# Ottica

Pietro Garofalo

July 14, 2022

# Contents

# Chapter 1

# Gli stati di polarizzazione

In generale possiamo esprimere la luce come un campo elettrico

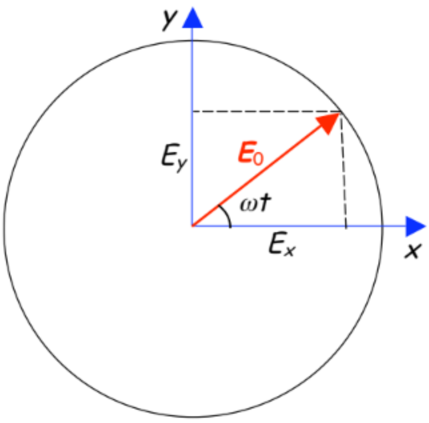
$$\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{E_0}} \exp\{i(\mathbf{kr} - \omega t + \phi)\}$$

Il vettore $\vec{\mathbf{E}}$ è scomponibile in due componenti tra loro sempre ortogonali

ATTENZIONE !

se la differenza di fase tra le due componenti $\vec{\mathbf{E_x}}$ ed $\vec{\mathbf{E_y}}$ si mantiene costante si dice che la luce è **polarizzata**, se invece essa varia nel tempo in modo casuale allora è **non polarizzata**, es la luce del sole.

Semplicemente la polarizzazione ci dice come sono correlate le due componenti del campo elettrico, ve ne sono diverse, per esempio prendiamo una luce polarizzata circolarmente:




ossia una luce che ha la compomente x massima quando quella y è nulla.

Possiamo rappresentarla nel seguente modo:

$$\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{E}}_{0x}\cos(kz-\omega t) + \vec{\mathbf{E}}_{0y}\sin(kz-\omega t)$$

passando ora alla notazione complessa :

$$\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{E}}_{0x}\exp\{i(kz-\omega t)\} + \vec{\mathbf{E}}_{0y}\exp\Big\{i(kz-\omega t) \pm \frac{\pi}{2}\Big\}$$

$$= \vec{\mathbf{E}}_{0x}\exp\{i(kz-\omega t)\} + \vec{\mathbf{E}}_{0y} i \exp\{i(kz-\omega t)\}$$

dove non ho fatto altro che riscrivere il seno come il coseno più o meno $\frac{\pi}{2}$.

## 1.1 Il vettore di Jones

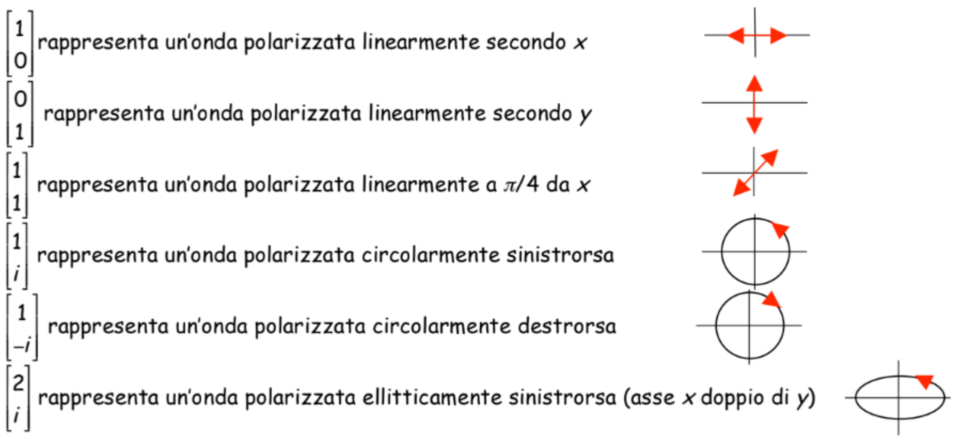
Dalla formula ricavata prima si nota subito che possiamo riscrivere l'onda come :

$$\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{E}}_0 \vec{\mathbf{J}} \exp\{i(kz-wt)\}$$

Dove il vettore $\vec{\mathbf{J}}$ rappresenta proprio la polarizzazione ed è definito come **vettore di Jones** che nel caso della polarizzazione circolare vale :

$$\vec{\mathbf{J}} = \begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}$$

Tutte le polarizzazioni e i corrispondenti vettori di Jones li allego in figura In quest'ottica




dunque gli effetti degli elementi ottici come per esempio le lamine $\lambda/4$ o $\lambda/2$, vengono rappresentati come **matrici di Jones**.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ Polarizzatore lineare orizzontale} \tag{5.8}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ Polarizzatore lineare verticale}$$

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & \pm 1 \\ \pm 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ Polarizzatore lineare a } \pm\pi/4$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} \text{ Lamina quarto d'onda } (\lambda/4) \text{ (sfasa di } \pi/2 \text{ le componenti } x \text{ e } y) \text{ con asse ottico orizzontale}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \text{ Lamina } \lambda/4 \text{ con asse ottico verticale}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ Lamina } \lambda/2 \text{ (sfasa di } \pi \text{ le componenti } x \text{ e } y) \text{ con asse ottico verticale oppure orizzontale}$$

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix} \text{ Induce una polarizzazione circolare destrorsa}$$

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{bmatrix} \text{ Induce una polarizzazione circolare sinistrorsa}$$

Facciamo un esempio, prendiamo una luce polarizzata a 45 che passa attraverso una lamina $\lambda/4$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

si ottiene una luce polarizzata circolarmente. Si possono ottenere inoltre gli effetti di altri elementi ottici ruotando quello originale. Prendendo la matrice di rotazione :

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

allora la nuova matrice $\mathbf{T}'$ si ottiene:

$$\mathbf{T}' = \mathbf{R}(\theta)\mathbf{T}\mathbf{R}(-\theta)$$

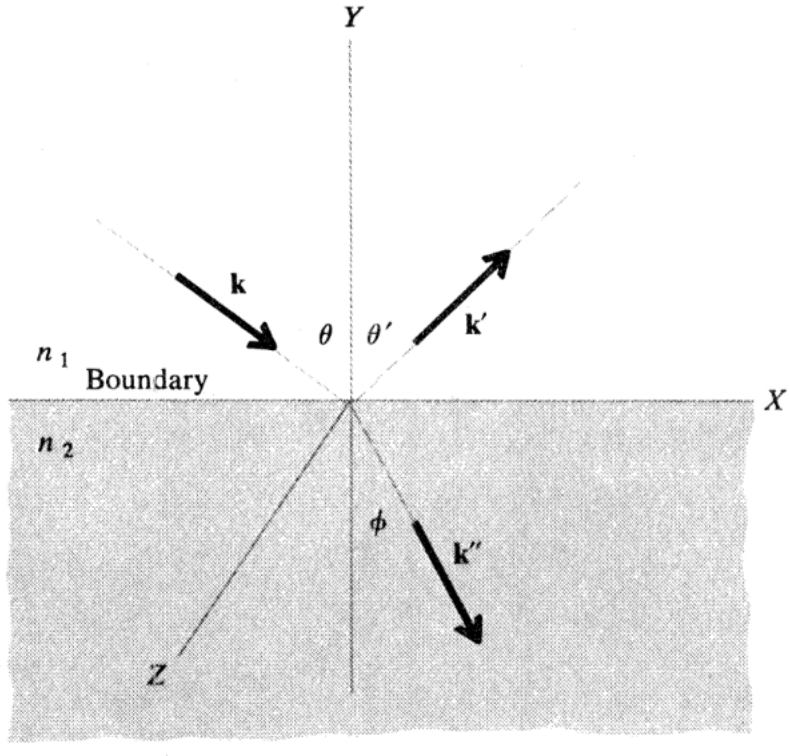
**ATTENZIONE !**

Il fatto che se per esempio prendo un polaroid orizzontale e lo giro di 90 gradi ottendo un polaroid verticale funzione perchè gli elementi ottici hanno un asse preferenziale chiamato **asse ottico**

# Chapter 2

# Riflessione e rifrazione della luce

Consideriamo un'onda piana che incide sulla superficie di separazione fra due materiali che hanno un indice di rifrazione diverso $n_1$ ed $n_2$, una parte dell'onda incidente verrà riflessa ed un altra verrà trasmessa. Scriviamo la dipendenza spazio-temporale per ciascun'onda




:

$$\begin{aligned} &\exp\{i(\mathbf{kr} - \omega t)\} && \text{Onda incidente} \\ &\exp\{i(\mathbf{k'r'} - \omega t)\} && \text{Onda riflessa} \\ &\exp\{i(\mathbf{k''r''} - \omega t)\} && \text{Onda trasmessa} \end{aligned}$$

Chiamiamo ora $xy$ il **piano di incidenza** e con $xz$ il **piano di interfaccia**, affinchè ci possano essere relazioni costanti è necessario che :

$$\omega = \omega' = \omega''$$
$$\mathbf{kr} = \mathbf{k'r'} = \mathbf{k''r''}$$

la seconda condizione deve valere sul piano di interfaccia e supponendo che la prima onda appartenga al piano di incidenza diventa :

$$k_x x = k'_x x + k'_z z = k''_x x + k''_z z$$

ma dovendo valere $\forall x$ e $\forall y$ allora $k'_y = k''_y = 0$

ATTENZIONE !

si ottiene che i vettori **k** sono **complanari**, in particolare che $k_x = k'_x = k''_x$

## 2.1 Legge di Snell

Scrivendoli ora in funzione della loro lunghezza d'onda

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n_1}$$
$$\lambda' = \frac{\lambda_0}{n_1}$$
$$\lambda'' = \frac{\lambda_0}{n_2}$$

e ricordando il fatto che sono complanari otteniamo due relazioni fondamentali:

$$k_x = k'_x$$
$$\frac{2\pi}{\lambda}\sin\theta = \frac{2\pi}{\lambda'} sin\theta'$$

ATTENZIONE !

$$\theta = \theta'$$

$$k_x = k''_x$$
$$\frac{2\pi}{\lambda}\sin\theta = \frac{2\pi}{\lambda''} sin\phi$$

ATTENZIONE !

**Legge di Snell**

$$n_1 \sin\theta = n_2 \sin\phi$$

Possiamo studiare due casi :

$$n_1 < n_2 \rightarrow \phi < \theta$$
$$n_1 > n_2 \rightarrow \phi > \theta$$

In particolare nel secondo caso, all'aumentare di $\theta$ deve quindi aumentare anche $\phi$ fino ad arrivare ad un angolo critico ( infatti la funzione seno non può essere $> 1$ )

$$\phi_c = \frac{\pi}{2}$$

in questo caso si ha dunque **riflessione totale interna** , l'angolo $\theta_c$ che comporta tale situazione è dato dalla legge di Snell:

$$\theta_c = \sin^{-1} \frac{n_2}{n_1}$$

## 2.2 Ampiezza delle onde trasmesse e riflesse

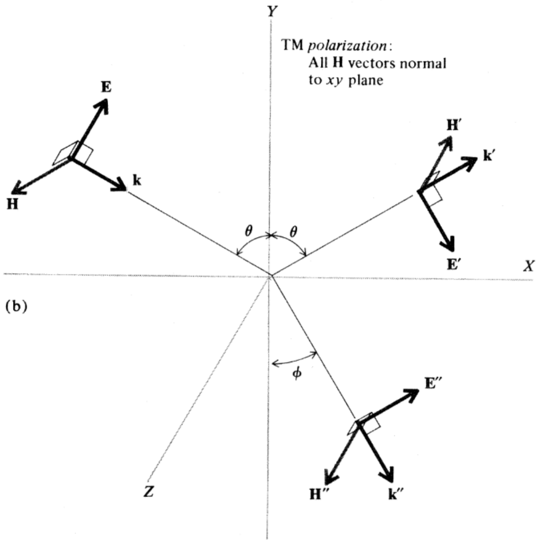
Supponiamo di avere un'onda elettromagnetica che incide sul piano, come sappiamo il campo elettrico e quello magnetico sono, in ogni momento, perpendicolari fra loro. Ricordando le relazioni di continuità :

$$E_{1t} = E_{2t} \qquad\qquad D_{1n} = D_{1n}$$

valide per mezzi trasparenti ed in assenza di cariche e correnti, possiamo ricavare i coefficienti di riflessione e trasmissione. Conviene dividere la trattazione in due casi.

### 2.2.1 Onda T.M.

Indichiamo con onda T.M. l'onda che arriva con il campo magnetico **parallelo** al piano di interfaccia $xz$ ( transverse magnetic ), dalla figura iniziale quindi uscente dal foglio mentre il campo magnetico appartiene al piano $xy$




Le condizioni di continuità si possono scrivere come ( indichiamo $\cos\theta$ C e $\sin\theta$ S ):

$$A)EC - E'C = E''C''$$
$$B)n_1^2(ES + E'S) = n_2^2 E''S''$$

ricavando dalla B) $E''$ e ricordandoci la legge di Snell $n_1^2/n_2^2 = S''/S$, non faccio i calcoli ma sono banali, possiamo ricavare **l'idice di rifrazione** $r_p$:

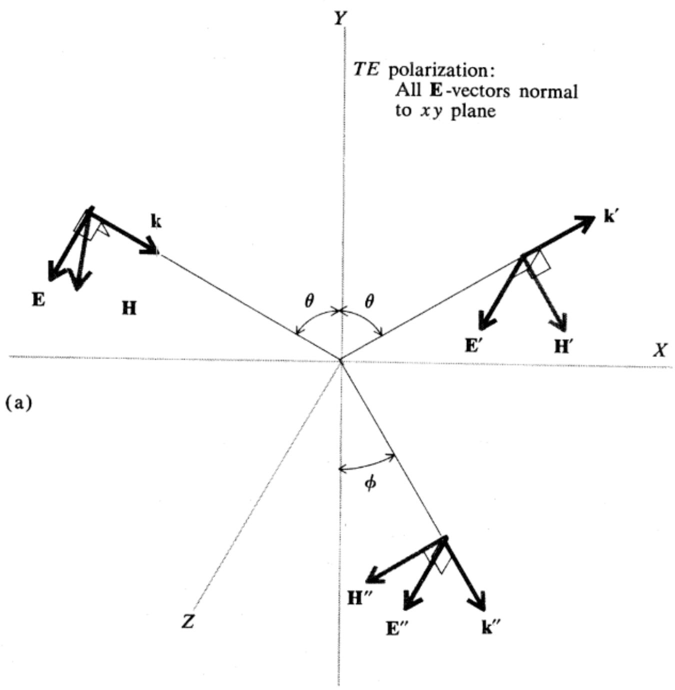
$$r_p = \frac{E'}{E} = \frac{CS - C''S''}{CS + C''S''}$$
$$= -\frac{\tan\theta - \theta''}{\tan\theta + \theta''}$$

Con pochi semplici calcoli si può trovare pure **l'indice di trasmissione** $t_p$ :

$$t_p = \frac{E''}{E} = \frac{2SC''}{\sin\theta + \theta'' \cos\theta - \theta''}$$

### 2.2.2 Onda T.E.

L'onda T.E. è quella che arriva con il campo elettrico parallelo al piano di interfaccia $xz$. Applicando le stesse condizioni di continuità si ottiene :




$$r_s = -\frac{\sin\theta - \theta''}{\sin\theta + \theta''}$$

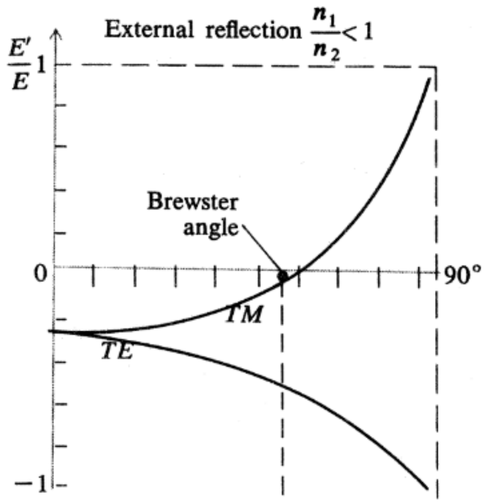
$$t_p = 1 - r_p$$

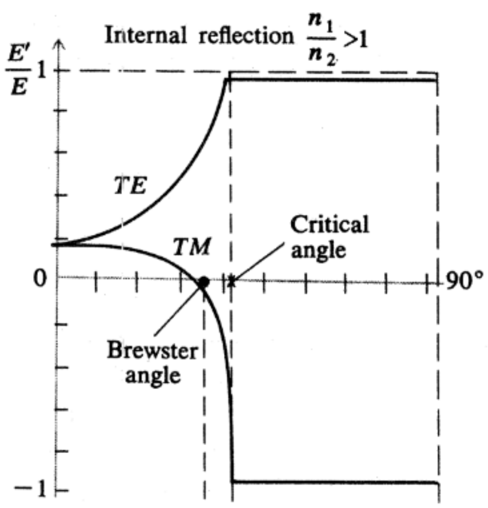
**ATTENZIONE !**

Le equazioni degli indici di riflessione e trasmissione sono dette
**relazioni di Fresnel**

### 2.2.3 Studio degli indici di rifrazione

L'andamento degli indici di rifrazione è dato dai seguenti grafici che variano nel caso in cui $n_1/n_2$ sia maggiore o minore di 1: La prima cosa che notiamo è quando $\theta = 0$ che è




il caso denominato **Incidenza normale**, in questo caso

$$r_s = r_p = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$$

in tale contesto $r \approx 1/5$, il segno ovviamente dipende dal fatto se $n_1 > n_2$ o viceversa.

un'altra cosa da notare è il fatto che $r_p$ può essere 0, questo è dato dal fatto che

$$r_p = \frac{\tan \theta - \theta''}{\tan \theta + \theta''}$$

si può avere il caso in cui :

$$\begin{aligned} &\theta + \theta'' = \frac{\pi}{2} \implies \tan \theta + \theta'' \to \inf \\ &r_p \to 0 \end{aligned}$$

tale angolo è denominato **Angolo di Brewster** $\theta_b$ che si ottiene grazie alla legge di Snell

$$\begin{aligned} n_1 \sin \theta &= n_2 \sin \theta'' \\ n_1 \sin \theta &= n_2 \sin \frac{\pi}{2} - \theta && \theta + \theta'' = \tfrac{\pi}{2} \\ \tan \theta_b &= \frac{n_2}{n_1} \end{aligned}$$

Un'altra cosa da notare nel grafico è che nel caso $\frac{n_1}{n_2} > 1$ i coefficienti di riglessione hanno una forte risalita in coincidenza di quello che è l'angolo limite visto prima.