

Fisica nucleare e subnucleare

Pietro Garofalo

July 10, 2022

Contents

1	Le trasformazioni di Lorentz	3
1.1	Trasformazione delle coordinate	4
1.2	Trasformazione delle velocità	5
2	Il quadrivettore energia-impulso	7
2.1	Esercizi di riepilogo	8
2.1.1	Esercizio 1 : Energia e lavoro	8
2.1.2	Esercizio 2 : Decadimento e relatività speciale	9
3	Sistemi di riferimento e massa invariante	12
3.1	Sistema del laboratorio	12
3.2	Sistema del centro di massa	12
3.3	Massa invariante	13
3.3.1	Differenze fra lab e CdM : decadimento di una particella	14
4	Sezione d'urto	15
4.1	Prima definizione di sezione d'urto	15
4.1.1	Interpretazione geometrica	16
4.2	Una visione più sperimentale	17
4.2.1	Come calcoliamo n_b	17
4.2.2	Come calcoliamo \dot{N}_p	17
5	L'esperimento di Rutherford	18
5.1	La sezione d'urto differenziale	20
6	Interazione radiazione-materia	21
6.1	Interazione di particelle cariche con la materia	21
6.1.1	Perdita di energia per ionizzazione : la formula di Bohr	21
6.1.2	Interpretazione della formula di Bohr	25
6.1.3	La formula di Bethe-Bloch	26
6.1.4	Il percorso residuo	27
6.1.5	Effetto Cherenkov	27
A	Costanti e Unità di misura	29
A.1	Unità di misura	29

Chapter 1

Le trasformazioni di Lorentz

In relatività le trasformazioni di Galileo sono sostituite dalle trasformazioni di Lorentz, prima di vederle nel dettaglio bisogna ricordarsi che le grandezze che ci interessano non sono più i semplici vettori ma i **quadrivettori contravarianti** che definiamo nel seguente modo :

$$\mathbf{X}^\mu = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{\mathbf{x}} \end{pmatrix}$$

Tale notazione evidenzia come i quadrivettori siano divisi in una parte temporale (la prima componente) e componenti spaziali (vettore tridimensionale), tali quaterne di valori trasformano, nel passaggio da un sistema di riferimento ad un altro, tramite le trasformazioni di Lorentz.

La metrica dei quadrivettori non è la metrica Euclidea bensì quella di **Minkowski**, se definiamo infatti due quadrivettori

$$\mathbf{A}^\mu = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B}^\mu = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Allora il prodotto fra i due si definisce come :

$$\mathbf{A}^\mu \cdot \mathbf{B}_\mu = a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3$$

dove \mathbf{B}_μ non è altro che il **quadrivettore covariante** ossia il quadrivettore contravariante ma con il segno della parte spaziale opposto .

D'ora in avanti indicheremo $\mathbf{X} \equiv \mathbf{X}^\mu$.

1.1 Trasformazione delle coordinate

Supponiamo di avere un sistema di riferimento \mathbb{O} fermo (sistema del laboratorio) e un sistema \mathbb{O}' in movimento con velocità V come in figura.

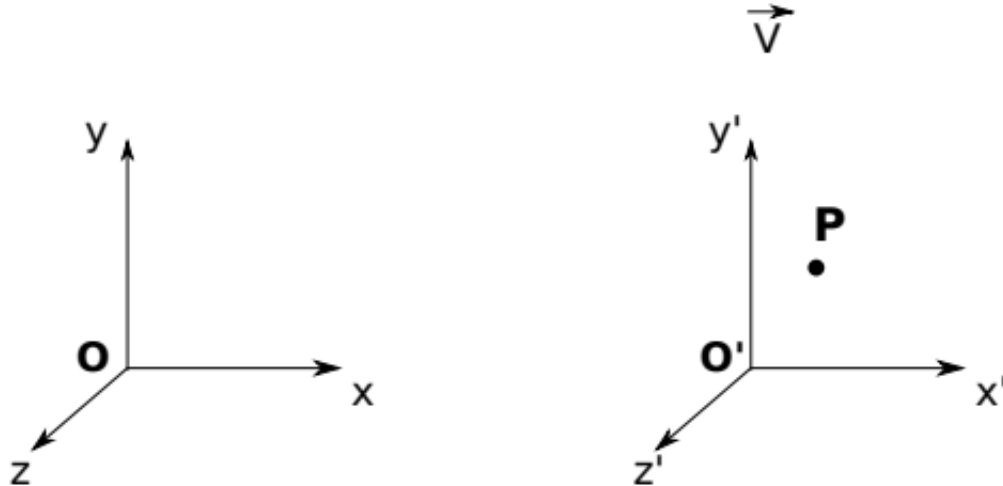


Figure 1.1: Sistemi di riferimento

Indichiamo con \mathbf{X} il quadrivettore posizione del punto P rispetto a \mathbb{O} e \mathbf{X}' rispetto a \mathbb{O}' , le coordinate di \mathbf{X}' si trovano rispetto alle coordinate misurate in \mathbb{O}' nel seguente modo :

$$\mathbf{X}' = \Lambda_{\nu}^{\mu} \mathbf{X}$$

dove Λ_{ν}^{μ} rappresenta la matrice della trasformazione di Lorentz lungo asse x data da :

$$\Lambda_{\nu}^{\mu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \beta = \frac{V}{c} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

si ottiene quindi il seguente sistema :

$$\begin{cases} ct' = \gamma(ct - \beta x) \\ x' = \gamma(x - ct\beta) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

ATTENZIONE !

Se il cambio di sistema di riferimento si fa dal sistema in moto al sistema di riferimento del laboratorio allora β cambia di segno

1.2 Trasformazione delle velocità

Per capire bene le trasformazioni delle velocità conviene vedere un esercizio.

Esercizio

Un uomo in automobile viaggia ad una velocità di $\frac{3}{4}c$, viene inseguito da un'altra automobile che va alla velocità di $\frac{1}{2}c$ la quale spara un proiettile che va alla velocità di $\frac{1}{3}c$. Il proiettile raggiunge l'auto ?

Soluzione

La questione è tutta basata sulle trasformazioni delle velocità in relatività, le troveremo tramite le trasformazioni di Lorentz viste prima, un commento prima di trovarle :

ATTENZIONE !

Bisogna capire bene i sistemi di riferimento, nel nostro caso stiamo osservando le macchine che corrono, noi siamo il laboratorio (sistema fermo) il problema è che la velocità del proiettile è calcolata nel sistema di riferimento in moto (ossia la macchina che spara), il gioco è tutto qui : trasformare la velocità del proiettile dal sistema di riferimento in moto a quello del laboratorio .

Partiamo dalla trasformazione di Lorentz per la posizione, come al solito identifichiamo con x' le coordinate del sistema di riferimento in moto :

$$\begin{cases} ct = \gamma(ct' + \beta x') \\ x = \gamma(x' + ct\beta) \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

Notare come c'è il cambio di segno dovuto al fatto che passiamo da sistema in moto a quello del laboratorio.

Passiamo ora agli infinitesimi :

$$\begin{cases} c dt = \gamma c dt' + \beta \gamma dx' \\ dx = \gamma dx' + c \gamma \beta dt' \\ dy = dy' \\ dz = dz' \end{cases}$$

Dividiamo ora ciascuna componente per dt la cui espressione l'abbiamo ricavata sopra, dividiamo poi numeratore e denominatore per dt' , sostituiamo $\frac{dx'}{dt'} \equiv dv'_x$ eccetera, inoltre $\beta \equiv \frac{V}{c}$ dove V è la velocità del proiettile nel sistema in moto, si ottiene :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} \equiv v_x = \frac{\gamma v'_x + \gamma V}{\gamma(c + \frac{V}{c}v'_x)} \\ \frac{dy}{dt} \equiv v_y = \frac{v'_y}{\gamma(c + \frac{V}{c}v'_x)} \\ \frac{dz}{dt} \equiv v_z = \frac{v'_z}{\gamma(c + \frac{V}{c}v'_x)} \end{cases}$$

Abbiamo così ottenuto le trasformazioni delle velocità :

ATTENZIONE !

$$\begin{cases} v_x = \frac{V + v'_x}{c + \frac{V}{c^2}v'_x} \\ v_y = \frac{v'_y}{\gamma(c + \frac{V}{c}v'_x)} \\ v_z = \frac{v'_z}{\gamma(c + \frac{V}{c}v'_x)} \end{cases}$$

Ricorda sempre che stiamo passando dal moto al fermo !!!!!

Chapter 2

Il quadrivettore energia-impulso

In meccanica relativistica non esiste il semplice vettore impulso ma esiste il vettore **quadrimpulso**, che ha come componenti energia e impulso e lo definiamo come :

$$\mathbf{P} \equiv p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p} \right) \quad \text{dove} \quad \vec{p} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

In meccanica relativistica il quadrivettore impulso **NON** è un invariante relativistico, ma:

ATTENZIONE !

Il prodotto di un qualsiasi quadrivettore per se stesso è un invariante relativistico ossia che il suo valore non cambia se cambiamo sistema di riferimento .

Da ciò deduciamo che :

$$\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}^\mu \mathbf{P}_\mu = \frac{E^2}{c^2} - |\vec{p}|^2$$

Prima di andare avanti col calcolo di \mathbf{P}^2 , indicheremo con $p \equiv |\vec{p}|$, scriviamo qui delle relazioni fondamentali :

ATTENZIONE !

$$\begin{cases} E = m\gamma c^2 \\ \vec{p} = m\gamma \vec{v} \end{cases}$$

Allora si ottiene che il prodotto del quadrimpulso per se stesso è legato alla massa della particella :

$$\mathbf{P}^2 = \frac{(m\gamma c^2)^2}{c^2} - (m\gamma v)^2 = m^2 c^2$$

Ponendo $c = 1$ e ricordando la forma iniziale di \mathbf{P}^2 si ottiene la seguente :

ATTENZIONE !

Alcune relazioni fondamentali :

$$\left\{ \begin{array}{l} E^2 = p^2 + m^2 \\ \beta = \frac{pc}{E} \\ \gamma = \frac{E}{mc^2} \\ \beta\gamma = \frac{p}{mc} \end{array} \right.$$

Ricordiamo che :

\mathbf{P} e E sono **grandezze conservate**
 \mathbf{P}^2 è un invariante di Lorentz

Vediamo come si applicano le trasformazioni di Lorentz al quadrimpulso definendo sempre con l'apice $'$ le quantità riferite al sistema di riferimento in moto:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{E'}{c} = \gamma \frac{E}{c} - \beta \gamma p_x \\ p'_x = -\beta \gamma \frac{E}{c} + \gamma p_x \end{array} \right.$$

2.1 Esercizi di riepilogo

2.1.1 Esercizio 1 : Energia e lavoro

Quanto lavoro bisogna compiere per aumentare la velocità di un elettrone di massa $m = 511 \frac{KeV}{c^2}$ dalla posizione a riposo a $0.50c$?

Soluzione

In generale il lavoro si calcola $L = E_f - E_i$, ci sono due metodi :

1) Forza bruta

Questo metodo consiste nell'utilizzare la definizione di Energia :

$$\begin{aligned} E_f &= \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2} && \text{ricordando } p = m\gamma v \\ &= \sqrt{m^2 c^4 + m^2 \gamma^2 c^2 0.5^2 c^2} && v = 0.5c \\ &= 589 \text{ KeV} \end{aligned}$$

ATTENZIONE !

Utile per i calcoli:

la massa se noti è espressa in $\frac{KeV}{c^2}$, questo vuol dire che quando abbiamo mc^2 vuol dire che si ha $\frac{KeV}{c^2} c^2 = KeV$

Per l'energia iniziale si ha invece :

$$\begin{aligned}
 E_i &= \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2} \\
 &= \sqrt{m^2 c^4} \\
 &= mc^2 \\
 &= 511 \text{ KeV}
 \end{aligned}
 \quad \text{poichè } v_i = 0$$

Si ottiene che lavoro $L = E_f - E_i = 589 \text{ KeV} - 511 \text{ KeV} = 78 \text{ KeV}$

2) Usando le relazioni fondamentali

Bisogna ricordarsi la relazione $E = m\gamma c^2$, infatti all'interno di gamma è contenuta la velocità, nel caso particolare $v = 0$ allora $\gamma = 1$:

$$\begin{aligned}
 E_f &= m\gamma c^2 & \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{0.5c}{c}}} \\
 E_i &= mc^2 \\
 L &= m\gamma c^2 - mc^2 = mc^2(\gamma - 1) = 78 \text{ KeV}
 \end{aligned}$$

2.1.2 Esercizio 2 : Decadimento e relatività speciale

Un pione decade a riposo in un muone e un neutrino tramite il seguente processo :

$$\pi^- \rightarrow \mu^- + \nu_\mu$$

Conoscendo i seguenti dati : $m_\mu = 105.6 \text{ MeV}$ e il tempo proprio di vita $\tau_\mu = 2.2 \mu s$ mentre il pione ha massa $m_\pi = 139.6 \text{ MeV}$.

Che distanza percorre il muone nel riferimento del laboratorio ?

Soluzione

Innanzitutto quello che bisogna capire è che il tempo τ_μ è il tempo proprio della particella ossia il tempo misurato nel sistema di riferimento della particella stessa, se volessimo calcolare L quindi che altro non è che la velocità per il tempo :

$$L = vt$$

Il tempo t (il tempo nel sistema di riferimento del laboratorio) non coincide con τ_μ a causa della dilatazione dei tempi, si ha invece che $t = \gamma\tau_\mu$ ottenendo :

$$\begin{aligned}
 L &= c\beta\gamma\tau_\mu & \text{dove } \beta &= \frac{v}{c} \rightarrow v = c\beta \\
 &= \frac{p_\mu}{m_\mu}\tau_\mu & \text{usata la relazione : } \beta\gamma &= \frac{p}{mc}
 \end{aligned}$$

Dove $p_\mu \equiv |\vec{p}_\mu|$ che è quello che ci resta da calcolare, si hanno due metodi :

1) Usiamo la legge della conservazione

Sappiamo, già dalla meccanica classica che energia e impulso si conservano quindi possiamo scrivere la relazione prima del decadimento e dopo (nel sistema di riferimento del laboratorio):

$$\begin{aligned}E_{\pi} &= E_{\mu} + E_{\nu} \\ \vec{p}_{\pi} &= \vec{p}_{\mu} + \vec{p}_{\nu}\end{aligned}$$

Vediamo ora le energie e impulsi per ogni particella :

Pione:

Sappiamo che è a riposo, otteniamo quindi che :

$$\begin{cases} \vec{p}_{\pi} = 0 \\ E_{\pi} = \sqrt{m_{\pi}^2 c^4 + p_{\pi}^2 c^2} = m_{\pi} c^2 \end{cases} \quad E = mc^2 \text{ è anche detta energia a riposo!}$$

Muone:

Del muone ci scriviamo solo l'energia siccome abbiamo già detto all'inizio che l'impulso è incognita :

$$E_{\mu} = \sqrt{m_{\mu}^2 c^4 + p_{\mu}^2 c^2}$$

Neutrino:

Avendo il neutrino massa nulla :

$$E_{\nu} = p_{\nu} c$$

ATTENZIONE !

Dal fatto che $\vec{p}_{\pi} = 0$ e per la conservazione otteniamo che :

$$\begin{aligned}0 &= \vec{p}_{\mu} + \vec{p}_{\nu} \\ \vec{p}_{\mu} &= -\vec{p}_{\nu}\end{aligned}$$

Quello che ci serve per i calcoli è che :

$$|\vec{p}_{\mu}| \equiv p_{\mu} = p_{\nu} \equiv |\vec{p}_{\nu}|$$

Ossia il muone e il neutrino hanno stessa velocità e direzione ma verso opposto. Possiamo ora continuare con i calcoli ripartendo dalla conservazione dell'energia:

$$\begin{aligned}m_{\pi} c^2 &= \sqrt{m_{\mu}^2 c^4 + p_{\mu}^2 c^2} + p_{\mu} c \\ m_{\pi} c^2 - p_{\mu} c &= \sqrt{m_{\mu}^2 c^4 + p_{\mu}^2 c^2} \\ m_{\pi}^2 c^4 + p_{\mu}^2 c^2 - 2m_{\pi} p_{\mu} c^3 &= m_{\mu}^2 c^4 + p_{\mu}^2 c^2\end{aligned}$$

da cui segue che :

$$p_{\mu} = \frac{m_{\pi}^2 - m_{\mu}^2}{2m_{\pi}} c$$

Allora la distanza che percorre, nel sistema di riferimento del laboratorio è :

$$\begin{aligned} L &= \frac{p_\mu}{m_\mu} \tau_\mu \\ &= \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_\pi} c \tau_\mu \end{aligned}$$

Passiamo ora al secondo metodo.

2) Usando i quadrimpulsi

La conservazione dell impulso vale anche per i quadrivettori, si può scrivere quindi :

$$\mathbf{P}_\pi = \mathbf{P}_\mu + \mathbf{P}_\nu$$

Vogliamo ottenere p_μ ossia il modulo della componente vettoriale del quadrimpulso, per farlo isoliamo \mathbf{P}_μ ottenendo :

$$\mathbf{P}_\mu = \mathbf{P}_\pi - \mathbf{P}_\nu$$

Ricordando che **il prodotto scalare di un quadrivettore con se stesso è invariante** e che è uguale alla massa al riposo al quadrato :

$$\begin{aligned} m_\mu^2 c^2 &= m_\pi^2 c^2 + m_\nu^2 c^2 - 2\mathbf{P}_\pi \cdot \mathbf{P}_\nu & m_\nu &= 0 \\ m_\mu^2 c^2 &= m_\pi^2 c^2 - 2\left(\frac{E_\pi}{c} \frac{E_\nu}{c} - \vec{\mathbf{p}}_\pi \cdot \vec{\mathbf{p}}_\nu\right) & \vec{\mathbf{p}}_\pi &= 0 \quad E_\nu = p_\mu c \\ m_\mu^2 c^2 &= m_\pi^2 c^2 - 2m_\pi p_\mu c \end{aligned}$$

Otteniamo la stessa forma di \mathbf{p}_μ ottenuta col primo metodo .

Chapter 3

Sistemi di riferimento e massa invariante

Negli esperimenti di interazione fra particelle i sistemi di riferimento tipici sono due : quello del **laboratorio** e quello del **centro di massa**.

3.1 Sistema del laboratorio

Il sistema di riferimento del laboratorio è il sistema solidale con l'osservatore, si ha una particella bersaglio ferma e una particella che gli va incontro, si hanno quindi i due quadrimpulsi:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_1 &= \left(\frac{E_1}{c}, \vec{\mathbf{p}}_1 \right) \\ \mathbf{P}_2 &= \left(\frac{E_2}{c}, 0 \right) \\ \mathbf{P}_{tot} &= \left(\frac{E_1}{c} + m_2 c, \vec{\mathbf{p}}_1 \right) \end{aligned} \quad \text{essendo ferma } \frac{E_2}{c} = m_2 c$$

3.2 Sistema del centro di massa

Il sistema del centro di massa è definito come quel sistema nel quale **l'impulso totale è nullo**.

Nel caso particolare in cui le due particelle hanno stessa massa (es il collider) il sistema del centro di massa coincide con il sistema del laboratorio.

ATTENZIONE !

Indichiamo con \mathbf{P}' e $\vec{\mathbf{p}}'$ rispettivamente i quadrimpulsi e i vettori impulso nel sistema di riferimento del centro di massa .

Abbiamo che :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}'_1 &= \left(\frac{E'_1}{c}, \vec{\mathbf{p}}' \right) \\ \mathbf{P}'_2 &= \left(\frac{E'_2}{c}, -\vec{\mathbf{p}}' \right) \\ \mathbf{P}'_{tot} &= \left(\frac{E'_1 + E'_2}{c}, 0 \right)\end{aligned}$$

3.3 Massa invariante

Consideriamo un sistema di N particelle ciascuna con il suo quadrimpulso $\mathbf{P}_i = \left(\frac{E_i}{c}, \vec{\mathbf{p}}_i \right)$ come abbiamo detto possiamo definire il quadrimpulso totale $\mathbf{P}_{tot} = \sum_i \mathbf{P}_i$.

ATTENZIONE !

Ricordando che il modulo quadro di un quadrivettore è un invariante relativistico allora possiamo definire la **MASSA INVARIANTE** del sistema e indicheremo con \sqrt{S} :

$$\begin{aligned}\sqrt{S} &= \sqrt{\mathbf{P}_{tot} \cdot \mathbf{P}_{tot}} \\ &= \sqrt{\left(\sum_i E_i \right)^2 - \left| \sum_i \vec{\mathbf{p}}_i \right|^2}\end{aligned}$$

Come detto esso è un invariante quindi possiamo calcolarlo anche nel sistema del centro di massa $\sqrt{S'}$

$$\sqrt{S'} = \sum_i E'_i = E_{tot}$$

Nota che nel centro di massa la massa invariante è denominata **Energia del centro di massa**

3.3.1 Differenze fra lab e CdM : decadimento di una particella

Consideriamo il decadimento del pione dato dalla seguente reazione :

$$\pi^- \rightarrow \mu^- + \nu_\mu$$

conosciamo i valori delle masse, ci chiediamo quanta energia abbia il muone ($m_\nu = 0$)

Lavoriamo nel CdM

Nelle reazioni la quantità importante da calcolare è \sqrt{S} che è un invariante e si conserva, calcoliamocelo nel CdM e facciamolo prima nel sistema allo stato iniziale.

Inizialmente si ha una sola particella ossia il pione quindi il CdM coincide con il sistema di riferimento della particella stessa :

$$\mathbf{P}'_i = (m_\pi c^2, 0) \rightarrow \sqrt{S'_i} = m_\pi c^2$$

Nello stato finale invece abbiamo due particelle (scrivo direttamente il quadrimpulso totale):

$$\mathbf{P}'_f = \left(\frac{E'_\mu + E'_\nu}{c}, 0 \right) \rightarrow \sqrt{S'_f} = E'_\mu + E'_\nu \quad c = 1$$

Per calcolare le energie bisogna trovare gli impulsi calcolati nel centro di massa, per farlo utilizziamo la **conservazione dell'impulso**

$$\vec{\mathbf{p}}_\pi = \vec{\mathbf{p}}_\mu + \vec{\mathbf{p}}_\nu$$

$$0 = p_\mu + p_\nu$$

$$p_\mu = -p_\nu$$

Possiamo ora calcolarci $\sqrt{S'_f}$ eguagliarlo a $\sqrt{S'_i}$ e trovarci così p_μ .

Tutto questo per dire che \sqrt{S} e E_μ calcolati nel **centro di massa hanno valori ben definiti**.

Lavoriamo nel Lab

Per trovarci E_μ nel Lab basta applicare le trasformazioni di Lorentz al valore che abbiamo trovato nel CdM :

$$\begin{aligned} E_\mu &= \gamma_\pi E'_\mu + \beta_\pi \gamma_\pi \vec{\mathbf{p}}'_\mu \\ &= \gamma_\pi E'_\mu + \beta_\pi \gamma_\pi p'_\mu \cos \theta \\ &= [\gamma_\pi E'_\mu - \beta_\pi \gamma_\pi p'_\mu, \gamma_\pi E'_\mu + \beta_\pi \gamma_\pi p'_\mu] \\ &\simeq [105.6 MeV, 122.7 MeV] \end{aligned} \quad \cos \theta \in [-1, 1]$$

Perchè ciò avviene?

ATTENZIONE !

matematicamente ciò avviene poichè quando applichiamo le Trasformazioni di Lorentz la parte temporale (energia) si mescola con la parte spaziale quando cambio sistema di riferimento.

Chapter 4

Sezione d'urto

Lo scattering è un tema fondamentale della fisica moderna utilizzato per rivelare la struttura della materia, le proprietà delle particelle fondamentali e via discorrendo.

Con il termine scattering indichiamo tutti quei processi dove alcune particelle nello stato iniziale interagiscono dando come risultato le stesse particelle oppure creandone altre (esempio il collider è un processo di scattering).

4.1 Prima definizione di sezione d'urto

Prendiamo un flusso di particelle " proiettile " che incide contro un bersaglio fisso fermo il quale ha un determinato numero di nuclei per unità di volume :

\dot{N}_r = numero di reazioni per unità di tempo

\dot{N}_p = rate dei proiettili

n_b = numero nuclei per unità di volume

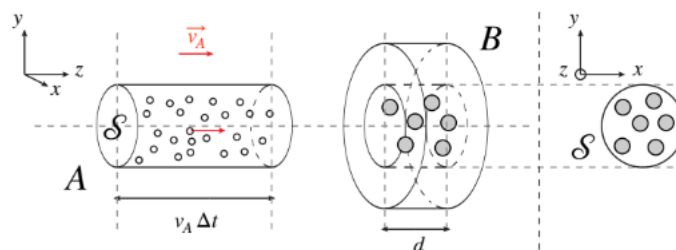


Figure 4.1: Figura rubata dalle mitiche dispende del professor Kado

Indichiamo il flusso di particelle che attraversazione la sezione trasversale S del bersaglio:

$$\Phi = \dot{N}_p \frac{1}{S}$$

Mentre il numero di particelle N_b viste dai proiettili è :

$$N_b = n_b S d$$

possiamo dire quindi con certezza che il rate di interazioni che avvengono è proporzionale a questi due termini :

$$\begin{aligned} \dot{N}_r &\propto \Phi N_b \\ &\propto \dot{N}_p n_b d \end{aligned}$$

ed è qui che entra in gioco la **sezione d'urto**, ossia come **coefficiente di proporzionalità**

$$\begin{aligned} \dot{N}_r &= \sigma_r \dot{N}_p n_b d \\ \sigma_r &= \frac{\dot{N}_r}{\dot{N}_p n_b d} \\ [\sigma_r] &= \text{lunghezza}^2 = \text{superficie} \end{aligned}$$

Indichiamo con **Luminosità istantanea** :

$$\begin{aligned} L_{ist} &= \dot{N}_p n_b d \\ [L_{ist}] &= \text{cm}^{-2} \text{s}^{-1} \end{aligned}$$

La luminosità è utile quando si lavora in processi di scattering fra due fasci di particelle poichè si può scrivere in funzione del numero di particelle :

$$L = \frac{N_a N_b}{s} f_{rev} \quad f_{rev} \text{ è la frequenza di rivoluzione}$$

4.1.1 Interpretazione geometrica

La probabilità che una reazione avvenga è data da $\frac{\dot{N}_r}{\dot{N}_p}$, in un visione semplificata possiamo esprimere la probabilità come rapporto fra la superficie del proiettile e quella del bersaglio:

$$P = \frac{S_r}{S} = \frac{S_{eff} N_b}{S} \quad \begin{aligned} S &= \text{superficie flusso} \\ S_{eff} &= \text{superficie singolo bersaglio} \end{aligned}$$

si ottiene, ricordando la definizione di N_b :

$$\begin{aligned} \frac{\dot{N}_r}{\dot{N}_p} &= S_{eff} n_b d \\ \sigma &= S_{eff} \end{aligned}$$

tale interazione però non è del tutto esatta, infatti se prendiamo come bersaglio un protone e lo bombardiamo con diverse particelle si ottiene le sezioni d'urto sono differenti seppur la S_{eff} è sempre la stessa.

4.2 Una visione più sperimentale

In un esperimento quello che si fa è far interagire due fasci di particelle A e B, si pone un rivelatore in un certo punto dello spazio e si misurano il numero di interazioni per unità di tempo che avvengono, da cosa dipende questo numero ?

- dinamica dell'interazione, ossia la sezione d'urto ;
- natura del bersaglio : tanto più alte sono le particelle bersaglio tanto più alto è questo numero;
- flusso di particelle.

Il numero di interazioni, come abbiamo visto, si calcola:

$$\dot{N}_r = \sigma_r \dot{N}_p n_b d$$

4.2.1 Come calcoliamo n_b

La risposta è semplice :

$$n_b = \rho \frac{N_A}{A}$$

dove N_A è il numero di Avogadro e A è il numero di massa del materiale.

4.2.2 Come calcoliamo \dot{N}_p

Ovviamente non possiamo metterci a contare le particelle che passano per unità di tempo ma quello che si può fare è, conoscendo la carica delle particelle proiettile, ricavarci la corrente infatti :

$$i = \frac{dq}{dt} = q \dot{N}_p$$

Facciamo un esempio : si ha un fascio di particelle α con carica $i = 15$ nA, calcoliamo \dot{N}_p .

$$i = \frac{dq_\alpha}{dt} = q_\alpha \dot{N}_p$$

ma, trattandosi di particelle α , ossia nuclei di Elio, $q_\alpha = 2|e|$ dove $|e| = 1,6 \times 10^{-19} C$, ora dobbiamo trasformare i nA in $\frac{C}{s}$:

$$1nA = 1 \times 10^{-9} A = 1 \times 10^{-9} \frac{C}{s}$$

ed il gioco è fatto.

Chapter 5

L'esperimento di Rutherford

Rutherford propose un modello atomico nel quale tutte le cariche positive sono concentrate in un piccolo volume al centro dell'atomo e le cariche negative orbitavano attorno ad esso. L'esperimento che fece per provare ciò consisteva nel colpire tali atomi con particelle α le quali, entrando nel volume dell'atomo non sentiranno l'influenza del campo elettrico degli elettroni (che per il teorema di Gauss è nullo). L'interazione fra le particelle α e il nucleo sarà trattato con metodi di meccanica classica e schematizzato come segue.

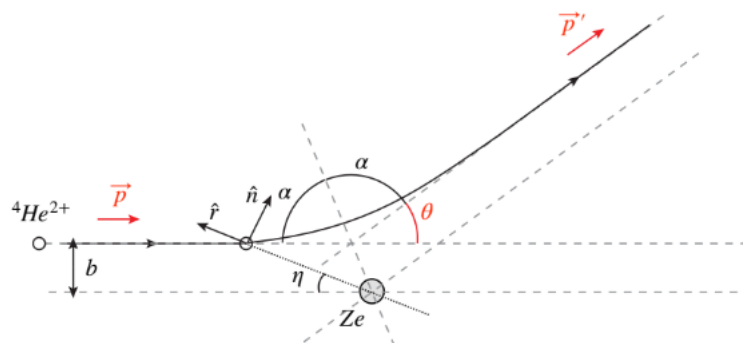


Figure 5.1: Traiettoria della particella α deviata dal potenziale coulombiano del nucleo

dove :

- b = parametro di impatto;
- θ = angolo di deflessione;
- ze = carica particella α ;
- Ze = nucleo bersaglio.

Ciò che vogliamo trovare è la relazione che intercorre fra il parametro di impatto e l'angolo di diffusione, il fatto che trattiamo tale problema con metodi classici è molto importante perchè rende il problema **completamente deterministico**.

La particella α subirà una forza repulsiva diretta radialmente :

$$\vec{\mathbf{F}} = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

ATTENZIONE !

Il fatto che la forza sia centrale è molto importante poichè ci dice che la velocità non cambia se non in direzione, possiamo quindi applicare la conservazione del momento quantità di moto !

Applichiamo la conservazione del momento quantità di moto :

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{L}} &= m_\alpha r^2 \frac{d\beta}{dt} \\ \vec{\mathbf{L}}_i &= m_\alpha b v_0\end{aligned}$$

eguagliando si ottiene :

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{bv_0} \frac{d\beta}{dt}$$

Scriviamo ora l'equazione del moto **lungo l'asse y** :

$$\begin{aligned}m_\alpha \frac{dv_y}{dt} &= \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sin \beta \\ m_\alpha \frac{dv_y}{dt} &= \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 b v_0} \sin \beta \frac{d\beta}{dt}\end{aligned}$$

Considerando due istanti A($t = -\infty$) e B($t = \infty$) :

$$\begin{aligned}v_y(A) &= 0 & v_y(B) &= v_0 \sin \theta \\ \beta(A) &= 0 & \beta(B) &= \pi - \theta\end{aligned}$$

otteniamo :

$$\int_0^{v_0 \sin \theta} dv_y = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 b v_0} \int_0^{\pi-\theta} \sin \beta d\beta$$

finalmente arriviamo al risultato che volevamo ottenere all'inizio :

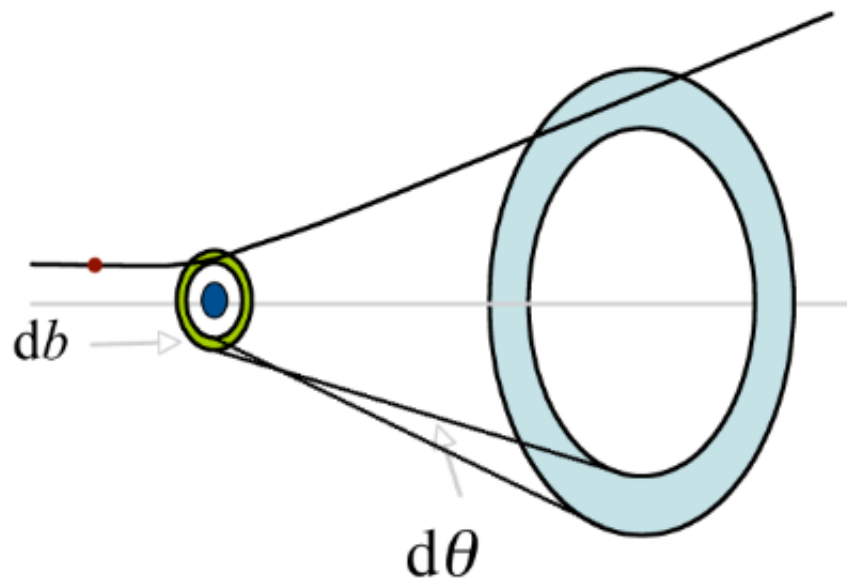
$$\begin{aligned}v_0 \sin \theta &= \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 b v_0} [-\cos \pi - \theta + 1] \\ b &= \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 v_0^2} \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta}\end{aligned}$$

ATTENZIONE !

$$b = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0bv_0} \cot \frac{\theta}{2}$$

5.1 La sezione d'urto differenziale

In un esperimento non si conosce il parametro di impatto della particella, non si può quindi dato un determinato valore di b a quale valore di θ corrisponde, ma qualcosa possiamo fare ossia ricavarci la distribuzione di probabilità del parametro b considerando che possa essere distribuito lungo un anello centrato all'intorno della posizione del bersaglio.



$$P(b) db = \frac{2\pi b db}{\pi R^2}$$

$$b = k \frac{1}{2} \cot \frac{\theta}{2} \quad db = \frac{k}{2} \frac{d\theta}{2} \frac{1}{\sin^2 \theta/2}$$

$$P(\Omega) d\Omega = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0bv_0} \frac{d\Omega}{16 \sin^4 \theta/2} \frac{1}{R^2\pi}$$

$P(\Theta)$ non è altro che la probabilità dell'angolo solido, essa è tanto più alta quando l'angolo di diffusione è basso, ma, ricordandoci che la sezione d'urto non è altro che la probabilità di un processo allora :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0bv_0} \frac{1}{16 \sin^4 \theta/2}$$

Chapter 6

Interazione radiazione-materia

In questo capitolo ci occuperemo dell'interazione delle particelle con la materia, verrà diviso in tre sezioni :

- interazione di particelle cariche;
- interazione di fotoni;
- interazione di neutroni.

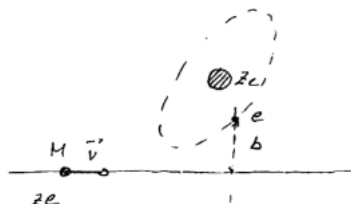
6.1 Interazione di particelle cariche con la materia

Immaginiamo una particella con carica ze e massa m che attraversa un materiale di lunghezza dx composto da atomi con numero di massa A e densità ρ come in figura. Ci chiediamo quanto sia l'energia che perde la particella nell'attraversare il tratto dx :

$$\frac{dE}{dx}$$

6.1.1 Perdita di energia per ionizzazione : la formula di Bohr

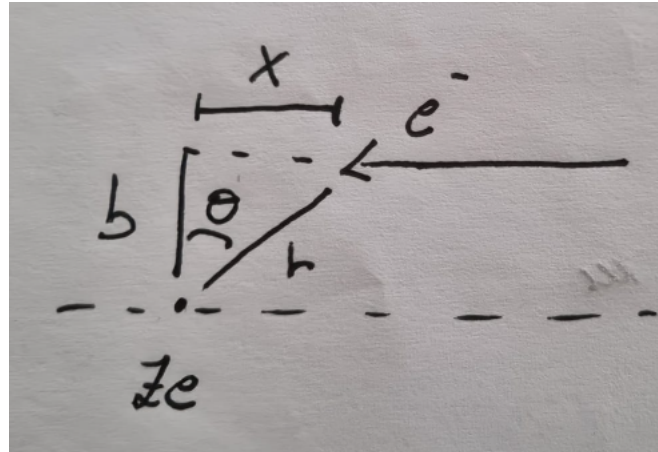
Durante la derivazione della formula di Rutherford abbiamo assunto che se la particella ha un'interazione con il nucleo dell'atomo, la particella non perde energia siccome il nucleo ha una massa molto maggiore ma, così facendo, stiamo trascurando la possibilità di trasferire energia agli elettroni che è ciò che andremo a trattare in questa sezione.



Dobbiamo calcolare l'energia cinetica ceduta all'elettrone ossia :

$$T_e = \frac{\Delta P_e^2}{2m_e}$$

Per calcolare ΔP_e cambiamo sistema di riferimento in quello della particella dove quest'ultima è ferma e l'elettrone gli va incontro



In una approssimazione non relativistica quindi possiamo vedere il tutto come un elettrone che passa nel campo coulombiano di una particella con carica ze , attratto quindi da una forza :

$$F = \frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2}$$

possiamo dunque calcolare la quantità :

$$\begin{aligned} \Delta P_e &= \frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0} \int_0^t \frac{1}{r^2} dt \\ &= \frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{r^2} \frac{dx}{v} \end{aligned}$$

$$dt \rightarrow \frac{dx}{v}$$

Poichè v costante

Scomponiamo nelle due componenti considerando che $r = \sqrt{x^2 + b^2}$ e che $(\Delta P)_{\parallel} = \Delta P \sin \theta$, $(\Delta P)_{\perp} = \Delta P \cos \theta$ otteniamo :

$$\begin{aligned} (\Delta P)_{\parallel} &= \frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0 v} \int \frac{1}{x^2 + b^2} \sin \theta dx = 0 \\ (\Delta P)_{\perp} &= \frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0 v} \int \frac{1}{x^2 + b^2} \cos \theta dx \end{aligned}$$

il secondo integrale lo calcoliamo sapendo che :

$$\cos^2 \theta = \frac{b^2}{x^2 + b^2}$$

$$dx = \frac{b}{\cos^2 \theta} d\theta$$

si ottiene :

$$(\Delta P)_\perp = \frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0 vb} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta$$

$$= 2 \frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0 vb}$$

$$= \frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0 vb^2} \frac{2b}{v}$$

ATTENZIONE !

nella formula sopra bisogna dire che :

- $\frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0 vb^2}$ = forza trasversale;
- $\frac{2b}{v}$ = scattering time ;
- abbiamo assunto che l'elettrone si muova su una linea dritta, ciò va bene se assumiamo che la velocità della particella sia molto maggiore della velocità di orbita dell'elettrone.

Troviamo così, nel caso non relativistico, l'energia persa :

$$\Delta T_e = \frac{\Delta P_e^2}{2m_e}$$

$$= \frac{2z^2 e^4}{m_e v^2 b^2 (4\pi\epsilon_0)^2}$$

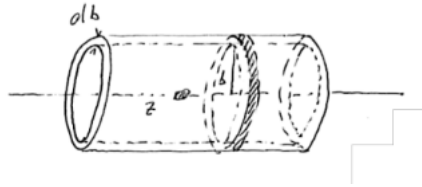
Introducendo $\beta = \frac{v}{c}$ e il raggio classico dell'elettrone $r_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2}$

$$\Delta T_e = \frac{2z^2 e^4}{m_e c^2 \beta^2 b^2 (4\pi\epsilon_0)^2}$$

$$= \frac{2z^2 m_e c^2}{\beta^2 b^2} \left[\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2} \right]^2$$

$$= \frac{2z^2 m_e c^2}{\beta^2 b^2} r_e^2$$

Dal punto di vista della particella incidente, il materiale che incontra può essere visto come un "fascio" di elettroni distribuiti su una corona cilindrica a distanza comprese fra b e $b + db$ come in figura. Se n_e è la densità degli elettroni nel materiale allora il numero



di elettroni che la particella incontra in un tratto dx è dato da :

$$dN = n_e V = n_e 2\pi b db dx$$

Il valore dell'elemento di energia persa in un tratto infinitesimale dx è dato il parametro di impatto

$$\frac{d^2 E}{dx db} = n_e r_e^2 m_e c^2 \frac{4\pi}{b} \frac{z^2}{\beta^2}$$

otteniamo quindi quello che volevamo cercare ossia l'energia persa per unità di lunghezza

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dx} &= n_e r_e^2 m_e c^2 \frac{4\pi z^2}{\beta^2} \int_{b_{min}}^{b_{max}} \frac{1}{b} db \\ &= n_e r_e^2 m_e c^2 \frac{4\pi z^2}{\beta^2} \ln \frac{b_{max}}{b_{min}} \end{aligned}$$

Quello che bisogna fare ora è stimare b_{min} e b_{max} .

- Dato il principio di indeterminazione

$$\Delta p \Delta x = \hbar$$

Se consideriamo Δp come il momento dell'elettrone $p_e = m_e \gamma \beta c$ otteniamo la risoluzione spaziale minima

$$b_{min} = \frac{\hbar}{m_e \gamma \beta c}$$

- Come abbiamo detto, avendo considerato la traiettoria dell'elettrone sostanzialmente dritta implica che lo scattering time definito sopra come b/v deve essere relativamente piccolo rispetto al tempo di rivoluzione dell'elettrone attorno all'atomo:

$$\gamma T_e = \gamma / w_e$$

dove il fattore γ tiene in considerazione della dilatazione del tempo. Come conseguenza si ottiene:

$$b_{max} = \frac{\beta \gamma c}{w_e}$$

Otteniamo quindi la **formula di Bohr** :

$$\frac{dE}{dx} = 4\pi\rho N_A \frac{Z}{A} r_e^2 m_e c^2 \frac{z^2}{\beta^2} \ln \frac{m_e c^2 \beta^2 \gamma^2}{\hbar \omega_e}$$

6.1.2 Interpretazione della formula di Bohr

La formula di Bohr dipende debolmente dal mezzo infatti, a parte costanti, la sua dipendenza è nel termine Z/a che è nella stragrande maggioranza dei casi $\sim 1/2$.

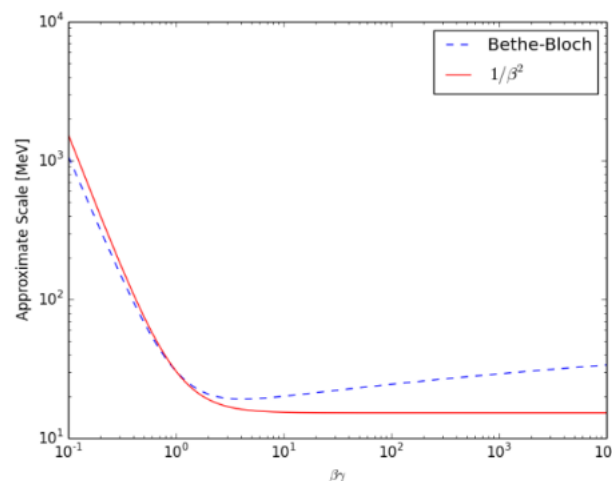
Il termine più influente riguardante il mezzo è ρ , per tale motivo, per rendere la formula indipendente dal mezzo bersaglio si definisce :

$$\frac{1}{\rho} \frac{dE}{dx} = 4\pi N_A \frac{Z}{A} r_e^2 m_e c^2 \frac{z^2}{\beta^2} \ln \frac{m_e c^2 \beta^2 \gamma^2}{\hbar \omega_e}$$

$$\left[\frac{1}{\rho} \frac{dE}{dx} \right] = \frac{MeV cm^2}{g}$$

La dipendenza della particella è invece nel termine Z^2/β^2 , ci sono due cose da dire:

- Z^2 : a parità di tutto, uno ione carbonio ($Z=6$) scala 36 volte di più di un protone;
- la dipendenza da β è scomoda poichè $0 < \beta < 1$ e per particelle relativistiche $\beta \sim 1$, conviene esprimere dunque il grafico in funzione di $\beta\gamma$



Per piccoli valori di energia, il termine dominante va come $1/\beta^2$ ad indicare che particelle lente perdono molta più energia rispetto a particelle più veloci. A confronto con il semplice andamento di $1/\beta^2$ notiamo che vi è una piccola risalita nella perdita di energia, risalita dovuta al termine logaritmico, dovuto all'incremento del campo elettrico " visto " dalla particella a velocità molto elevate, tale comportamento è denominato **risalita relativistica**.

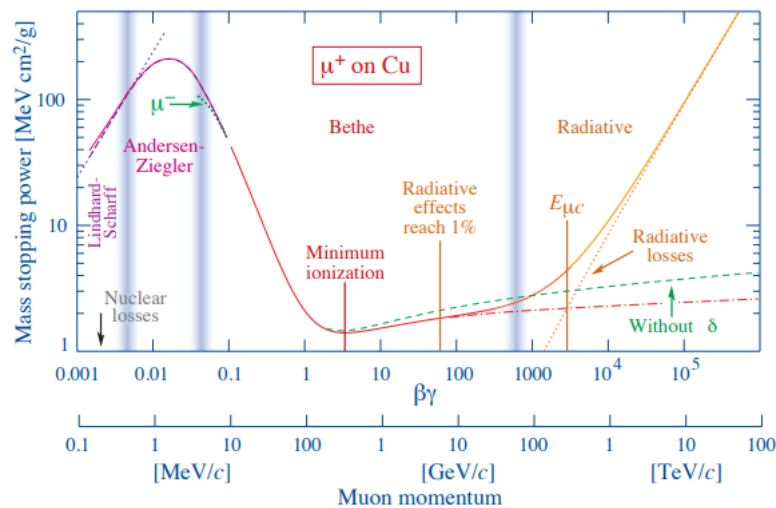
6.1.3 La formula di Bethe-Bloch

Una formula più generale, valida anche in casi relativistici, è quella di Bethe-Bloch:

$$\frac{1}{\rho} \frac{dE}{dx} = C \frac{Z}{A} \frac{z^2}{\beta^2} \left(\ln \frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2}{I} - \beta^2 - \frac{\delta(\gamma)}{2} \right)$$

dove :

- abbiamo raccolto tutti le costanti $C = 4\pi r_e^2 c^2 m_e N_A \simeq 0.307 \frac{\text{MeV cm}^2}{g}$;
- la perdita di energia ha un minimo chiamato MIP *minimal-ionising particles* che corrisponde a un $\beta\gamma \simeq 3$



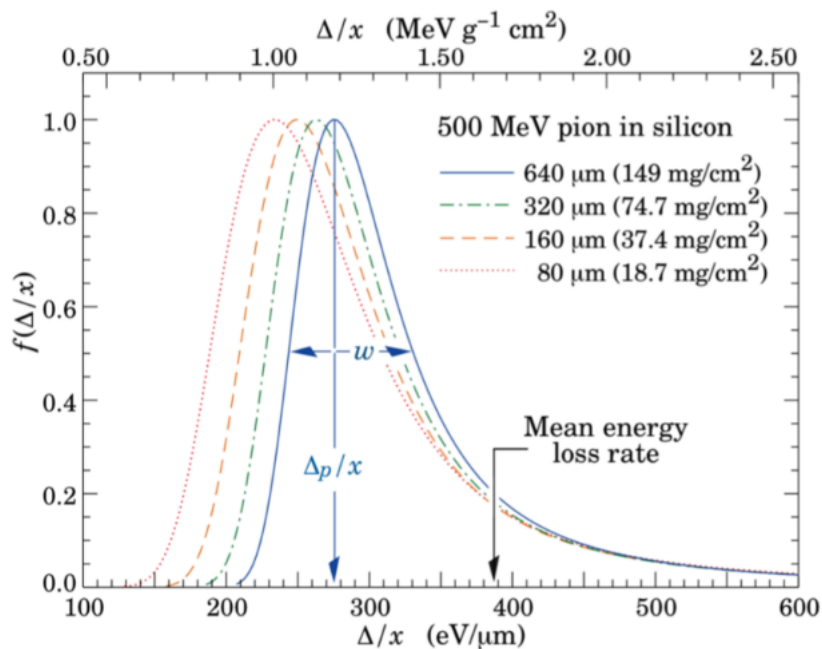
Di questo grafico, che esprime la perdita di energia per ionizzazione su scale inferiori a quelle del momento del muone, la parte centrale fra le due bande grigie è ben descritta dalla formula di Bethe-Bloch.

- Nella regione di sinistra, con valori di $\beta\gamma$ molto piccoli, il modello descritto fino ad ora non è più valido, entrano in gioco effetti legati al fatto che la velocità del proiettile è paragonabile alla velocità di orbita degli elettroni;
- per grandi valori di $\beta\gamma$ il nostro modello non è valido, la perdita di energia è dovuta all'irraggiamento, effetto di cui parleremo più avanti.

ATTENZIONE !

La formula di Bethe-Bloch è un'espressione della perdita **media** di energia, siccome i processi di interazione fra particella e atomo è un processo stocastico, dobbiamo allora considerare anche la perdita di energia come casuale.

Per materiali spessi, il teorema del limite centrale ci assicura che le fluttuazioni siano gaussiane, questo non vale per materiali sottili, che seguiranno invece la distribuzione di Landau con code verso destra, ossia che vi sia una piccola probabilità di avere grandi perdite di energia.



6.1.4 Il percorso residuo

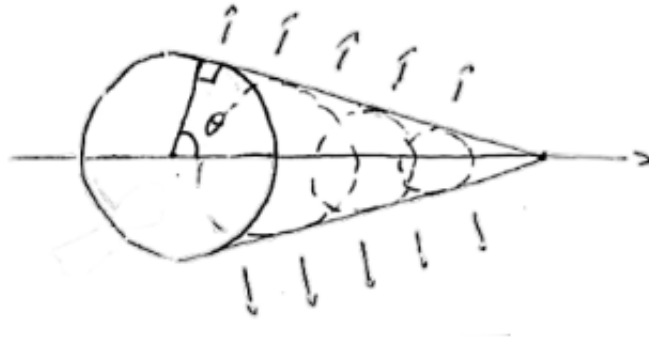
Si definisce come il percorso medio che compie una particella prima di perdere tutta la sua energia, quello che succede è che, perdendo energia, si risale la curva dell

6.1.5 Effetto Cherenkov

Quando una particella carica attraversa un mezzo polarizza gli atomi del materiale i quali rilasciano radiazioni sotto forma di onde sferiche che hanno una velocità (in un mezzo non dispersivo) di :

$$v_g = \frac{c}{n} \quad \text{n è indice di rifrazione}$$

Quando la particella ha una velocità superiore a quella della luce nel mezzo vi è una convoluzione di queste onde sferiche che formano un fronte d'onda, una luce quindi emessa ad un certo angolo θ_c .



L'angolo di emissione è dato dalla relazione:

$$c\beta \cos \theta_c = \frac{c}{n}$$

$$\cos \theta_c = \frac{1}{\beta n}$$

L'equivalente meccanico di questo fenomeno è il boom supersonico.

Appendix A

Costanti e Unità di misura

A.1 Unità di misura

- $1A = 1C\,s^{-2}$
- $1b = 10^{-24}cm^2$
- $1eV =$