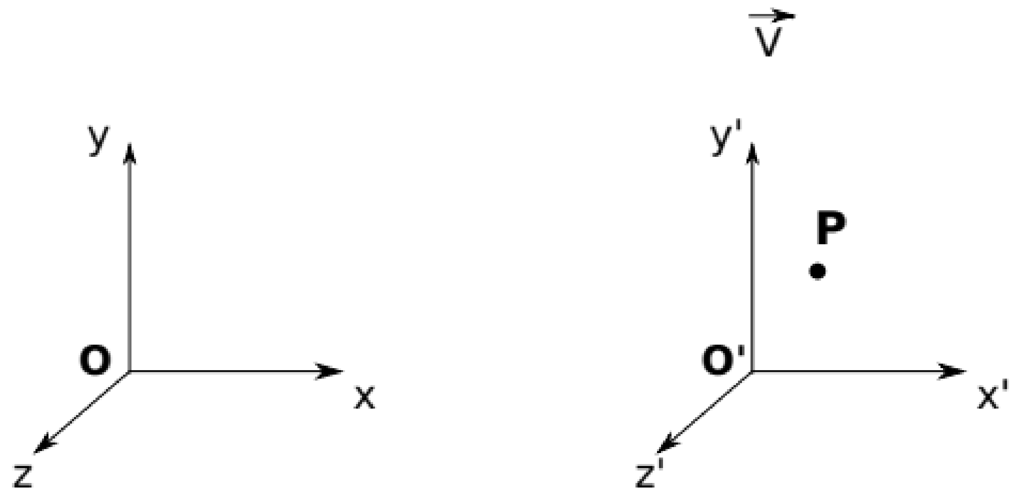

Figure 1.1: Sistemi di riferimento

Indichiamo con $\mathbf{X}$ il quadrivettore posizione del punto $\mathbf{P}$ rispetto a O e $\mathbf{X}'$ rispetto a O', le coordinate di $\mathbf{X}'$ si trovano rispetto alle coordinate misurate in O' nel seguente modo :

$$\mathbf{X}' = \mathbf{\Lambda}^{\mu}_{\nu}\mathbf{X}$$

dove $\mathbf{\Lambda^{\mu}_{nu}}$ rappresenta la matrice della trasformazione di Lorentz lungo asse x data da :

$$\mathbf{\Lambda}^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \beta = \frac{V}{c} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

si ottiene :

$$\begin{cases} ct' = & \gamma ct - \beta\gamma x \\ x' = & -\beta\gamma ct + \gamma x \\ y' = & y \\ z' = & z \end{cases}$$

Mettere il box in cui spieghi che se beta è piccolo si torna a Galileo e che se si passa da O primo a O cambiano i segni

1.2 Trasformazione delle velocità

Per capire bene le trasformazioni delle velocità conviene vedere un esercizio.
Esercizio :