Q4. $k(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$. If A is singular, the $k(A) = \infty$.

(a). show that $k_2(A) = \sigma_{max}/\sigma_{min}$. show also $k_p(AB) \le k_p(A) k_p(B)$.

As it's shown in Q3. $\|A\|_2 = \sigma_{max}$.

So $\|A^{-1}\|_2 = \|\Sigma^{-1}\|_2 = \max \sqrt{\begin{bmatrix}\sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_n\end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix}\sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_n\end{bmatrix}^{-1}} = \cancel{\sigma_{min}}\ \cancel{\frac{1}{\sigma_{max}}}\ (\sigma^{-1})_{max} = \frac{1}{\sigma_{min}}$

$\therefore k_2(A) = \sigma_{max}/\sigma_{min}$.

$k_p(AB) = \|AB\|_p \|(AB)^{-1}\|_p$

$= \|AB\|_p \|B^{-1}A^{-1}\|_p$

As it's shown in Q3. $\|AB\|_p \le \|A\|_p \|B\|_p$.

$\therefore \|AB\|_p \|B^{-1}A^{-1}\|_p \le \|A\|_p \|B\|_p \|B^{-1}\|_p \|A^{-1}\|_p$

$= \|A\|_p \|A^{-1}\|_p \|B\|_p \|B^{-1}\|_p$

$= k_p(A) k_p(B)$.

$\therefore k_p(AB) \le k_p(A) k_p(B)$.

(b). $k_p(A) \dfrac{\|\Delta b\|_p}{\|b\|_p} = \|A\|_p \|A^{-1}\|_p \dfrac{\|A\Delta x\|_p}{\|Ax\|_p}$.

~~since $\|AB\|_p \le \|A\|_p \|B\|_p$~~ $= \max\limits_{x \ne 0} \dfrac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p} \cdot \dfrac{1}{\|Ax\|_p} \cdot \max\limits_{x \ne 0} \|A^{-1}\|_p \cdot \|A\Delta x\|_p$

~~$\therefore \|A\|_p \|A^{-1}\|_p \dfrac{\|A\Delta x\|_p}{\|Ax\|_p} \ge$~~ $= \max\limits_{x \ne 0} \dfrac{1}{\|x\|_p} \cdot \max \dfrac{\|\Delta x\|_p}{\|A\Delta x\|_p} \|A\Delta x\|_p$

$= \max\limits_{x \ne 0} \dfrac{\|\Delta x\|_p}{\|x\|_p} \ge \dfrac{\|\Delta x\|_p}{\|x\|_p}$.

$\therefore k_p(A) \dfrac{\|\Delta b\|_p}{\|b\|_p} \ge \dfrac{\|\Delta x\|_p}{\|x\|_p}$.