Cinematica Relativistica

Pietro Garofalo

April 27, 2022

Contents

Chapter 1

Le trasformazioni di Lorentz

In relatività le trasformazioni di Galileo sono sostituite dalle trasformazioni di Lorentz, prima di vederle nel dettaglio bisogna ricordarsi che le grandezze che ci interessano non sono più i semplici vettori ma i **quadrivettori contravarianti** che definiamo nel seguente modo :

$$\mathbf{X}^{\mu} = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{\mathbf{x}} \end{pmatrix}$$

Tale notazione evidenzia come i quadrivettori siano divisi in una parte temporale (la prima componente) e componenti spaziali (vettore tridimensionale), tali quaterne di valori trasformano, nel passaggio da un sistema di riferimento ad un altro, tramite le trasformazioni di Lorentz.
La metrica dei quadrivettori non è la metrica Euclidea bensì quella di **Minkowski**, se definiamo infatti due quadrivettori

$$\mathbf{A}^{\mu} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B}^{\mu} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Allora il prodotto fra i due si definisce come :

$$\mathbf{A}^{\mu} \cdot \mathbf{B}_{\mu} = a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3$$

dove $\mathbf{B}_{\mu}$ non è altro che il **quadrivettore covariante** ossia il quadrivettore contravariante ma con il segno della parte spaziale opposto .
D'ora in avanti indicheremo $\mathbf{X} \equiv \mathbf{X}^{\mu}$.

1.1 Trasformazione delle coordinate

Supponiamo di avere un sistema di riferimento $\mathbb{O}$ fermo (sistema del laboratorio) e un sistema $\mathbb{O}'$ in movimento con velocità V come in figura.

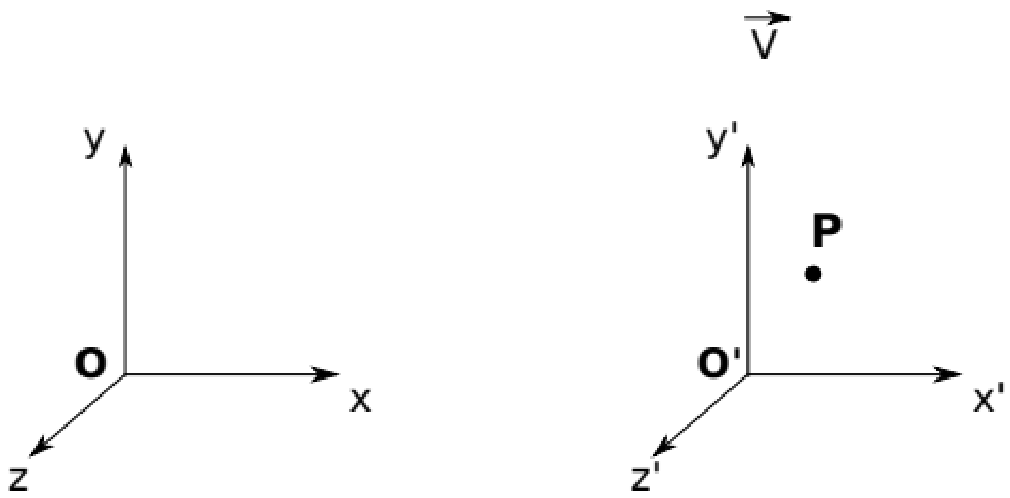

Figure 1.1: Sistemi di riferimento

Indichiamo con $\mathbf{X}$ il quadrivettore posizione del punto $\mathbf{P}$ rispetto a $\mathbb{O}$ e $\mathbf{X}'$ rispetto a $\mathbb{O}'$, le coordinate di $\mathbf{X}'$ si trovano rispetto alle coordinate misurate in $\mathbb{O}'$ nel seguente modo :

$$\mathbf{X}' = \mathbf{\Lambda}^{\mu}_{\nu}\mathbf{X}$$

dove $\mathbf{\Lambda}^{\mu}_{\nu}$ rappresenta la matrice della trasformazione di Lorentz lungo asse x data da :

$$\mathbf{\Lambda}^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \beta = \frac{V}{c} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

si ottiene quindi il seguente sistema :

$$\begin{cases} ct' = \gamma(ct - \beta x) \\ x' = \gamma(x - ct\beta) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

ATTENZIONE !

Se il cambio di sistema di riferimento si fa dal sistema in moto al sistema di riferimento del laboratorio allora β cambia di segno

1.2 Trasformazione delle velocità

Per capire bene le trasformazioni delle velocità conviene vedere un esercizio.

Esercizio

Un uomo in automobile viaggia ad una velocità di $\frac{3}{4}c$, viene inseguito da un'altra automobile che va alla velocità di $\frac{1}{2}c$ la quale spara un proiettile che va alla velocità di $\frac{1}{3}c$. Il proiettile raggiunge l'auto ?

Soluzione

La questione è tutta basata sulle trasformazioni delle velocità in relatività, le troveremo tramite le trasformazioni di Lorentz viste prima, un commento prima di trovarle :

ATTENZIONE !

Bisogna capire bene i sistemi di riferimento, nel nostro caso stiamo osservando le macchine che corrono, noi siamo il laboratorio (sistema fermo) il problema è che la velocità del proiettile è calcolata nel sistema di riferimento in moto (ossia la macchina che spara), il gioco è tutto quì : trasformare la velocità del proiettile dal sistema di riferimento in moto a quello del laboratorio .

Partiamo dalla trasformazione di Lorentz per la posizione, come al solito identifichiamo con x' le coordinate del sistema di riferimento in moto :

$$\begin{cases} ct = \gamma(ct' + \beta x') \\ x = \gamma(x' + ct\beta) \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

Notare come c'è il cambio di segno dovuto al fatto che passiamo da sistema in moto a quello del laboratorio.
Passiamo ora agli infinitesimi :

$$\begin{cases} c\,\mathrm{d}t = \gamma c\,\mathrm{d}t' + \beta\gamma\,\mathrm{d}x' \\ \mathrm{d}x = \gamma\,\mathrm{d}x' + c\gamma\beta\,\mathrm{d}t' \\ \mathrm{d}y = \mathrm{d}y' \\ \mathrm{d}z = \mathrm{d}z' \end{cases}$$

Dividiamo ora ciascuna componente per $\mathrm{d}t$ la cui espressione l'abbiamo ricavata sopra, dividiamo poi numeratore e denominatore per $\mathrm{d}t'$, sostiuiamo $\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'} \equiv \mathrm{d}v'_x$ eccetera, inoltre $\beta \equiv \frac{V}{c}$ dove V è la velocità del proiettile nel sistema in moto, si ottiene :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \equiv v_x & = \dfrac{\gamma v'_x + \gamma V}{\gamma(c + \frac{V}{c} v'_x)} \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \equiv v_y & = \dfrac{v'_y}{\gamma(c + \frac{V}{c} v'_x)} \\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \equiv v_z & = \dfrac{v'}{\gamma(c + \frac{V}{c} v'_x)} \end{cases}$$

Abbiamo così ottenuto le trasformazioni delle velocità :

ATTENZIONE !

$$\begin{cases} v_x = \dfrac{V + v'_x}{c + \frac{V}{c^2} v'_x /} \\ v_y = \dfrac{v'_y}{\gamma(c + \frac{V}{c} v'_x)} \\ v_z = \dfrac{v'}{\gamma(c + \frac{V}{c} v'_x)} \end{cases}$$

Ricorda sempre che stiamo passando dal moto al fermo !!!!!

Chapter 2

Il quadrivettore energia-impulso

In meccanica relativistica non esiste il semplice vettore impulso ma esiste il vettore **quadrimpulso**, che ha come componenti energia e impulso e lo definiamo come :

$$\mathbf{P} \equiv p^{\mu} = \left(\frac{E}{c}, \vec{\mathbf{p}}\right) \qquad \text{dove} \quad \vec{\mathbf{p}} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

In meccanica relativistica il quadrivettore impulso **NON** è un invariante relativistico, ma:

ATTENZIONE !

Il prodotto di un qualsiasi quadrivettore per se stesso è un invariante relativistico ossia che il suo valore non cambia se cambiamo sistema di riferimento .

Da ciò deduciamo che :

$$\mathbf{P^2} = \mathbf{P}^{\mu}\mathbf{P}_{\mu} = \frac{E^2}{c^2} - |\vec{\mathbf{p}}|^2$$

Prima di andare avanti col calcolo di $\mathbf{P^2}$, indicheremo con $p \equiv |\vec{\mathbf{p}}|$, scriviamo qui delle relazioni fondamentali :

ATTENZIONE !

$$\begin{cases} E = m\gamma c^2 \\ \vec{\mathbf{p}} = m\gamma\vec{\mathbf{v}} \end{cases}$$

Allora si ottiene che il prodotto del quadrimpulso per se stesso è legato alla massa della particella :

$$\mathbf{P^2} = \frac{(m\gamma c^2)^2}{c^2} - (m\gamma v)^2 = m^2c^2$$

Ponendo $c = 1$ e ricordando la forma iniziale di $\mathbf{P^2}$ si ottiene la seguente :

ATTENZIONE !

Alcune relazioni fondamentali :

$$\begin{cases} E^2 = p^2 + m^2 \\ \beta = \dfrac{pc}{E} \\ \gamma = \dfrac{E}{mc^2} \\ \beta\gamma = \dfrac{p}{mc} \end{cases}$$

Ricordiamo che :

$\mathbf{P}$ e E sono **grandezze conservate**
$\mathbf{P}^2$ è un invariante di Lorentz

Vediamo come si applicano le trasformazioni di Lorentz al quadrimpulso definendo sempre con l'apice $'$ le quantità riferite al sistema di riferimento in moto:

$$\begin{cases} \dfrac{E'}{c} = \gamma\dfrac{E}{c} - \beta\gamma p_x \\ p'_x = -\beta\gamma\dfrac{E}{c} + \gamma p_x \end{cases}$$

2.1 Esercizi di riepilogo

2.1.1 Esercizio 1 : Energia e lavoro

Quanto lavoro bisogna compiere per aumentare la velocità di un elettrone di massa $m = 511\frac{KeV}{c^2}$ dalla posizione a riposo a 0.50c ?

Soluzione

In generale il lavoro si calcola $L = E_f - E_i$, ci sono due metodi :
1) Forza bruta
Questo metodo consiste nell'utilizzare la definizione di Energia :

$$\begin{aligned} E_f &= \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2} && \text{ricordando } p = m\gamma v \\ &= \sqrt{m^2c^4 + m^2\gamma^2c^2 0.5^2c^2} && v = 0.5c \\ &= 589\ KeV \end{aligned}$$

ATTENZIONE !

Utile per i calcoli:
la massa se noti è espressa in $\frac{KeV}{c^2}$, questo vuol dire che quando abbiamo mc^2 vuol dire che si ha $\frac{KeV}{c^2}c^2 = KeV$

Per l'energia iniziale si ha invece :

$$\begin{aligned} E_i &= \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2} \\ &= \sqrt{m^2c^4} && \text{poichè } v_i = 0 \\ &= mc^2 \\ &= 511\ KeV \end{aligned}$$

Si ottiene che lavoro $L = E_f - E_i = 589KeV - 511KeV = 78KeV$
2) Usando le relazioni fondamentali
Bisogna ricordarsi la relazione $E = m\gamma c^2$, infatti all'interno di gamma è contenuta la velocità, nel caso particolare $v = 0$ allora $\gamma = 1$:

$$E_f = m\gamma c^2 \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{0.5c}{c}}}$$

$$E_i = mc^2$$

$$L = m\gamma c^2 - mc^2 = mc^2(\gamma - 1) = 78KeV$$

2.1.2 Esercizio 2 : Decadimento e relatività speciale

Un pione decade a riposo in un muone e un neutrino tramite il seguente processo :

$$\pi^- \to \mu^- + \nu_\mu$$

Conoscendo i seguenti dati : $m_\mu = 105.6$Mev e il tempo proprio di vita $\tau_\mu = 2.2\mu s$ mentre il pione ha massa $m_\pi = 139.6$MeV.
Che distanza percorre il muone nel riferimento del laboratorio ?

Soluzione

Innanzitutto quello che bisogna capire è che il tempo τ_μ è il tempo proprio della particella ossia il tempo misurato nel sistema di riferimento della particella stessa, se volessimo calcolare L quindi che altro non è che la velocità per il tempo :

$$L = vt$$

Il tempo t (il tempo nel sistema di riferimento del laboratorio) non conincide con τ_μ a causa della dilatazione dei tempi, si ha invece che $t = \gamma\tau_\mu$ ottenendo :

$$\begin{aligned} L &= c\beta\gamma\tau_\mu && \text{dove } \beta = \tfrac{v}{c} \to v = c\beta \\ &= \frac{p_\mu}{m_\mu}\tau_\mu && \text{usata la relazione : } \beta\gamma = \tfrac{p}{mc} \end{aligned}$$

Dove $p_\mu \equiv |\vec{\mathbf{p}_\mu}|$ che è quello che ci resta da calcolare, si hanno due metodi :
1) Usiamo la legge della conservazione

Sappiamo, già dalla meccanica classica che energia e impulso si conservano quindi possiamo scrivere la relazione prima del decadimento e dopo (nel sistema di riferimento del laboratorio):

$$E_\pi = E_\mu + E_\nu$$
$$\vec{\mathbf{p}}_\pi = \vec{\mathbf{p}}_\mu + \vec{\mathbf{p}}_\nu$$

Vediamo ora le energie e impulsi per ogni particella :

Pione:

Sappiamo che è a riposo, otteniamo quindi che :

$$\begin{cases} \vec{\mathbf{p}}_\pi = 0 \\ E_\pi = \sqrt{m_\pi^2 c^4 + p_\pi^2 c^2} = m_\pi c^2 \end{cases} \qquad E = mc^2 \text{ è anche detta energia a riposo!}$$

Muone:

Del muone ci scriviamo solo l'energia siccome abbiamo già detto all'inizio che l'impulso è incognita :

$$E_\mu = \sqrt{m_\mu^2 c^4 + p_\mu^2 c^2}$$

Neutrino:

Avendo il neutrino massa nulla :

$$E_\nu = p_\nu c$$

ATTENZIONE !

Dal fatto che $\vec{\mathbf{p}}_\pi = 0$ e per la conservazione otteniamo che :

$$0 = \vec{\mathbf{p}}_\mu + \vec{\mathbf{p}}_\nu$$
$$\vec{\mathbf{p}}_\mu = -\vec{\mathbf{p}}_\nu$$

Quello che ci serve per i calcoli è che :

$$|\vec{\mathbf{p}}_\mu| \equiv p_\mu = p_\nu \equiv |\vec{\mathbf{p}}_\nu|$$

Ossia il muone e il neutrino hanno stessa velocità e direzione ma verso opposto.
Possiamo ora continuare con i calcoli ripartendo dalla conservazione dell'energia:

$$m_\pi c^2 = \sqrt{m_\mu^2 c^4 + p_\mu^2 c^2} + p_\mu c$$
$$m_\pi c^2 - p_\mu c = \sqrt{m_\mu^2 c^4 + p_\mu^2 c^2}$$
$$m_\pi^2 c^4 + p_\mu^2 c^2 - 2 m_\pi p_\mu c^3 = m_\mu^2 c^4 + p_\mu^2 c^2$$

da cui segue che :

$$p_\mu = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2 m_\pi} c$$

Allora la distanza che percorre, nel sistema di riferimento del laboratorio è :

$$\begin{aligned} L &= \frac{p_\mu}{m_\mu}\tau_\mu \\ &= \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_\pi} c\tau_\mu \end{aligned}$$

Passiamo ora al secondo metodo.
2) Usando i quadrimpulsi
La conservazione dell impulso vale anche per i quadrivettori, si può scrivere quindi :

$$\mathbf{P}_\pi = \mathbf{P}_\mu + \mathbf{P}_\nu$$

Vogliamo ottenere p_μ ossia il modulo della componente vettoriale del quadrimpulso, per farlo isoliamo $\mathbf{P}_\mu$ ottendendo :

$$\mathbf{P}_\mu = \mathbf{P}_\pi - \mathbf{P}_\nu$$

Ricordando che **il prodotto scalare di un quadrivettore con se stesso è invariante** e che è uguale alla massa al riposo al quadrato :

$$\begin{aligned} m_\mu^2 c^2 &= m_\pi^2 c^2 + m_\nu^2 c^2 - 2\mathbf{P}_\pi \cdot \mathbf{P}_\nu && m_\nu = 0 \\ m_\mu^2 c^2 &= m_\pi^2 c^2 - 2\left(\frac{E_\pi}{c}\frac{E_\nu}{c} - \vec{\mathbf{p}}_\pi \cdot \vec{\mathbf{p}}_\nu\right) && \vec{\mathbf{p}}_\pi = 0 \quad E_\nu = p_\mu c \\ m_\mu^2 c^2 &= m_\pi^2 c^2 - 2m_\pi p_\mu c \end{aligned}$$

Otteniamo la stessa forma di $\mathbf{p}_\mu$ ottenuta col primo metodo .

Chapter 3

Sistemi di riferimento e massa invariante

Negli eseperimenti di interazione fra particelle i sistemi di riferimento tipici sono due : quello del **laboratorio** e quello del **centro di massa**.

3.1 Sistema del laboratorio

Il sistema di riferimento del laboratorio è il sistema solidale con l'osservatore, si ha una particella bersaglio ferma e una particella che gli va incontro, si hanno quindi i due quadrimpulsi:

$$\mathbf{P}_1 = \left(\frac{E_1}{c}, \vec{\mathbf{p}}_1\right)$$
$$\mathbf{P}_2 = \left(\frac{E_2}{c}, 0\right)$$
$$\mathbf{P}_{tot} = \left(\frac{E_1}{c} + m_2 c, \vec{\mathbf{p}}_1\right) \qquad \text{essendo ferma } \frac{E_2}{c} = m_2 c$$

3.2 Sistema del centro di massa

Il sistema del centro di massa è definito come quel sistema nel quale **l'impulso totale è nullo**.
Nel caso particolare in cui le due particelle hanno stessa massa (es il collider) il sistema del centro di massa conincide con il sistema del laboratorio.

ATTENZIONE !

Indichiamo con $\mathbf{P}'$ e $\vec{\mathbf{p}}'$ rispettivamente i quadrimpulsi e i vettori impulso nel sistema di riferimento del centro di massa .

Abbiamo che :

$$\mathbf{P}'_1 = \left(\frac{E'_1}{c}, \vec{\mathbf{p}}'\right)$$
$$\mathbf{P}'_2 = \left(\frac{E'_2}{c}, -\vec{\mathbf{p}}'\right)$$
$$\mathbf{P}'_{tot} = \left(\frac{E'_1 + E'_2}{c}, 0\right)$$

3.3 Massa invariante

Consideriamo un sistema di N particelle ciascuna con il suo quadrimpulso $\mathbf{P}_i = \left(\frac{E_i}{c}, \vec{\mathbf{p}}_i\right)$ come abbiamo detto possiamo definire il quadrimpulso totale $\mathbf{P}_{tot} = \sum_i \mathbf{P}_i$.

ATTENZIONE !

Ricordando che il modulo quadro di un quadrivettore è un invariante relativistico allora possiamo definire la **MASSA INVARIANTE** del sistema e indicheremo con $\sqrt{S}$:

$$\begin{aligned}\sqrt{S} &= \sqrt{\mathbf{P}_{tot} \cdot \mathbf{P}_{tot}} \\ &= \sqrt{\left(\sum_i E_i\right)^2 - \left|\sum_i \vec{\mathbf{p}}_i\right|^2}\end{aligned}$$

Come detto esso è un invariante quindi possiamo calcolarlo anche nel sistema del centro di massa $\sqrt{S'}$

$$\sqrt{S'} = \sum_i E'_i = E_{tot}$$

Nota che nel centro di massa la massa invariante è denominata **Energia del centro di massa**

3.3.1 Differenze fra lab e CdM : decadimento di una particella

Consideriamo il decadimento del pione dato dalla seguente reazione :

$$\pi^- \to \mu^- + \nu_\mu$$

conosciamo i valori delle masse, ci chiediamo quanta energia abbia il muone ($m_\nu = 0$)

Lavoriamo nel CdM

Nelle reazioni la quantità importante da calcolare è $\sqrt{S}$ che è un invariante e si conserva, calcoliamocelo nel CdM e facciamolo prima nel sistema allo stato iniziale.
Inizialmente si ha una sola particella ossia il pione quindi il CdM conincide con il sistema di riferimento della particella stessa :

$$\mathbf{P}'_i = \left(m_\pi c^2, 0\right) \to \sqrt{S'_i} = m_\pi c^2$$

Nello stato finale invece abbiamo due particelle (scrivo direttamente il quadrimpulso totale):

$$\mathbf{P}'_f = \left(\frac{E'_\mu + E'_\nu}{c}, 0\right) \to \sqrt{S'_f} = E'_\mu + E'_\nu \qquad \text{c} = 1$$

Per calcolare le energie bisogna trovare gli impulsi calcolati nel centro di massa, per farlo utilizziamo la **conservazione dell'impulso**

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{p}}_\pi &= \vec{\mathbf{p}}_\mu + \vec{\mathbf{p}}_\nu \\ 0 &= p_\mu + p_\nu \\ p_\mu &= -p_\nu \end{aligned}$$

Possiamo ora calcolarci $\sqrt{S'_f}$ eguagliarlo a $\sqrt{S'_i}$ e trovarci così p_μ.
Tutto questo per dire che $\sqrt{S}$ e E_μ calcolati nel **centro di massa hanno valori ben definiti**.

Lavoriamo nel Lab

Per trovarci E_μ nel Lab basta applicare le trasformazioni di Lorentz al valore che abbiamo trovato nel CdM :

$$\begin{aligned} E_\mu &= \gamma_\pi E'_\mu + \beta_\pi \gamma_\pi \vec{\mathbf{p}}'_\mu \\ &= \gamma_\pi E'_\mu + \beta_\pi \gamma_\pi p'_\mu \cos\theta \\ &= \left[\gamma_\pi E'_\mu - \beta_\pi \gamma_\pi p'_\mu, \gamma_\pi E'_\mu + \beta_\pi \gamma_\pi p'_\mu\right] \qquad \cos\theta \in [-1, 1] \\ &\simeq [105.6 MeV, 122.7 MeV] \end{aligned}$$

Perchè ciò avviene?

ATTENZIONE !

matematicamente ciò avviene poichè quando applichiamo le Trasformazioni di Lorentz la parte temporale (energia) si mescola con la parte spaziale quando cambio sistema di riferimento.

Appendix A

Costanti e Unità di misura

A.1 Unità di misura

- $1\text{A} = 1\text{C}\,\text{s}^{-2}$
- $1b = 10^{-24}\text{cm}^2$
- 1eV