Sonntag, 22. Oktober 2023 17:11

Sei K eine Menge von Mengen
Sei M eine Mengenfamilie und $M \subseteq K$

Definition: atomare Menge einer Mengenfamilie
Sei $m \in K$
gibt es keine zwei Mengen $a, b \in M \setminus \{m\}$
mit $a \cup b = m$, so ist m atomar in M

Lemma 1

Sei $m \in M$

$M \setminus \{m\}$ ist eine Mengenfamilie $\Leftrightarrow$ m ist atomar in M

Lemma 2.

Sei M eine Mengenfamilie und m^* die größte Menge in M.
Es gilt: $M \subseteq \mathcal{P}(m^*)$ $\leftarrow$ Potenzmenge bzgl. von m^*

Schreibweise $\mathcal{P}(M) = \mathcal{P}(m^*)$

Lemma 3.

Seien A, B zwei Mengenfamilien, $A \subsetneq B$.
$\Rightarrow \exists\, b \in B : b \notin A$ und b ist atomar bzgl. B.

Lemma 4: Ergibt sich direkt aus Lemma 3. (zumindest bei diskreten Mengen)

Seien A, B zwei Mengenfamilie $A \subsetneq B$.
Durch iteratives entfernen eines beliebigen atomaren Elementes von B,
welches nicht in A vorkommt, überführt man B in A.

Beweis Lemma 1:

Beh: $m \in M$. $M \setminus \{m\}$ ist eine Mengenfamilie $\Leftrightarrow$ m ist atomar in M

Bew.:

„$\Rightarrow$": $M \setminus \{m\}$ ist eine Mengenfamilie
$\Rightarrow \nexists\, a, b \in M \setminus \{m\} : a \cup b = m$
$\Rightarrow$ m ist atomar in M

„$\Leftarrow$": m ist atomar in M und M ist eine Mengenfamilie
$\Rightarrow \forall a, b \in M \setminus \{m\} \quad a \cup b \in M \setminus \{m\}$
$\Rightarrow$ $M \setminus \{m\}$ ist eine Mengenfamilie

$\Rightarrow M \setminus \{m\}$ ist eine Mengenfamilie

Beweis Lemma 2:

Beh: Sei m^* die größte Mengenfamilie in M $\Rightarrow M \subseteq \mathcal{P}(m^*)$

Bew:

$\bigcup_{m \in M} m \in M$ nach Definition

$\Rightarrow m^* = \bigcup_{m \in M} m$

$\forall m \in M \Rightarrow m \subseteq m^*$

$\Rightarrow M \subseteq \mathcal{P}(m^*)$

Beweis Lemma 3.

Beh.: Sei $A \subsetneq B$, A, B sind disjunkte Mengenfamilien

$\Rightarrow \exists b \in B$ mit $b \notin A$, b atomar in B.

Bew.:

Aus $A \subsetneq B$ folgt $\exists b \in B$ mit $b \notin A$.

Ang. b ist nicht atomar in b.

$\Rightarrow \exists b', b'' \in B$ mit $b' \cup b'' = b$

$\Rightarrow b' \notin A$ oder $b'' \notin A$, da sonst A keine Mengenfamilie ist

$\Rightarrow \exists b^1 \in B$ mit $b^1 \notin A$ und $b^1 \subsetneq b$

Unter der iterativen Annahme, dass b^k nicht atomar in B ist

folgt $\exists b^{k+1} \in B$: $b^{k+1} \notin A$ und $b^{k+1} \subsetneq b^k \subsetneq b^{k-1} \subsetneq \dots \subsetneq b$

Da A, B disjunkt sind (nur endlich viele Elemente beinhalten)

folgt $\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}$ mit b^k ist nicht nicht atomar

$\Rightarrow \exists b \in B$: $b \notin A$ und b ist atomar in B ☑

Lemma: Sei $A \subsetneq B$, x die Zahl, die

am häufigsten in A und in B vorkommt

Dann gibt es eine atomare Menge b in B mit $b \notin A$

und x ist das häufigste Element in $B \setminus \{b\}$.

Beweis:

Entweder $x \in b$ oder $x \notin b$ $\Rightarrow$ lösche b, denn dann erhöht sich Häufigkeit von x und x bleibt häufigstes Element

$x \in b$

Entweder x häufigstes Element in $B \setminus \{b\}$ oder x nicht das häufigste Element in $B \setminus \{b\}$

$\Rightarrow$ lösche b tricky $\Rightarrow$ muss anderes atomare b' ohne x geben, Entweder x häufigstes Element in $U \setminus \{b\}$ oder x nicht das häufigste Element in $U \setminus \{b\}$

$\Rightarrow$ lösche b

tricky $\Rightarrow$ muss anderes atomare b' ohne x geben,
oder ein b', sodass x das häufigste Element bleibt

Lösche iterativ alle atomaren Mengen ohne x die in $\mathcal{P}(M)$ aber nicht in A sind. Sei k die minimale Anzahl von gelöschten atomaren Mengen die eine Zahl $z \neq x$ enthalten.

$\{2,3\}$

$\{2\}$

$k=1$, $z=3$

$\Rightarrow$ Nach maximal k Löschungen von atomaren Mengen mit x gibt es a) atomare Mengen ohne x die gelöscht werden können und die z enthalten

b) k ist gestiegen.