Première partie

Notions préliminaires

Chapitre 1

Vocabulaire mathématique

1.1 Quelques lettres grecques usuelles

Les principales lettres grecques utilisées dans cet ouvrage sont les suivantes :

Minuscule	Majuscule	Nom
α	A	alpha
β	B	bêta
γ	Γ	gamma
δ	Δ	delta
ϵ	E	epsilon
θ	Θ	thêta

Minuscule	Majuscule	Nom
λ	Λ	lambda
μ	M	mu
π	Π	pi
σ	Σ	sigma
φ	Φ	phi
ω	Ω	oméga

En mathématiques, ces lettres sont utilisées entre autres :

- dans la mesure des angles α, β, γ, etc.
- dans l'équation du second degré pour le calcul de Δ.
- pour signifier des valeurs négligeables : ϵ.
- en géométrie, la lettre π pour désigner le rapport entre la circonférence et le diamètre d'un cercle (soit environ 3,141 592 653 6).
- en statistiques, Π sert à désigner des produits d'éléments.
- en statistiques toujours, le symbole de sommation Σ pour désigner une somme d'éléments.

1.2 Symboles mathématiques

Un certain nombre de symboles mathématiques élémentaires seront utilisés dans cet ouvrage. Voici les plus importants :

Symbole	Signification
$+$	Addition
$-$	Soustraction
$\cdot, \times, *$	Multiplication
$\div, /, :$	Division
$\pm$	Plus ou moins
$=$	Égal
$\neq$	Différent
$\simeq$	Égal environ
$<$	Plus petit que
$\leq$	Plus petit ou égal à
$>$	Plus grand que
$\geq$	Plus grand ou égal à

Symbole	Signification
∞	Infini
$\varnothing, \{\}$	Ensemble vide
$\Rightarrow$	Implique que...
$\subset$	Inclus dans...
$\in$	Appartient à...
$\forall$	Pour toute valeur...
x_i	Variable indicée
x^i	x puissance i
$\sum$	Sommation
$\prod$	Produit
$\|x\|$	Valeur absolue de x
$\lfloor x \rfloor$	Partie entière de x

1.3 Vocabulaire de logique

1.3.1 Proposition

Une proposition est un énoncé qui :

- ne peut être que vrai ou faux
- ne peut être vrai et faux en même temps

Exemple 1.1

Soit P la proposition : «ABC est un triangle rectangle»
Soit Q l'équation : $x^2 - 5x + 6 = 0$

1.3.2 Contre-exemple

Un contre-exemple est un exemple permettant de contredire une proposition.

Exemple 1.2

Soit P la proposition : «Tous les nombres inférieurs à 5 sont pairs»
P est une proposition fausse car 3 est un nombre impair !

1.3.3 Axiome

Un axiome est une proposition supposée vraie et que l'on ne cherche pas à démontrer.

Exemple 1.3

Le nombre 0 existe.

1.3.4 Théorème

Un théorème est une proposition dont il faut établir la véracité au moyen d'une démonstration. Un théorème est donc vrai s'il se déduit logiquement d'axiomes.

Exemple 1.4

Théorème de Pythagore : Dans un triangle rectangle, le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés.

1.3.5 Conjecture

Une conjecture est une proposition que l'on suppose vraie sans parvenir à la démontrer. Si une conjecture est démontrée elle en devient un théorème.

Exemple 1.5

Conjecture de Goldbach : Tout entier pair supérieur ou égal à 4 peut s'écrire comme la somme de deux nombres premiers. Exemple : $16 = 11 + 5$

1.3.6 Corollaire

Un corollaire est une proposition découlant d'une autre.

Exemple 1.6

Le corollaire de «porter des lunettes» pourrait être : «voir mieux».

1.3.7 Opérateurs logiques

La négation Non

La négation d'une proposition P est la proposition (*non* P) qui est son contraire. [1]

Exemple 1.7

P	Non P
$x < 3$	$x \geq 3$
$x \in \mathbb{N}$	$x \notin \mathbb{N}$
Les points A, B, C sont alignés	Les points A, B, C forment un triangle

1. Notation logique : $\neg P$. Notation ensembliste : $\overline{P}$.

La conjonction ET

La notion de « ET » traduit le fait de satisfaire deux propositions à la fois. [2]

Exemple 1.8

P	Q	P ET Q
$x > 8$	$x \leq 10$	$x \in]8\,;\,10]$
Les points A, B, C, D forment un losange	Les points A, B, C, D forment un rectangle	Les points A, B, C, D forment un carré

La disjonction OU

La notion de « OU » traduit le fait de satisfaire l'une des propositions ou bien les deux propositions à la fois. En mathématiques le « OU » est **inclusif**[3]. En informatique il existe un OU **exclusif**, appelé **XOR** et noté $\oplus$. [4]

Exemple 1.9

P	Q	P OU Q
$x < 6$	$x > 8$	$x \in]-\infty\,;\,6[\cup]8\,;\,\infty[$
$n \in \{2;4\}$	$n \in \{2;5\}$	$n \in \{2;4;5\}$

1.3.8 Symboles particuliers

L'implication $\Rightarrow$

L'implication traduit une situation du type : Si P alors Q ou encore P donc Q.

Exemple 1.10

- Si ABCD est un carré $\Rightarrow$ il a 4 angles droits.
- Si $x = 2$ alors $x^2 = 4$

2. Notation logique : $P \wedge Q$. Notation ensembliste : $P \cap Q$.
3. Notation logique : $P \vee Q$. Notation ensembliste : $P \cup Q$.
4. Exemple de OU exclusif : «Je vais aux cours OU je reste au lit».

L'équivalence $\Leftrightarrow$

L'équivalence traduit une situation du type : P équivaut à Q ou encore P si et seulement si Q.

Exemple 1.11

- $x^2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2 \quad \text{ou} \quad x = -2.$
- Soit ABC un triangle rectangle en A $\quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{BC}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2$.

Les quantificateurs $\forall$ et $\exists$

Un quantificateur permet de préciser le domaine de validité d'une proposition. On distingue :

- le quantificateur **universel** $\forall$, signifiant : « quel que soit » ou « pour tout »
- le quantificateur **existentiel** $\exists$, signifiant : « il existe au moins un... »

✎ La virgule qui suit le quantificateur existentiel $\exists$ peut être traduite par «tel que». Certains auteurs remplacent la virgule par un trait vertical.

Exemple 1.12

- $\exists x \mid x^2 = 4$ ou $\exists x \,,\, x^2 = 4$ Il existe au moins un x tel que $x^2 = 4$
- $\forall n \in \{1, 2, \cdots, 10\}$ Pour toutes les valeurs de n allant de 1 à 10.

1.4 Problèmes et exercices de synthèse

1 [Lettres grecques] Comment se nomme les lettres grecques suivantes ?

(a) Ω (c) α (e) Σ (g) φ (i) Π

(b) Δ (d) β (f) ϵ (h) σ (j) ω

2 [Symboles mathématiques] Placer les symboles mathématiques suivants dans les relations mathématiques ci-après :

$$\subset \quad \simeq \quad \varnothing \quad \neq \quad \infty \quad \in \quad > \quad \times \quad =$$

(a) $3 \ldots 2 = 6$ (d) $3,01 \ldots 3$ (g) $\frac{1}{0} = \ldots$

(b) $10 \ldots \mathbb{N}$ (e) $\mathbb{N} \ldots \mathbb{R}$ (h) $x_i \ldots x^i$

(c) $17 \ldots 3$ (f) $\lfloor 3, 1 \rfloor \ldots 3$ (i) $\{\} = \ldots$

3 [Propositions] Parmi les énoncés suivants, lesquels sont des propositions ?

1. Nice est une ville de France.
2. L'Everest est moins haut que le Cervin.
3. C'est le meilleur pilote.
4. La capitale d'Espagne est Madrid.
5. Un carré à 5 côtés.
6. Pythagore aime les croquettes.

4 [Propositions] Parmi les énoncés suivants, lesquels sont des propositions ?

1. Le cousin de Martin est pilote
2. Comment vas-tu ?
3. $20 < 6$
4. 6×3
5. 10 n'est pas un carré.
6. Une bière coûte 5 frs.

5 [Valeur de vérité] Indiquer si les énoncés suivants sont des propositions. Dans le cas où ce sont des propositions, trouver leur valeur de vérité (c'est-à-dire si elles sont vraies ou fausses).

1. Un carré possède 3 angles droits.
2. La racine carrée de 25.
3. 1, 2 et 6 sont des diviseurs de 12.
4. Un triangle a toujours deux angles droits.
5. $7 \times 63 = 441$
6. Une année bissextile compte 365 jours.

6 [La négation] Écrire la négation des propositions suivantes :

(a) Les droites D_1 et D_2 sont parallèles.

(b) $y \neq 4$

(c) $x > 6$

(d) $x \in \mathbb{N}$

(e) $a^2 + b^2 = c^2$

(f) Le temps est froid ou sec

7 [La négation] Soit la proposition P : $x \leq 4$ OU $x \geq 4$. Parmi les propositions suivantes, quelle est la négation de P ?

(a) $-4 < x < 4$

(b) $-4 < x$ OU $x < 4$

(c) $x < -4$ OU $x > 4$

(d) $x \leq -4$ ET $x \geq 4$

8 [Connecteurs ET/OU] On donne les deux propositions suivantes :

- A : Je souhaite réussir mes examens et
- B : Je bosse mes maths.

Faire correspondre les propositions avec les éléments :

$\overline{A}$ ou $\overline{B}$	A ou B	$\overline{A}$ ou B	$\overline{A} \Rightarrow \overline{B}$	$A \Rightarrow \overline{B}$

Si je ne veux pas réussir mes examens alors je ne bosse pas mes maths	
Je ne veux pas réussir mes examens ou je bosse mes maths	
Si je veux réussir mes examens alors je ne bosse pas mes maths	
Je veux réussir mes examens ou je bosse mes maths	
Je ne veux pas réussir mes examens ou je ne bosse pas mes maths	

9 [Connecteurs ET/OU] On donne les deux propositions suivantes :

- A : Je suis nul en maths et
- B : Je suis bon en français.

Faire correspondre les propositions avec les éléments :

$\overline{A}$ ou $\overline{B}$	A ou B	$\overline{A}$ ou B	$\overline{A} \Rightarrow \overline{B}$	$A \Rightarrow \overline{B}$

Si je suis bon en maths alors je suis bon en français	
Je suis nul en maths et je suis nul en français	
Je suis bon en maths et je suis nul en français	
Je suis nul en maths ou je suis bon en français	
Je suis nul en français si je suis nul en maths	

10 [Implication $\Rightarrow$] On sait que l'application suivante est vraie :

Si Jean regarde le foot alors Carole sort se promener

Sans autre hypothèse, que se passe-t-il lorsque Jean regarde le foot ?

(a) Carole ne sort pas se promener
(b) Carole sort se promener
(c) On ne peut rien conclure

11 [Implication $\Rightarrow$] On sait que l'application suivante est vraie :

Quand Fredy est très fâché alors Martine s'installe devant la télé

Sans autre hypothèse, que se passe-t-il lorsque Martine ne s'installe pas devant la télé ?

(a) Fredy ne se fâche pas

(b) Fredy est très fâché

(c) On ne peut rien conclure

12 [Le quantificateur $\exists$] On pose $A = \{7, 10, 3, 8, 12, 14\}$. La proposition suivante est-elle vraie ou fausse ?

$$\exists n \in A, \quad |n - 12| \leq 8$$

13 [Le quantificateur $\forall$] La proposition suivante est-elle vraie ou fausse ?

$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ et } \forall y \in \mathbb{R}, y^2 > x$$

14 [Raisonnement logique] On donne le raisonnement suivant :
Si il pleut, alors la terre est mouillée. Or la terre est mouillée. Donc il pleut.

(a) Que penser de ce raisonnement ?

(b) Comment pourrait-il être adapté pour être correct ?

15 [Défi] Cinq enfants veulent goûter. Chacun veut un fruit différent. Ils ont le choix entre : une orange, une banane, une pomme, une poire et un kiwi.

- Martine n'aime pas les poires et déteste les oranges.
- Caroline adore les kiwis.
- Pierre et Sarah ne veulent pas de poires.
- Pierre aime les pommes.

Cocher les cases qui ne conviennent pas pour trouver le goûter de chacun.

	banane	poire	kiwi	orange	pomme
Sarah					
Pierre					
Martine					
Caroline					
Nicolas					

Chapitre 2

Opérations de base sur les nombres

Objectifs du chapitre

- savoir représenter des nombres à l'aide d'intervalles.
- savoir calculer avec des fractions.
- connaître les propriétés des puissances.
- savoir travailler avec la notation scientifique.
- connaître la règle des signes et les priorités des opérations.
- savoir décomposer des nombres en facteurs premiers et calculer les PPMC et PGDC de plusieurs nombres.

2.1 Ensembles et intervalles

2.1.1 Ensembles

On distingue plusieurs ensembles de nombres :

Ensemble de nombres	Notation	Exemples
Nombres naturels	$\mathbb{N}$	$0\,;1\,;2\,;3\,;4\,;10\,;\ldots$
Nombres entiers relatifs	$\mathbb{Z}$	$-20\,;-2\,;0\,;1\,;2\,;\ldots$
Nombres rationnels	$\mathbb{Q}$	$-5\,;-\frac{2}{3}\,;0\,;0{,}222\,;\frac{4}{5}\,;30{,}5\,;\ldots$
Nombres réels	$\mathbb{R}$	$-5\,;-\sqrt{2}\,;0\,;e\,;\pi\,;\sqrt{5}\ldots$

Ces ensembles sont inclus les uns dans les autres :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Remarques

- Un nombre rationnel est un nombre qui peut s'écrire sous la forme d'une fraction (a entier et b entier non nul). Les nombres qui ne peuvent s'écrire sous la forme d'une fraction de 2 nombres entiers sont appelés **irrationnels** comme π ou $\sqrt{3}$.
- Une étoile en exposant d'un ensemble indique que zéro est exclu : $\mathbb{N}^*$ = entiers naturels sans le 0.
- Un + ou un − en indice indique les valeurs positives ou négatives de l'ensemble considéré. Ainsi $\mathbb{R}_+^*$ indique l'ensemble des nombres réels strictement positifs.
- Un nombre rationnel périodique peut s'écrire sous l'une ou l'autre des formes suivantes :

$$\frac{15}{11} = 1,363636\ldots = 1,\overline{36}$$

Un ensemble peut être écrit en **extension**, c'est-à-dire en nommant les valeurs qu'il contient. Il peut être aussi écrit en **compréhension** en décrivant les caractéristiques des éléments qu'il contient.

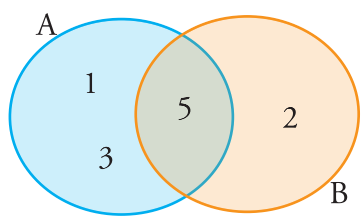
Ainsi, l'ensemble des entiers naturels pairs peut s'écrire en compréhension ou en extension comme suit : [1]

$$\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ pair}\} \qquad \text{ou} \qquad \{0, 2, 4, 6, \ldots\}$$

Un **diagramme de Venn** permet également une visualisation simple des ensembles. Considérons par exemple les ensembles de nombres suivants :

$$A = \{1, 3, 5\} \qquad \text{et} \qquad B = \{2, 5\}$$

On peut représenter ces ensembles comme suit :



et définir les opérations élémentaires suivantes sur ces ensembles :

- L'**union** de A et de B, noté $A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}$ (réunification de A et B) [2]
- L'**intersection** de A et de B, noté $A \cap B = \{5\}$ (partie commune de A et B)
- La **différence** de A et de B, noté $A \backslash B = \{1, 3\}$ ou parfois $A - B$ (éléments appartenant à A mais pas à B)

1. On dira que «x appartient à $\mathbb{N}$, tel que x est pair». La barre verticale signifiant «tel que...».
2. Chaque élément n'étant compté qu'une seule fois.

2.1.2 Les intervalles

Les intervalles représentent des sous-ensembles de nombres réels. Il s'agit le plus souvent de représenter des nombres compris entre deux **bornes**[3] a et b ou des nombres supérieurs ou inférieurs à une valeur donnée a.

Selon l'orientation des crochets représentant les bornes, les nombres peuvent être inclus ou non dans l'intervalle considéré.

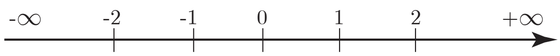
Par exemple $[4;10[$ signifie les nombres compris entre 4 inclus et 10 exclus. Par convention, $-\infty$ et ∞ sont toujours exclus. Ainsi, un nombre x plus grand ou égal à 7 s'écrira $x \in [7;\infty[$.

Quand un nombre peut appartenir à plusieurs intervalles, on utilise le symbole $\cup$ pour relier les intervalles en question.

Ainsi, si x peut être compris entre 8 et 10 ou entre 20 et 22, on écrira[4] :

$$x \in [8;10] \cup [20;22]$$

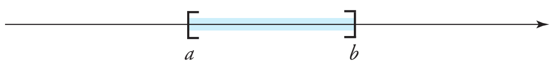
Pour une représentation plus visuelle des intervalles, on peut utiliser la droite des réels :[5]



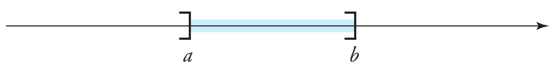
Les principaux intervalles sont alors les suivants :

Intervalle **ouvert** : $]a,b[= \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$

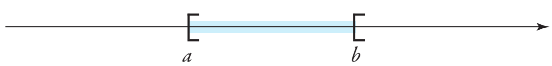
Intervalle **fermé** : $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$



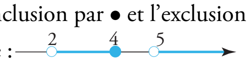
Intervalle **ouvert-fermé** (ou semi-ouvert) : $]a,b] = \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}$



Intervalle **fermé-ouvert** (ou semi-ouvert) : $[a,b[= \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}$

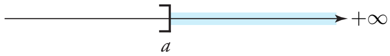


3. On parle aussi d'extrémités.
4. On suppose ici que toutes les valeurs sont incluses dans les bornes.
5. Certains ouvrages représentent sur la droite des réels l'inclusion par • et l'exclusion par ∘. Ainsi, si $x \in]2;4] \cup]5;\infty[$, la représentation sera la suivante :



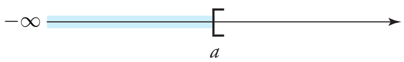
On définit également les intervalles suivants :

$]a;+\infty[= \{x \in \mathbb{R} | x > a\}$

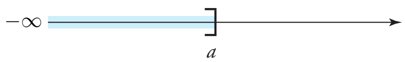


$[a;+\infty[= \{x \in \mathbb{R} | x \geq a\}$

$]-\infty;a[= \{x \in \mathbb{R} | x < a\}$



$]-\infty;a] = \{x \in \mathbb{R} | x \leq a\}$



Exemple 2.1

Noter sous forme d'intervalles les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}$ et donner une représentation graphique :

(a) $\{x \in \mathbb{R} | -2 < x \leq 4\}$

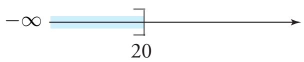
(b) $\{x \in \mathbb{R} | x \leq 20\}$

(c) $\{x \in \mathbb{R} | x > -5\}$

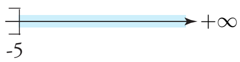
Solution

(a) $]-2;4]$

(b) $]-\infty;20]$



(c) $]-5;+\infty[$



Exercices d'application de la section 2.1

1 [Appartenance et inclusion] Soit les ensembles $K = \{0;5;7\}, L = \{4;5;6;7\}$ et $M = \{0;2;3;5;6;7\}$. Compléter par $\in, \notin, \subset$ ou $\not\subset$.

(a) $K \ldots M$

(b) $5 \ldots K$

(c) $K \ldots L$

(d) $M \ldots K$

(e) $\varnothing \ldots M$

(f) $9 \ldots L$

2 [Appartenance et inclusion] Soit les ensembles $K = \{0;5;7\}, L = \{4;5;6;7\}$ et $M = \{0;2;3;5;6;7\}$. Compléter par $\in, \notin, \subset$ ou $\not\subset$.

(a) $0 \ldots \varnothing$

(b) $L \ldots M$

(c) $\{2;5\} \ldots M$

(d) $\{6\} \ldots L$

(e) $6 \ldots L$

(f) $\{5;6\} \ldots K$

3 [Opérations sur les ensembles] On considère les ensembles suivants:

$$A = \{1;2;5\},\ B = \{\{1;2\};5\},\ C = \{\{1;2;5\}\},\ D = \{\emptyset;1;2;5\},$$
$$E = \{5;1;2\},\ F = \{\{1;2\};\{5\}\},\ G = \{\{1;2\};\{5\};5\},\ H = \{5;\{1\};\{2\}\}.$$

(a) Quelles sont les relations d'égalité ou d'inclusion existant entre ces ensembles?

(b) Donner le nombre d'éléments de chacun de ces ensembles.

(c) Déterminer $A \cap B$, $G \cup H$, $E \setminus G$.

4 [Opérations sur les ensembles] On donne $A = \{a;b;d;e;f\}$ et $B = \{b;c;d;e;g\}$. Compléter par $\in$, $\notin$, $\subset$, ou $\not\subset$:

(a) $c \ldots A \cup B$
(b) $\{\} \ldots A$
(c) $f \ldots A \backslash B$
(d) $A \cup B \ldots A \cap B$
(e) $\{b;c;d\} \ldots A$
(f) $A \ldots A \cap B$
(g) $\{d;g;e\} \ldots B$
(h) $i \ldots A$
(i) $f \ldots B$

5 [Nombre de sous-ensembles] Combien de sous-ensembles possède l'ensemble $A = \{1;2;3;4\}$?

6 [Ensembles vides] Les notations $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}$ désignent-elles le même ensemble?

7 [Extension et compréhension] Soit les ensembles :

$$A = \{x \in \mathbb{N} | x \text{ est un diviseur de } 36\}$$
$$B = \{x \in \mathbb{N} | x \text{ est un diviseur de } 54\}$$

(a) Donner $A \cup B$ en extension et en compréhension.

(b) Donner $A \cap B$ en extension et en compréhension.

8 [Extension et compréhension] Soit les ensembles :

$$A = \{x \in \mathbb{N} | x \text{ est un diviseur de } 36\}$$
$$B = \{x \in \mathbb{N} | x \text{ est un diviseur de } 54\}$$

(a) Donner $A \backslash B$ en extension et en compréhension.

(b) Donner $B \backslash A$ en extension et en compréhension.

9 [Diagramme de Venn] Soit les ensembles $A = \{1;2;4;5\}$ et $B = \{2;3;5;6;7\}$.

(a) Représenter ces ensembles par un diagramme de Venn.

(b) Écrire en extension : $A \cap B, A \cup B, A \backslash B$ et $B \backslash A$.

10 [Diagramme de Venn] On donne les trois ensembles $A = \{a; b; d; e; f; n\}$, $B = \{b; e; f; g\}$ et $C = \{a; d; e; g; k\}$.

(a) Faire un diagramme de Venn.

(b) Déterminer :

$A \cap B$	$A \setminus C$	$(A \cap B) \setminus C$
$B \cup C$	$B \cap (C \setminus A)$	

11 [Diagramme de Venn] Parmi les 26 élèves d'une classe il y en a 14 qui aiment le français, 8 qui aiment les mathématiques et le français et 7 qui n'aiment ni le français, ni les mathématiques. Combien d'élèves aiment les mathématiques ?

12 [Diagramme de Venn] Dans un groupe de 30 sportifs, 6 pratiquent la natation, 9 le tennis, 11 le football, 1 la natation et le football, 2 le tennis et le football , mais aucun qui pratique le tennis et la natation.

(a) Combien ne pratiquent aucun de ces trois sports ?

(b) Combien ne pratiquent qu'un seul de ces trois sports ?

13 [Intervalles] Simplifier l'écriture des ensembles suivants :

(a) $[1,5] \cap]2,6[$ **(b)** $[1,5] \cup]2,6[$ **(c)** $[3,+\infty[\cap]-\infty,8[$

14 [Intervalles] Simplifier l'écriture des ensembles suivants :

(a) $[-4,+\infty[\cap]-2,+\infty[$

(b) $]-\infty,8[\cap \mathbb{N}$

(c) $[-6,8[\cup]4,12] \cup]-12,3[$

15 [Intervalles] Déterminez $A \cup B$, $A \cap B$ et $A \setminus B$.

(a) $A =]-\infty, 11/3[$ et $B =]2,\infty[$ **(b)** $A =]-8,-5[$ et $B =]-6,-3[$

16 [Intervalles] Déterminez $A \cup B$, $A \cap B$ et $A \setminus B$.

(a) $A = [1/2, 2]$ et $B = [-1, 4/3]$ **(b)** $A = [-5/4, 1[$ et $B = [-3, -2/5[$

2.2 Les fractions

2.2.1 Vocabulaire des opérations élémentaires

L'utilisation des 4 opérateurs mathématiques $+$, $-$, $\times$ et $\div$ est souvent associé au vocabulaire suivant :

Opération	Notation	Remarques
Opposé de a	$-a$	à ne pas confondre avec l'inverse.
Inverse de a	$1/a$	seulement si $a \neq 0$
Somme de a et b	$a+b$	a et b sont appelés «**termes**»
Différence de a et b	$a-b$	a et b sont appelés «termes»
Produit de a et b	$a \times b$	a et b sont appelés «**facteurs**»
Quotient de a et b	a/b	a est appelé le **dividende** et b est appelé le **diviseur**

2.2.2 Simplification de fractions

Il faut se rappeler ceci : Le quotient de deux nombres ne change pas si l'on multiplie ou si l'on divise le numérateur ET le dénominateur par un même nombre non nul. On peut ainsi écrire que pour tous nombres a, b et c avec b et c non nuls :

$$\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b} \qquad \text{avec } b \neq 0 \text{ et } c \neq 0$$

Exemple 2.2

$$\frac{10}{8} = \frac{5 \times \cancel{2}}{4 \times \cancel{2}} = \frac{5}{4}$$

2.2.3 Addition et soustraction

Si les dénominateurs sont égaux

Si les dénominateurs sont identiques, on n'ajoute (on soustrait) que les numérateurs.

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c} \qquad \text{et} \qquad \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c} \qquad \text{où } c \neq 0$$

Exemple 2.3

$$\frac{5}{6} + \frac{-7}{6} = \frac{5+(-7)}{6} = \frac{-2}{6} = \frac{-1}{3} = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$$

Si les dénominateurs sont différents

Si les dénominateurs sont différents, on transforme une des fractions, voire même les deux, de façon à les mettre au même dénominateur, qu'on appellera alors le **dénominateur commun**. On se ramène alors à deux fractions de dénominateurs égaux.

Exemple 2.4

$$\frac{5}{4}+\frac{2}{3}=\frac{15}{12}+\frac{8}{12}=\frac{15+8}{12}=\frac{23}{12}$$

2.2.4 Multiplication

On multiplie simplement les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

$$\frac{a}{c}\times\frac{b}{d}=\frac{a\times b}{c\times d} \qquad \text{où} \quad c\neq 0 \text{ et } d\neq 0$$

Remarque

En général, on essayera de simplifier les fractions AVANT de calculer à l'aide de cette formule. Ce qui entraînera moins de calculs à faire et les fractions obtenues sont alors simplifiées.

Exemple 2.5

$$\frac{21}{12}\times\frac{11}{35}=\frac{21\times 11}{12\times 35}=\frac{\cancel{3}\times\cancel{7}\times 11}{\cancel{3}\times 4\times\cancel{7}\times 5}=\frac{11}{20}$$

2.2.5 Division

Diviser par un nombre (non nul !), c'est le multiplier par son inverse.

$$\frac{a}{c}\div\frac{b}{d}=\frac{a}{c}\times\frac{d}{b} \qquad \text{où} \quad b\neq 0,\ c\neq 0 \text{ et } d\neq 0$$

Exemple 2.6

$$\frac{21}{12}\div\frac{11}{35}=\frac{21}{12}\times\frac{35}{11}=\frac{21\times 35}{12\times 11}=\frac{\cancel{3}\times 7\times 5\times 7}{\cancel{3}\times 4\times 11}=\frac{245}{44}$$

Exercices d'application de la section 2.2

17 [Simplification de fraction] Simplifier.

(a) $\frac{18}{45}$ (b) $\frac{21}{49}$ (c) $\frac{15}{20}$

18 [Simplification de fraction] Simplifier.

(a) $\frac{27}{81}$ (b) $\frac{24}{96}$ (c) $\frac{60}{144}$

19 [Fraction irréductible] Effectuer les calculs suivants et donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible :

(a) $\frac{2}{15}+\frac{1}{3}$ (b) $\frac{9}{8}+\frac{7}{32}$ (c) $\frac{3}{7}-\frac{4}{63}$

20 [Fraction irréductible] Effectuer les calculs suivants et donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible :

(a) $\frac{8}{5}-\frac{9}{25}$ (b) $\frac{9}{7}+\frac{10}{21}$ (c) $\frac{9}{10}-\frac{3}{5}$

21 [Fraction irréductible] Calculer les expressions suivantes et donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

(a) $\dfrac{\frac{5}{7}-4}{\frac{7}{6}-7}$ (b) $(2^{-1}+3^{-1})^{-1}$ (c) $\frac{2}{3}\div\left(\frac{1}{12}-\frac{-6}{7}\right)$

22 [Fraction irréductible] Calculer les expressions suivantes et donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

(a) $1+\frac{3}{7}\times\frac{4}{3}$ (b) $\dfrac{2^{-1}+4^{-1}}{2^{-4}}$ (c) $\frac{117}{8}\times\left(\frac{2}{9}-\frac{-7}{13}\right)$

2.3 Les puissances

Une puissance d'un nombre est le résultat de la multiplication répétée de ce nombre avec lui-même. Elle est en exposant, indiquant le nombre de fois qu'apparaît le nombre comme facteur dans cette multiplication.

$$a^n = \underbrace{a \times \cdots \times a}_{n \text{ facteurs}}$$

Elle se lit «a puissance n ». L'entier n est appelé **exposant**. En particulier, le carré (a^2) et le cube (a^3) sont des puissances d'exposant 2 et 3 respectivement.

2.3.1 Propriétés des puissances

Soit a et b des nombres réels ; m et n des entiers non nuls : [6]

$a^0 = 1$	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	$a^{-1} = \frac{1}{a}$
$(ab)^n = a^n b^n$	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
$a^{b^n} = a^{(b^n)} \neq \left(a^b\right)^n$	0^0 est indéterminé

Exemple 2.7

- $8^3 \cdot 8^{-3} = 8^{3-3} = 8^0 = 1$
- $(8^3)^2 = 8^6$
- $(x^2 y^3)^5 = (x^2)^5 \cdot (y^3)^5 = x^{10} \cdot y^{15}$
- $\left(\frac{x}{y}\right)^5 = \frac{x^5}{y^5}$
- $x^{3/2} = (x^{1/2})^3 = (x^3)^{1/2}$
- $x^{-2/3} = \frac{1}{x^{2/3}} = \frac{1}{(x^{1/3})^2} = \frac{1}{(x^2)^{1/3}}$

6. Ces propriétés restent valables pour des exposants n et m rationnels.

2.3.2 Notation scientifique d'un nombre

La notation (ou écriture) scientifique est une représentation d'un nombre décimal[7] sous la forme d'un produit de deux facteurs. Le premier, appelé **mantisse**, est un nombre décimal compris entre $[1;10[$, c'est-à-dire qu'il n'y a qu'un seul chiffre (non nul) à gauche de la virgule. Le second facteur, appelé **exposant**, est une puissance entière de 10. C'est une notation très pratique pour des nombres très grands ou très petits.

Exemple 2.8

- $15 = 1,5 \times 10^1$
- $163 = 1,63 \times 10^2$
- $-56\,300\,000 = -5,63 \times 10^7$
- $0,0012 = 1,2 \times 10^{-3}$
- $3 \times 10^2 \times 5 \times 10^3 = 15 \times 10^5 = 1,5 \times 10^6$

Remarque

Les calculatrices ont en général une touche appelée EE ou E. Au lieu d'écrire $1,5 \times 10^3$ on tapera 1,5 EE 3, ce qui donnera 1500.

Exercices d'application de la section 2.3

23 [Propriétés des puissances] Réduire les expressions suivantes.

(a) $10^2 \cdot 10^{-5}$ **(b)** $(10^3 \cdot 10^4) : 10^{-3}$ **(c)** $[10^4 \cdot (10^2)^1] : (10^3)^2$

24 [Propriétés des puissances] Réduire les expressions suivantes.

(a) $10^2 \cdot 10^{-2}$
(b) $10^1 : (10^3 \cdot 10^3)$
(c) $(10^2 \cdot 10^{-1}) : (10^{-4} \cdot 10^{-3})$

25 [Propriétés des puissances] Simplifier les expressions suivantes :

(a) $\dfrac{4^7}{8^7}$ **(b)** $\dfrac{-15^{-3}}{5^{-3}}$ **(c)** $6^3 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^3$

7. Un nombre décimal est un nombre qui possède un nombre finis de chiffres après la virgule, comme par exemple 23,456. Les nombres décimaux sont à la base de notre système de numérotation en base 10. Ainsi, par exemple, $23,456 = 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2} + 6 \cdot 10^{-3}$.

26 [Propriétés des puissances] Simplifier les expressions suivantes :

(a) $\left(-\frac{7}{3}\right)^{-9} \times \left(\frac{6}{14}\right)^{-9}$ **(b)** $\frac{4^4 \times 3^4}{2^4 \times 12^4} \times 6^4$ **(c)** $\frac{7^{-3} \times 10^3 \times 14^3 \times 2^{-3}}{3^3 \times 5^3 \times 6^{-3}}$

27 [Propriétés des puissances] Écrire les expressions suivantes sous la forme de la puissance d'un seul nombre.

(a) $\frac{8^5 \times 12^9}{8^2 \times 12^6}$ **(b)** $\frac{3^5 \times (4^5)^3}{(4^6)^3 \times (3^4)^2}$

28 [Propriétés des puissances] Simplifier les fractions suivantes.

(a) $\frac{7^5}{21^3} \times \frac{3^4}{6}$ **(b)** $\frac{6^2 \times (-1)^6 \times 2^3}{5(-1)^5 \times 3^2}$

29 [Notation scientifique] Écrire les nombres ci-dessous en notation scientifique.

(a) 51300 **(b)** $(8 \cdot 10^1) \cdot (9 \cdot 10^{-3})$ **(c)** $\frac{0,05 \times 10^{-5} \times 20}{0,04 \times (10^{-2})^3}$

30 [Notation scientifique] Écrire les nombres ci-dessous en notation scientifique.

(a) 0,00514 **(b)** $(2 \cdot 10^2) \cdot (6.4 \cdot 10^3)$ **(c)** $\frac{0,8 \times 10^{-8} \times 30 \times 10^{-6}}{3 \times (10^{-10})^3}$

2.4 Les racines carrées

2.4.1 Racine carrée d'un nombre positif

Soit a, un nombre positif. On appelle **racine carrée** de a et on note $\sqrt{a}$ le nombre positif qui, multiplié par lui même, donne a, c'est à dire tel que $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = a$ ou $(\sqrt{a})^2 = a$.

Exemple 2.9

$\sqrt{144} = 12$ car $12 \times 12 = 144$.

2.4.2 Racine carrée d'un produit, d'un quotient

Racine carrée d'un produit

Soit a et b deux nombres positifs, on a

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

Exemple 2.10

$\sqrt{3} \times \sqrt{48} = \sqrt{3 \times 48} = \sqrt{144} = 12$

Racine carrée d'un quotient

Soit a et b deux nombres positifs avec b non nul, on a

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Exemple 2.11

$\dfrac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\dfrac{75}{3}} = \sqrt{25} = 5$

Remarque

Avec l'addition et la soustraction, il n'y a pas de règle similaire.

Exemple 2.12

$\sqrt{16} + \sqrt{9} \neq \sqrt{25}$
(car $\sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7$) et 7 n'est pas la racine de 25.

Simplifier une racine carrée

Simplifier une racine carrée, c'est l'écrire sous la forme $a\sqrt{b}$ avec a et b deux nombres entiers et b le plus petit possible.
Pour simplifier $\sqrt{x}$, il suffit d'écrire x comme étant le produit de deux nombres dont l'un est, si possible, un carré parfait $(4; 9; 16; 25; \cdots)$ puis d'utiliser la règle de multiplication.

Exemple 2.13

Simplifier : $\sqrt{45} = \sqrt{9 \times 5} = \sqrt{9} \times \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$

Rationaliser le dénominateur

On peut rendre un dénominateur rationnel, c'est-à-dire ne contenant plus de racine en multipliant le numérateur et le dénominateur par le conjugué :

- si le dénominateur ne comporte qu'un terme, le conjugué est le terme lui-même.
- si le dénominateur comporte deux termes $(a \pm b)$, le conjugué est $(a \mp b)$

Exemple 2.14

Rendre rationnel le dénominateur de la fraction $1/\sqrt{2}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} && \text{multiplier le numérateur et dénominateur par } \sqrt{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} && \text{simplifier le dénominateur} \end{aligned}$$

Exemple 2.15

Rendre rationnel le dénominateur de la fraction $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} &= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}\cdot\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} && \text{multiplication par le conjugué} \\ &= \frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}+\sqrt{3}-\sqrt{3}-1} && \text{distribuer dénominateur } (\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1) \\ &= \frac{3+\sqrt{3}}{2} && \text{simplifier le dénominateur} \end{aligned}$$

Exercices d'application de la section 2.4

31 Simplifier les radicaux.

(a) $\sqrt{28}$ **(b)** $\sqrt{75}$ **(c)** $\sqrt{500}$

32 Simplifier les radicaux.

(a) $\sqrt{8}$ **(b)** $\sqrt{27}$ **(c)** $\sqrt{600}$

33 Simplifier les radicaux.

(a) $2\sqrt{6}+\sqrt{36}-\sqrt{144}$ **(b)** $\sqrt{25}+\sqrt{50}-\sqrt{100}$ **(c)** $\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}$

34 Simplifier les radicaux.

(a) $\sqrt{3}-\frac{2}{3}\sqrt{3}+2\sqrt{3}$ **(b)** $\sqrt{\frac{2}{9}}-\sqrt{\frac{1}{3}}$ **(c)** $\sqrt{\frac{1}{72}}\cdot\sqrt{32}$

35 Effectuer et simplifier.

(a) $(\sqrt{3}+1)(2+\sqrt{3})$ **(b)** $(2+\sqrt{5})^2$ **(c)** $(1+\sqrt{5})3\sqrt{5}$

36 Effectuer et simplifier.

(a) $3(\sqrt{6}+2)$ **(b)** $(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)$ **(c)** $(1+\sqrt{2})^2$

37 Rendre rationnel le dénominateur.

(a) $\frac{7}{2\sqrt{7}}$ **(b)** $\frac{5}{\sqrt{6}-1}$ **(c)** $\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$

38 Rendre rationnel le dénominateur.

(a) $\frac{5}{\sqrt{2}}$ **(b)** $\frac{1}{4\sqrt{2}}$ **(c)** $\frac{25}{\sqrt{20}+\sqrt{45}}$

2.5 Règle des signes et priorité des opérations

2.5.1 Règle des signes

La règle des signes s'applique au produit de deux nombres relatifs :

- Le produit de deux nombres de même signe est positif (− par − ou + par +)
- Le produit de deux nombres de signe différent est négatif (+ par − ou − par +).

Cette règle s'exprime simplement par :

plus par plus = plus	moins par plus = moins
plus par moins = moins	moins par moins = plus

Exemple 2.16

Le calcul des expressions suivantes donne :

$$(+4)\times(+7)=28 \qquad (-4)\times(+7)=-28$$
$$(+4)\times(-7)=-28 \qquad (-4)\times(-7)=28$$

Généralisation

Un produit de plusieurs nombres relatifs non nuls est :

- Positif s'il y a un nombre pair de facteurs négatifs : $(-4)\times(-2)\times(+3)=24$
- Négatif s'il y a un nombre impair de facteurs négatifs $(-4)\times(-2)\times(-3)=-24$

2.5.2 Priorité des opérations

Par convention, on effectue dans l'ordre :

1) les opérations les plus au centre des parenthèses
2) les puissances et les racines
3) les multiplications et divisions de gauche à droite
4) les additions et soustractions

Exemple 2.17

$$\begin{aligned} 3\left(\sqrt{16+9}+\frac{3^2}{2}\right) &= 3\left(\sqrt{25}+\frac{9}{2}\right) \\ &= 3\left(5+\frac{9}{2}\right) \\ &= 3\left(\frac{10+9}{2}\right) \\ &= 3\cdot\frac{19}{2}=\frac{57}{2} \end{aligned}$$

Exemple 2.18

$$\begin{aligned}
&10-\{4-[3-2(6-4)-10]\}\\
&=10-\{4-[3-2\cdot 2-10]\}\\
&=10-\{4-[3-4-10]\}\\
&=10-\{4-[-11]\}\\
&=10-\{4+11\}\\
&=10-15\\
&=-5
\end{aligned}$$

Remarque

Les opérateurs comme log, sin, $\sqrt{\ }$ peuvent jouer le rôle de parenthèse.

Exemple 2.19

$$\begin{aligned}
\sqrt{\log(97+3)+7} &= \sqrt{\log(100)+7}\\
&= \sqrt{2+7}\\
&= \sqrt{9}=3
\end{aligned}$$

Exercices d'application de la section 2.5

39 [Priorité des opérations] Effectuer les opérations suivantes :

(a) $(-3)\times[3-(+5)]$ **(b)** $4-[5\times(-2)+(-2)]$ **(c)** $6\div 2\times(1+2)$

40 [Priorité des opérations] Effectuer les opérations suivantes :

(a) $(+3)-(-7)+(+24)\div(-6)$

(b) $(-3)+(-4)\times(-6)+(-21)\div(-7)$

(c) $9-3\div\frac{1}{3}+1$

41 [Écriture mathématique type Excel] Au moyen des seuls symboles : ( ) +, −, ×, / et ∧ (pour les puissances), écrire les expressions suivantes. Par exemple, $(\sqrt{5}+\frac{2}{3})^2$ pourra être écrit comme suit : $(5\wedge(1/2)+2/3)\wedge 2$.

(a) $\dfrac{4-5}{7-2}$ **(b)** $6+\dfrac{0,3}{0,3+0,9}\times 14$ **(c)** $-3+\sqrt{4^2-1}$

42 [Écriture mathématique type Excel] Au moyen des seuls symboles : ( ) +, −, ×, / et ∧ (pour les puissances), écrire les expressions suivantes. Par exemple, $(\sqrt{5}+\frac{2}{3})^2$ pourra être écrit comme suit : $(5 \wedge (1/2) + 2/3) \wedge 2$.

(a) $5+\dfrac{6}{3-\frac{2}{5-4}}$ **(b)** $\dfrac{1-(1+0,05)^{-3}}{0,05}$ **(c)** $\sqrt{5-\sqrt{8}}$

2.6 Autres opérations

2.6.1 Décomposition en facteurs premiers

Tout nombre entier supérieur à 1 peut être décomposé en facteurs premiers. [8] Pour ce faire, il faut essayer de diviser ce nombre par les plus petits nombres premiers 2, 3, 5, 7, etc.

La procédure se termine lorsque que l'on obtient 1.

Exemple 2.20

Décomposition de 240, 180 et 75 en facteurs premiers :

240	2	180	2	75	3
120	2	90	2	25	5
60	2	45	3	5	5
30	2	15	3	1	
15	3	5	5		
5	5	1			
1					

PPMC

Le **PPMC** de deux ou plusieurs nombres est le plus petit des multiples communs à ces nombres.

Après la décomposition des nombres en facteurs premiers, le PPMC est déterminé par le produit de tous les facteurs **distincts** de toutes les décompositions, chacun pris une seule fois avec le plus **grand** exposant.

Exemple 2.21

Calculer le PPMC de 240, 180 et 75

Solution

$$240 = 2^4 \times 3 \times 5 \qquad 180 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \qquad 75 = 3 \times 5^2$$

Ainsi : $\text{PPMC}(240, 180, 75) = 2^4 \times 3^2 \times 5^2 = 3600$

8. Un facteur premier (ou nombre premier) est un nombre divisible par un et par lui-même : 2, 3, 5, 7, etc.

PGDC

Le **PGDC** de deux ou plusieurs nombres est le plus grand de tous les diviseurs communs des nombres considérés.

Après la décomposition des nombres en facteurs premiers, le PGDC est déterminé par le produit de tous les facteurs **communs** de toutes les décompositions, chacun pris une seule fois avec le plus **petit** exposant.

Exemple 2.22

Calculer le PGDC de 240, 180 et 75

Solution

$$240 = 2^4 \times 3 \times 5 \qquad 180 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \qquad 75 = 3 \times 5^2$$

Ainsi : $\text{PGDC}(240, 180, 75) = 3 \times 5 = 15$

Exercices d'application de la section 2.6

43 [Facteurs premiers] Décomposer A et B en produit de facteurs premiers, puis simplifier $\dfrac{A}{B}$ et $\sqrt{A}$

(a) $A = 800$ et $B = 24$ **(b)** $A = 216$ et $B = 112$ **(c)** $A = 531$ et $B = 66$

44 [Facteurs premiers] Décomposer A et B en produit de facteurs premiers, puis simplifier $\dfrac{A}{B}$ et $\sqrt{A}$

(a) $A = 425$ et $B = 85$ **(b)** $A = 300$ et $B = 600$ **(c)** $A = 328$ et $B = 28$

45 [PPMC et PGDC] Trouver le PPMC et le PGDC des nombres suivants :

(a) $A = 30$ et $B = 16$ **(b)** $A = 42$ et $B = 18$ **(c)** $A = 48$ et $B = 16$

46 [PPMC et PGDC] Trouver le PPMC et le PGDC des nombres suivants :

(a) $A = 8$ et $B = 25$ **(b)** $A = 32$ et $B = 24$ **(c)** $A = 65$ et $B = 52$

2.7 Problèmes et exercices de synthèse

47 Deux cyclistes roulent dans le même sens sur une piste. Le premier fait un tour en 1 minute 45 secondes, le deuxième fait un tour en 1 minute 36 secondes.

Sachant qu'ils sont partis ensemble de la ligne de départ,

(a) après combien de temps franchiront-ils à nouveau pour la première fois ensemble cette ligne de départ ?

(b) Combien de tours de piste chacun d'eux aura-t-il effectué ?

48 Un collège organise un tournoi sportif par équipe pour tous ses élèves. Chaque équipe doit comporter le même nombre de filles et le même nombre de garçons. Les professeurs souhaitent constituer le plus grand nombre possible d'équipes. Il y a 210 filles et 294 garçons.

(a) Quel est le plus grand nombre d'équipes que l'on peut constituer ?

(b) Combien y-a-t-il alors de filles et de garçons dans chaque équipe ?

49 Deux salariés, Pierre et Marc se retrouvent à la pause et, en discutant, remarquent que le produit de leur âge donne 2014. Trouver l'âge de chacun.

50 [Défi] Vers le début de son septennat, M. Giscard d'Estaing, président de la République, s'était, au cours d'un de ses déplacements, arrêté dans une certaine ville de France. Le maire lui fit visiter les fouilles entreprises dans cette ville sur l'emplacement d'une ancienne bataille, et il lui offrit une arquebuse trouvée parmi les vestiges. Cette visite avait lieu le dernier jour d'un mois.

Sachant que le jour du mois de la visite, multiplié par la différence entre les dates de cette visite et de la bataille ancienne, puis par l'âge du duc qui perdit la bataille, est 636 724, trouver la ville dans laquelle s'arrêta le président.

51 [Défi] On donne la suite des fractions suivantes :

$$S_1 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} \quad ; \quad S_2 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \quad ; \quad S_3 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \quad ; \quad S_4 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$$

Compléter le tableau suivant en essayant de trouver une formule pour S_n.

S_1	S_2	S_3	S_4	$\cdots$	S_n
				$\cdots$	

Chapitre 3

Bases du calcul littéral

Objectifs du chapitre

- manipuler des termes algébriques.
- effectuer les opérations de base sur les polynômes.
- factoriser selon différentes méthodes.
- décomposer des polynômes du second degré en facteurs linéaires.
- manipuler des fractions rationnelles et irrationnelles.

3.1 Monômes et polynômes

Une expression **littérale** est une écriture mathématique qui contient une ou plusieurs lettres appelées **variables**.

Dans une expression littérale telle que $3x^8$, x est la variable, car elle peut prendre n'importe quelle valeur, et 3 est appelé **coefficient** de x^8.

- $3x^8$ est un *monôme* car il contient 1 terme
- $3x^8 - 5y$ est un *binôme* (= 2 termes)
- $ax^2 + bx + c$ est un *trinôme* (= 3 termes)

On parle d'une manière générale de **polynôme** quand le nombre de termes n'est pas forcément spécifié. Le degré d'un polynôme par rapport à une variable est la plus grande puissance observée par rapport à cette variable.

Par exemple, $3x^4y-2xy^5$ est un binôme de degré 4 par rapport à x ou de degré 5 par rapport à y.

On appelle *termes semblables* des termes qui ne diffèrent que par leurs coefficients. Ainsi,

- $3x^2y^5$ et $-6x^2y^5$ sont deux termes semblables.
- $3x^2y^5$ et $-6x^5y^2$ ne sont pas des termes semblables.

Une expression est *rationnelle* lorsque qu'elle ne contient pas de lettres sous la racine. Dans le cas contraire elle est *irrationnelle*. Ainsi,

- $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ est un monôme rationnel mais $\frac{3\sqrt{a}}{2}$ est irrationnel.
- $3ax + b\sqrt{2}$ est un polynôme rationnel.
- $3 - b + \sqrt{b^2 - 4ac}$ est une expression irrationnelle.

3.1.1 Opérations sur les polynômes

Addition-soustraction

On peut additionner ou soustraire les termes semblables :

- $4x^5 + 9x^5 = 13x^5$
- $13xy - 3xy = 10xy$
- $(24x - 17y) + (6x + 5z) = 30x - 17y + 5z$
- $(24x - 17y) - (6x - 5z) = 24x - 17y - 6x + 5z = 18x - 17y + 5z$

Multiplication

Multiplier les termes d'un polynôme revient à multiplier tous leurs coefficients et toutes leurs variables :

- $(5x)(13y^2) = 65xy^2$
- $(4x^2y^4)(5x^3y^5) = 20x^5y^9$

Pour multiplier deux polynômes, il faut multiplier chaque terme du premier polynôme par chacun des termes du second, et additionner les produits obtenus :

Exemple 3.1

$$\begin{aligned}(3x + 2y)(4x + 5y) &= 12x^2 + 15xy + 8xy + 10y^2 \\ &= 12x^2 + 23xy + 10y^2\end{aligned}$$

Exemple 3.2

$$\begin{aligned}(3x + 2y)(x - 3y + 2z) &= 3x^2 - 9xy + 6xz + 2xy - 6y^2 + 4yz \\ &= 3x^2 - 7xy + 6xz - 6y^2 + 4yz\end{aligned}$$

Division polynomiale

Pour diviser un polynôme $A(x)$ par un polynôme $B(x)$ non nul, on ordonne le dividende $A(x)$ et le diviseur $B(x)$ selon les puissances décroissantes de la variable et l'on procède selon l'exemple ci-dessous jusqu'à ce que l'on obtienne un reste de degré inférieur au diviseur.

Exemple 3.3

$$
\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & -3x^2 & +5x & -1 & x^2-1 \\ \cline{5-5}
-x^3 & & +\ x & & x-3 \\ \cline{1-3}
 & -3x^2 & +6x & -1 & \\
 & +3x^2 & & -3 & \\ \cline{2-4}
 & & 6x & -4 &
\end{array}
$$

On peut donc écrire : $x^3 - 3x^2 + 5x - 1 = (x^2 - 1)(x - 3) + 6x - 4$.

Remarque

Un polynôme $A(x)$ est divisible par un polynôme $B(x)$ si le reste de la division $\dfrac{A(x)}{B(x)}$ vaut zéro.

Exemple 3.4

$$
\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & +x^2 & -x & -1 & x^2-1 \\ \cline{5-5}
-x^3 & & +x & & x+1 \\ \cline{1-3}
 & x^2 & & -1 & \\
 & -x^2 & & +1 & \\ \cline{2-4}
 & & & 0 &
\end{array}
$$

Ainsi $x^3 + x^2 - x - 1 = (x^2 - 1)(x + 1)$.

Remarque

Un polynôme $P(x)$ est divisible par $x - a$ si $P(a) = 0$, et réciproquement.

Exemple 3.5

Effectuer la division du polynôme $P(x) = x^2 - 5x + 6$ par $x - 2$ puis vérifier que $P(2) = 0$

Solution

$$\begin{array}{rrr|l} x^2 & -5x & +6 & x-2 \\ \cline{4-4} -x^2 & +2x & & x-3 \\ \cline{1-2} & -3x & +6 & \\ & +3x & -6 & \\ \cline{2-3} & & 0 & \end{array}$$

Vérification : $P(2) = 2^2 - 5(2) + 6 = 0$

Exercices d'application de la section 3.1

1 [Somme et différence de polynômes] Effectuer et réduire les expressions suivantes :

(a) $xy - (-4xy - 7xy)$

(b) $-2x^2 - [3x^2 - (x^2 - 4x^2)]$

(c) $2x_i^2 - x_i - (1 - 2x_i^2 - x_i)$

2 [Somme et différence de polynômes] Soit les polynômes suivants :

- $P(x) = 2x^5 - x^4 + 3$
- $Q(x) = x^5 - 3x(x - x^3)$
- $R(x) = x^4 + 4x^2$

Calculer et simplifier :

(a) $P + Q$ **(b)** $Q - R$ **(c)** $R - (P - 2Q)$

3 [Produit de facteurs] Effectuer les produits suivants :

(a) $x^3y^2 \times xy^3$ **(b)** $\left(2x^3y^2z\right)\left(-3x^2y^4z^2\right)$ **(c)** $\frac{10}{7}ab^5c^7 \cdot \frac{7}{5}a^2b^5c$

4 [Produit de facteurs] Effectuer les produits suivants :

(a) $\left(-x^2yz^3\right)\left(x^2y^3z\right)$ **(b)** $-a^2bc \cdot \left(-2ab^2\right)$ **(c)** $-2a^2 \cdot \left(-3a^5b^3\right) \cdot \frac{1}{2}a^2$

5 [Distributivité] Effectuer et simplifier :

(a) $-2ab^2c^2\left(4a^3 - 3b^2 + c\right)$

(b) $-\left(4a^4 - 5a^2b^3 + b^6\right)\left(-5a^3b^5\right)$

(c) $[(-2xy)^2]^3 : \left(-2xy^2\right)^3 - 2(-x)^3$

6 [Distributivité] Effectuer et simplifier :

(a) $-5a^2b^3c^4\left(a-3b^2+2c^3\right)$

(b) $\left[x^2+(n-1)x+1\right]x+\left[x^2-(n-1)x+1\right]x$

(c) $[-a(-a)^2+a^5:(-a^2)]+(-a)^3+2a^2(-a)$

7 [Multiplication polynomiale] Effectuer et simplifier :

(a) $(a-3x)(a-x)$

(b) $\left(x^2+3\right)\left(x^4+9\right)\left(x^2-3\right)$

(c) $(2a-1)(a+1)-(a-1)(2a-3)$

8 [Multiplication polynomiale] Effectuer et simplifier :

(a) $\left(x^3+x^2-x+2\right)(x+3)$

(b) $\left(a^2-b^2+1\right)^2$

(c) $(a+b)(a+c)-(b+c)(a+b)-(a-b)(a+b)$

9 [Division polynomiale] Effectuer les divisions euclidiennes suivantes :

(a) $(2x^3-3x+2):(x-2)$

(b) $(x^3+x^2+x+1):(x^2+1)$

(c) $(3x^3-2x+1):(3x^2+3x-1)$

10 [Division polynomiale] Effectuer les divisions euclidiennes suivantes :

(a) $(3y^3+2y^2-3y-2):(y-1)$

(b) $(-2x^3+4x^2):(x^2-2)$

(c) $(y^4+1):(y^2-\sqrt{2}y+1)$

3.2 La factorisation

La **factorisation** est le processus inverse de la multiplication polynomiale et permet d'exprimer un polynôme comme le produit de polynômes plus simples appelés **facteurs**.

✎ ne pas confondre les expressions :

- **Factoriser**, càd transformer une somme ou une différence en un produit.

$$5x+10y=5(x+2y)$$

- **Développer**, càd transformer un produit en une somme ou une différence.

$$3(a-b)=3a-3b$$

Il n'y a pas de recettes toutes faites pour factoriser. On essayera dans l'ordre l'une ou/et l'autre des méthodes ci-après.

3.2.1 La mise en évidence

Lorsque tous les termes d'un polynôme ont des facteurs communs, on commence toujours par mettre le plus grand facteur commun en évidence. Il y a lieu parfois de «jouer» avec les signes.

Exemple 3.6

Plusieurs factorisations par mise en évidence...

- $3x + 3y - 3z = 3(x + y - z)$
- $x(a+2) - 3(a+2) = (a+2)(x-3)$
- $3(a-2) + b(2-a) = 3(a-2) - b(a-2) = (a-2)(3-b)$

3.2.2 L'emploi d'identités remarquables

$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$	$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$
$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a+b)^3$	$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a-b)^3$
$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$	$a^2 + b^2$ pas factorisable dans $\mathbb{R}$
$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$	$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

Exemple 3.7

Exemples de factorisation :

- $a^2 - 1 = (a+1)(a-1)$
- $4a^2 - 12ab + 9b^2 = (2a - 3b)^2$
- $8x^3 - y^6 = (2x - y^2)(4x^2 + 2xy^2 + y^4)$
- $x^4 - 1 = (x^2+1)(x^2-1) = (x^2+1)(x-1)(x+1)$
- $a^2 + 2ab + b^2 - c^2 = (a^2 + 2ab + b^2) - c^2$
  $= (a+b)^2 - c^2 = (a+b+c)(a+b-c)$

3.2.3 Méthode des groupements

Lorsque les expressions à factoriser contiennent 4 termes ou plus, il faut souvent commencer par grouper astucieusement les termes avant d'effectuer une mise en évidence.

Exemple 3.8

$$\begin{aligned} & ax + ay + bx + by \\ &= (ax + ay) + (bx + by) && \text{Groupement des deux premiers et deux derniers termes} \\ &= a(x+y) + b(x+y) && \text{Mise en évidence de } a \text{ et de } b \\ &= (x+y)(a+b) && \text{Mise en évidence du facteur commun } x+y \end{aligned}$$

Exemple 3.9

$$\begin{aligned} & 2x - 2a + 4 - ax \\ &= (2x - ax) + (4 - 2a) && \text{Groupement judicieux} \\ &= x(2-a) + 2(2-a) && \text{Mise en évidence de } x \text{ et de } 2 \\ &= (2-a)(x+2) && \text{Mise en évidence du facteur commun } 2-a \end{aligned}$$

3.2.4 Décomposition du trinôme du second degré

Soit $ax^2 + bx + c$. La méthode suivante permet de décomposer le trinôme du second degré à coefficients entiers en produits de facteurs linéaires à coefficients entiers :

On cherche 2 nombres entiers m et n tels que :

$$\begin{cases} m + n = b \\ m \times n = ac \end{cases}$$

Puis on écrit

$$ax^2 + bx + c = ax^2 + \mathbf{m}x + \mathbf{n}x + c$$

On factorise finalement par une double mise en évidence. (méthode des groupements)

Exemple 3.10

Factoriser le trinôme suivant :

$$2x^2 + 7x + 6$$

Solution

On cherche 2 nombres tels que $\begin{cases} m + n = 7 \\ m \times n = 12 \end{cases}$

Ces nombres sont $m = 4$ et $n = 3$, ainsi :

$$\begin{aligned} 2x^2 + 7x + 6 &= 2x^2 + 4x + 3x + 6 \\ &= (2x^2 + 4x) + (3x + 6) \\ &= 2x(x+2) + 3(x+2) \\ &= (x+2)(2x+3) \end{aligned}$$

Remarque

Cette méthode n'est pas toujours possible. On préférera utiliser la décomposition suivante :

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

où x_1 et x_2 sont les solutions de $ax^2 + bx + c = 0$ (voir chapitre 4).

Exercices d'application de la section 3.2

11 [Factorisation par mise en évidence] Factoriser les expressions suivantes :

(a) $x^3 - x^2$ **(b)** $a^7b^6 - a^6b^7 - a^5b^6$ **(c)** $a^2(b+1) - a(b+1)$

12 [factorisation par mise en évidence] Factoriser les expressions suivantes :

(a) $18a^2b^2 - 15a^2b$
(b) $x^{2n+1} + x^{2n+2} + x^n$
(c) $(2a-1)(k+1) + (2a-1)(k-1)$

13 [Factorisation type $(a \pm b)^2$] Factoriser les polynômes suivants :

(a) $a^2 - a + \frac{1}{4}$ **(b)** $x^6 + 6x^3 + 9$ **(c)** $\frac{4}{3}a^7x + 8a^4x^5 + 12ax^9$

14 [Factorisation type $(a \pm b)^2$] Factoriser les polynômes suivants :

(a) $9a^2 - 12ab + 4b^2$ **(b)** $4x^4 + x^2y + \frac{y^2}{16}$ **(c)** $\frac{9a^4b}{4} - a^3b^2 + \frac{a^2b^3}{9}$

15 [Factorisation type $(a+b)(a-b)$] Factoriser les polynômes suivants :

(a) $x^3y - xy^3$ **(b)** $a^2b^2c^2 - m^2$ **(c)** $(4x-a)^2 - (4a-x)^2$

16 [Factorisation type $(a+b)(a-b)$] Factoriser les polynômes suivants :

(a) $x^4y^2 - x^2y^4$
(b) $3x^5 - 48xy^8$
(c) $(a+b+c)^2 - (a-2b-c)^2$

17 [Méthode somme-produit] Factoriser les polynômes :

(a) $x^2+10x+16$ (b) $2x^2+9x+7$ (c) $4x^2+x-5$

18 [Méthode somme-produit] Factoriser les polynômes :

(a) $x^2+20x+19$ (b) $-3x^2+x+2$ (c) $27x^2-75x+48$

19 [Méthode des groupements] Factoriser les polynômes :

(a) $a^2-y^2-2xy-x^2$ (b) $b^2y-b^2+a^2y-a^2$ (c) $x^2(x^2-4)-x^2+4$

20 [Méthode des groupements] Factoriser les polynômes :

(a) x^2-4y^2+4y-1 (b) $cy+y+c+1$ (c) ax^2-x^2-4a+4

3.3 Les fractions rationnelles

Une fraction rationnelle est une fraction contenant des monômes ou des polynômes rationnels, comme par exemple :

$$\frac{x^2-25}{3x-7} \quad \text{ou} \quad \frac{2}{x^2+x+1}$$

3.3.1 Simplification des fractions

L'idée est de simplifier une fraction en divisant numérateur et dénominateur par des facteurs communs aussi grands que possible, en effectuant au besoin quelques arrangements préalables.

Exemple 3.11

Simplifier la fraction rationnelle :

$$-\frac{36a^4b^2c^3}{3a^2bc^3d}$$

Solution

Les deux termes de la fraction sont divisibles par $3a^2bc^3$. Ainsi :

$$-\frac{36a^4b^2c^3}{3a^2bc^3d} = -\frac{12a^2b}{d}$$

Exemple 3.12

Simplifier la fraction rationnelle :

$$\frac{x^2 - xy}{x^2 + xy}$$

Solution

On peut mettre x en évidence au numérateur comme au dénominateur, puis simplifier par x :

$$\frac{x^2 - xy}{x^2 + xy} = \frac{x(x-y)}{x(x+y)} = \frac{x-y}{x+y}$$

3.3.2 Opérations sur les fractions

Recherche du PPMC

La recherche du PPMC est similaire à celle qui est faite avec les nombres entiers. Après décomposition en facteurs premiers, le PPMC est déterminé par le produit des facteurs communs, chacun pris une seule fois avec le plus grand exposant.

Exemple 3.13

Déterminer le PPMC des polynômes suivants :

$$x^2 - 2x + 1 \qquad 2x^2 + 4x + 2 \qquad \text{et} \qquad x^2 - 1$$

Solution

La décomposition en facteurs premiers donne :

- $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$
- $2x^2 + 4x + 2 = 2(x^2 + 2x + 1) = 2(x+1)^2$
- $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$

Le produit des facteurs premiers 2, $(x+1)$, $(x-1)$, chacun étant pris avec son plus grand exposant donne :

$$2(x-1)^2(x+1)^2$$

Addition et soustraction de fractions

Comme avec les nombres, on additionne ou soustrait des fractions en mettant au même dénominateur commun (PPMC des dénominateurs).

Exemple 3.14

Effectuer la somme des fractions suivantes :

$$\frac{a+b}{a-b}+\frac{a-b}{a+b}+\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$$

Solution

Le PPMC des dénominateurs est $(a+b)(a-b)$ ou encore a^2-b^2. Ainsi :

$$\frac{(a+b)^2}{a^2-b^2}+\frac{(a-b)^2}{a^2-b^2}+\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned}
&= \frac{(a+b)^2+(a-b)^2+a^2+b^2}{a^2-b^2}\\
&= \frac{a^2+2ab+b^2+a^2-2ab+b^2+a^2+b^2}{a^2-b^2}\\
&= \frac{3a^2+3b^2}{a^2-b^2} = \frac{3(a^2+b^2)}{a^2-b^2}
\end{aligned}$$

Exemple 3.15

Effectuer la soustraction des fractions suivantes :

$$\frac{a+b}{2a}-\frac{a-b}{4a}$$

Solution

Le PPMC des dénominateurs est : $4a$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\frac{a+b}{2a}-\frac{a-b}{4a} &= \frac{2(a+b)}{4a}-\frac{a-b}{4a}\\
&= \frac{2(a+b)-(a-b)}{4a}\\
&= \frac{2a+2b-a+b}{4a} = \frac{a+3b}{4a}
\end{aligned}$$

Multiplication de fractions

Pour multiplier deux fractions, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux et l'on simplifie s'il y a lieu.

Exemple 3.16

$$\begin{aligned}\frac{x^2-y^2}{a}\times\frac{ax}{x-y} &= \frac{(x^2-y^2)ax}{a(x-y)}\\ &= \frac{(x+y)(x-y)ax}{a(x-y)} = (x+y)x\end{aligned}$$

Division de fractions

Pour diviser deux fractions, on multiplie la fraction dividende par l'inverse de la fraction diviseur et l'on simplifie s'il y a lieu.

Exemple 3.17

$$\begin{aligned}\frac{4y^2}{x^2-1} : \frac{y}{x+1} &= \frac{4y^2}{x^2-1}\times\frac{x+1}{y}\\ &= \frac{4y^2(x+1)}{(x^2-1)y} = \frac{4y^2(x+1)}{(x+1)(x-1)y} = \frac{4y}{x-1}\end{aligned}$$

Exercices d'application de la section 3.3

21 [Simplification de fractions] Effectuer et simplifier :

(a) $\frac{4x^2-2x}{4x^2}$ (b) $\frac{a^2-4}{a^2-4a+4}$ (c) $\frac{x^3+4x^2+4x}{4-x^2}$

22 [Simplification de fractions] Effectuer et simplifier :

(a) $\frac{a+ax}{y+xy}$ (b) $\frac{b^2+3b+2}{b^2+2b+1}$ (c) $\frac{x^2-4}{x^2-x-2}$

23 [Somme de fractions] Effectuer et simplifier les fractions :

(a) $\frac{1}{6a}+\frac{b}{3a^2}-\frac{5}{2ab}$ (b) $\frac{2x}{3x+1}-\frac{1-x}{3x+1}$ (c) $\frac{x}{x+y}+\frac{y}{y+x}+\frac{1}{2}$

24 [Somme de fractions] Effectuer et simplifier les fractions :

(a) $\dfrac{4x^2+1}{x^2}-\dfrac{x-2}{x}-3$ **(b)** $2a-\dfrac{3-4a}{a-2}$ **(c)** $x-y-\dfrac{x^2}{x+y}$

25 [Multiplication/division de fractions] Effectuer et simplifier les fractions :

(a) $\dfrac{4a^2}{a^2-x^2}\cdot\dfrac{x+a}{2a}$ **(b)** $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1-\dfrac{1}{1-x^2}\right)$ **(c)** $\dfrac{5a-5b}{3ab}:\dfrac{a^2}{a-b}$

26 [Multiplication/division de fractions] Effectuer et simplifier les fractions :

(a) $\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\cdot\dfrac{x^4-y^4}{x+y}$ **(b)** $\left(a-\dfrac{a-1}{a+3}\right)\cdot\dfrac{a^2-9}{a+1}$ **(c)** $\dfrac{3x}{2x-2}:\dfrac{7x}{3x-3}$

27 [Opérations sur les fractions] Effectuer et simplifier :

(a) $\left(\dfrac{b}{b-1}\right)^2\cdot\left(b-\dfrac{1}{b}\right)^2$ **(b)** $\left(1-\dfrac{x^2-2x}{x^2-2x+1}\right)^2$ **(c)** $\left(\dfrac{a-3}{a^2-4a+3}\right)^{-1}$

28 [Opérations sur les fractions] Effectuer et simplifier :

(a) $\left[\left(\dfrac{a+b}{a^2-b^2}\right)^2\right]^{-1}$

(b) $\left(\dfrac{x-y}{x+y}-1\right)\left(1+\dfrac{x+y}{x-y}\right)^{-1}$

(c) $\dfrac{2}{a}+\dfrac{a^2+a}{a^2+4a+3}+\dfrac{4a+3}{a^2+3a}$

3.4 Opérations avec les racines

Le calcul avec les racines nécessite la connaissance des quelques règles suivantes :

$a^{m/n}=\sqrt[n]{a^m}$	Formule de liaison avec les puissances
$\sqrt{a^2}=\lvert a\rvert$	Racine carrée d'un carré
$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$	Produit des racines
$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$	Quotient des racines

$\sqrt{x+y}\neq\sqrt{x}+\sqrt{y}$ et $\sqrt[2]{x}+\sqrt[3]{x}\neq\sqrt[5]{x}$

Exemple 3.18

- $\sqrt{4a^2b} = \sqrt{4a^2} \cdot \sqrt{b} = 2|a|\sqrt{b}$
- $(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y}) = x - y$
- $\sqrt{\dfrac{a^2}{2}} = \dfrac{|a|}{\sqrt{2}}$

3.4.1 Rendre un dénominateur rationnel

Selon ce qui a déjà été dit au chapitre précédent, un dénominateur peut être rendu rationnel (c'est-à-dire sans racines) en multipliant le numérateur et le dénominateur par le **conjugué**. L'expression conjuguée de $a + b$ est $a - b$ et inversement.

Exemple 3.19

Rendre le dénominateur rationnel : $\dfrac{a}{\sqrt{b}}$.

Solution

On multiplie les deux termes de la fraction par $\sqrt{b}$:

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a}{\sqrt{b}} \times \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$$

Exemple 3.20

Rendre le dénominateur rationnel : $\dfrac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$.

Solution

On multiplie les deux termes de la fraction par $\sqrt{a} + \sqrt{b}$:

$$\frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \times \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{a - b}$$

Exemple 3.21

Rendre le dénominateur rationnel : $\dfrac{1}{a + \sqrt{b}}$.

Solution

On multiplie les deux termes de la fraction par $a - \sqrt{b}$:

$$\frac{1}{a + \sqrt{b}} = \frac{1}{a + \sqrt{b}} \times \frac{a - \sqrt{b}}{a - \sqrt{b}} = \frac{a - \sqrt{b}}{a^2 - b}$$

Exercices d'application de la section 3.4

29 [Propriétés des racines] Faire sortir des racines le plus de facteurs possibles.

(a) $\sqrt[3]{16}$ **(b)** $\sqrt{x^2+x^2y}$ **(c)** $\sqrt{x^2y-3x^2}$

30 [Propriétés des racines] Faire sortir des racines le plus de facteurs possibles.

(a) $\sqrt{2a^2b}$ **(b)** $\sqrt[3]{3b^6}$ **(c)** $\sqrt{8(x^5-6x^4+9x^3)}$

31 [Racines] Effectuer les opérations et simplifier.

(a) $(\sqrt{x}-4)(\sqrt{x}+4)$ **(b)** $(\sqrt{y}+2)^2$ **(c)** $\sqrt{a^3}-3\sqrt{a}$

32 [Racines] Effectuer les opérations et simplifier.

(a) $(\sqrt{x}-a)(\sqrt{x}+2a)$ **(b)** $(\sqrt{y}+\sqrt{2y})^2$ **(c)** $(\sqrt{t}-101\sqrt{t})^2$

33 [Conjugué] Rendre le dénominateur rationnel.

(a) $\dfrac{ab^2}{\sqrt{abx}}$ **(b)** $\dfrac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ **(c)** $\dfrac{\sqrt{a}}{a-\sqrt{ab}}$

34 [Conjugué] Rendre le dénominateur rationnel.

(a) $\dfrac{2x^2y}{\sqrt{x^3y}}$ **(b)** $\dfrac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}$ **(c)** $\dfrac{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$

3.5 Problèmes et exercices de synthèse

35 [Somme de polynômes] Soit les polynômes $P(x)=1-3x+2x^2-4x^3$; $Q(x)=2x-x^2$ et $R(x)=2+x^3$.

(a) Calculer $A=P+Q+R$ et $B=-P+Q-R$

(b) Calculer $A+B$

(c) Pouvait-on prévoir le résultat trouvé sous (b) ?

36 [Somme de polynômes]

(a) Calculer la somme et la différence des polynômes suivants : $P(x)=\sqrt{2}x^2+\sqrt{2}x$ et $Q(x)=\sqrt{2}x^2-3\sqrt{2}x+2$.

(b) Que vaut cette somme et cette différence si $x=-\sqrt{2}$?

37 [Produit polynomial] Soit les polynômes $A(k) = k^2 + 3k - 3$ et $B(k) = ak + b$. Trouver les valeurs réelles a et b sachant que :

$$\begin{cases} A(1) \times B(1) = 3 \\ A(1) + B(1) = 4 \end{cases}$$

38 [Produit polynomial] Simplifier l'expression suivante :

$$(1-x)(1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots+x^n)$$

39 [Factorisation] Comment factoriser le polynôme suivant ?

$$3x^2+5xy+2y^2$$

40 [Division polynomiale] Si $x^2 + ax + 6$ est divisible par $x - 2$, que vaut a ?

41 [Conjugué] Rendre rationnel le dénominateur de la fraction :

$$\frac{4}{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}$$

42 [Défi] Donner le résultat du calcul suivant :

$$\frac{\left(3^{2020}\right)^2-\left(3^{2018}\right)^2}{\left(3^{2021}\right)^2-\left(3^{2019}\right)^2}$$

43 [Défi] Mettez en pratique ce que vous avez étudié dans ce chapitre pour calculer judicieusement l'expression suivante :

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)$$

Chapitre 4

Equations linéaires et quadratiques

Objectifs du chapitre

- savoir déterminer un ensemble de définition.
- résoudre des équations et des problèmes du premier et second degré à une variable (inconnue).
- résoudre des systèmes linéaires à deux ou 3 variables.
- illustrer graphiquement et interpréter l'ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires à deux variables.

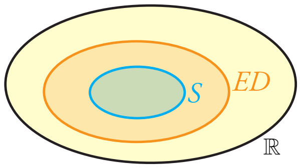
4.1 Généralités

Une **équation** est une égalité entre deux expressions algébriques écrites avec une même lettre, l'**inconnue** de l'équation. Les deux expressions sont respectivement l**es membres de gauche et de droite** de l'équation.

L'ensemble de définition (ED) [1] de l'équation est le sous-ensemble de tous les nombres réels pour lesquels les expressions algébriques sont définies. **Une solution** de l'équation est un nombre réel pour lequel les deux membres de l'équation ont la même valeur numérique.

L'ensemble (S) des solutions d'une équation est le sous-ensemble de toutes les solutions de cette équation.

1. On l'appelle aussi **domaine de définition** ou D_f



Résoudre l'équation, c'est rechercher l'ensemble de toutes ses solutions.

Une équation est :

- **impossible** si elle n'admet aucune solution.
- **indéterminée** si son ensemble des solutions est égal à son ensemble de définition.

Exemple 4.1

Soit l'expression suivante : $2x + 3 = 13$
Il s'agit d'une équation. Si l'on remplace x par 8, le membre de gauche égale $16 + 3 = 19$ et le membre de droite égale 13. Il n'y a pas égalité entre les deux membres de l'équation. 8 n'est donc pas une solution de cette équation.

Par contre, en remplaçant x par 5, les deux membres de l'équation sont égaux et donnent 13. Le nombre 5 est donc solution de l'équation.

4.1.1 Principes fondamentaux

Avant de résoudre une équation, il faut se rappeler les principes suivants qui s'appliquent aux égalités :

- On a le droit d'ajouter ou de soustraire un nombre ou une expression algébrique des deux côtés d'une égalité :

$$8x = 10 + 3x$$
$$8x - 3x = 10 - 3x \qquad \text{On soustrait } 3x \text{ des deux côtés}$$

- On peut faire passer un terme de l'autre côté de l'égalité en changeant de signe. [2]

$$8x = 10 + 3x$$
$$8x - 3x = 10 \qquad \text{On fait passer } 3x \text{ de l'autre côté}$$

2. Il s'agit ici du corolaire du point précédent

- On a le droit de multiplier ou de diviser par un nombre ($\neq 0$) ou une expression algébrique des deux côtés d'une égalité.

$$5x = 10$$
$$x = \frac{10}{5} \qquad \text{On divise par 5 des deux côtés}$$

- Si deux fractions égales ont le même dénominateur, alors leur numérateur sont égaux.

$$\frac{x}{3} = \frac{4}{3}$$
$$x = 4$$

4.1.2 Ensemble de définition

Avant de résoudre une équation, il faut définir son ensemble de définition. En effet, il serait inutile de vouloir résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 = -4$, puisque l'on sait qu'un carré est toujours positif. En règle général, l'ensemble de définition (**ED**) est souvent l'ensemble des nombres réels ($\mathbb{R}$) à moins d'être réduit par les situations ci-après.

Si l'on désigne par ☺ une expression algébrique quelconque, les situations suivantes seront rencontrées dans le cadre de cet ouvrage :

$\frac{1}{☺}$	$\Rightarrow$	$☺ \neq 0$	Un dénominateur ne doit pas être nul
$\sqrt[n]{☺}$	$\Rightarrow$	$☺ \geq 0$	Seulement si *n* est pair
$\log(☺)$	$\Rightarrow$	$☺ > 0$	Contenu d'un log strictement positif

Exemple 4.2

Donner l'ensemble de définition de $x + 5 = \dfrac{3x}{x-2}$

Solution

Il faut que $x - 2 \neq 0$, c'est-à-dire $x \neq 2$. Ainsi, l'ensemble de définition (ED) est donné par $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$

Exemple 4.3

Donner l'ensemble de définition de $\dfrac{x-5}{x^2+2} = x+6$

Solution

Il faut que $x^2+2 \neq 0$, ce qui est toujours le cas. Ainsi, ED est donné par $x \in \mathbb{R}$.

Exemple 4.4

Donner l'ensemble de définition de $5+\sqrt{10-x} = \sqrt{x-5}$

Solution

D'une part : $10-x \geq 0$ c'est-à-dire : $x \leq 10$ et d'autre part : $x-5 \geq 0$ c'est-à-dire : $x \geq 5$. Les deux conditions doivent être satisfaites en même temps. On peut affirmer que :

$$\text{ED} : x \in [\,5\,;\,10\,]$$

Exercices d'application de la section 4.1

1 [Ensemble de définition] Déterminer l'ensemble de définition des équations suivantes :

(a) $x+23 = \dfrac{1}{8}$ **(b)** $x = \dfrac{1}{x}$ **(c)** $\dfrac{3x^2}{(5-x)^3} = x$

2 [Ensemble de définition] Déterminer l'ensemble de définition des équations suivantes :

(a) $x^2 = -4$ **(b)** $\dfrac{6}{x-77} = 7$ **(c)** $x^8 - \dfrac{1}{x^8} = 0$

3 [Ensemble de définition] Déterminer l'ensemble de définition des équations ou fonctions suivantes :

(a) $\dfrac{x}{2} = \dfrac{3}{(x-1)(x+1)}$ **(b)** $p^2 = \dfrac{3p}{p(p+4)}$ **(c)** $g(x) = \dfrac{1}{\frac{1}{x-2}+1}$

4 [Ensemble de définition] Déterminer l'ensemble de définition des équations ou fonctions suivantes :

(a) $\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x+2}$ **(b)** $f(x) = x^{-1} + x^{-2}$ **(c)** $L(p) = \dfrac{1}{\frac{1}{p-3}+\frac{1}{p-2}}$

5 [Ensemble de définition avec racines] Déterminer l'ensemble de définition des équations ou fonctions :

(a) $\sqrt[3]{x+1} = 18$ (b) $f(t) = \sqrt{t-1} + t$ (c) $\sqrt{2x-2} = 16$

6 [Ensemble de définition avec racines] Déterminer l'ensemble de définition des équations ou fonctions :

(a) $f(x) = \sqrt{2-x} + \sqrt{x-3}$

(b) $h(x) = \sqrt{x+17} + \sqrt{x}$

(c) $\sqrt[5]{4-x} = \sqrt{x-4}$

4.2 Équations du premier degré à une inconnue

4.2.1 Méthode de résolution

Pour résoudre une équation, on applique en principe les règles suivantes :

1. Éliminer les dénominateurs, en multipliant les deux membres par le plus petit multiple commun des dénominateurs.
2. Grouper dans un membre de l'équation les termes qui renferment l'inconnue et dans l'autre, les termes connus.
3. Réduire les termes semblables.
4. Diviser les deux membres par le coefficient de l'inconnue.

Exemple 4.5

Résoudre l'équation suivante : $\dfrac{x}{3} = \dfrac{4-x}{2}$

Solution

On transforme cette équation partout définie sur $\mathbb{R}$ comme suit :

$$\begin{aligned}
\frac{x}{3} &= \frac{4-x}{2} && \text{Donnée}\\
\frac{2x}{6} &= \frac{3(4-x)}{6} && \text{Mise au même dénominateur}\\
2x &= 3(4-x) && \text{Travail sur le numérateur}\\
2x &= 12-3x && \text{Multiplier la parenthèse}\\
2x+3x &= 12 && \text{Ajouter } +3x \text{ dans chaque membre}\\
5x &= 12 && \text{Simplifier}\\
x &= \frac{12}{5} && \text{Diviser par 5 les deux membres}
\end{aligned}$$

Exemple 4.6

On dispose de 500 frs à distribuer entre deux ouvriers. Le second ouvrier doit recevoir le double du premier plus une prime de 50 frs pour le déplacement. Déterminer ce que touchera chaque ouvrier.

Solution

Choix de l'inconnue : Soit x la part en frs du premier ouvrier et $2x + 50$ la part du second ouvrier.

Mise en équation : La somme des deux parts allouées doit être égale à 500 frs.

$$x + (2x + 50) = 500$$

On résout l'équation :

$$\begin{aligned} x + 2x + 50 &= 500 && \text{Les deux parts et la prime= 500 frs} \\ 3x + 50 &= 500 && \text{Réduction} \\ 3x &= 500 - 50 && \text{Isoler l'inconnue} \\ 3x &= 450 && \text{Simplifier l'équation} \\ x &= \frac{450}{3} = 150 && \text{Diviser par 3 chaque membre} \end{aligned}$$

Retour à la donnée du problème :

- Part du premier ouvrier : 150 frs.
- Part du second ouvrier : $150 \times 2 + 50 = 350$ frs.

4.2.2 Équations impossibles ou indéterminées

Si, en résolvant l'équation, on tombe sur l'une ou l'autre des formes suivantes :

- $0x =$ constante (différente de 0), alors l'équation est **impossible**. ($S = \varnothing$)
- Si on arrive à la forme $0x = 0$, l'équation est **indéterminée**. Tout nombre est alors solution de cette équation. ($S = \mathbb{R}$)

Exemple 4.7

Résoudre l'équation suivante : $4(t-1)+2t=6(t+3)$

Solution

$$\begin{aligned} 4(t-1)+2t &= 6(t+3) \\ 4t-4+2t &= 6t+18 \\ 6t-4 &= 6t+18 \\ 6t-6t &= 18+4 \\ 0t &= 22 \\ S &= \varnothing \end{aligned}$$

Se lit «ensemble vide»

L'équation est impossible.

Exemple 4.8

Résoudre l'équation : $5(2u-1)-(u-3)=3(3u+1)-5$

Solution

$$\begin{aligned} 5(2u-1)-(u-3) &= 3(3u+1)-5 \\ 10u-5-u+3 &= 9u+3-5 \\ 9u-2 &= 9u-2 \\ 9u-9u &= 2-2 \\ 0u &= 0 \\ S &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

L'équation est indéterminée.

4.2.3 Résolution d'équations par factorisation

Si une équation peut être décomposée en produits de facteurs sous la forme :

$$A(x)\cdot B(x)\cdot C(x)=0,$$

alors les solutions de cette équation sont :

$$A(x)=0 \quad \text{ou} \quad B(x)=0 \quad \text{ou} \quad C(x)=0$$

Exemple 4.9

Résoudre l'équation suivante : $x^2 - 3x - 70 = 0$

Solution

$$\begin{aligned} x^2 - 3x - 70 &= 0 \\ (x+7)(x-10) &= 0 \end{aligned}$$

On en déduit : $x + 7 = 0$ ou $x - 10 = 0$. Donc : $S = \{-7; 10\}$.

Exemple 4.10

Résoudre l'équation : $(x-1)(5x+3)(x+2) = (x+2)(x-1)$

Solution

$$\begin{aligned} (x-1)(5x+3)(x+2) &= (x+2)(x-1) \\ (x-1)(5x+3)(x+2) - (x+2)(x-1) &= 0 \\ (x-1)(x+2)(5x+3-1) &= 0 \\ (x-1)(x+2)(5x+2) &= 0 \end{aligned}$$

On en déduit : $x - 1 = 0$ ou $x + 2 = 0$ ou $5x + 2 = 0$. Donc $S = \left\{-2; -\frac{2}{5}; 1\right\}$

4.2.4 Les équations rationnelles

Une équation rationnelle est une équation composée de polynômes au numérateur ou/et au dénominateur. Pour résoudre de telles équations, on utilise la marche à suivre suivante :

1. On détermine l'ensemble de définition de l'équation.
2. On multiplie les deux membres de l'équation par le plus petit multiple commun (ppmc).
3. On résout l'équation.
4. On ne conserve que les solutions qui appartiennent à l'ensemble de définition.

Exemple 4.11

Résoudre l'équation suivante :

$$\frac{x-2}{x-1}+\frac{1}{3}=1$$

Solution

ED : Il faut que $x-1\neq 0$, c'est-à-dire $x\neq 1$. L'ensemble de définition est donné par $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$

$$\begin{aligned} \frac{x-2}{x-1}+\frac{1}{3}&=1 && \text{Donnée}\\ 3(x-2)+(x-1)&=3(x-1) && \text{Mise au même dénominateur } 3(x-1)\\ x&=4 && \text{Après simplification}\end{aligned}$$

La solution de cette équation est : $x=4$ ou $S=\{4\}$

Exemple 4.12

Résoudre l'équation suivante :

$$\frac{x}{x-1}-\frac{1}{x}=1-\frac{1}{1-x}$$

Solution

ED : On a immédiatement $x\in\mathbb{R}\setminus\{0;1\}$

$$\begin{aligned} \frac{x}{x-1}-\frac{1}{x}&=1-\frac{1}{1-x} && \text{Donnée}\\ \frac{x}{x-1}-\frac{1}{x}&=1+\frac{1}{x-1} && \text{Changer } 1-x \text{ en } x-1\\ x^2-(x-1)&=x(x-1)+x && \text{Multiplier par } x(x-1)\\ x&=1 && \text{Après simplification}\end{aligned}$$

Comme $x=1$ doit être exclu de ED, cette équation n'a pas de solution. On écrit aussi $S=\varnothing$

Exemple 4.13

Résoudre l'équation suivante :

$$\frac{4x}{x+3}-\frac{x}{x-3}=\frac{-12}{(x+3)(x-3)}$$

Solution

ED : $x \in \mathbb{R}\setminus\{-3;3\}$ ou aussi : $x \in]-\infty;-3[\cup]-3;3[\cup]3;+\infty[$

$$\frac{4x}{x+3}-\frac{x}{x-3}=\frac{-12}{(x+3)(x-3)} \qquad \text{Donnée}$$

$$4x(x-3)-x(x+3)=-12 \qquad \text{Multiplier par } (x-3)(x+3)$$

$$3x^2-15x+12=0 \qquad \text{Réduire les termes semblables}$$

$$(x-1)(x-4)=0 \qquad \text{Factoriser}$$

Les solutions de cette équations sont : $S=\{1;4\}$

Exercices d'application de la section 4.2

7 [Équation 1er degré] Résoudre les équations :

(a) $4x-5+2x=-2x+11$ **(b)** $\frac{x}{3}-6=2x+\frac{1}{2}$ **(c)** $\frac{8x-2}{2}=2\left(2x-\frac{3}{2}\right)$

8 [Équation 1er degré] Résoudre les équations :

(a) $\frac{x}{3}+\frac{x}{5}=\frac{x+1}{2}$ **(c)** $1-(1-(1-x))=\frac{x-4}{-1}$

(b) $\frac{33x}{11}-\frac{34x}{17}=1704$

9 [Résolution par factorisation] Résoudre les équations :

(a) $x^2-5=0$ **(b)** $x^3-9x^2=0$ **(c)** $\sqrt{x}(2x+10)=\sqrt{x}$

10 [Résolution par factorisation] Résoudre les équations par rapport à x :

(a) $\sqrt{2}x^2=x$ **(b)** $x\sqrt{x}-x-2\sqrt{x}+2=0$ **(c)** $(x+a)(x-b)=b-x$

11 [Équations rationnelles] Résoudre les équations, en précisant l'ED :

(a) $\frac{3(x-1)}{2x-2}=1$ **(b)** $\frac{6}{x-5}+\frac{x}{5-x}=1$ **(c)** $\frac{x+1}{x-1}-2=\frac{2x}{x-1}$

12 [Équations rationnelles] Résoudre les équations en précisant l'ED :

(a) $\dfrac{2(x-4)}{x}=0$

(b) $\dfrac{1}{4-x}-\dfrac{2x}{x-4}=0$

(c) $\dfrac{x-1}{x^2+3x}+\dfrac{2}{x}=-\dfrac{9}{2x+6}$

13 [Équations paramétrique de degré 1] Résoudre les équations par rapport à x :

(a) $a^2(x-a)=b^2(x-b)$ (b) $b+\dfrac{ax}{b}=\dfrac{bx}{a}+a$ (c) $\dfrac{a(d^2+x^2)}{dx}=\dfrac{ax}{d}+ac$

14 [Équations paramétrique de degré 1] Résoudre les équations par rapport à x :

(a) $(a+x)(b+x)=x(x-c)$

(b) $\dfrac{x-a}{2}=\dfrac{(x-b)^2}{2x-a}$

(c) $\dfrac{a+b}{x}-\dfrac{2b}{a-b}=2-\dfrac{a-b}{x}$

4.3 Systèmes d'équations du 1er degré

On appelle système d'équations du premier degré la conjonction de plusieurs équations contenant 2, 3, $\cdots$, n inconnues. On désigne ces inconnues généralement par les lettres x, z, u. Si il y a trop d'inconnues, ou si l'on souhaite faire une généralisation, on utilisera par exemple x_1, x_2, $\cdots$, x_n pour représenter ces n inconnues.

Pour signifier que les deux équations doivent être satisfaites en même temps, on utilise une accolade devant ces équations. Par exemple, le système suivant représente un système de deux équations à deux inconnues x et y.

$$\left\{\begin{array}{rcr} 2x-3y & = & 8 \\ 26x+2y & = & 34 \end{array}\right.$$

Pour que le système puisse être résolu, il faut qu'il y ait en principe autant d'équations que d'inconnues. Par ailleurs, si le système n'admet pas de solution, on dit qu'il est **impossible**. Par contre s'il admet une infinité de solutions, on dira qu'il est **indéterminé**, ce qui est le cas par exemple d'un système contenant une équation et deux inconnues.

4.3.1 Résolution des systèmes à deux inconnues

On traitera ici des méthodes classiques. Les autres méthodes feront l'objet d'une section dans l'ouvrage consacré aux matrices.

Méthode de substitution

On utilise de préférence cette méthode lorsque qu'une inconnue est facile à isoler.

Exemple 4.14

Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x+y &= 10 \quad ① \\ 3x-y &= 14 \quad ② \end{cases}$$

Solution

- Dans ①, on isole par exemple x $\quad x = 10 - y$
- Dans ②, on remplace x par : $10 - y$

$$\begin{aligned} 3(10-y)-y &= 14 && \text{Substituer} \\ -4y &= -16 && \text{Effectuer et simplifier} \\ y &= 4 && \text{Diviser par } -4 \text{ de chaque côté} \end{aligned}$$

- Comme $x = 10 - y$, on obtient : $x = 10 - 4 = 6$
- $S = \{x = 6\,;\ y = 4\}$

Méthode de comparaison

On utilise de préférence cette méthode, si l'une des inconnues est déjà isolée dans chaque équation.

$$\begin{cases} y &= a_1x + b_1 \\ y &= a_2x + b_2 \end{cases}$$

Il suffit alors de résoudre l'équation :

$$a_1x + b_1 = a_2x + b_2$$

La valeur de x obtenue est ensuite remplacée dans l'une ou l'autre des équations initiales.

Exemple 4.15

Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x &= 2y+4 \quad ① \\ x &= -2y+12 \quad ② \end{cases}$$

Solution

$$\begin{aligned} 2y+4 &= -2y+12 \\ 4y &= 8 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

On obtient finalement :

- en remplaçant y dans ① : $x = 2 \times (2) + 4 = 8$, ou
- en remplaçant y dans ② : $x = (-2) \times 2 + 12 = 8$.
- Ainsi : $S = \{x = 8\,;\, y = 2\}$

Méthode d'addition soustraction

Dans cette méthode, on ajoute, membre à membre, les deux équations après les avoir multipliées par des coefficients convenablement choisis pour éliminer une des deux inconnues.

Cette méthode est souvent la plus utilisée.

Exemple 4.16

Résoudre le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{lcll} x+y & = & 5 & ① \\ x-y & = & 1 & ② \end{array}\right.$$

Solution

Ici, aucune multiplication par un coefficient n'est nécessaire, il suffit d'additionner les deux équations, ce qui supprimera les y :

$$\left\{\begin{array}{rcll} x+y & = & 5 & ① \\ x-y & = & 1 & ② \\ \hline 2x & = & 6 & ①+② \\ x & = & 3 & \text{Après simplification} \end{array}\right.$$

En portant cette valeur dans ① ou dans ②, on obtient $y = 2$.
Ainsi : $S = \{x = 3\,;\, y = 2\}$

Exemple 4.17

Résoudre le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{lcll} 3x+4y & = & 32 & ① \\ 7x+6y & = & 58 & ② \end{array}\right.$$

Solution

En multipliant ① par (-3) et ② par 2, on obtient le système équivalent, qu'il suffit d'additionner pour supprimer les y :

$$\begin{array}{rcll} -9x-12y & = & -96 & ③ \\ 14x+12y & = & 116 & ④ \\ \hline 5x & = & 20 & ③+④ \end{array}$$

On obtient $5x = 20$, c'est-à-dire $x = 4$. Puis, on remplace cette valeur dans l'une des deux équations, par exemple la ① : $3 \times 4 + 4y = 32$, ce qui donne, après simplifications $y = 5$.

Ainsi : $S = \{x = 4\,;\ y = 5\}$

Exemple 4.18

Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 2x + 3y &= 7 \quad ① \\ 4x + 6y &= 14 \quad ② \end{cases}$$

Solution

En multipliant ① par (-2), on obtient le système équivalent, qu'il suffit d'additionner :

$$\begin{array}{rcrl} -4x - 6y & = & -14 & ③ \\ 4x + 6y & = & 14 & ④ \\ \hline 0y & = & 0 & ③ + ④ \end{array}$$

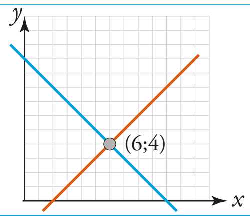
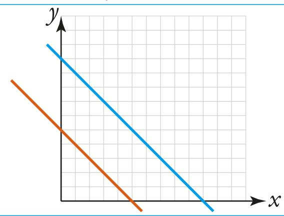
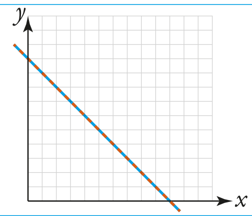
Remarque

Cette dernière équation est **indéterminée**. Il y a donc une infinité de solutions. Mais ces solutions sont liées entre elles. Supposons que la valeur $x = a$ soit une solution, alors on a $4a + 6y = 14$, ce qui conduit à $y = \frac{7}{3} - \frac{2a}{3}$. On peut ainsi écrire la solution du système sous la forme :

$$S = \left\{ x = a; y = \frac{7}{3} - \frac{2a}{3} \right\}$$

Méthode graphique

Graphiquement, un système de deux équations à deux inconnues peut être vu comme la représentation de deux droites. Résoudre graphiquement un tel système, consiste à déterminer le point d'intersection, c'est-à-dire l'ensemble des points qui appartiennent à la fois à la première et à la deuxième droite. Les cas suivants peuvent alors se présenter :

Droites **sécantes**: Une solution uique (6;4)	Droites **parallèles**: Pas de solution	Droites **confondues**: infinité de solution
$\begin{cases} x+y=10 \\ x-y=2 \end{cases}$	$\begin{cases} x+y=10 \\ x+y=5 \end{cases}$	$\begin{cases} x+y=10 \\ 2x+2y=20 \end{cases}$
		

Exemple 4.19

Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} -x+y &= -1 \quad ① \\ x+y &= 5 \quad ② \end{cases}$$

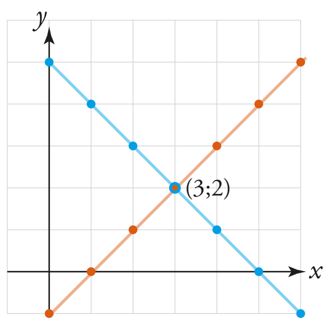
Solution

Le système est équivalent au système :

$$\begin{cases} y &= x-1 \quad ① \\ y &= -x+5 \quad ② \end{cases}$$

On dresse un tableau de valeurs ainsi qu'un graphique correspondant, ce qui conduit à la solution $S = \{x=3;\ y=2\}$ ou encore au point de coordonnées $(3;2)$:

x	y ①	y ②
0	−1	5
1	0	4
2	1	3
3	**2**	**2**
4	3	1
5	4	0
6	5	−1



4.3.2 Résolution des systèmes de 3 équations à 3 inconnues

Pour ce type de systèmes, on utilise le plus souvent la substitution décrite précédemment. On peut ainsi ramener un système de 3 équations à trois inconnues à un système de 2 équations à 2 inconnues.

Exemple 4.20

Résoudre le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcll} 2x+y+z & = & 7 & ① \\ -x+y-z & = & -2 & ② \\ x+2y+2z & = & 11 & ③ \end{array}\right.$$

Solution

De ① on tire $y = 7-2x-z$, expression que l'on remplace dans ② et ③ :

$$\left\{\begin{array}{rcl} -x+(7-2x-z)-z & = & -2 \\ x+2(7-2x-z)+2z & = & 11 \end{array}\right.$$

Ce qui donne en simplifiant :

$$\left\{\begin{array}{rcll} -3x-2z & = & -9 & ④ \\ -3x & = & -3 & ⑤ \end{array}\right.$$

De ⑤, on a immédiatement $x = 1$, valeur que l'on porte dans ④ :

$$(-3)1-2z=-9 \quad \rightarrow z=3$$

Finalement, $y = 7-2x-z = 7-2-3 = 2$.
Ainsi : $S = \{x=1\,;\, y=2\,;\, z=3\}$

Exercices d'application de la section 4.3

15 [Deux équations à 2 inconnues] Résoudre les systèmes suivants :

(a) $\left\{\begin{array}{l} x=4y+1 \\ 4x-16y=3 \end{array}\right.$ **(b)** $\left\{\begin{array}{l} y-3x=1 \\ x-\dfrac{1}{3}y=-\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$ **(c)** $\left\{\begin{array}{l} \dfrac{x+1}{y-3}=2 \\ \dfrac{x+1}{2}=y-3 \end{array}\right.$

16 [Deux équations à 2 inconnues] Résoudre les systèmes suivants :

(a) $\left\{\begin{array}{l} (x+2)^2-1=x^2-5y \\ 4x-1=-y \end{array}\right.$ **(b)** $\left\{\begin{array}{l} 4x-2y=1 \\ -2x+y=-2 \end{array}\right.$ **(c)** $\left\{\begin{array}{l} \dfrac{14}{x}-\dfrac{10}{y}=\dfrac{13}{2x}+\dfrac{25}{2xy} \\ y-3x=0 \end{array}\right.$

17 [Trois équations à 3 inconnues] Résoudre les systèmes suivants :

(a) $\begin{cases} x+y+z=25 \\ x-y+z=5 \\ x+2z=2y-10 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} y=x+2 \\ x-z=4 \\ y=z-1 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x+z-1=0 \\ y+\dfrac{z}{2}+1=0 \\ 2x=-z \end{cases}$

18 [Trois équations à 3 inconnues] Résoudre les systèmes suivants :

(a) $\begin{cases} x=z+3 \\ y=x \\ y-z=3 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x+y-z=6 \\ x+y=3 \\ x+z=0 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} 3x-2=1 \\ 2x+y-3z=2 \\ 4x=6z-2y+1 \end{cases}$

4.4 Equation du 2ème degré

Une équation du second degré en x est une équation qui peut se ramener à la forme générale suivante : $ax^2+bx+c=0$ avec $a\neq 0$.

4.4.1 Méthodes de résolution

Factorisation

La méthode de factorisation vue au chapitre précédent peut s'appliquer très facilement dans les cas les plus simples.

Exemple 4.21

Résoudre l'équation suivante : $2x^2-4x-6=0$

Solution

On cherche 2 nombres dont le produit donne -12 et la somme -4. Ces deux nombres sont $+2$ et -6. Ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned} 2x^2-4x-6&=0 \\ 2x^2+2x-6x-6&=0 \\ 2x(x+1)-6(x+1)&=0 && \text{Mise en évidence} \\ (x+1)(2x-6)&=0 && \text{Mise en évidence du facteur } x+1 \end{aligned}$$

- D'une part : $x+1=0$, c'est-à-dire $x=-1$ et
- d'autre part : $2x-6=0$, c'est-à-dire $x=3$

Ainsi, les solutions de l'équation s'écrivent : $S=\{-1;3\}$

Exemple 4.22

Résoudre l'équation suivante : $3x^2 + 6x = 0$

Solution

Il suffit ici de faire une simple mise en évidence :

$$3x^2 + 6x = 0$$
$$3x(x+2) = 0$$

Cette décomposition conduit aux solutions : $S = \{-2; 0\}$

Exemple 4.23

Résoudre l'équation suivante : $9x^2 - 81 = 0$

Solution

$$9x^2 - 81 = 0 \qquad \text{Donnée}$$
$$(3x-9)(3x+9) = 0 \qquad \text{Factorisation-produit remarquable}$$

- D'une part : $3x - 9 = 0$, c'est-à-dire $x = 3$ et
- d'autre part : $3x + 9 = 0$, c'est-à-dire $x = -3$

Ainsi : $S = \{-3; 3\}$

Méthode générale

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad \text{Équation sous forme générale}$$
$$\Delta = b^2 - 4ac \qquad \text{On calcule Delta}$$

Selon la valeur de Δ, on envisage trois situations :

- Si $\Delta > 0$ l'équation a deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Si $\Delta = 0$ l'équation a une solution double $x_1 = x_2 = \dfrac{-b}{2a}$
- Si $\Delta < 0$ l'équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$: $S = \varnothing$

Exemple 4.24

Résoudre l'équation suivante : $2x^2 - 4x - 6 = 0$

Solution

- $a = 2,\ b = -4$ et $c = -6$
- $\Delta = (-4)^2 - 4(2)(-6) = 64$

Comme $\Delta > 0$, cette équation a deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{4 - \sqrt{64}}{2(2)} = -1 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{4 + \sqrt{64}}{2(2)} = 3$$

Les deux solutions s'écrivent donc : $S = \{-1; 3\}$

Exemple 4.25

Résoudre l'équation suivante : $9x^2 - 6x + 1 = 0$

Solution

- $a = 9,\ b = -6$ et $c = 1$
- $\Delta = (-6)^2 - 4(9)(1) = 0$

Comme $\Delta = 0$, cette équation a une solution réelle double : $x = \dfrac{6}{18} = \dfrac{1}{3}$

Exemple 4.26

Résoudre l'équation suivante : $x^2 + 2x + 3 = 0$

Solution

- $a = 1,\ b = 2$ et $c = 3$
- $\Delta = 2^2 - 4(1)(3) = -8$

Comme $\Delta < 0$, cette équation n'a donc pas de solution dans $\mathbb{R}$.

$$S = \varnothing$$

Formule du second degré
Une alternative de démonstration.

4.4.2 Décomposition en facteurs

Un trinôme du second degré dont on connaît sa ou ses racines (x_1, x_2) peut toujours être décomposé en produits de facteurs :

- si le trinôme a 2 racines : $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$
- si le trinôme n'a qu'une racine : $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$

Exemple 4.27

Décomposer le trinôme suivant : $x^2 + 2x + 3$

Solution

$\Delta = 2^2 - 4(1)(3) = -8$.
Comme $\Delta < 0$, cette équation n'a donc pas de solution et par conséquent le trinôme n'est pas décomposable dans $\mathbb{R}$.

Exemple 4.28

Décomposer le trinôme suivant : $2x^2 - 4x - 6$

Solution

Comme l'équation $2x^2 - 4x - 6 = 0$ a deux solutions (racines) réelles :$\{-1; 3\}$, la décomposition du trinôme est la suivante :

$$2x^2 - 4x - 6 = 2(x + 1)(x - 3)$$

Exemple 4.29

Décomposer le trinôme suivant : $9x^2 - 6x + 1$

Solution

Comme l'équation $9x^2 - 6x + 1 = 0$ n'a qu'une seule solution $x = \frac{1}{3}$, la décomposition du trinôme est la suivante :

$$9\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 = 9\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right) = (3x - 1)(3x - 1)$$

Exercices d'application de la section 4.4

19 [Résolution par factorisation] Résoudre les équations suivantes :

(a) $x^2+12x+27=0$ **(b)** $2x^2-5x=3$ **(c)** $x^2-\sqrt{2}x-4=0$

20 [Résolution par factorisation] Résoudre les équations suivantes :

(a) $x^2-7x=-10$ **(b)** $6x^2+7x-3=0$ **(c)** $2x^2-2\sqrt{2}x+1=0$

21 [Équations du second degré] Résoudre les équations suivantes :

(a) $2x^2+2x+15=x^2+50$

(b) $(x+4)^2+1=8x$

(c) $\dfrac{x}{x-2}-\dfrac{4}{x+2}=\dfrac{8}{x^2-4}$

22 [Équations du second degré] Résoudre les équations suivantes :

(a) $2x^2+2x+4=x^2+19$

(b) $\dfrac{1}{2}(x-4)^2+\dfrac{1}{3}(x-6)=\dfrac{2}{3}$

(c) $\dfrac{3x-1}{2x+8}-\dfrac{2x-3}{4(x+1)}=\dfrac{13}{40}$

23 [Factorisation] Factoriser les trinômes suivants :

(a) $x^2-9x+18$ **(b)** $x^2+10x+20$ **(c)** $18x^2+3x-1$

24 [Factorisation] Factoriser les trinômes suivants :

(a) $3x^2-21x+36$ **(b)** $4x^2-4x+1$ **(c)** $63x^2+25x+2$

4.5 Problèmes et exercices de synthèse

25 [Premier degré une inconnue] Dans un jardin, le tiers de la surface est recouvert par des fleurs, un sixième par des plantes vertes et le reste, soit 150 m^2, est occupé par la pelouse. Quel est l'aire de ce jardin ?

26 [Premier degré une inconnue] Un automobiliste constate qu'en ajoutant 12 litres d'essence à son réservoir à moitié plein, il le remplit aux trois quarts. Quelle est la capacité de son réservoir ?

27 [Premier degré une inconnue] Le personnel d'une entreprise est composé d' hommes et de femmes. L'entreprise emploie 107 personnes. Si elle embauche 8 femmes de plus alors la composition de femmes représente les 40% de l'effectif total. Combien de femmes y a-t-il dans cette entreprise ?

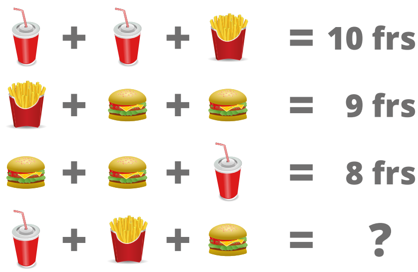
28 [Premier degré une inconnue] Sur une fiche de paie, 8,4% du salaire brut est consacré aux déductions sociales. Une déduction supplémentaire de 400 frs est également effectuée pour la prévoyance professionnelle. Le salarié est aussi gratifié d'allocations familiales d'un montant de 500 frs, non soumises aux déductions sociales. Si le salaire net mensuel se monte à 6 512 frs, quel est le salaire brut correspondant ?

29 [Deux équations, deux inconnues] Au début il y a deux fois plus de garçons que de filles. Six garçons quittent la classe et six filles arrivent, il y a alors deux fois plus de filles que de garçons. Combien de garçons et combien de filles y avait-il au début ?

30 [Deux équations, deux inconnues] Comment peut-on payer la somme de 184 frs avec 50 pièces, les unes de 2 frs et les autres de 5 frs ?

31 [Trois équations, trois inconnues] Trouver un nombre de trois chiffres possédant les propriétés suivantes : son chiffre des dizaines est 2 ; la somme de ses chiffres vaut 7 ; si on lui enlève 297, on obtient le nombre renversé.

32 [Trois équations, trois inconnues]



33 [Second degré] Un village se proposait de construire une patinoire de 30 m sur 60 m. Une coupure budgétaire a obligé les autorités à réduire l'aire totale de la patinoire à 1000 m^2. Pour accomplir cela, la surface perdue est remplacée par un trottoir de largeur uniforme tout autour de la patinoire. Trouver la largeur de celui-ci.

34 [Second degré] Les membres d'un groupe se partagent les frais d'une excursion en autobus qui coûte 540 frs. Cinq personnes ne peuvent finalement pas y participer, ce qui augmente le coût pour les autres de 1,50 frs par personne. Combien de personnes ont fait le voyage ?

35 [Second degré] De quel pourcentage environ faut-il augmenter le rayon d'un disque afin que son aire triple ?

36 [Second degré] Un bien d'une valeur initiale $V_0 = 54\,000$ frs est amorti sur n années selon une certaine méthode dont l'amortissement pour l'année k est donné par :

$$A_k = \frac{2 \times V_0}{n(n+1)}(n-k+1)$$

Si le 3ème amortissement se monte à 8 400 frs, en combien d'années le bien est-il prévu d'être amorti ?

37 [Défi] Compléter le puzzle suivant :

38 [Défi] Sans faire usage d'une calculatrice, que vaut $x^2 + \dfrac{1}{x^2}$ si $x + \dfrac{1}{x} = 5$?

Chapitre 5

Autres types d'équations

Objectifs du chapitre

- résoudre des équations contenant des racines et qui se transforment en équations quadratiques ou linéaires.
- résoudre des équations contenant des valeurs absolues.
- résoudre des équations de degré supérieur se ramenant à des équations quadratiques ou linéaires.

5.1 Les équations irrationnelles

Une équation **irrationnelle** est une équation qui renferme l'inconnue sous une ou plusieurs racines comme $\sqrt{\ }$, $\sqrt[3]{\ }$, etc..

Pour résoudre une telle équation, on applique en général la démarche suivante :

1. On commence par chercher l'ensemble de définition (**ED**). Chaque expression sous une racine paire devant être plus grande ou égale à zéro.
2. On essaie de regrouper dans un membre les expressions contenant les racines. Cela permet en général de réduire l'ensemble de définition à l'**ensemble de résolution** (**ER**), par **cohérence** entre un membre et l'autre.
3. On élève au carré chaque membre de l'équation (ou au cube s'il s'agit d'une racine cubique).
4. Si l'équation contient encore une racine on recommence le même procédé.
5. On écarte au final les solutions n'appartenant pas à l'ensemble de résolution.

Exemple 5.1

Résoudre l'équation suivante : $\sqrt{2x+3}+x=6$

Solution

On cherche l'ensemble de définition (ED). La seule contrainte que nous avons est la suivante : $2x+3 \geq 0$, c'est-à-dire $x \geq -\frac{3}{2}$. L'ensemble de définition est donc le suivant :

$$\text{ED} : x \in \left[-\frac{3}{2}; +\infty\right[$$

On isole ensuite la racine : $\sqrt{2x+3} = 6-x$. À ce stade on peut déterminer l'ensemble de résolution en remarquant que le membre de gauche est positif ou nul, du fait de la racine carrée, et par conséquent, le membre de droite doit l'être aussi. On peut alors écrire :

$$6-x \geq 0 \text{ c'est-à-dire } x \leq 6$$

L'ensemble de définition (ED) se réduit alors du fait de cette nouvelle information. On l'appelle l'ensemble de résolution (ER). Ainsi :

$$\text{ER} : x \in \left[-\frac{3}{2}; 6\right]$$

On élève les deux membres de l'équation au carré :

$$2x+3 = 36-12x+x^2$$
$$x^2-14x+33=0$$

Les solutions de cette équation sont : $x=11$ et $x=3$. Comme $x=11 \notin \text{ER}$, la seule solution de cette équation est $x=3$.

Exemple 5.2

Résoudre l'équation suivante : $\sqrt{5\sqrt{x}} = \sqrt{2x-3}$

Solution

Pour rechercher l'ED, il faut que les deux conditions suivantes soient remplies :

- $5\sqrt{x} \geq 0$, c'est-à-dire $x \geq 0$ et
- $2x-3 \geq 0$, c'est-à-dire $x \geq \frac{3}{2}$

On peut donc écrire :

$$\text{ED} : x \in \left[\frac{3}{2}; +\infty\right[$$

On élève deux fois de suite au carré chaque membre de l'équation :

$$\begin{aligned} 5\sqrt{x} &= 2x-3 \\ 25x &= (2x-3)^2 \\ 25x &= 4x^2-12x+9 \\ 4x^2-37x+9 &= 0 \end{aligned}$$

Les solutions de cette équation sont : $x = 9$ et $x = \frac{1}{4}$. Comme $x = \frac{1}{4} \notin$ ED, la seule solution de cette équation est $x = 9$. On remarquera ici que ED est identique à ER.

Exemple 5.3

Résoudre $\sqrt{x-3} = \sqrt{1-x}$

Solution

Pour rechercher l'ED, il faut que les deux conditions suivantes soient remplies :

- $x-3 \geq 0$, c'est-à-dire $x \geq 3$
- $1-x \geq 0$, c'est-à-dire $x \leq 1$

Il n'y a pas de valeurs de x qui vérifient à la fois ces deux conditions. Cette équation n'a donc pas de solution.

Exercices d'application de la section 5.1

1 [Racines simples] Résoudre les équations suivantes :

(a) $\sqrt{x}-1=9$ **(b)** $\sqrt{x-1}=9$ **(c)** $\sqrt{x^2+11}=6$

2 [Racines simples] Résoudre les équations suivantes :

(a) $\sqrt{x-3}+x^2=0$ **(b)** $2\sqrt{x}+3\sqrt{x}=20$ **(c)** $(\sqrt{x}+2)^2=x+16$

3 [Racines] Résoudre les équations suivantes :

(a) $x-2\sqrt{x}=3$

(b) $3-x=-\sqrt{x-3}$

(c) $\sqrt{x^2+3x-6}=2x-6$

4 [Racines] Résoudre les équations suivantes :

(a) $x+\sqrt{x+5}=7$ **(b)** $7\sqrt{3x+3}=3x+13$ **(c)** $\sqrt{2x^2+7}=x+4$

5 [Autres racines] Résoudre les équations suivantes :

(a) $x=\sqrt[3]{x}$ **(b)** $\sqrt[4]{x-2}+2=3$ **(c)** $\sqrt[3]{2x+1}=5$

6 [Autres racines] Résoudre les équations suivantes :

(a) $\sqrt[3]{x^3-8x^2+16}=x$ **(b)** $\sqrt[3]{x^3+x^2}=x+1$ **(c)** $\sqrt[2020]{(x+1)^2+1}=1$

7 [Plusieurs racines] Résoudre les équations suivantes :

(a) $\sqrt{5x}-8=\sqrt{3x-6}$

(b) $\sqrt{3x-2}+\sqrt{2x-1}=2$

(c) $3-\sqrt{x}=\sqrt{5-x}$

8 [Plusieurs racines] Résoudre les équations suivantes :

(a) $\dfrac{\sqrt{5}\sqrt{x}+3}{\sqrt{x-1}}=4$

(b) $\sqrt{x+2}+\dfrac{6}{\sqrt{x+2}}=5$

(c) $3\sqrt{2x-4}-2\sqrt{5-x}=4$

5.2 Les équations avec des valeurs absolues

La résolution des équations contenant des valeurs absolues fait appel à la définition même de celle-ci :

$$|x|=\begin{cases} x & \text{si} \quad x\geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x<0 \end{cases}$$

5.2.1 Équations de la forme $|f(x)|=b$

Soit b, une constante, alors $|f(x)|=b$ conduit à :

$$\begin{cases} f(x)=\pm b, & \text{si } b\geq 0 \\ \text{impossible}, & \text{si } b<0 \end{cases}$$

Exemple 5.4

Résoudre l'équation suivante : $|x-2|=2$

Solution

- $x-2=2$, c'est-à-dire : $x=4$ ou
- $x-2=-2$ c'est-à-dire : $x=0$

$$S=\{0;4\}$$

Exemple 5.5

Résoudre l'équation suivante : $-2|x+5|=100$

Solution

$$
\begin{aligned}
-2|x+5| &= 100 && \text{Donnée}\\
|x+5| &= -50 && \text{Diviser par } -2 \text{ de chaque côté}
\end{aligned}
$$

$S=\varnothing$, car une valeur absolue ne peut pas être négative.

5.2.2 Équations de la forme $|f(x)|=|g(x)|$

Si $|f(x)|=|g(x)|$, alors : $f(x)=\pm g(x)$

Exemple 5.6

Résoudre l'équation suivante : $|x+2|=|-2x+5|$

Solution

$$x+2=\pm(-2x+5)$$

- $x+2=-2x+5$, c'est-à-dire : $x=1$ ou
- $x+2=2x-5$ c'est-à-dire : $x=7$

$$S=\{1;7\}$$

5.2.3 Équations de la forme $|f(x)|=g(x)$

En appliquant la définition de la valeur absolue on peut écrire :

Si $|f(x)| = g(x)$, alors :

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases} \quad \textbf{ou} \quad \begin{cases} f(x) < 0 \\ -f(x) = g(x) \end{cases}$$

Exemple 5.7

Résoudre l'équation suivante : $|x-2| = 2x+3$

Solution

$$\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x-2 = 2x+3 \end{cases} \quad \textbf{ou} \quad \begin{cases} x-2 < 0 \\ -(x-2) = 2x+3 \end{cases}$$

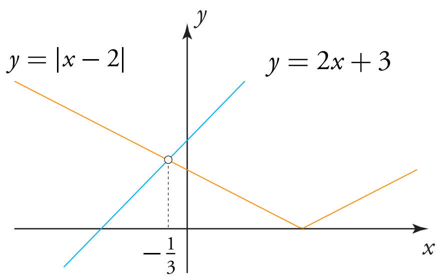
Ce qui est équivalent à écrire :

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ x = -5 \end{cases} \quad \textbf{ou} \quad \begin{cases} x < 2 \\ x = -1/3 \end{cases}$$

Ce qui est encore équivalent à :

$$\varnothing \quad \textbf{ou} \quad x = -1/3$$

Ainsi : $S = \{-1/3\}$
Cela peut se confirmer à l'aide du graphique ci-après :



Exemple 5.8

Résoudre l'équation suivante : $|x-1| = \dfrac{x}{2}$

Solution

$$\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x-1 = \dfrac{x}{2} \end{cases} \quad \textbf{ou} \quad \begin{cases} x-1 < 0 \\ -(x-1) = \dfrac{x}{2} \end{cases}$$

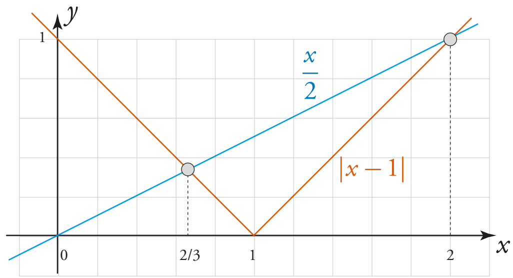
Ce qui est équivalent à écrire :

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x = 2 \end{cases} \quad \textbf{ou} \quad \begin{cases} x < 1 \\ x = 2/3 \end{cases}$$

Ce qui est encore équivalent à :

$$x = 2 \quad \textbf{ou} \quad x = 2/3$$

Ainsi : $S = \{2/3; 2\}$



Exercices d'application de la section 5.2

9 [Valeurs absolues simples] Résoudre les équations suivantes :

(a) $|3x-2| = 5$ **(b)** $3|x|-2 = 5$ **(c)** $|x+6| = \sqrt{5}-3$

10 [Valeurs absolues simples] Résoudre les équations suivantes :

(a) $|x^2-4| = 12$ **(b)** $|x^2-3x| = 10$ **(c)** $|3|x-3|| = 9$

11 [Doubles valeurs absolues] Résoudre les équations suivantes :

(a) $|x| = |x-1|$ **(b)** $|2x-1| = |3x-4|$ **(c)** $|2-4x| = 3|1-2x|$

12 [Doubles valeurs absolues] Résoudre les équations suivantes :

(a) $|2x^2-x| = |x|$ **(b)** $|5-2\sqrt{x}| = |2+\sqrt{x}|$ **(c)** $\dfrac{2|x|}{\sqrt{5}} = |x-\sqrt{5}|$

13 [Valeurs absolues] Résoudre les équations suivantes :

(a) $|3x-4| = 2x-1$ **(b)** $2|2x+2| = 6x+4$ **(c)** $|x| + \dfrac{1}{2|x|} = \dfrac{9}{4}$

14 [Valeurs absolues] Résoudre les équations suivantes :

(a) $3x - 4 = |x + 2|$ **(b)** $\dfrac{10}{|x - 2|} = x + 1$ **(c)** $|x^2 - 3| = x + 3$

5.3 Les équations de degré supérieur à 2

Les équations du $3^{\text{ème}}$ et du $4^{\text{ème}}$ degré peuvent être résolues au moyen de formules mathématiques. Cependant ces formules font appel aux nombres complexes que nous n'étudions pas ici. D'une manière générale, on essaie de résoudre les équations de degré supérieur à 2 en faisant des regroupements et des mises en évidence. Mais cela n'est pas toujours possible. Une autre solution consiste à trouver les solutions à l'aide du solver de la calculatrice ou d'Excel.

5.3.1 Équations pouvant être décomposées en produits de facteurs

Si une équation $f(x) = 0$ peut être décomposée en produits de facteurs alors on peut dire que chaque facteur est lui-même égal à zéro.

Exemple 5.9

Résoudre l'équation suivante : $y^3 + 2y^2 - y - 2 = 0$

Solution

$$
\begin{aligned}
y^3 + 2y^2 - y - 2 &= 0 && \text{grouper les 2 premiers termes et les deux derniers} \\
y^2(y+2) - 1(y+2) &= 0 && \text{mise en évidence de } (y+2) \\
(y^2 - 1)(y+2) &= 0 && \text{double mise en évidence} \\
(y-1)(y+1)(y+2) &= 0 && \text{factoriser } y^2 - 1
\end{aligned}
$$

Ainsi chaque facteur peut être égal à zéro :

$$
\begin{array}{llll}
① & y + 1 = 0 & \Rightarrow & y = -1 \\
② & y - 1 = 0 & \Rightarrow & y = +1 \\
③ & y + 2 = 0 & \Rightarrow & y = -2
\end{array}
$$

On a donc les solutions :

$$S = \{-2; -1; 1\}$$

5.3.2 Les équations réductibles au second degré

Une équation est réductible au second degré s'il est possible par un **changement de variable** adéquat d'obtenir une équation du second degré. Il s'agit en général des équations de la forme :

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0$$

Le changement de variable $y = x^n$ permet alors de ramener l'équation initiale à une équation du second degré.

Exemple 5.10

Résoudre l'équation suivante : $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$

Solution

En posant $y = x^2$, l'équation s'écrit alors :

$$y^2 - 5y + 6 = 0$$

Cette équation du second degré a deux solutions réelles : $y = 3$ et $y = 2$. Il suffit ensuite de revenir au changement de variable effectué pour chacune des solutions trouvées :

$$\begin{array}{llll} ① & 3 = x^2 & \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{3} & \text{ou} \\ ② & 2 = x^2 & \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{2} & \end{array}$$

$$S = \{\pm\sqrt{3}; \pm\sqrt{2}\}$$

Exemple 5.11

Résoudre l'équation suivante : $x^{2/3} + x^{1/3} - 6 = 0$

Solution

On fait le changement de variable suivant : $y = x^{1/3}$.
De cette façon, $x^{2/3} = (x^{1/3})^2 = y^2$. L'équation en y s'écrit alors :

$$y^2 + y - 6 = 0$$

Cette équation du second degré a deux solutions réelles : $y = -3$ et $y = 2$. Pour chacune de ces solutions, on retourne ensuite au changement de variable effectué :

$$\begin{array}{llll} ① & -3 = x^{1/3} & \Rightarrow \quad x = (-3)^3 = -27 & \text{ou} \\ ② & 2 = x^{1/3} & \Rightarrow \quad x = 2^3 = 8 & \end{array}$$

$$S = \{-27; 8\}$$

Exemple 5.12

Résoudre $\dfrac{2w}{w+1}+8=\left(\dfrac{w}{w+1}\right)^2$

Solution

$w+1\neq 0 \rightarrow w\neq -1 \qquad \text{ED}: w\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

Posons $\dfrac{w}{w+1}=x$, l'équation devient :

$$x^2-2x-8=0$$

Cette équation admet $x=4$ et $x=-2$ pour solutions.
Comme $x=\dfrac{w}{w+1}$, on a :

$$① \quad 4=\frac{w}{w+1}\rightarrow 4w+4=w\rightarrow 3w=-4\rightarrow w=\frac{-4}{3} \quad \text{ou}$$
$$② \quad -2=\frac{w}{w+1}\rightarrow -2w-2=w\rightarrow 3w=-2\rightarrow w=\frac{-2}{3}$$

Cette équation admet donc 2 solutions : $w=\dfrac{-4}{3}$ ou $w=\dfrac{-2}{3}$.

Exercices d'application de la section 5.3

15 [Factorisation] Résoudre les équations suivantes :

(a) $\dfrac{9x^4-x^2}{x}=0$ **(b)** $2x^3+3x^2-3x-2=0$ **(c)** $(2x-1)^4=16$

16 [Factorisation] Résoudre les équations suivantes :

(a) $\dfrac{x^3}{16}=\dfrac{1}{x}$ **(b)** $31x-5=31x^2-5x^3$ **(c)** $x^2\sqrt{5-x}=9\sqrt{5-x}$

17 [Changement de variable] Résoudre les équations suivantes :

(a) $x^4-5x^2+4=0$ **(b)** $\dfrac{x^4-5x^2-36}{x+3}=0$ **(c)** $x^6+2x^3+1=0$

18 [Changement de variable] Résoudre les équations suivantes :

(a) $x^{2/3}+3=4x^{1/3}$
(b) $27y^{-2}+4=21y^{-1}$
(c) $\sqrt{3-\sqrt{x-1}}=\sqrt{x-1}+1$

5.4 Problèmes et exercices de synthèse

19 [Intérêt composé] Un capital de 10 000 frs a été placé durant 2 ans à u certain taux i. Au bout de cette période, on décide d'ajouter 4 000 frs. Le tout est alors laissé sur le compte durant encore 2 ans. Quel est le taux d'intérêt du placement, si le compte final se monte à 19 481 frs ?

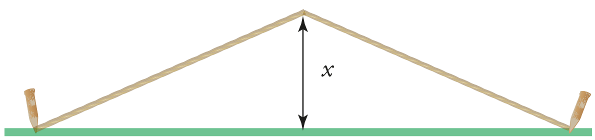
20 [Commandes commerciales] Le nombre de commandes d'un certain article de sport a évolué durant les 48 premiers mois selon la formule $C = 1\,250 \cdot x^{0,05}$ avec C les commandes au bout du $x$ème mois. Au bout de combien de mois a-t-on atteint environ 1 500 commandes ?

21 [Polynômes récursifs] Les polynômes de Boubaker peuvent se définir comme suit : $B_0(x) = 1$, $B_1(x) =$ et $B_2(x) = x^2 + 2$. Pour $n > 2$, $B_n(x)$ se définit de façon récursive par :

$$B_n(x) = x \cdot B_{n-1}(x) - B_{n-2}(x)$$

Résoudre l'équation $B_4(x) = 0$

22 [Hauteur de corde] Sur une pelouse, on tend entre deux piquets une corde d'une longueur de 100 mètres. Sans déplacer les piquets, on remplace ensuite la code de 100 mètres par une code de 101 mètres. On se positionne ensuite au milieu des deux piquets et on ajoute un 3ème piquet de hauteur x afin de tendre la corde.



(a) Sans aucun calcul, estimer approximativement la hauteur de x.

(b) Vérifier ensuite le résultat par calcul.

23 [Racine et valeur absolue] Résoudre l'équation $|10 - x| + \sqrt{x - 11} = x$

24 [Formule de la distance] La distance δ d'un point $P(x_0; y_0)$ à une droite d d'équation $ax + by + c = 0$ est donné par la formule suivante :

$$\delta(P, d) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Trouver les équations des 2 bissectrices des droites $d_1 : x + y - 2 = 0$ et $d_2 : x - 7y + 3 = 0$ sachant qu'une bissectrice de 2 droites se définit par l'ensemble des points $P(x; y)$ tels que $\delta(P; d_1) = \delta(P; d_2)$.

25 [Défi] Fredy a fait recours auprès de son professeur de mathématiques. Malgré avoir développé ses calculs et avoir trouvé la bonne réponse à l'exercice $\sqrt{3 - x} = 2 + \sqrt{x + 1}$, il n'a obtenu aucun point sur sa copie. Expliquer pourquoi !

26 [Défi] Résoudre l'équation $\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} - 12 = 0$

Chapitre 6

Généralités sur les fonctions

Objectifs du chapitre

- comprendre et expliquer les fonctions réelles comme une correspondance d'un ensemble de définition D vers un ensemble image E.
- lire, écrire et interpréter des fonctions réelles sous forme verbale, sous forme de tableau et sous forme de graphe (dans un repère cartésien).
- reconnaître le graphe d'une fonction élémentaire.
- esquisser le graphe d'une fonction élémentaire à partir de son équation.
- déterminer les caractéristiques de base d'une fonction : ED et zéros.

6.1 Notion de fonction

Le prix d'un billet de train dépend de la longueur du trajet; on dit que le prix est fonction de cette longueur. L'aire d'un cercle dépend de son rayon; l'aire du cercle est donc fonction du rayon du cercle.

Une grandeur y est **fonction** d'une grandeur x lorsque sa valeur dépend des valeurs attribuées à x. On dit que y ou $f(x)$ est fonction de x. La variable x s'appelle la **variable indépendante** [1] et y ou $f(x)$ la **variable dépendante**.

D'une façon imagée, on peut considérer une fonction comme une machine qui effectue une opération en acceptant en entrée une valeur x et, au moyen d'une formule ou **expression fonctionnelle**, renvoie en sortie un résultat appelé y ou $f(x)$.

Bien évidemment la machine pourrait accepter aussi plusieurs variables en entrée afin de réaliser une certaine opération. Dans ce cas, on parle d'une fonction de plusieurs variables.

Par ailleurs, il est important de ne pas confondre les notions de variables, constantes ou paramètres. Le tableau ci-après illustre ces notions.

1. Aussi appelée **argument** en informatique.

$$f(x,y) = \frac{3xy + a}{\pi}$$

x et y sont des variables ou arguments

3 et π sont des constantes

a est un paramètre

Dans le cadre de cet ouvrage on traitera principalement des fonctions d'une seule variable.

Formellement, une **fonction** est une relation qui à chaque élément d'un ensemble D fait correspondre un et un seul élément d'un ensemble E.

D s'appelle l'**ensemble de départ** et E l'**ensemble d'arrivée**.

On note cette relation comme suit : [2]

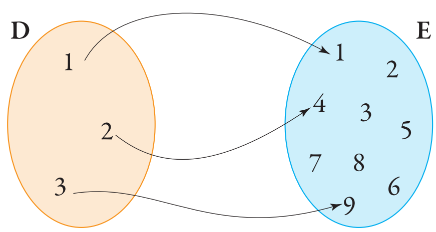
$$\begin{aligned} f : D &\to E \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

L'élément $f(x)$ est appelé l'image de x par f. L'ensemble de toutes les valeurs de $f(x)$ possibles s'appelle l'**ensemble image** de f et se note $\text{Im}(f)$.

L'exemple suivant permet de bien comprendre ces différentes notions :

Exemple 6.1

On donne les ensembles de départ et d'arrivée suivants :



- L'image de 1 est 1, celle de 2 est 4, celle de 3 est 9.
- Ensemble de départ : $D = \{1;2;3\}$
- Ensemble d'arrivée : $E = \{1;2;3;4;5;6;7;8,9\}$
- Ensemble image : $\text{Im}(f) = \{1;4;9\}$
- Expression fonctionnelle : $f(x) = x^2$

2. Lorsque D et E sont des ensembles de réels, on note simplement la fonction $f : x \mapsto f(x)$. On parle aussi de fonction réelle d'une variable réelle.

6.1.1 Représentation d'une fonction

Une fonction peut être représentée de 4 manières :

1. *Verbalement*, en la décrivant avec des mots.

   Exemple : «À un nombre, on fait correspondre son carré diminué de 1.»

2. *Algébriquement*, en donnant une formule ou expression fonctionnelle.

   Exemple : $f(x) = x^2 - 1$

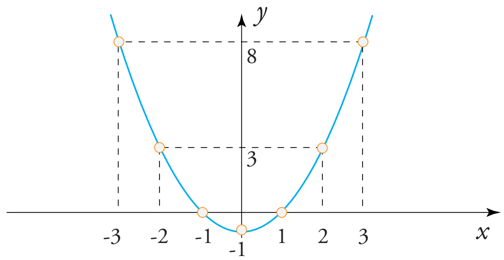
3. *Numériquement*, au moyen d'un tableau de valeurs :

   Exemple :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	8	3	0	-1	0	3	8

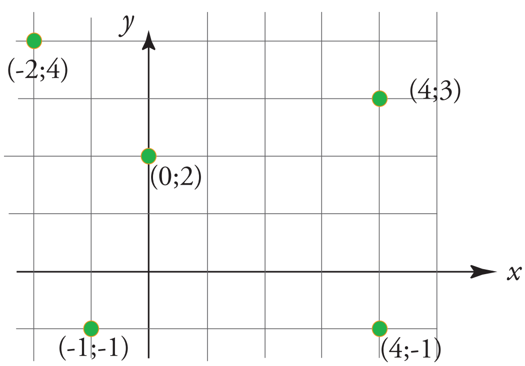
4. *Visuellement*, au moyen d'un **graphe** :

   Exemple :

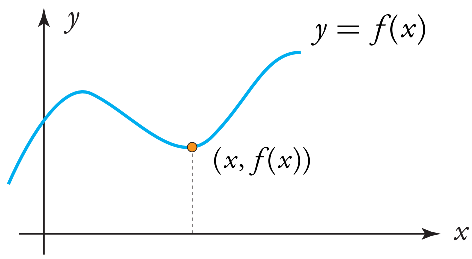


Remarque

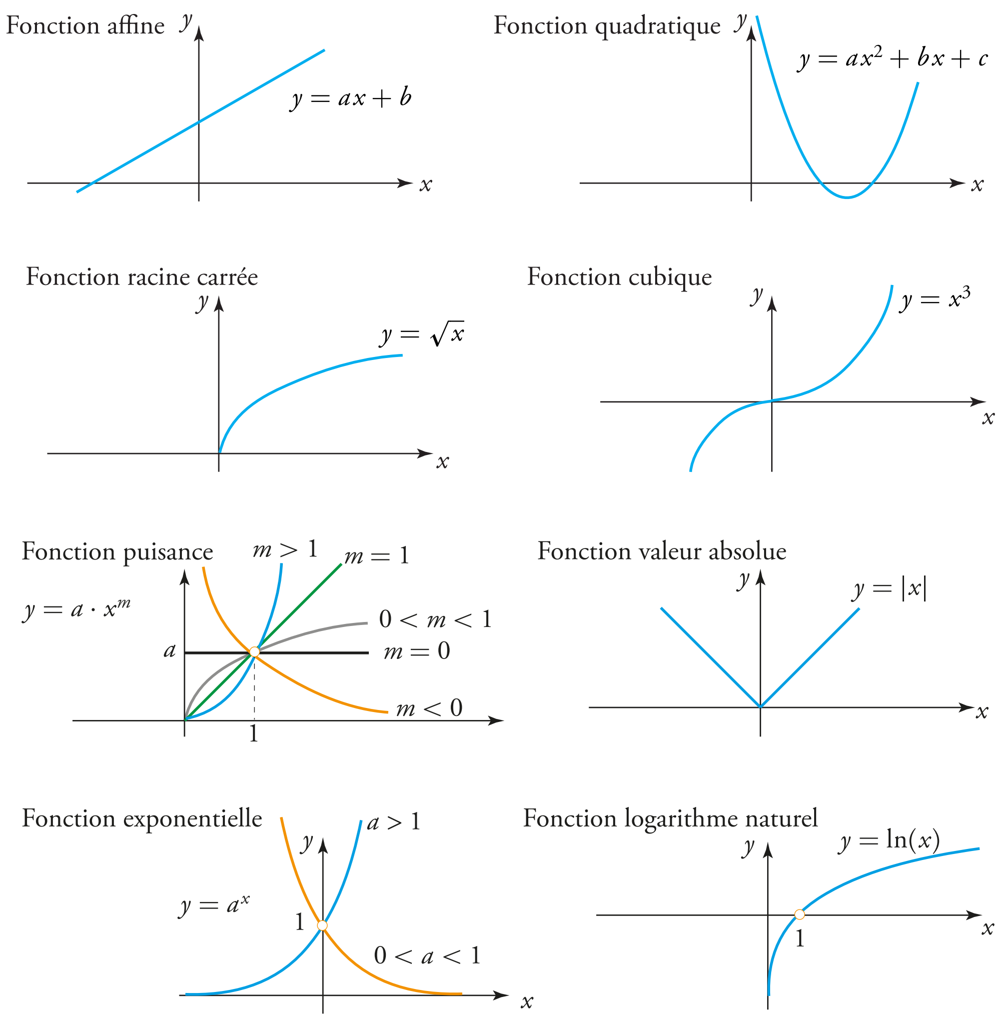
Comme on peut le voir sur le graphe précédent, une fonction peut être représentée dans le plan au moyen d'un système d'axes (x et y) appelé **système cartésien** où chaque point de la fonction est alors représenté par ses **coordonnées**. La première coordonnée indique la position de ce point par rapport à l'axe des x ou axe des **abscisses** et la seconde la position du point par rapport à l'axe des y ou axe des **ordonnées**. La figure ci-après représente quelques points dans le plan avec leurs coordonnées :



Une fonction se visualise par son graphe représenté par l'ensemble des points (x, y) ou encore $(x, f(x))$

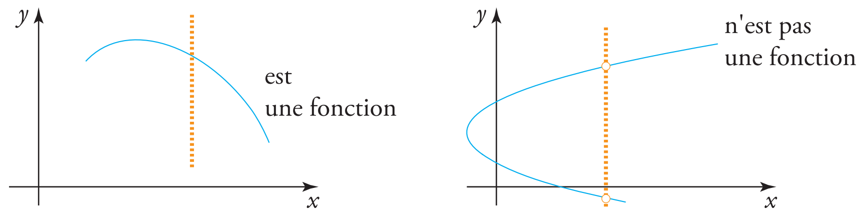


6.1.2 Graphe de quelques fonctions élémentaires



✎ Le test de la droite verticale permet de déterminer si l'on est en présence d'une fonction ou non. Si une droite verticale ne coupe qu'une seule fois le graphe, on est alors en présence d'une fonction.

Exemple 6.2



6.1.3 Evaluation d'une fonction en un point

Pour évaluer la fonction en un point, il suffit de remplacer ce point dans la fonction et d'en calculer l'image.

Exemple 6.3

Soit la fonction suivante : $f(x) = x^2 - 5x + 6$. Évaluer

$$f(1), \quad f(-2), \quad f(a) \quad \text{et} \quad f(a+h)$$

Solution

- $f(1) = 1^2 - 5 \times 1 + 6 = 2$
- $f(-2) = (-2)^2 - 5 \times (-2) + 6 = 20$
- $f(a) = a^2 - 5a + 6$
- $f(a+h) = (a+h)^2 - 5(a+h) + 6 = a^2 + 2ah + h^2 - 5a - 5h + 6$

6.1.4 Evaluation d'une préimage

Soit une fonction telle que $f(a) = b$. On peut alors dire que :

- b est l'image de a par f
- a est une **préimage** ou **antécédent** de b par f.

L'expression «a est une préimage de b par f» se note $f^{-1}(b) = \{a\}$

Exemple 6.4

Soit la fonction $f(x) = x^2 - 1$

- L'image de 3 par f est $f(3) = 3^2 - 1 = 8$
- Les préimages de 15 par f sont $f^{-1}(15) = \{-4; 4\}$

Exercices d'application de la section 6.1

1 [Reconnaître une fonction] Dire si la relation allant de l'ensemble $D = \{a, b, c\}$ vers l'ensemble $E = \{d, e, f, g, h, i\}$ est une fonction.

	d	e	f	g	h	i
a	X					
b			X			X
c				X		

2 [Reconnaître une fonction] Dire si la relation allant de l'ensemble $D = \{a, b, c\}$ vers l'ensemble $E = \{d, e, f, g, h, i\}$ est une fonction.

	d	e	f	g	h	i
a					X	
b			X			
c						

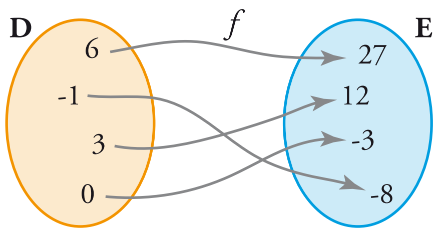
3 [Reconnaître une fonction] La relation suivante : «Multiplier le nombre par 2 puis soustraire 3» est-elle une fonction si $D = \{2, 4, 6\}$ et $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$?

4 [Reconnaître une fonction] Pour convertir en degrés Celsius une température donnée en degrés Fahrenheit, il suffit de soustraire 32 et de diviser par 1,8 le nombre ainsi obtenu. Est-ce que ce procédé de calcul représente une fonction ?

5 [Expression fonctionnelle] On donne la représentation sagittale suivante ainsi qu'une fonction f.

(a) Quel est l'ensemble Im(f) ?

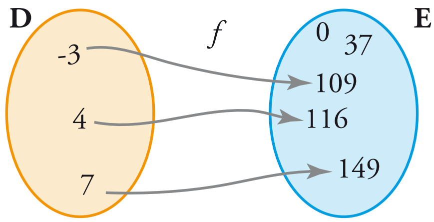
(b) Trouver l'expression fonctionnelle liant D à E.



6 [Expression fonctionnelle] On donne la représentation sagittale suivante ainsi qu'une fonction f.

(a) Quel est l'ensemble Im(f) ?

(b) Trouver l'expression fonctionnelle liant D à E.



7 [Représentation d'une fonction] Soit la fonction $f(x) = (x-3)^2 + 2$.

(a) Traduire cette fonction sous forme verbale.

(b) Traduire cette fonction sous forme de tableau.

x	$f(x)$
0	
2	
3	
5	

8 [Représentation d'une fonction] Soit la fonction $f(x) = \dfrac{2x+3}{5}$.

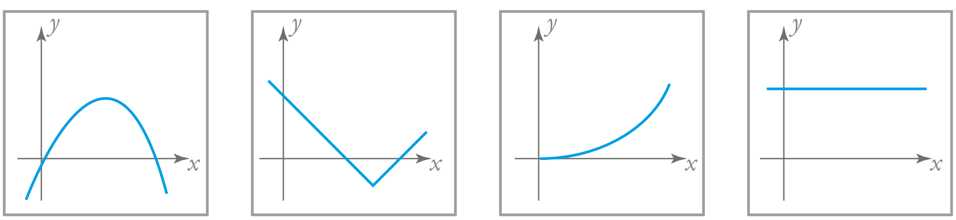
(a) Traduire cette fonction sous forme verbale.

(b) Traduire cette fonction sous forme de tableau.

x	-3	1	2	3
$f(x)$				

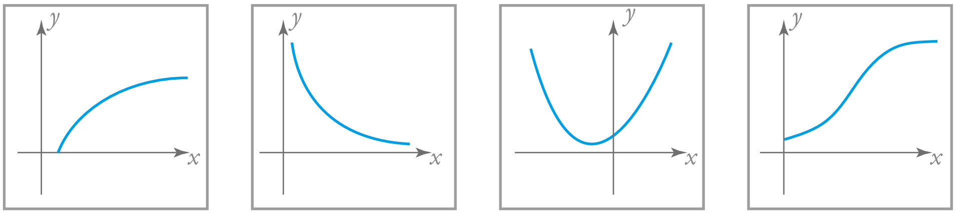
9 [Reconnaître une fonction] De quel type de fonction s'agit-il ?

(a) **(b)** **(c)** **(d)**



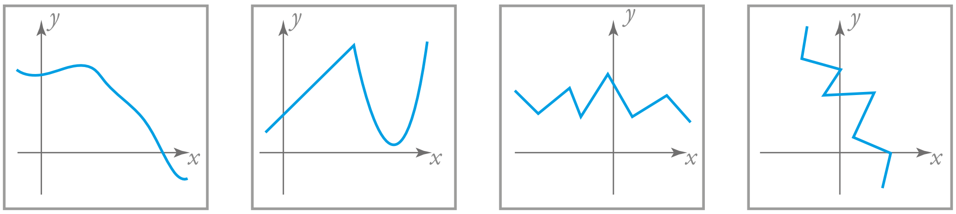
10 [Reconnaître une fonction] De quel type de fonction s'agit-il ?

(a) **(b)** **(c)** **(d)**



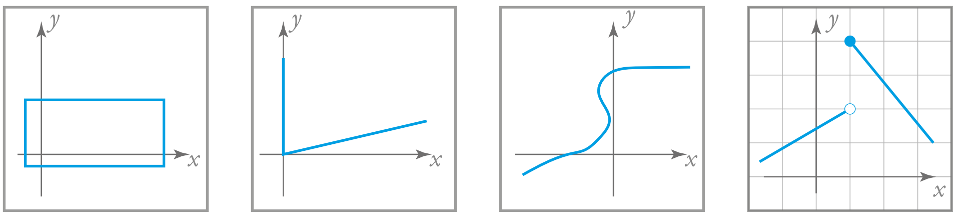
11 [Reconnaître une fonction] Dire s'il s'agit d'une fonction ?

(a) **(b)** **(c)** **(d)**



12 [Reconnaître une fonction] Dire s'il s'agit d'une fonction ?

(a) **(b)** **(c)** **(d)**



13 [Évaluation d'une fonction] Soit $f(x) = x^2 - 5x + 6$. Évaluer :

(a) $f(5)$ **(b)** $f(-a)$ **(c)** $f(a+h)$

14 [Évaluation d'une fonction] Soit $f(x) = 100\left(\dfrac{2}{10+x}\right)^2$. Évaluer :

(a) $f(0)$ **(b)** $f(x-5)$ **(c)** $f(h-10)$

15 [Préimages] On donne une fonction sous la forme :

x	0,4	$-0,4$	6	0	2	1	4	0,2
$f(x)$	6	$-0,4$	0	0,4	0	4	$-0,4$	$-0,2$

Évaluer les préimages suivantes :

(a) $f^{-1}(-0,4)$ **(b)** $f^{-1}(0)$ **(c)** $f^{-1}(6)$

16 [Préimages] On donne la fonction $f(x) = x^2 - x + 1$. Évaluer les préimages suivantes :

(a) $f^{-1}(0)$ **(b)** $f^{-1}(13)$ **(c)** $f^{-1}(3/4)$

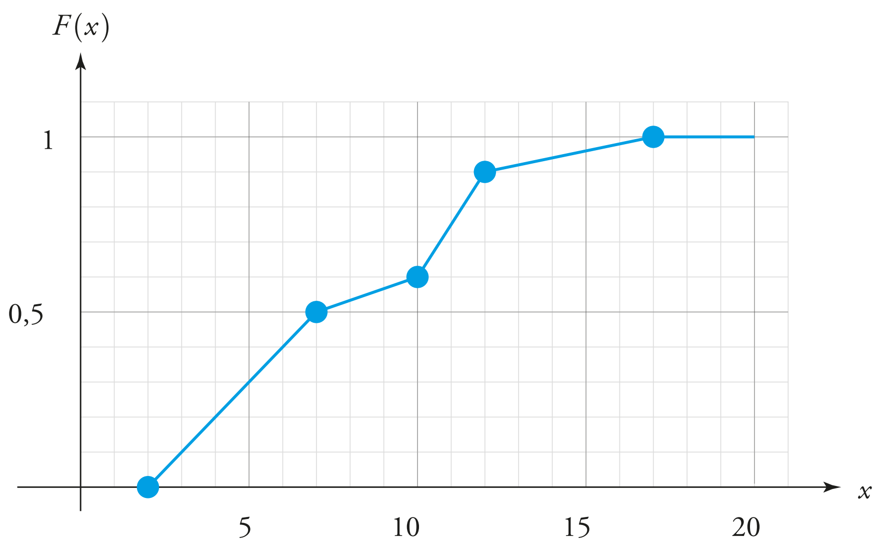
17 [Fonction par morceaux] On donne une fonction sous la forme :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ x+1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Évaluer :

(a) $f(-3)$ **(b)** $f(0)$ **(c)** $f(4) - f(-4)$

18 [Fonction de répartition] On donne une fonction sous forme graphique suivante :



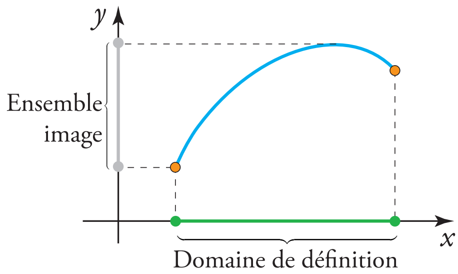
Évaluer :

(a) $F(5)$ **(b)** $F^{-1}(0,75)$ **(c)** $F(12) - F(7)$

6.2 Éléments importants liés aux fonctions

6.2.1 Ensemble de définition d'une fonction

L'**ensemble de définition** (**ED**) est l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles la fonction $f(x)$ a un sens.[3]



La recherche de l'ensemble de définition est le premier travail a effectuer avant de vouloir représenter graphiquement une fonction. Si, par exemple, une fonction possède un ensemble de définition vide (ED $= \varnothing$), le graphe de la fonction ne peut être établi.

Bien souvent, l'ensemble de définition est $\mathbb{R}$. Ce dernier est alors réduit dans les cas suivants :

- lorsque la fonction contient un ou plusieurs dénominateurs
  Exemple : $f(x) = \frac{1}{x}$ x doit être exclu !

  $$\text{ED} : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \qquad \text{ou} \qquad x \in \mathbb{R}^*$$

- lorsque la fonction contient une ou plusieurs racines d'ordre pair
  Exemple : $\sqrt{x}$ ou $\sqrt[4]{x}$ x doit être supérieur ou égal à zéro !

  $$\text{ED} : x \in [\,0\,;\,\infty\,[\qquad \text{ou} \qquad x \in \mathbb{R}_+$$

- lorsque la fonction contient un ou plusieurs logarithmes
  Exemple : $\ln(x)$ x doit être supérieur à zéro !

  $$\text{ED} : x \in]\,0\,;\,\infty\,[\qquad \text{ou} \qquad x \in \mathbb{R}_+^*$$

3. Autrement dit, **ED** = ensemble des éléments de **D** qui possèdent une image dans **E** par la fonction *f*.

Ces différentes situations peuvent se combiner, comme le montrent les exemples ci-après :

Exemple 6.5

Déterminer l'ED de la fonction suivante : $f(x) = \dfrac{13}{x-5}$

Solution

Il faut que $x-5 \neq 0$, c'est-à-dire $x \neq 5$. Ainsi :

Conclusion ED : $x \in \mathbb{R} \setminus \{5\}$

Exemple 6.6

Déterminer l'ED de la fonction suivante : $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x^2-4}$

Solution

- d'une part : $x \geq 0$ **ET**
- d'autre part : $x^2-4 \neq 0$, c'est-à-dire $x \neq \pm 2$

Conclusion ED : $x \in [\,0\,;\,2\,[\,\cup\,]\,2\,;\,\infty\,[$ ou $x \in \mathbb{R}_+ \setminus \{2\}$

Exemple 6.7

Déterminer l'ED de la fonction suivante : $f(x) = \dfrac{10}{\sqrt{x-3}}$

Solution

- d'une part : $x-3 \geq 0$ c'est-à-dire $x \geq 3$ **ET**
- d'autre part : $\sqrt{x-3} \neq 0$, c'est-à-dire $x \neq 3$

Conclusion ED : $x \in]\,3\,;\,\infty\,[$ ou simplement $x > 3$

Exemple 6.8

Déterminer l'ED de la fonction suivante : $f(x) = \ln(\sqrt{x}+1)$

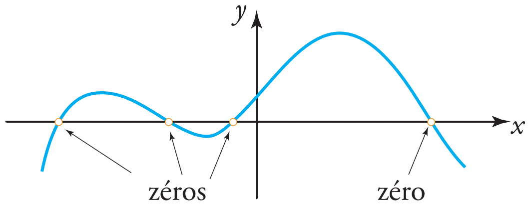
Solution

- d'une part : $x \geq 0$ **ET**
- d'autre part : $\sqrt{x}+1 \geq 0$, ce qui est toujours le cas !

Conclusion ED : $x \in [\,0\,;\,\infty\,[$ ou simplement $x \geq 0$

6.2.2 Zéros d'une fonction

On appelle **zéro** d'une fonction, un nombre a tel que $f(a) = 0$. L'ensemble des zéros de $f(x)$ correspond à l'ensemble des points où le graphe rencontre l'axe des x. Déterminer l'ensemble des zéros c'est donc résoudre l'équation $f(x) = 0$



Exemple 6.9

Trouver les zéros de la fonction $f(x) = x^3 - x^2 - 9x + 9$

Solution

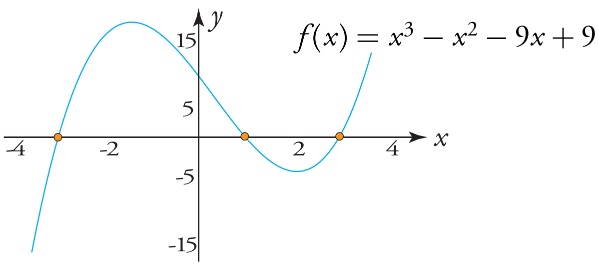
Il s'agit de résoudre $x^3 - x^2 - 9x + 9 = 0$, une fonction du $3^{\text{ème}}$ degré. Pour résoudre cette équation, on peut décomposer $f(x)$ en produit de facteurs.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - x^2 - 9x + 9 = 0 \\ &= x^2(x-1) - 9(x-1) = 0 \\ &= (x-1)(x^2-9) = 0 \\ &= (x-1)(x-3)(x+3) = 0 \end{aligned}$$

Comme le produit de facteurs est égal à 0, on peut dire que chaque facteur pris individuellement est égal à 0. Ainsi :

- $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$
- $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$
- $x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$

Les zéros de la fonction sont donc : $x = -3$, $x = 1$ et $x = 3$.



6.2.3 Fonctions composées

Une fonction **composée** $f \circ g$ de deux fonctions f et g est définie par :

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

✎ Cette nouvelle fonction peut avoir un domaine de définition différent de f et g.

Exemple 6.10

Soit la fonction $f(x) = \dfrac{3}{x}$ et la fonction $g(x) = 2x - 1$.

(a) Déterminer la fonction composée $h(x) = (f \circ g)(x)$ ainsi que son domaine de définition.

(b) Déterminer la fonction composée $k(x) = (g \circ f)(x)$ ainsi que son domaine de définition.

Solution

(a) On calcule $h(x)$ comme suit :

$$h(x) = f(g(x)) = \frac{3}{g(x)} = \frac{3}{2x-1}$$

L'ensemble de définition de h est le suivant : $\text{ED} = \mathbb{R} \setminus \{1/2\}$

(b) On calcule $k(x)$ comme suit :

$$k(x) = g(f(x)) = 2 \cdot f(x) - 1 = 2\frac{3}{x} - 1 = \frac{6}{x} - 1$$

L'ensemble de définition de k est le suivant : $\text{ED} = \mathbb{R}^*$

✎ Une fonction peut aussi s'exprimer sous la forme d'une fonction composée.

Exemple 6.11

Exprimer $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ comme une fonction composée.

Solution

On peut considérer par exemple $g(x) = x^2 - 4$ et $k(x) = \sqrt{x}$. Ainsi :

$$f(x) = k(g(x)) = \sqrt{x^2 - 4}$$

6.2.4 Réciproque d'une fonction

Une fonction f fait correspondre à x un élément y. Mais réciproquement, existe-t-il une autre fonction g qui à y fasse correspondre x ? Autrement formulé, existe-t-il une fonction g qui nous ramène au point de départ ? Si c'est le cas, cette fonction est appelée **fonction réciproque**.

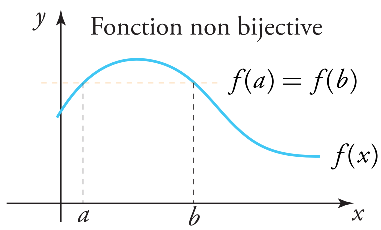
Une fonction f admet une fonction **réciproque** notée f^{-1} si :

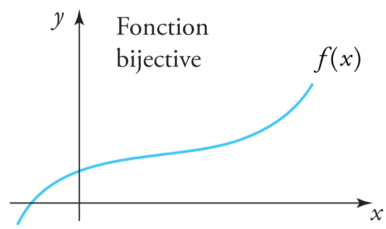
$$f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$$

- Le domaine de définition de f est alors égal au domaine image de f^{-1}.
- Le domaine de définition de f^{-1} est alors égal au domaine image de f.

Pour qu'une fonction f admette une fonction réciproque f^{-1}, il faut que f soit **bijective**, c'est-à-dire que pour chaque valeur différente x il y ait des valeurs $f(x)$ différentes.

Cette situation se réalise si la fonction f est soit croissante soit décroissante en tout point de son domaine de définition, c'est-à-dire qu'aucune droite horizontale ne coupe plus d'une fois son graphe.





Pour déterminer f^{-1} on peut procéder ainsi :

1. Faire le test de la droite horizontale pour voir si f a une fonction inverse.
2. Remplacer $f(x)$ par y
3. Résoudre par rapport à x
4. Interchanger les x et les y
5. Remplacer y par $f^{-1}(x)$
6. Vérifier que $f^{-1}(f(x)) = f(f^{-1}(x)) = x$

Exemple 6.12

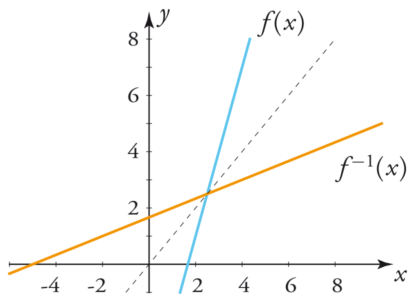
Rechercher la fonction réciproque de $f(x) = 3x - 5$

Solution

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x-5 && \text{Fonction originale toujours croissante sur } \mathbb{R} \\ y &= 3x-5 && \text{Remplacer } f(x) \text{ par } y \\ x &= \frac{y+5}{3} && \text{Résoudre par rapport à } x \\ y &= \frac{x+5}{3} && \text{Interchanger les } x \text{ et les } y \\ f^{-1}(x) &= \frac{x+5}{3} && \text{Remplacer } y \text{ par } f^{-1}(x) \end{aligned}$$

On peut vérifier que :

- $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(3x-5) = \dfrac{(3x-5)+5}{3} = x$
- $f(f^{-1}(x)) = f\left(\dfrac{x+5}{3}\right) = 3\left(\dfrac{x+5}{3}\right) - 5 = x$

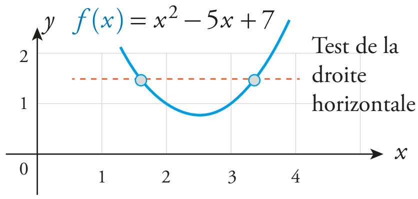


Exemple 6.13

Rechercher la fonction réciproque de $f(x) = x^2 - 5x + 7$

Solution

La fonction n'étant pas bijective elle n'admet pas de réciproque.

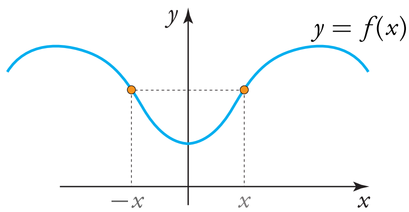


6.2.5 Notion de parité

On dit qu'une fonction $f(x)$ est **paire**, si, pour toute valeur de $x \in$ ED on a :

$$f(-x) = f(x)$$

Dans ce cas, le graphe de la fonction est symétrique par rapport à l'axe des y.



On dit qu'une fonction $f(x)$ est **impaire**, si, pour toute valeur de $x \in$ ED on a :

$$f(-x) = -f(x)$$

Dans ce cas, le graphe de la fonction est symétrique par rapport à l'origine.

Exemple 6.14

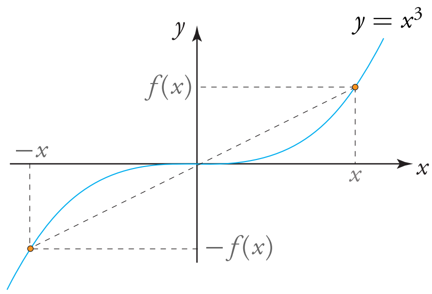
Déterminer la parité des fonctions suivantes :

(a) $f(x) = x^2$ **(b)** $f(x) = x^3$ **(c)** $f(x) = x + 1$

Solution

(a) $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$: La fonction est paire.

(b) $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$: La fonction est impaire.



(c) $f(-x) = -x + 1 \neq f(x) \neq -f(x)$: La fonction n'est ni paire, ni impaire.

Exercices d'application de la section 6.2

19 [Ensemble de définition] Donner l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

(a) $f(x) = 12$ **(b)** $f(x) = x + \frac{1}{x}$ **(c)** $f(x) = \frac{8}{5-x}$

20 [Ensemble de définition] Donner l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

(a) $f(x) = -1000$ **(b)** $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ **(c)** $f(x) = x^{-3}$

21 [Ensemble de définition] Donner l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

(a) $f(x) = \frac{3}{(x-1)(x+1)}$ **(b)** $g(p) = \frac{3p}{p(p+4)}$ **(c)** $g(x) = \frac{8}{\frac{1}{x-2}+1}$

22 [Ensemble de définition] Donner l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

(a) $f(x) = \frac{1}{x(1+x)} + \frac{1}{x+2}$ **(c)** $L(p) = \left(\frac{1}{p+3} - 3\right)^{-1}$

(b) $f(x) = x^{-1} + x^{-2}$

23 [Ensemble de définition] Donner l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

(a) $f(x) = \frac{5}{x} - \frac{3x}{x^2-1}$ **(c)** $K(p) = \frac{112}{p^2+1}$

(b) $p(x) = \frac{6}{x} - \frac{7}{x^2} + \frac{8}{x^2-1}$

24 [Ensemble de définition] Donner l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

(a) $f(x) = \frac{3x-5}{4x^2-3x}$ **(b)** $S(K) = \frac{8+K^2}{K^2+7}$ **(c)** $f(x) = \frac{1}{\frac{x}{2-x} - \frac{x}{x-3}}$

25 [Ensemble de définition] Donner l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

(a) $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$ **(b)** $g(x) = \sqrt{2x-2}$ **(c)** $h(x) = \sqrt{x+17} + \sqrt{x}$

26 [Ensemble de définition] Donner l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

(a) $f(t) = \sqrt{t-1} + t$ **(c)** $g(x) = \sqrt[5]{8-x} - \sqrt{x-4}$

(b) $f(x) = \sqrt{2-x} + \sqrt{x-3}$

27 [Zéros] Déterminer les zéros des fonctions suivantes :

(a) $f(x) = \dfrac{7x-8}{3}$

(b) $f(x) = \dfrac{21}{x+4}$

(c) $f(x) = 5\sqrt{x-3} + x\sqrt{x-3}$

28 [Zéros] Déterminer les zéros des fonctions suivantes :

(a) $g(x) = x^4 - 16$

(b) $h(x) = \dfrac{x^2-9x}{9-x^2}$

(c) $f(x) = x^3 + x^2 - 25x - 25$

29 [Composition] On donne $f(x) = x + 4$ et $g(x) = 3x$ Trouver

(a) $f(g(3))$ **(b)** $g(f(0))$ **(c)** $f(f(-1))$ **(d)** $g(f(x))$

30 [Composition] On donne $f(x) = 2x - 3$ et $g(x) = 3x + k$ Trouver

(a) $f(g(x))$

(b) $g(f(x))$

(c) k, si $f(g(x)) = g(f(x))$

31 [Composition] Soit $z(\alpha) = \alpha^2 - 1$ et $u(\beta) = 3\beta$. Déterminer

(a) $z(u(\alpha))$ **(b)** $u(z(\alpha+1))$ **(c)** $z(2u(x))$ **(d)** $u(\beta \cdot z(\beta))$

32 [Composition] Soit f, g et h, 3 fonctions données par :

$$f(x) = x - 2, \qquad g(x) = x^2 \qquad \text{et} \qquad h(x) = 2^x$$

(a) Calculer $f \circ g \circ g$ et $h \circ g \circ h$

(b) Résoudre l'équation $(f \circ g \circ h)(x) = 0$

(c) Exprimer sous une autre forme : $\underbrace{g \circ g \circ g \circ g \ldots g}_{n \text{ fois}}$

33 [Réciproque] Trouver les fonctions réciproques.

(a) $f(x) = -\frac{5}{2}x - 3$

(b) $P(t) = \dfrac{t-7}{4}$

(c) $f(a) = \dfrac{a^3}{2}$

(d) $g(x) = \dfrac{2x+3}{x-1}$

34 [Réciproque] On donne $p(x) = \dfrac{2x}{2x+2}$ et $q(x) = \dfrac{x}{3x-3}$.
Calculer $h(x) = (q \circ p)$ puis $h^{-1}(x)$.

35 [Réciproque] On donne quelques valeurs d'une fonction bijective :

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	4	6	2	5	0	1

Calculer :

(a) $f^{-1}(0)$

(b) $f^{-1}(f(2))$

(c) $f^{-1}(f^{-1}(6))$

(d) $f^{-1}(f(1)+f^{-1}(6))$

36 [Pizza] Chez Mario, la pizza tomate, mozzarella et basilic est vendue 14 frs. Toute garniture supplémentaire coûte 2 frs.

(a) Donner la fonction f permettant d'obtenir le prix de la pizza avec n garnitures.

(b) Exprimer f^{-1}. Que représente cette fonction ?

37 [Parité] Déterminer la parité des fonctions suivantes :

(a) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2-1}$

(b) $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$

(c) $f(x) = \left(ax^3 + bx\right)^{-1}$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^*$

38 [Parité] Déterminer la parité des fonctions suivantes :

(a) $f(x) = x^2 - 5x + 6$

(b) $f(x) = |x^2 - 1|$

(c) $f(x) = \dfrac{x^5 - x^3 - x}{x^6 - 1}$

39 [Axe de symétrie] Si, pour une fonction f et un nombre réel a, la relation suivante est vérifiée :

$$f(a-x) = f(a+x)$$

alors $x = a$ est un axe de symétrie de f.
Déterminer l'axe de symétrie de la fonction $f(x) = x^2 - 2x - 3$

40 [Point fixe] On dit que x est un point fixe de f si $f(x) = x$. Déterminer les points fixes des fonctions suivantes :

(a) $f(x) = 3x - 5$

(b) $f(x) = x^2$

(c) $f(x) = x^2 + x - 4$

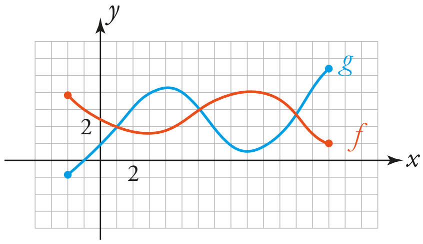
(d) $f(x) = \dfrac{4}{5}x - \dfrac{5}{4}$

(e) $f(x) = 1/x$

(f) $f(x) = \dfrac{8x}{x+1}$

6.3 Problèmes et exercices de synthèse

41 [Deux fonctions] On donne les fonctions suivantes :

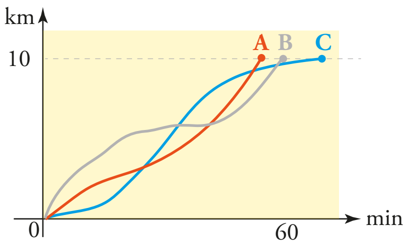


(a) Quelle valeur est plus grande, $f(0)$ ou $g(0)$?

(b) Pour quelles valeurs de x, $f(x) = g(x)$?

(c) Pour quelles valeurs de x, $f(x) \leq g(x)$?

42 [Course] Trois amis ont participé aux 10 km de Lausanne.



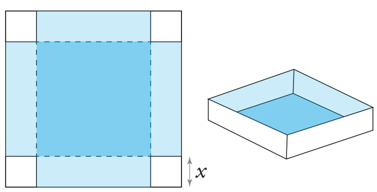
(a) Qui est arrivé en premier ?

(b) Est-ce que tous les 3 ont fini la course ?

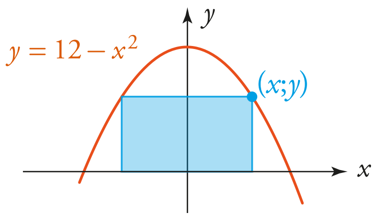
(c) Expliquer en quelques mots la course de B.

43 [Exprimer sous forme de fonction] La différence de deux nombres est égale à 12. Exprimer leur produit P en fonction d'un des deux nombres.

44 [Exprimer sous forme de fonction] On fabrique une boîte sans couvercle avec un morceau de carton carré de côté a. Pour cela, on enlève des carrés égaux de côté x aux 4 coins et on relève ensuite le carton verticalement pour fermer les côtés. Exprimer le volume de la boîte en fonction de x.

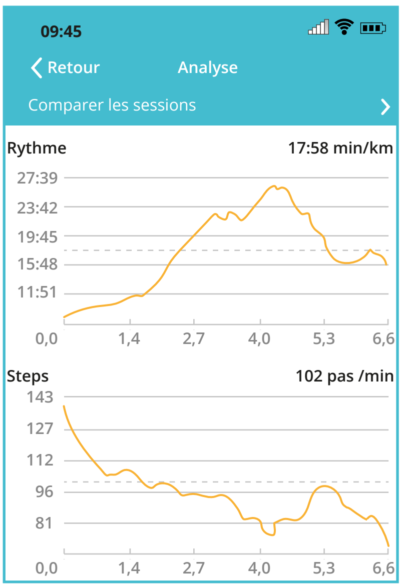


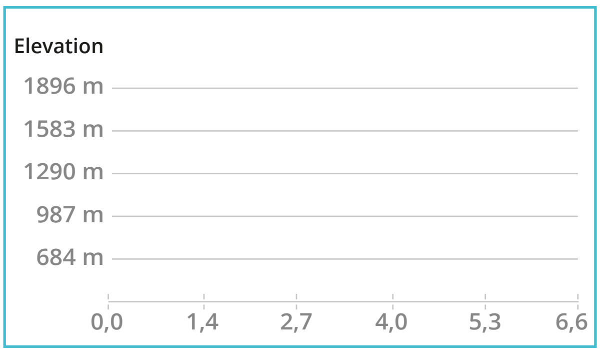
45 [Exprimer sous forme de fonction] Exprimer l'aire du rectangle ci-après en fonction de x.



46 [Exprimer sous forme de fonction] Un rectangle est inscrit dans un demi cercle de rayon 20. Exprimer le périmètre P de ce rectangle en fonction de sa longueur x.

47 [Défi] Jean-Pierre est un bon marcheur. Lors d'une ballade estivale son application mobile Runkeeper lui a donné les informations ci-après. Faire un commentaire puis compléter le dernier graphique selon les informations à disposition.





Chapitre 7

Fonctions affines

Objectifs du chapitre

- représenter le graphe d'une fonction du premier degré sous la forme d'une droite dans le plan cartésien.
- interpréter géométriquement les coefficients de la fonction (pente et ordonnée à l'origine).
- établir l'équation d'une droite.
- appliquer les fonctions du premier degré dans un contexte économique.

7.1 Droite et fonction affine

7.1.1 Fonction affine

On appelle **fonction affine**, une fonction définie par :

$$f(x) = ax + b$$

où les nombres a et b sont des réels quelconques.

Une fonction affine [1] est représentée par une droite (appelée aussi **courbe représentative**), dont a exprime la **pente** (ou coefficient directeur) et b l'**ordonnée** à l'origine.

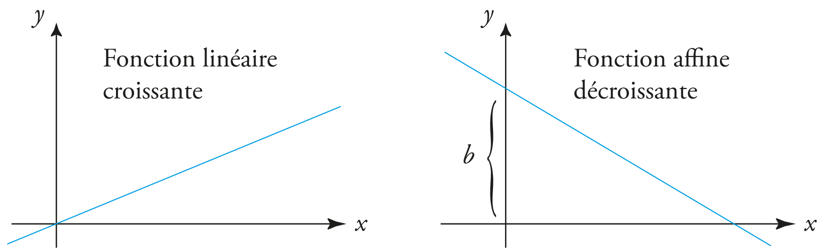
1. En principe on parle d'équation d'une droite lorsque celle-ci s'écrit sous sa forme cartésienne ou linéaire : $ax + by = c$ ou encore $y = ax + b$ et de fonction affine lorsque la droite est représentée par une fonction $f(x) = ax + b$. Ainsi, $x = 3$ représente l'équation d'une droite verticale passant par le point $(3; 0)$ alors que cette droite ne peut s'exprimer sous la forme d'une fonction de x.

Cas particuliers

- Une fonction affine dont la valeur b égale à zéro est appelée **fonction linéaire**.
- Une fonction affine dont la pente a est nulle est appelée **fonction constante**.

Si la valeur a de la fonction affine est positive, alors la droite est **croissante**, elle «monte». Dans le cas contraire, elle est **décroissante** ou «descend».

Exemple 7.1

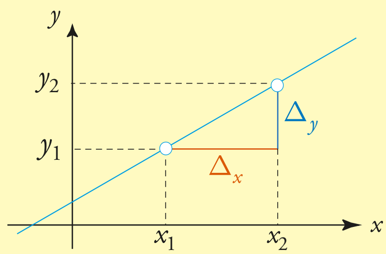


7.1.2 Pente d'une droite

La pente d'une droite donnée par $y = ax + b$ est le rapport $a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ où Δx est l'accroissement selon l'axe des x et Δy est l'accroissement selon l'axe des y.

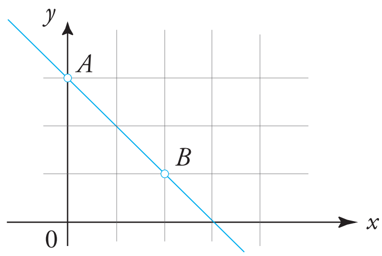
Pour trouver la pente d'une droite, on choisit sur cette droite 2 points $(x_1; y_1)$ et $(x_2; y_2)$, puis on calcule :

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



Exemple 7.2

Calculer la pente de la droite représentée par le graphe ci-après :



Solution

Le point A a comme coordonnées $(0;3)$ et le point B les coordonnées $(2;1)$. Ainsi :

$$a = \frac{1-3}{2-0} = \frac{-2}{2} = -1$$

Remarque

La pente d'une droite s'exprime souvent en pour-cent comme c'est le cas des panneaux routiers :

Dans le cas d'une pente de 10%, cela signifie que sur une distance horizontale de 100, on monte d'une hauteur de 10. Attention, une pente de 100%, n'est pas une pente verticale mais une pente de 45°.

7.1.3 Droite passant par deux points

Pour déterminer l'équation $y = ax + b$ ou la fonction $f(x) = ax + b$ d'une droite passant par deux points $A(x_1; y_1)$ et $B(x_2; y_2)$, on commence par calculer la pente entre ces deux points :

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

puis

$$b = y_1 - ax_1 \quad \text{ou} \quad b = y_2 - ax_2$$

Exemple 7.3

Déterminer l'équation de la droite $y = ax + b$ passant par les points $(1; 5)$ et $(3; 9)$

Solution

La pente est donnée par :

$$a = \frac{9-5}{3-1} = \frac{4}{2} = 2$$

L'ordonnée à l'origine b par :

$$b = 5 - 2 \times 1 = 3 \quad \text{ou} \quad b = 9 - 2 \times 3 = 3$$

Ainsi l'équation de la droite s'écrit : $y = 2x + 3$

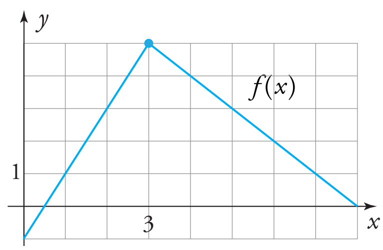
7.1.4 Fonction affine par morceaux

Une fonction est dite affine par morceaux si elle est définie sur plusieurs intervalles disjoints par des fonctions affines.

Exemple 7.4

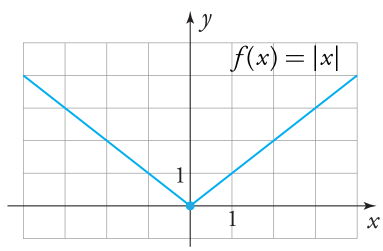
La fonction f définie ci-dessous est une fonction affine par morceaux :

$$f(x) = \begin{cases} -x + 8, & \text{si } x \geq 3 \\ 2x - 1, & \text{si } x < 3 \end{cases}$$



La fonction **valeur absolue** est une représentation très courante de la fonction affine définie par morceaux comme suit :

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$



7.1.5 Droites particulières

Droite parallèle

Deux droites sont parallèles si leur pente est identique.

Exemple 7.5

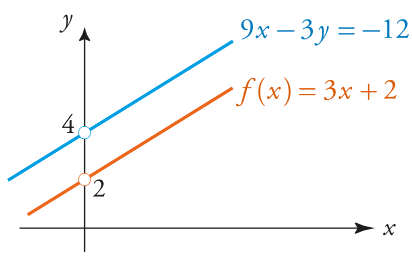
Montrer que les droites suivantes sont parallèles :

$$f(x) = 3x + 2 \quad \text{et} \quad 9x - 3y = -12$$

Solution

L'équation de la seconde droite peut être transformée comme suit :

$$\begin{aligned} 9x - 3y &= -12 \\ 3y &= 9x + 12 \\ y &= 3x + 4 \end{aligned}$$



Les deux droites ont la même pente $a = 3$.

Droite perpendiculaire

Deux droites de pente m_1 et m_2 sont perpendiculaires si

$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

Exemple 7.6

Montrer que les droites d'équations $2x+3y=1$ et $6x-4y-1=0$ sont perpendiculaires.

Solution

Écrites sous la forme

$$y=-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3} \quad \text{et} \quad y=\frac{3}{2}x-\frac{1}{4}$$

les pentes respectives sont :

$$m_1=-\frac{2}{3} \quad \text{et} \quad m_2=\frac{3}{2}$$

Comme $m_1 \cdot m_2 = -\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2} = -1$, les droites sont bien perpendiculaires.

Exercices d'application de la section 7.1

1 [Reconnaître une fonction affine] Est-ce que les fonctions suivantes sont des fonctions affines ?

(a) $f(x)=\dfrac{2x-6}{3}$ **(b)** $g(x)=(x-3)(4-x)+x^2$ **(c)** $p(K)=K^2x+3$

2 [Reconnaître une fonction affine] Est-ce que les fonctions suivantes sont des fonctions affines ?

(a) $f(x)=\dfrac{3}{2x}-7$ **(b)** $S(t)=\dfrac{\omega t}{2}$ **(c)** $A(h)=\dfrac{b_1+b_2}{2}\times h$

3 [Pente d'une droite] Quelle est la pente des droites suivantes ?

(a) $f(x)=\dfrac{4-7x}{6}$ **(b)** $ax+by=c$ **(c)** $3x-5y+6=0$

4 [Pente d'une droite] Quelle est la pente des droites suivantes ?

(a) $q(p)=-20p+b$ **(b)** $g(u)=5u-5+\alpha u$ **(c)** $V(h)=\pi\cdot R^2+h$

5 [Droite passant par un point] Dire si la fonction affine passe par le point $P(1/3;2/3)$

(a) $f(x) = -0,7x+9$ **(b)** $f(x) = \dfrac{2x}{3}$ **(c)** $f(x) = \dfrac{x+3}{5}$

6 [Droite passant par un point] Dire si les points suivants appartiennent à la droite d'équation $y = -\dfrac{3}{5}x - \dfrac{17}{5}$

(a) $(0;0)$ **(b)** $(1;-4)$ **(c)** $(-4;-1)$

7 [Évaluer] Si $f(x) = 6x-4$, évaluer les expressions :

(a) $f(-2)-2f(2)$ **(b)** $f(-a)-f(a)$ **(c)** $f(x+\Delta_x)-f(x)$

8 [Évaluer] Si $f(x) = \dfrac{x-2}{3}$, évaluer les expressions :

(a) $f(3a/2-1)$ **(b)** $f(f(x))$ **(c)** $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

9 [Trouver une fonction affine] Trouver une fonction affine...

(a) dont le graphe passe par les points $(4,3)$ et $(9;2)$

(b) telle que $f(-2) = -4$ et de pente $1/2$.

(c) de pente $-0,4$ et passant par le point $(8;-1)$

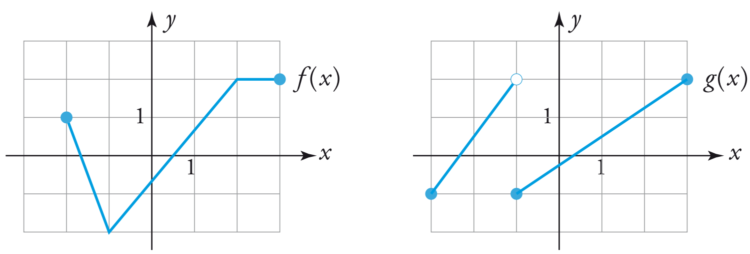
10 [Trouver une fonction affine] Trouver une fonction affine...

(a) dont le graphe passe par les points $(-1,1)$ et $(7;3)$

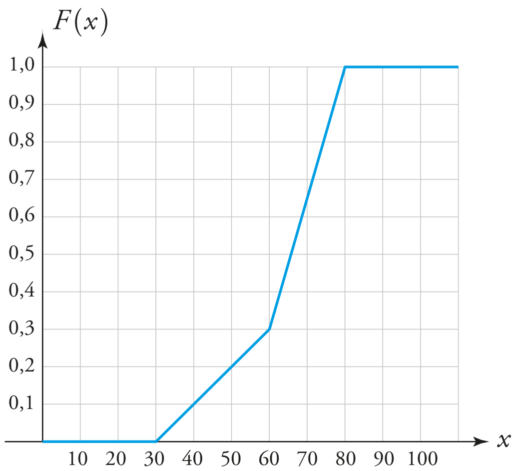
(b) telle que $f(2,5) = 2$ et ayant une pente négative de 120%.

(c) de pente nulle et passant par le point $(b;a)$

11 [Fonction affine par morceaux] Déterminer $f(x)$ et $g(x)$.



12 [Fonction affine par morceaux] On donne le graphe d'une fonction de répartition :



(a) Écrire la fonction affine par morceaux correspondant à ce graphe.

(b) Calculer la médiane, c'est-à-dire la valeur de x, telle de $F(x) = 0,5$.

13 [Intersection avec les axes] Trouver les coordonnées des points d'intersection avec les axes.

(a) $f(x) = \dfrac{6x-3}{2}$ **(b)** $f(x) = mx + h$ **(c)** $ax + by + c = 0$

14 [Intersection avec les axes] Trouver les coordonnées des points d'intersection avec les axes.

(a) $f(t) = \sqrt{2}t - \sqrt{2}$ **(b)** $f(x) = \dfrac{bx-c}{\sqrt{5}}$ **(c)** $5x - 6y + 1 = 0$

15 [Droite parallèle et perpendiculaire] Trouver l'équation...

(a) ... de la droite parallèle à $y = 5x + 2$ passant par l'origine.

(b) ... de la droite parallèle à $-2x + 9y - 22 = 0$ passant par $(3;1)$.

(c) ... de la droite perpendiculaire à $x + 2y = 12$ passant par $(3;1)$.

16 [Droite parallèle et perpendiculaire] On donne deux points $A(5;3)$ et $B(11;6)$. On appelle d_1 la droite passant par ces deux points.

(a) Déterminer l'équation de la droite d_2 parallèle à d_1 passant par le point $(6;6)$.

(b) Déterminer l'équation de la droite d_3 perpendiculaire à d_1 passant par le point $(6;6)$.

(c) Déterminer le point d'intersection entre d_1 et d_3.

7.2 Applications économiques

7.2.1 Tendance linéaire

Méthode basée sur 2 points

À partir d'un certain nombre d'observations (ou points), on choisit deux observations qui permettent de rendre compte de la tendance linéaire d'un phénomène. On détermine ensuite la fonction affine passant par ces deux points.

Exemple 7.7

Le tableau ci-après indique les profits (en millions de frs) réalisés par une entreprise pour les années 1, 4, 6 et 9 :

Année	1	3	7	9
Profit	2	2	5	6

(a) Déterminer la tendance linéaire en se basant sur les années 1 et 9.

(b) Utiliser cette tendance linéaire pour estimer le profit pour l'année 10.

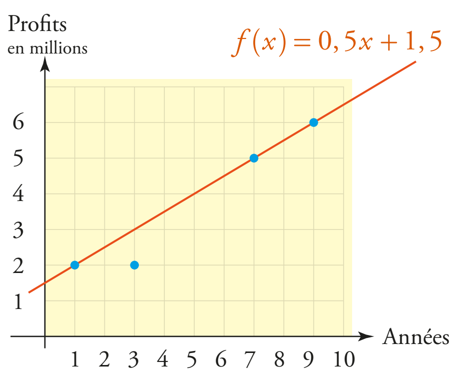
Solution

(a) La fonction affine passant par les points $(1;2)$ et $(9;6)$ est :

$$f(x) = 0,5x + 1,5$$

(b) L'estimation du profit pour l'année 10 est donc :

$$f(10) = 0,5 \times 10 + 1,5 = 6,5 \text{ millions.}$$



Méthode des moindres carrés

L'idée de cette méthode consiste à faire passer une droite «au mieux» à travers un ensemble de points. On appelle cette droite, une **droite de régression** linéaire. La formule permettant de déterminer les paramètres a et b de la fonction affine $f(x) = ax + b$ est la suivante :[2]

Droite de régression linéaire : $f(x) = ax + b$

$$a = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\cdot\overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2} \qquad \text{et} \qquad b = \overline{y} - a\cdot\overline{x}$$

Exemple 7.8

Reprenons le tableau des profits de l'exemple précédent.

Année	1	3	7	9
Profit	2	2	5	6

(a) Déterminer la droite de régression linéaire en se basant sur la méthode des moindres carrés.

(b) Utiliser cette tendance linéaire pour estimer le profit pour l'année 10.

Solution

(a) On dresse le tableau suivant permettant de calculer tous les éléments utiles :

	x	y	x^2	y^2	xy
	1	2	1	4	2
	3	2	9	4	6
	7	5	49	25	35
	9	6	81	36	54
Total	20	15	140	69	97

Ainsi :

- $\overline{x} = 20/4 = 5$ (moyenne des x, càd : $\overline{x} = (1+3+7+9)/4$)
- $\overline{y} = 15/4 = 3,75$ (moyenne des y)
- $\overline{x^2} = 140/4 = 35$ (moyenne des x^2)
- $\overline{y^2} = 69/4 = 17,25$ (moyenne des y^2)
- $\overline{xy} = 97/4 = 24,25$ (moyenne des xy)

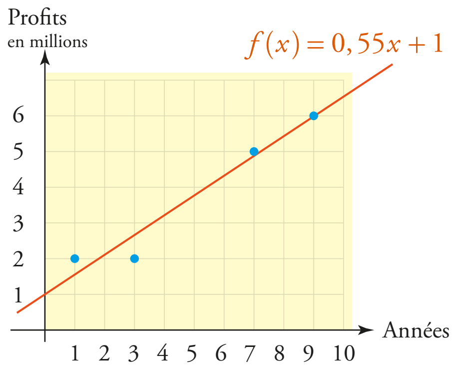
$$a = \frac{24,25 - 5\times 3,75}{35 - 5^2} = 0,55 \qquad \text{et} \qquad b = 3,75 - 0,55\times 5 = 1$$

Ainsi, la tendance linéaire s'exprime par : $f(x) = 0,55x + 1$

2. Cette formule est largement développée au chapitre 25.

(b) L'estimation du profit pour l'année 10 est donc :

$$f(10) = 0,55 \times 10 + 1 = 6,5 \text{ millions.}$$



Méthode des moindres carrés
Aperçu de la méthode des moindres carrés comme outil de tendance linéaire.

7.2.2 Seuil de rentabilité

Le seuil de rentabilité (**point mort** ou break-even en anglais) est généralement défini comme le chiffre d'affaires minimum à partir duquel un produit (ou une activité d'une entreprise) devient rentable.

Pour définir le seuil de rentabilité, on représente sur un graphique la droite des **coûts** C ainsi que la droite des **revenus** R en fonction des quantités produites x.

- Les coûts de production sont en principe composés d'une partie de coûts fixes ainsi que de coûts variables proportionnels à la quantité produite. Une fonction de coût pourra donc naturellement s'exprimer par une fonction affine de la forme :

$$C(x) = ax + b$$

où b représente la part de coûts fixes.

- Le revenu, lui, est en général proportionnel à la quantité vendue. On peut alors représenter la courbe de revenu par une fonction linéaire :

$$R(x) = cx$$

Exemple 7.9

Considérons un vendeur ambulant de roses ayant des coûts fixes de 20 frs par jour. Il achète ses roses à 2 fr la pièce et les revend à 6 frs. Calculer le nombre de roses à vendre par jour pour atteindre le seuil de rentabilité.

Solution

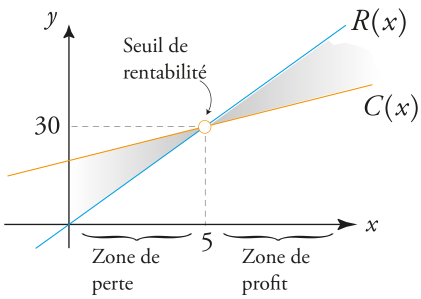
On détermine les éléments suivants :

- x le nombre de roses vendues
- $C(x) = 2x + 20$ coûts de production
- $R(x) = 6x$ montant des ventes

Le seuil de rentabilité se calcule par :

$$\begin{aligned} C(x) &= R(x) \\ 2x + 20 &= 6x \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Le vendeur de roses doit donc vendre plus de 5 roses pour faire du profit.



7.2.3 La loi de l'offre et de la demande

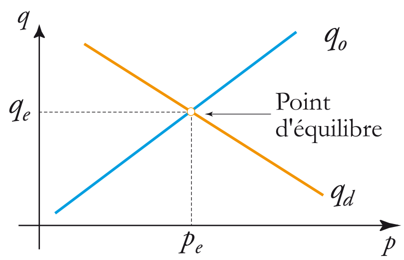
La loi de l'offre et la demande permet d'expliquer le prix d'un bien (que ce soit le travail, main d'oeuvre ou un bien quelconque).

L'offre d'un bien (proposé par les producteurs/entreprises) est une fonction croissante du prix. En effet, plus le prix est élevé, plus les producteurs seront intéressés pour en vendre le plus possible.

La demande d'un bien (venant du consommateur), est une fonction décroissante du prix. Forcément, plus le prix est élevé, moins il y a de personnes prêtes à payer ce prix. Du coup, la quantité demandée est moindre.

Puisque ces courbes sont, l'une croissantes et l'autre décroissantes, elles se croisent en un point appelé **point d'équilibre**, qui détermine à la fois la quantité produite/vendue et le prix de vente. Dans une première approche on considère ici des fonctions affines. On définit ainsi :

- ► q_o courbe affine de l'offre
- ► q_d courbe affine de la demande



Exemple 7.10

Si l'offre d'un produit est modélisée par la droite $q_o = 3p - 15$ et si la demande pour ce même produit suit la droite d'équation $q_d = 245 - 2p$, déterminer le prix et la quantité d'équilibre.

Solution

$$q_o = q_d \quad \text{Situation à l'équilibre}$$
$$3p - 15 = 245 - 2p \quad \text{Résoudre par rapport à } p$$
$$p = 52 \quad \text{Prix d'équilibre}$$

Pour un prix de 52, la quantité échangée q sera de :

$$q = 3 \times 52 - 15 = 245 - 2 \times 52 = 141 \text{ unités}$$

7.2.4 Droite de budget

Une droite de **budget** indique toutes les combinaisons de deux biens pour lesquelles la dépense totale est égale au revenu R.

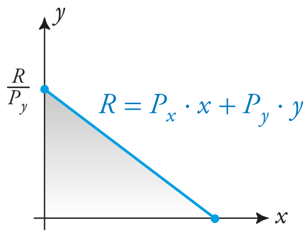
Concrètement, si un revenu donné R est totalement investi dans deux biens X et Y dont les quantités et prix respectifs sont :

- ► x et P_x pour le bien X et
- ► y et P_y pour le bien Y,

alors l'équation de la droite de budget s'écrit : [3]

3. On devrait parler plus précisément de demi droite car les quantités x et y sont positives.

$$R = x \cdot P_x + y \cdot P_y \qquad \text{ou encore} \qquad y = -\frac{P_x}{P_y} \cdot x + \frac{R}{P_y}$$



Exemple 7.11

Un consommateur dispose de 120 frs pour acheter un certain nombre x de tablettes de chocolat au prix de 3 frs l'unité et un certain nombre y de paquets de biscuits à 5 frs le paquet. En supposant que les biens sont parfaitement sécables,

(a) tracer la droite de budget exprimant toutes les possibilités de consommation avec le budget donné

(b) que devient la droite de budget initial si le budget diminue de 25% ?

Solution

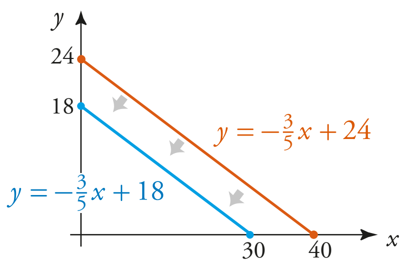
(a) La fonction de la droite s'écrit : $3x + 5y = 120$. En résolvant par rapport à y on trouve :

$$y = -\frac{3}{5}x + 24$$

(b) Si le budget diminue de 25%, le nouveau budget se monte à $120 \times 0,75 = 90$. La fonction de la droite s'écrit : $3x + 5y = 90$, c'est-à-dire :

$$y = -\frac{3}{5}x + 18$$

On constate que la diminution du budget entraîne un déplacement parallèle de la droite de budget vers la gauche.



Exercices d'application de la section 7.2

17 [Tendance linéaire] On donne les points suivants :

Points	A	B	C	D	E
x	1	3	9	12	15
y	10	8	6	5	6

(a) Déterminer la droite de tendance linéaire en se basant sur les points B et E.

(b) Déterminer la droite de régression linéaire.

(c) Représenter graphiquement les points ainsi que les deux droites d'ajustement.

(d) Selon les deux modèles d'ajustement, estimer la valeur de y si $x = 18$.

18 [Tendance linéaire] On donne les points suivants :

Points	A	B	C	D
x	8	10	26	32
y	18	14	12	12

(a) Déterminer la droite de tendance linéaire en se basant sur les points A et D.

(b) Déterminer la droite de régression linéaire.

(c) Représenter graphiquement les points ainsi que les deux droites d'ajustement.

(d) Selon les deux modèles d'ajustement, estimer la valeur de x si $f(x) = 15$.

19 [Seuil de rentabilité] Le coût total de production $C(x)$ en fonction des quantités x vendues est donné par : $C(x) = 0,5x + 40\,000$. Si chaque unité est vendue au prix de 13 frs,

(a) quel est le seuil de rentabilité ?

(b) calculer la date du point mort pour un chiffre d'affaire annuel de 62 400.

20 [Coûts fixes et variables] Deux entreprises sont en concurrence sur un même type de produit.

- L'entreprise A a des charges fixes de 600 000 et des coûts variables estimés à $200x$.
- L'entreprise B a des charges fixes de 400 000 et des coûts variables estimés à $250x$.

Jusqu'à quel niveau de production x l'entreprise B a-t-elle un coût total de production inférieur à l'entreprise A ?

21 [Offre et demande] Sur un marché, l'offre et la demande d'un produit sont données par :

$$q_{\text{offre}} = 25p + 400 \qquad \text{et} \qquad q_{\text{demande}} = -25p + 750$$

Déterminer le prix et la quantité d'équilibre et tracer, sur un même graphique, les courbes de l'offre et de la demande.

22 [Offre et demande] Sur un marché, on a mesuré l'offre et la demande d'un produit en fonction du prix de ce dernier :

Prix	Quantité demandée	Quantité offerte
3	8	4
9	2	6

En supposant que l'offre et la demande sont des fonctions affines, représenter graphiquement ces deux fonctions et déterminer le point d'équilibre.

23 [Droite de budget] On dispose d'un budget de 320 frs devant être alloué dans deux biens X et Y dont les prix respectifs sont :

- prix du bien X : 4 frs.
- prix du bien Y : 5 frs.

Dessiner sur un même graphique :

(a) la droite de budget.

(b) la droite de budget, si le prix du bien X a augmenté de 25%.

(c) la droite de budget, si le budget a augmenté de 25%.

24 [Droite de budget] On dispose d'un budget de 320 frs devant être alloué dans deux biens X et Y dont les prix respectifs sont :

- prix du bien X : 5 frs.
- prix du bien Y : 4 frs.

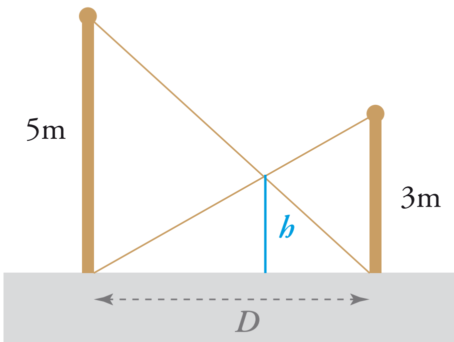
À partir d'une commande de 40 unités du bien X, on bénéficie d'une remise de 20% sur cet article.

Tracer la droite de budget en tenant compte de ces informations.

7.3 Problèmes et exercices de synthèse

25 [Pente d'une droite] Dans un parc d'attractions, une montagne russe a une première rampe de 300% de pente moyenne. Le point le plus haut est à 75 mètres du sol, et le plus bas à 3 mètres. Quelle est la distance horizontale entre ces deux points ?

26 [Hauteur d'intersection] Les deux poteaux ci-après sont séparés d'une distance D. Quelle est la hauteur h ?



27 [Vitesse] Un homme en bonne santé élimine en moyenne 0.15 d'alcool par heure. À minuit, Pierre a 1,30 d'alcool dans le sang. Encore lucide, il décide qu'il est temps d'arrêter de boire...

(a) À quelle heure son taux d'alcool sera-t-il de 0.5 ?

(b) À quelle heure n'aura-t-il plus d'alcool dans le sang ?

28 [Vitesse] Ligne Berne - Zurich : 125 km.

- Un train quitte Berne à 6 h. Il roule à 120 km/h.
- Un autre train quitte Zurich 30 minutes plus tard. Il roule à 140 km/h.

(a) Établir l'horaire du premier train.

(b) Donner l'horaire du deuxième train.

(c) Calculer l'heure du croisement.

(d) À quelle distance de Berne vont-ils se rencontrer ?

29 [Fonction de coût] Le prix d'un repas comprend des frais fixes tels que la location de la salle, ainsi que des frais variables en fonction du nombre de personnes qui y participent. Ainsi, le repas coûtera 1608 frs si 120 personnes y assistent, alors qu'il coûtera 3770 frs si 350 personnes y assistent.

(a) Exprimer le prix du repas P en fonction du nombre n de personnes qui y assistent.

(b) Trouver le prix du repas si 250 personnes y participent.

30 [Fonction de coût] Une compagnie produit des chaussures. Lorsque 30 chaussures sont produites, le coût total de production est de 325 frs. Lorsque 50 chaussures sont produites, le coût s'élève alors à 485 frs. Quelle est l'équation du coût C si celui-ci varie de façon linéaire en fonction du nombre de chaussures produites q ?

31 [Défi] Si $T_n(x) = T_{n-1}(x) + nx$, pour quelle valeur de x a-t-on $T_4(x) = 50$?

32 [Défi] Trouver 2 fonctions affines tel que $f(f(x)) = 9x - 8$.

Chapitre 8

Fonctions quadratiques

Objectifs du chapitre

- expliquer les différentes fonctions représentant une fonction quadratique.
- interpréter géométriquement les différentes représentations de la fonction (convexité, zéros, extremum, ordonnée à l'origine).
- établir l'équation d'une fonction quadratique.
- résoudre des problèmes de valeurs extrêmes.
- déterminer les intersections des graphes de fonctions.

8.1 Fonction quadratique

8.1.1 Introduction

On appelle une **fonction du second degré** ou **fonction quadratique** une fonction qui peut s'écrire sous une forme polynomiale telle que :

$f(x) = x^2$, $\quad g(x) = 3x^2 - 6x + 2$, $\quad$ ou $\quad p(z) = -z^2 + 3z$.

On appelle **forme générale** du second degré la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

où a, b et c sont des nombres réels ($a \neq 0$) appelés coefficients. a est le terme du second degré, b celui du premier degré et c le terme constant.

On appelle **forme canonique** du second degré, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = a(x-h)^2 + k$$

Pour une fonction du second degré, il est toujours possible de l'écrire soit sous sa forme canonique ou générale. On passe aisément d'une forme à l'autre par les relations suivantes :

$$h = -\frac{b}{2a} \quad \text{et} \quad k = \frac{4ac-b^2}{4a} = -\frac{\Delta}{4a}$$

Par conséquent, la fonction peut également s'écrire :

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

Exemple 8.1

Exprimer la fonction quadratique $f(x) = 2x^2 + 4x - 5$ sous sa forme canonique.

Solution

On calcule :

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac = 4^2 - 4(2)(-5) = 56 \\ h &= -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{(2)(2)} = -1 \\ k &= -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{56}{4(2)} = -7 \end{aligned}$$

Par conséquent, la forme canonique s'écrit :

$$f(x) = 2(x+1)^2 - 7$$

Exemple 8.2

Exprimer la fonction canonique $f(x) = 3(x+4)^2 + 2$ sous sa forme générale.

Solution

Il suffit d'effectuer et de réduire les termes semblables :

$$\begin{aligned} f(x) &= 3(x+4)^2 + 2 \\ &= 3(x^2 + 8x + 16) + 2 \\ &= 3x^2 + 24x + 50 \end{aligned}$$

On appelle **forme factorisée** du second degré, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

où x_1 et x_2 sont, **si elles existent**, les racines réelles de l'équation $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$.

Exemple 8.3

Déterminer l'équation générale de la parabole passant par le point $P(5;21)$ et ayant comme racines $x_1 = 4$ et $x_2 = -2$

Solution

En utilisant la forme factorisée, on peut immédiatement écrire :

$$f(x) = a(x-4)(x+2)$$

Sachant qu'au point $x = 5$, $f(x) = 21$, on peut écrire :

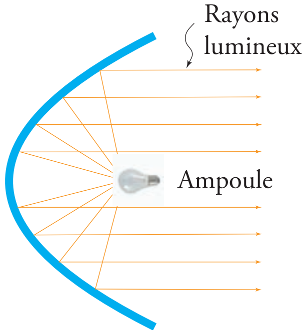
$$21 = a(5-4)(5+2)$$

En résolvant, on trouve $a = 3$. Au final, l'équation de la parabole s'écrit :

$$f(x) = 3(x-4)(x+2) = 3x^2 - 6x - 24$$

8.1.2 Représentation graphique

Les fonctions quadratiques, écrites sous les formes décrites plus haut sont représentées graphiquement par une **parabole**. De nombreuses applications économiques ou scientifiques reposent sur des fonctions de type parabolique. Les antennes paraboliques par exemple ou encore les phares des voitures utilisent les propriétés des paraboles pour maximiser la réception ou la diffusion.



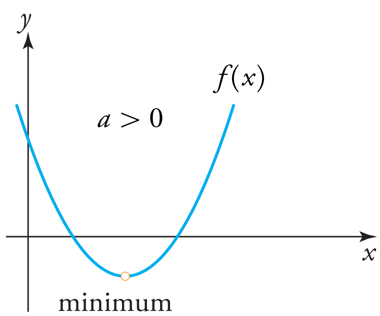
Équation parabolique et fonction quadratique
Comment obtenir la fonction canonique à partir de l'équation d'une parabole.

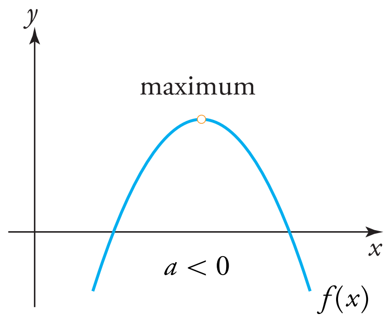
Une fonction parabolique est en forme de ∪ ou est dite **convexe** si $a > 0$. Dans ce cas, elle admet un **minimum**. Elle est dite concave ou en forme de ∩ si $a < 0$. Dans ce cas, elle admet un **maximum**.

Une fonction quadratique est symétrique de part et d'autre de son maximum ou minimum. La valeur de x permettant d'obtenir un **extremum** (minimum ou maximum) est donc située à mi-chemin entre les deux racines.

$$x = \frac{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}}{2} = \frac{-2b}{2a} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{b}{2a}$$

Ce résultat est confirmé par le calcul des dérivées et s'applique même si la fonction ne possède pas de zéros.

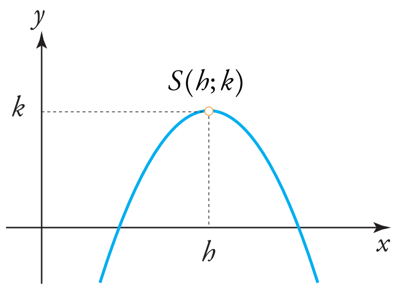


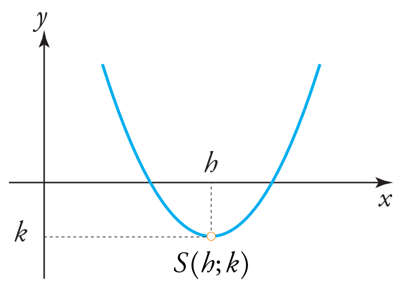


Avantages de la représentation canonique

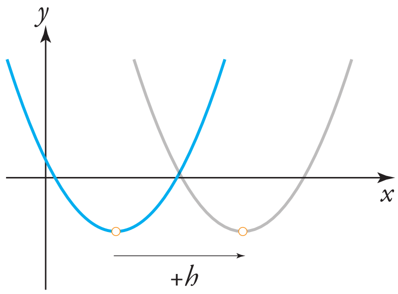
La forme canonique $f(x) = a(x-h)^2 + k$ présente les avantages suivants :

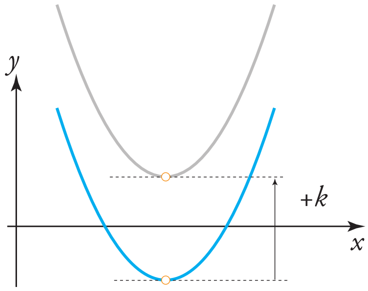
- La fonction atteint un extremum au point $(h; k)$





- Une augmentation de la valeur h déplace la courbe horizontalement vers la droite, tandis qu'une diminution la déplace horizontalement vers la gauche.
- Une augmentation de la valeur k déplace la courbe verticalement vers le haut, tandis qu'une diminution la déplace verticalement vers le bas.





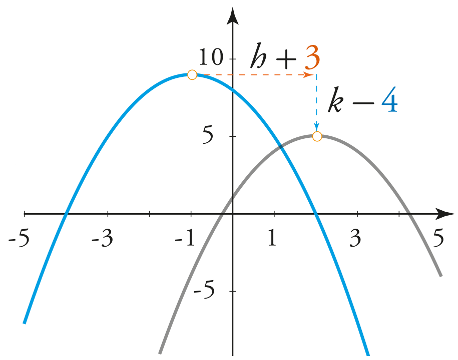
Exemple 8.4

Déplacer la fonction $f(x) = -(x+1)^2 + 9$ de 3 unités vers la droite et de 4 unités vers le bas. Déterminer la nouvelle fonction.

Solution

La fonction f représentée sous sa forme canonique possède un extremum au point $(-1;9)$. En augmentant la valeur h de 3 et en diminuant la valeur k de 4, on obtient la nouvelle coordonnée de l'extremum $(2;5)$. La nouvelle équation s'écrit alors :

$$f(x) = -(x+1-3)^2 + 9-4 = f(x) = -(x-2)^2 + 5$$



Exemple 8.5

Déterminer l'équation de la parabole ayant comme sommet $S(2;3)$ et passant par le point $(5;1)$

Solution

En utilisant la forme canonique, on a immédiatement $h = 2$ et $k = 3$, ce qui permet d'écrire :

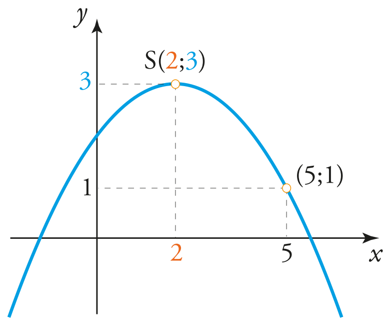
$$f(x) = a(x-2)^2 + 3$$

Sachant qu'au point $x = 5$, $f(x) = 1$, on peut écrire :

$$1 = a(5-2)^2 + 3$$

En résolvant, on trouve $a = -\frac{2}{9}$. Au final, l'équation de la parabole s'écrit :

$$f(x) = -\frac{2}{9}(x-2)^2 + 3$$



Exercices d'application de la section 8.1

1 [Reconnaître une fonction quadratique] Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont des fonctions quadratiques ?

(a) $f(x) = \sqrt{5}x^2 - 7x$ **(b)** $V(R) = \pi R^2(1 + R/2)$ **(c)** $f(t) = at^2 + a^2t^2$

2 [Reconnaître une fonction quadratique] Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont des fonctions quadratiques ?

(a) $f(x) = \dfrac{(x-a)(b-x)}{b-a}$ **(b)** $f(a) = aP^2 + ap + a$ **(c)** $f(x) = x^2 \cdot \sum x_i + x$

3 [Point de la fonction] Dire si le point $(-2;-1)$ appartient aux paraboles d'équation suivantes :

(a) $y = -2x^2$ **(b)** $t = -\dfrac{1}{2}u^2 - u - 1$ **(c)** $P = (a-3)^2 - 26$

4 [Point de la fonction] Dire si le point $(-10;1)$ appartient aux paraboles d'équation suivantes :

(a) $y = 0,1x^2 + 0,9x$ **(b)** $y = -\dfrac{x^2}{10} - \dfrac{3x}{5} + 5$ **(c)** $S = 0,02t^2 + 0,3t$

5 [Forme générale] Écrire les fonctions suivantes sous leur forme générale :

(a) $f(x) = 4(x-5)^2 + 6$ **(b)** $g(x) = 7(x+1)(x-1)$

6 [Forme générale] Écrire les fonctions suivantes sous leur forme générale :

(a) $f(x) = \dfrac{(2x-3)^2}{4}$ **(b)** $g(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$

7 [Forme canonique] Écrire les fonctions suivantes sous leur forme canonique :

(a) $f(x) = 3x^2 + 24x + 46$ **(b)** $g(x) = 3(x-1)(x+3)$

8 [Forme canonique] Écrire les fonctions suivantes sous leur forme canonique :

(a) $f(x) = x^2 - 2x - 24$ **(b)** $g(x) = -2(x+1,5)(x-2,5)$

9 [Forme factorisée] Écrire les fonctions suivantes sous leur forme factorisée :

(a) $f(x) = 8(x-3)^2 - 8$ **(b)** $g(x) = -x^2 - x + 6$

10 [Forme factorisée] Écrire les fonctions suivantes sous leur forme factorisée :

(a) $f(x) = x^2 + x + 1$ **(b)** $g(x) = a^2x^2 - 2a^2bx + a^2b^2$

11 [Équation de la parabole] Trouver l'équation de la parabole passant par les points ou les sommets S suivants :

(a) $S(0;8)$ et $(4;12)$ **(b)** $(-2;0)$; $(2;6)$; $(4;0)$ **(c)** $(1;1)$; $(2;3)$; $(4;1)$

12 [Équation de la parabole] Trouver l'équation de la parabole passant par les points ou les sommets S suivants :

(a) $S(3;-10)$ et $(6;-7)$ **(b)** $(-1;0)$; $(1;-10)$; $(6;0)$ **(c)** $(-1;2)$; $(2;3)$; $(5;10)$

13 [Intersection avec les axes] Trouver les points d'intersection avec l'axe des x et l'axe des y.

(a) $f(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 + 3x - \dfrac{5}{2}$ **(b)** $g(x) = x^2 + 3x$ **(c)** $h(x) = \dfrac{x^2-16}{4}$

14 [Intersection avec les axes] Trouver les points d'intersection avec l'axe des abscisses et avec l'axe des ordonnées.

(a) $f(x) = x^2 - 6x + 8$ **(b)** $g(x) = 0,2x^2 + 0,4x$ **(c)** $h(x) = \dfrac{a^2 - x^2}{18}$

15 [Intersections diverses] On donne $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x$. Trouver les points d'intersection...

(a) avec la droite d'équation $y = 1$

(b) avec la parabole d'équation $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 5$

16 [Intersections diverses] On donne $f(x) = x^2 - 5x + 4$. Trouver les points d'intersection...

(a) avec l'axe des x

(b) avec la droite d'équation $y = 2x - 6$

(c) avec la parabole d'équation $y = -0,2x^2 - 0,2x + 10$

8.2 Application des fonctions quadratiques

8.2.1 Problèmes d'optimisation

Dans bien des cas, il suffit de trouver le point $(x; y)$ de la fonction quadratique qui minimise cette fonction (si $a > 0$) ou qui la maximise (si $a < 0$) au moyen de la formule :

$$x = \frac{-b}{2a} \qquad \text{puis} \qquad y = f\left(\frac{-b}{2a}\right)$$

Exemple 8.6

Déterminer les coordonnées du sommet de la parabole donnée par l'équation suivante : $f(x) = x^2 - 2x + 1$

Solution

$$x_{\min} = \frac{-b}{2a} = 1 \qquad \text{minimum car la valeur de } a \text{ est positive}$$

$$y_{\min} = f(1) = 1^2 - 2(1) + 1 = 0 \qquad \text{on détermine la coordonnée } y$$

$$\text{Sommet} = S(1; 0) \qquad \text{valeur du sommet}$$

Dans d'autres cas, on cherche à minimiser ou maximiser une fonction quadratique liée à une contrainte de type linéaire $ax + by = c$.[1]

La résolution de ce type de problème consiste simplement à isoler x ou y de la contrainte linéaire et à faire une substitution dans la fonction à optimiser. On cherche ensuite le maximum ou le minimum de cette fonction.

Exemple 8.7

La somme de deux nombres est 36. Déterminer ces deux nombres sachant que leur produit est maximal.

Solution

Soit x le premier nombre et y le second.
Fonction à optimiser : $P = x \times y$.
Contrainte linéaire : $x + y = 36$
On isole de la contrainte : $y = 36 - x$ que l'on substitue dans la fonction à optimiser ce qui donne :

$$\begin{aligned} P(x) &= x \cdot (36 - x) && \text{isoler la contraite } y = 36 - x \text{ et substituer} \\ &= -x^2 + 36x && \text{mise sous la forme générale} \end{aligned}$$

Cette fonction passe par un maximum pour $x = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{-36}{2(-1)} = 18$.
La fonction est donc maximum pour $x = 18$ et $y = 36 - 18 = 18$ et vaut 324.

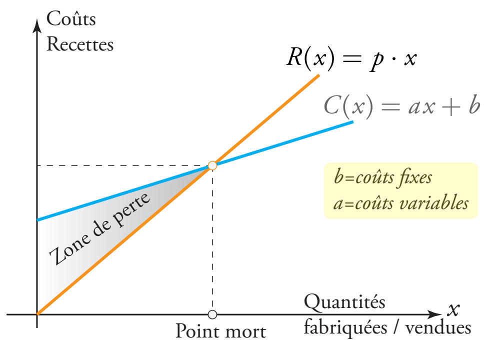
1. On parle aussi d'optimisation sous contraintes.

8.2.2 Maximisation du profit

Maximiser le profit revient à représenter sur un même graphique les courbes de coûts C et de recettes R en fonction du prix unitaire p d'un bien. Le profit est alors maximum lorsque la différence entre R et C est maximum.

Représentation des coûts et des recettes en fonction des quantités

En fonction des quantités x fabriquées ou vendues au prix unitaire p, on a le schéma classique des coûts et recettes suivant :



Représentation des coûts et des recettes en fonction du prix unitaire

On sait que le nombre d'unités x d'un bien dépend du prix p de ce dernier. En supposant une dépendance linéaire entre x et p :[2]

$$x = m \cdot p + h$$

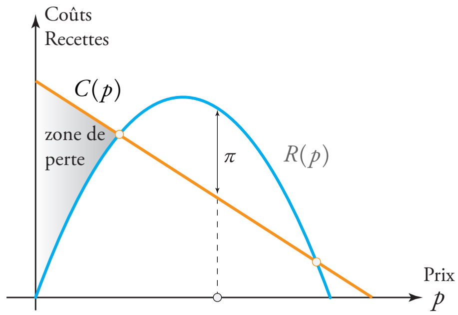
On peut exprimer maintenant les coûts et les recettes directement en fonction du prix p. Dans ce cas, la recette R devient une parabole :

$$\begin{aligned} R(p) &= p \cdot x \\ &= p(mp + h) = mp^2 + ph \end{aligned}$$

Les coûts restent une fonction affine décroissante :

$$\begin{aligned} C(p) &= ax + b \\ &= a(mp + h) + b \end{aligned}$$

2. On appelle cette dépendance linéaire une **fonction de demande**. C'est une fonction décroissante en fonction du prix. En effet, plus les prix sont élevés, plus, normalement, la demande baisse. En économétrie, la demande n'est pas forcément une fonction linéaire du prix.



Pour trouver le profit maximum, il suffit de chercher la valeur p telle que $\pi = R(p) - C(p)$ soit maximum.

Exemple 8.8

Une entreprise fabrique un certain objet dont la demande x est donnée par

$$x = 10\,200 - 300\,p$$

Les frais fixes s'élèvent à 14 400 frs et les frais variables à 8 frs par objet. Déterminer le niveau de production qui maximise le bénéfice puis calculer ce bénéfice.

Solution

On détermine les fonctions économiques :

- des coûts :

$$\begin{aligned} C(p) &= 8x + 14\,400 \\ &= 8(10\,200 - 300\,p) + 14\,400 \\ &= -2400\,p + 96\,000 \end{aligned}$$

- de la recette :

$$\begin{aligned} R(p) &= p \times x \\ &= p(10\,200 - 300\,p) \\ &= -300\,p^2 + 10\,200\,p \end{aligned}$$

- du bénéfice : $B(p) = R(p) - C(p) = -300\,p^2 + 12\,600\,p - 96\,000$

Le bénéfice maximum est atteint quand :

$$p = -\frac{b}{2a} = \frac{-12\,600}{2(-300)} = 21 \text{ frs.}$$

À ce prix, le bénéfice vaut : $B(21) = 36\,300$ frs.

Exercices d'application de la section 8.2

17 [Optimum] Déterminer l'optimum des fonctions suivantes et dire s'il s'agit d'un maximum ou d'un minimum.

(a) $f(x) = 3x - 4x^2$ **(b)** $g(t) = 3(t-5)(t+3)$ **(c)** $p(n) = (n-7)^2 - 2n$

18 [Optimum] Déterminer l'optimum des fonctions suivantes et dire s'il s'agit d'un maximum ou d'un minimum.

(a) $f(x) = x^2 + x + 1$

(b) $F(p) = 12p - 1,5p^2 - 18$

(c) $f(x) = 2^{22}x^2 - 2 \cdot 2^{21}x + 2^{21}$

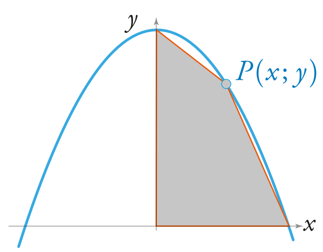
19 [Maximum sous contrainte] Déterminer le maximum des fonctions suivantes en tenant compte des contraintes linéaires données.

(a) xy sous contrainte $5y + 8x = 8$

(b) $x^2 + y^2$ sous contrainte $x - y = 1$

(c) $xy - x^2 + 10y$ sous contrainte $y = \dfrac{x}{2}$

20 [Maximum sous contrainte] Sur le graphe suivant, la frontière en bleue est donnée par l'équation $y = 4 - x^2$. On cherche à maximiser l'aire grisée en plaçant le point $P(x; y)$ de manière optimale.



(a) Déterminer les coordonnées du point P en fonction de x.

(b) Quelle est l'aire maximum obtenue ?

21 [Recette] Un fabricant constate que les recettes générées en vendant x unités d'une certaine marchandise est donnée par la fonction $R(x) = 70x - 0,35x^2$, où le recette $R(x)$ est exprimée en frs. Quel est la recette maximum et combien d'unités doivent être fabriquées pour obtenir ce maximum ?

22 [Ventes] Le patron d'une buvette constate que s'il vend x bouteilles de soda par jour, son profit journalier (en frs) est donné par $P(x) = -0,001x^2 + 4x - 1250$. Quel est son profit maximum par jour et combien de bouteilles de soda doit-il vendre pour maximiser son profit ?

23 [Publicité] L'efficacité d'une publicité télévisée dépend du nombre de fois qu'un spectateur le regarde. Après plusieurs enquêtes ciblées, une agence de pub a constaté que l'efficacité sur une échelle de 1 à 6 pouvait être mesurée par $E(n) = \frac{12}{25}n - \frac{6}{625}n^2$ où n est le nombre de fois qu'un spectateur regarde une pub à la télévision. Pour qu'une publicité ait une efficacité maximale, combien de fois un spectateur devrait-il la regarder ?

24 [Production agricole] Un verger contient 35 pommiers produisant chacun environ 450 pommes par an. Afin d'augmenter la production, le fermier aimerait ajouter des pommiers à son verger. Cependant, chaque ajout d'un arbre provoquera la chute de la production de 10 pommes par arbre.

(a) Combien de pommiers doit-il planter pour maximiser sa production annuelle ?

(b) Quelle sera alors cette production ?

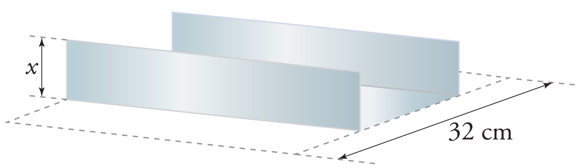
25 [Maximisation du profit] Un fabricant de meubles a une demande pour un nouveau canapé design qui s'exprime par $D(p) = 9000 - 20p$ où p est le prix de vente. Le fabricant a par ailleurs calculé qu'il a 16 000 frs de frais fixes et 80 frs de frais variables par canapé pour la fabrication. Quel prix le fabricant doit-il fixer pour ses canapés s'il désire un bénéfice maximal et quel sera le bénéfice maximal ?

26 [Maximisation du profit] La société Texas Instruments veut mettre sur le marché une nouvelle calculatrice. Une étude de marché lui indique que la demande s'exprime par $D(p) = 1200 - 8p$ où p est le prix de vente de cette calculatrice. Le fabricant évalue ses coûts de production à 9 600 frs de frais fixes et 16 frs de frais variables pour chaque calculatrice fabriquée. Quel prix le fabricant doit-il fixer pour ses calculatrices s'il désire un bénéfice maximal et quel sera alors ce bénéfice maximal ?

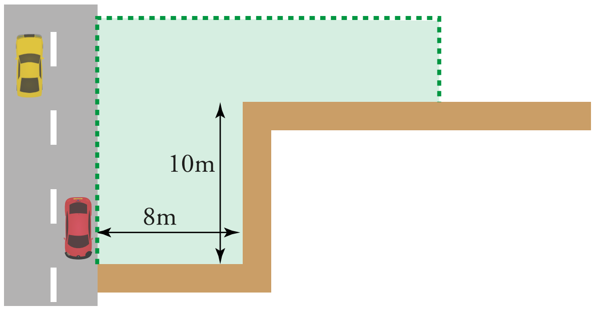
8.3 Problèmes et exercices de synthèse

27 [Loyers] Une agence immobilière possède 200 studios qui sont tous occupés quand le loyer est de 700 frs par mois. L'agence estime qu'à chaque augmentation de loyer de 25 frs, 5 appartements sont libérés. Quel doit être le loyer pour maximiser le revenu mensuel de l'agence ? *Indice : choisir x =nombre d'augmentation de loyer de 25 frs.*

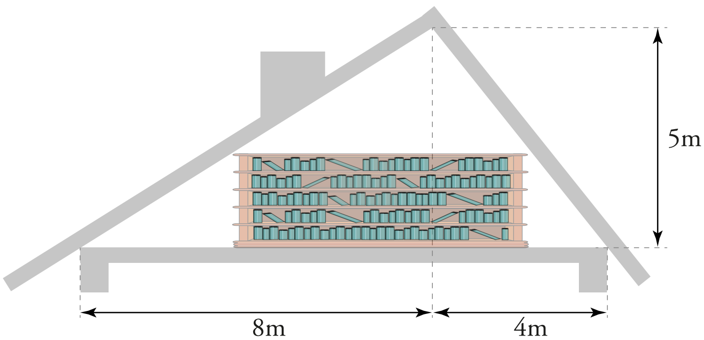
28 [Débit maximum] Une gouttière est fabriquée en pliant à angle droit les côtés d'une tôle rectangulaire de 32 cm de large, comme illustré ci-après. Trouver le valeur de x qui maximise le débit de la gouttière.



29 [Aire maximale d'un champ] Une clôture (traitillé vert) de 40 mètres est installée selon le schéma suivant. Quelle est l'aire maximale du champ pouvant être obtenue ?



30 [Défi] Julien est patron d'une entreprise d'agencement sur mesure. Un client souhaite aménager dans les combles de sa villa une bibliothèque selon le croquis ci-après. Quelles seront les dimensions de la bibliothèque offrant la plus grande surface en coupe ?



Chapitre 9

Fonctions exponentielles et logarithmiques

Objectifs du chapitre

- résoudre des équations exponentielles et logarithmiques élémentaires.
- interpréter les coefficients a et b de la fonction $f(x) = a \cdot e^{bx}$
- traduire mathématiquement des processus de croissance / décroissance.
- calculer et visualiser la fonction logarithmique comme fonction réciproque de la fonction exponentielle.
- convertir une équation exponentielle en équation logarithmique et inversement.
- savoir lire et utiliser des échelles logarithmiques.
- appliquer les règles de calculs logarithmiques et savoir utiliser différentes bases.

9.1 Formes exponentielles

9.1.1 Introduction

La fonction exponentielle est très importante en mathématiques et a des applications dans tous les domaines des sciences où elle sert notamment à représenter des phénomènes de croissance ou de décroissance.

Jusqu'à présent nous avons étudié des fonctions contenant une variable élevée à une puissance constante comme par exemple :

$$f(x) = x^3 \quad \text{ou} \quad f(x) = x^{1/3}$$

La fonction exponentielle, c'est exactement l'inverse, la variable se trouve en exposant, d'où le terme d'**exponentielle**.

$$f(x) = 3^x \quad \text{ou} \quad f(x) = (1/3)^x$$

Comme nous le verrons plus loin, la fonction exponentielle est la fonction réciproque de la fonction logarithme.

9.1.2 Rappel sur les exposants

Pour étudier les exponentielles, il faut rappeler quelques propriétés élémentaires sur les exposants que nous allons étudier tout au long de ce chapitre et que nous rappelons brièvement ici.

Soit $a, b > 0$ et $x, y \in \mathbb{R}$:

$$a^0 = 1 \qquad a^{x+y} = a^x a^y \qquad a^{xy} = (a^x)^y$$

$$\frac{1}{a^x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x} \qquad a^x b^x = (ab)^x \qquad a^{x^y} = a^{(x^y)} \neq (a^x)^y$$

Par ailleurs, il est possible d'écrire des expressions faisant intervenir des quotients ou des racines en utilisant la notation exponentielle :

$$\frac{1}{a} = a^{-1} \qquad \sqrt{a} = a^{1/2} \qquad \sqrt[n]{a} = a^{1/n}$$

Exemple 9.1

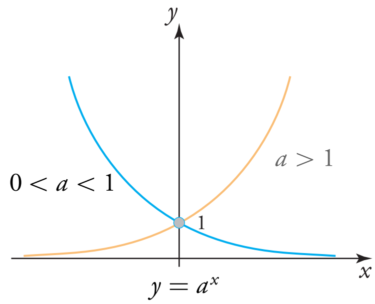
Simplifier l'expression suivante : $\sqrt{2\sqrt{2}}$

Solution

$$\begin{aligned}
\sqrt{2\sqrt{2}} &= \sqrt{2^1 \cdot 2^{1/2}} && \text{Donnée} \\
&= \sqrt{2^{1+1/2}} && \text{Propriété des puissances} \\
&= \sqrt{2^{3/2}} && \text{Simplification} \\
&= (2^{3/2})^{1/2} && \text{Forme exponentielle} \\
&= 2^{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}} && \text{Puissance d'une puissance} \\
&= 2^{3/4} && \text{Forme exponentielle}
\end{aligned}$$

9.1.3 Graphe de la fonction exponentielle

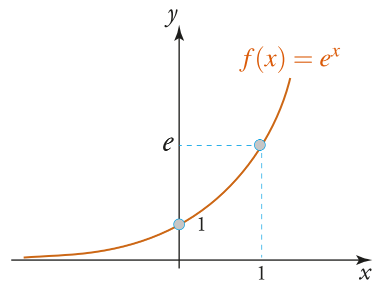
Le graphe de la fonction exponentielle $f(x) = a^x$ est définie pour $a > 0$ et $a \neq 1$ et possède une des deux formes représentées par la figure ci-après :



Les fonctions $f(x) = (-3)^x$ ou encore $f(x) = 1^x$ ne sont donc pas des fonctions exponentielles.

9.1.4 Fonction exponentielle naturelle

La fonction **exponentielle naturelle** est un cas particulier de la fonction exponentielle standard, utilisant une base valant $e \simeq 2{,}718281828$. Cette base e est appelée **nombre d'Euler** (Mathématicien suisse 1707 - 1783).[1] Le graphe de la fonction exponentielle naturelle est le suivant :



Comme π, le nombre e est transcendant, c'est-à-dire qu'il ne peut être la racine d'aucune équation algébrique dont les coefficients sont des entiers.

La fonction exponentielle naturelle est utilisée pour mesurer des taux de croissance ou de décroissance continus c'est-à-dire mesurés à chaque instant et non sur un intervalle de temps. On l'utilise notamment pour mesurer la croissance d'une population. De par sa facilité d'utilisation, de nombreux modèles économiques font appel à cette fonction.

1. Ce nombre peut être obtenu de plusieurs manières, notamment par la somme illimitée suivante :
$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{1 \times 2 \times 3 \times 4} + \cdots$

9.1.5 Equations exponentielles

Domaine de définition

Les fonctions exponentielles du type a^x sont définies sur tous les nombres réels : ED $= \mathbb{R}$. Cependant pour les formes d'équations ou de fonctions faisant intervenir des racines ou des expressions fractionnaires, il y a lieu d'analyser chaque cas.

Exemple 9.2

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+\frac{1}{2}}}{4^x - 16}$$

Solution

Les conditions d'existence sont :

1. Pour la racine carrée : $x + \frac{1}{2} \geq 0$ c'est-à-dire $x \geq -\frac{1}{2}$
2. Pour le dénominateur : $4^x - 16 \neq 0$, c'est-à-dire $x \neq 2$

En résumé la fonction est définie pour :

$$x \in [-1/2\,;\,2[\,\cup\,]2\,;\,+\infty[$$

Formes simples

Parmi les équations exponentielles simples, citons :

- celles qui peuvent être exprimées à l'aide d'une même base, ou encore
- celles facilement factorisables

Exemple 9.3

Résoudre l'équation exponentielle : $3^x = \dfrac{1}{9}$

Solution

$$3^x = \frac{1}{9} \qquad \text{Donnée}$$

$$3^x = \frac{1}{3^2} \qquad \text{Exprimer 9 en puissance de 3}$$

$$3^x = 3^{-2} \qquad \text{Deux membres de l'égalité avec la même base}$$

$$x = -2 \qquad \text{On égalise les exposants}$$

Exemple 9.4

Résoudre l'équation exponentielle : $2^{x^2-4x} = \left(\frac{1}{16}\right)^{x-4}$

Solution

$2^{x^2-4x} = \left(\frac{1}{16}\right)^{x-4}$	Donnée
$2^{x^2-4x} = \left(\frac{1}{2^4}\right)^{x-4}$	Exprimer 16 comme étant 2^4
$2^{x^2-4x} = (2^{-4})^{x-4}$	Comme $\frac{1}{2^4} = 2^{-4}$
$2^{x^2-4x} = 2^{-4x+16}$	Selon la propriété $(a^b)^c = a^{(bc)}$
$x^2-4x = -4x+16$	On égalise les exposants
$x^2-16 = 0$	Résolution de l'équation quadratique
$x = \pm 4$	

Exemple 9.5

Résoudre l'équation exponentielle : $3^{-x}x^3 - 5x^2 3^{-x} = -6x3^{-x}$

Solution

$3^{-x}x^3 - 5x^2 3^{-x} + 6x3^{-x} = 0$	Regroupement
$x3^{-x}(x^2-5x+6) = 0$	Mise en évidence du facteur commun $x3^{-x}$
$x3^{-x}(x-2)(x-3) = 0$	Factorisation du trimôme

Chaque facteur devant être égal à zéro, on obtient :

- $x = 0$
- $3^{-x} = 0 \quad \rightarrow \quad$ pas de solution car une exponentielle ne peut pas être égale à 0 !
- $x-2=0$, c'est-à-dire $x=2$
- $x-3=0$, c'est-à-dire $x=3$

Ainsi les solutions sont : $S = \{0; 2; 3\}$.

Formes complexes

Pour les formes plus complexes, où x intervient tant en exposant qu'à la base, il est souvent impossible de résoudre ces équations de façon algébrique. Il faut avoir recours au solveur de la calculatrice ou à une approche graphique approximative.

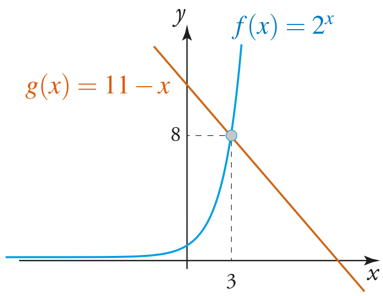
Exemple 9.6

Résoudre l'équation exponentielle : $2^x + x = 11$

Solution

Bien que la solution $x = 3$ soit ici évidente, cette équation ne peut être résolue algébriquement.

- Le solver donne : $x = 3$
- L'approche graphique conduit à la même solution :



Exercices d'application de la section 9.1

1 [Exposants] Simplifier au maximum les expressions suivantes :

(a) $\dfrac{a^{1/2} \cdot a^3}{a^{3/2}}$ **(b)** $\dfrac{x^{-1} + x^{-2}}{x^{-2}}$ **(c)** $\dfrac{(y^{1/2} + y^{-1/2})^2}{(y+1)^2}$

2 [Exposants] Simplifier au maximum les expressions suivantes :

(a) $\dfrac{x^{3/8}}{x^{1/8}}$ **(b)** $\dfrac{r^{2n} - 1}{r^n - 1}$ **(c)** $\dfrac{(x^{3/2} + x^{1/2})^{-2}}{(x+1)^{-2}}$

3 [ED] Donner l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

(a) $f(x) = \sqrt[3]{x} \cdot 3^x$ **(b)** $f(x) = \dfrac{x-5}{5^x - 5}$ **(c)** $f(x) = 2^{0,3 - x^{1/2}}$

4 [ED] Donner l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

(a) $f(x) = \sqrt{x} \cdot 2^x$ **(b)** $f(x) = \dfrac{15}{3^x - 1/9}$ **(c)** $f(x) = \sqrt{2^x - 1}$

5 [Formes simples] Résoudre les équations exponentielles suivantes :

(a) $4^x = 64$ **(b)** $25^x = 125^{x-2}$ **(c)** $16^{-x+1} = 8^x$

6 [Formes simples] Résoudre les équations exponentielles suivantes :

(a) $16^{x+2} = 64^{2x-1}$ **(b)** $3^{2x+3} = 3^{x^2}$ **(c)** $16^{0,75} = x$

7 [Formes simples] Résoudre les équations exponentielles suivantes :

(a) $9^{x^2} = 3^{3x+2}$ **(b)** $2^{-100x} = 0,5^{x-4}$ **(c)** $0,1^x = 1000$

8 [Formes simples] Résoudre les équations exponentielles suivantes :

(a) $\left(4^{x-1}\right)^{3x} = 16 \cdot 4^{x-2}$ **(c)** $4 \cdot 5^{x+1} \cdot 5^{x-1} + 5^{2x} = \sqrt{5}$

(b) $x^{1,5} = 1000$

9 [Factorisation] Résoudre les équations suivantes :

(a) $(x^2 - 1) \cdot 2^{x-1} = 0$ **(b)** $x \cdot 3^x + 3^x = 0$

10 [Factorisation] Résoudre les équations suivantes :

(a) $\dfrac{\sqrt{x} \cdot (x-8)}{x} = 0$ **(b)** $2x \cdot 5^x - x^2 \cdot 5^x = 0$

11 [Systèmes] Résoudre les systèmes suivants :

(a) $\begin{cases} xy = 6 \\ 2^x \cdot 2^y = 32 \end{cases}$ **(b)** $\begin{cases} 3^x + 3^y = 12 \\ 3^x \cdot 3^y = 27 \end{cases}$

12 [Équations implicites] Résoudre les équations suivantes au moyen du solver de la calculatrice ou d'Excel :

(a) $x + 2^x = 37$ **(b)** $3^x - 2x - 5 = 0$

9.2 Modèles de croissance et de décroissance

9.2.1 Modèle simple

Le modèle le plus simple de croissance ou de décroissance exponentielle se traduit par l'une ou l'autre des fonctions suivantes, parfaitement équivalentes :

$$f(t) = a \cdot b^t \qquad \text{ou} \qquad f(t) = \alpha \cdot e^{\beta t}$$

- La correspondance entre ces deux modèles s'obtient par : $a = \alpha$ et $b = e^{\beta}$
- Le modèle peut être déterminé au moyen de deux informations (en général la valeur au temps $t = 0$ et une autre valeur de la fonction).

Remarque

Comme ces modèles dépendent en principe du temps, il est d'usage d'utiliser la lettre (t) pour désigner la variable.

Exemple 9.7

Une nappe de pétrole de 500m^2 s'étale actuellement sur une mer. Tous les 4 heures environ, cette nappe augmente de 8% sa surface. Établir un modèle exponentiel de cette situation et déterminer la surface de cette nappe de pétrole dans 5 jours.

Solution

- Valeur initiale (quand $t = 0$) : 500
- Valeur après 4 heures : $500 \times 1,08 = 540$

On forme le système :

$$\begin{cases} f(0) = a \cdot b^0 = a = 500 \\ f(4) = 500 \cdot b^4 = 540 \end{cases}$$

Ainsi : $b^4 = \dfrac{540}{500} = 1,08$ d'où : $b = 1,08^{1/4}$

Le modèle de croissance s'écrit :

$$\begin{aligned} f(t) &= 500 \cdot \left(1,08^{1/4}\right)^t \\ &= 500 \cdot 1,08^{t/4} \quad \text{ou} \quad f(t) = 500 \cdot 1,08^{0,25t} \end{aligned}$$

Dans 5 jours, c'est à dire dans 120 heures, la nappe aura atteint la surface de :

$$f(120) = 500 \cdot 1,08^{0,25 \times 120} \simeq 5031,33 \text{ m}^2$$

Modèle exponentiel avec taux de croissance réel

Si dans la fonction $f(t) = a \cdot b^t$ on remplace b par $(1+i)$ alors i peut être interprété comme un **taux de croissance réel** :

$$f(t) = a \cdot (1+i)^t$$

- a est la valeur initiale du modèle [s'obtient aussi en calculant $f(0)$].
- $\pm i$, le taux de croissance ou de décroissance réel.

Exemple 9.8

Une machine achetée 30 000 frs perd chaque année 10% de sa valeur résiduelle $V(t)$. Établir un modèle exponentiel de cette situation et calculer la valeur résiduelle de cette machine dans 10 ans.

Solution

- $a = 30\,000$ valeur initiale du modèle
- $i = -0,1$ taux de décroissance

$$V(t) = 30\,000 \times (1-0,1)^t = 30\,000 \times 0,9^t$$

Dans 10 ans, la valeur de cette machine sera de :

$$V(10) = 30\,000 \cdot 0,9^{10} = 10\,460{,}35 \text{ frs.}$$

Exemple 9.9

Un capital de 1400 frs est placé à intérêts composés au taux annuel de 6% durant une période de 6,5 ans. Quel sera le capital final acquis si le modèle exponentiel est le suivant $C_n = C_0(1+i)^n$?

Solution

$$C_0 = 1400 \quad i = 0,06 \quad n = 6,5$$

Ainsi :

$$C_n = 1400(1+0,06)^{6,5} \simeq 2044,6 \text{ frs.}$$

Modèle exponentiel avec taux de croissance nominal

Si l'on utilise la fonction $f(t) = \alpha \cdot e^{\beta t}$ alors β peut être interprété comme un **taux de croissance nominal** : [2]

$$f(t) = \alpha \cdot e^{\beta t}$$

- α est la valeur initiale du modèle [s'obtient aussi en calculant $f(0)$].
- $\pm\beta$, le taux de croissance ou de décroissance nominal ou instantané.

Exemple 9.10

La population d'une ville en 2000 était de 200 000 habitants. En admettant que la population croisse constamment au taux nominal de 5% par an, prévoir le nombre d'habitants dans cette ville en 2028.

Solution

Pour simplifier, prenons $t = 0$ en 2000.

- $\alpha = 200\,000$ valeur initiale du modèle
- $\beta = 0,05$ taux de décroissance nominal

$$f(t) = 200\,000 \cdot e^{0,05t}$$

En 2028 (t=28) on aura :

$$f(28) = 200'000 \cdot e^{0,05 \times 28} \simeq 811'040 \text{ habitants}$$

✎ Si la population avait diminué de 5%, le modèle aurait été :

$$f(t) = 200'000 \cdot e^{-0,05t}$$

Exemple 9.11

Un capital de 1400 frs est placé à intérêts composés au taux annuel nominal de 6% payable de façon continue durant une période de 6,5 ans. Quel sera le capital final acquis en utilisant le modèle de capitalisation suivant : $C_n = C_0 e^{jn}$?

Solution

$$C_n = 1400 e^{0,06 \times 6,5} \simeq 2067,8 \text{ frs.}$$

2. On parle aussi de taux de croissance instantané ou continu.

Remarques

- La capitalisation continue s'utilise dans des modèles financiers théoriques en raisons des propriétés mathématiques liées à la fonction e^x mais ne s'utilise pas en pratique.
- Le modèle de croissance $f(t) = a \cdot (1+b)^t$ est habituellement utilisé pour des phénomènes de croissance à temps discret (intérêt composé). Le modèle $f(t) = \alpha \cdot e^{\beta t}$ convient de préférence pour des phénomènes de croissance continue (croissance d'une population).

9.2.2 Modèles plus complexes

D'autres modèles exponentiels existent, citons notamment :

- des modèles combinant des exponentielles d'exponentielles : $f(t) = a \cdot b^{c^t}$
- le modèle de *Gompertz* : $f(t) = e^{a \cdot b^t + c}$ utilisé en assurance ou en médecine.
- le modèle *logistique*[3] : $f(t) = \dfrac{K}{1 + a \cdot e^{-rt}}$

Exemple 9.12

En médecine par exemple, la courbe de Gompertz est utilisée pour ajuster les données de la croissance des tumeurs. En notant la taille de la tumeur $X(t)$, il est possible d'écrire la courbe de Gompertz comme suit :

$$X(t) = K \times e^{(b \times e^{-at})} \qquad \text{où} \qquad b = \ln\left(\frac{x_0}{K}\right)$$

x_0 est la taille de la tumeur au moment de l'observation de départ. K est la taille maximale qui peut être atteinte.

Exercices d'application de la section 9.2

13 [Paramètres] Trouver les valeurs des paramètres a, b et c dans les situations suivantes :

(a) $f(x) = a^x$, si f passe par le point $(2;9)$

(b) $f(x) = a \cdot b^x$, si f passe par les points $(1;5)$ et $(3;20)$.

14 [Paramètres] Trouver les valeurs des paramètres a, b et c dans les situations suivantes :

(a) $f(x) = a^{2x-3}$, si f passe par le point $(1;2)$

(b) $f(x) = a \cdot b^x + c$, si f passe par les points $(0;1)$, $(1;-2)$ et $(2;-7/2)$.

3. Les modèles logistiques et de Gompertz permettent de représenter une croissance limitée dans le temps.

15 [Forme exponentielle] Transformer sous la forme $f(t) = a \cdot b^t$:

(a) $f(t) = 30 \cdot e^t$ **(b)** $f(t) = 100 \cdot e^{0,25t}$ **(c)** $f(t) = K \cdot e^{-0,1t}$

16 [Forme exponentielle] Transformer sous la forme $f(t) = a \cdot b^t$:

(a) $f(t) = e^{-t}$ **(b)** $f(t) = 3 \cdot e^t$ **(c)** $f(t) = 624 \cdot e^{0,25t}$

17 [Décroissance commerciale] On a constaté que le nombre de clients d'une grande surface diminuait d'une manière continue au taux nominal de 4% par an. Si actuellement ce magasin compte 13 600 clients, combien comptera-t-il dans 6 ans ?

18 [Croissance d'une population] Depuis 1950, la croissance de la population mondiale (en millions) peut être représentée par une fonction exponentielle définie par :

$$f(t) = 2600e^{0,018t}$$

où t représente le nombre d'années depuis 1950.

(a) La population mondiale était d'environ 3 700 millions en 1970. Quelle différence trouve-t-on par rapport au modèle défini ?

(b) Estimer selon ce modèle, la population en 2007.

19 [Pouvoir d'achat] Dans un pays, on a constaté que le pouvoir d'achat diminuait de 20% tous les quatre ans environ.

(a) Représenter cette évolution par une fonction exponentielle du type $P(t) = P(0) \cdot \alpha^{kt}$ avec $P(0)$ le pouvoir d'achat initial.

(b) Pour un pouvoir d'achat initial de 100%, quel est le pouvoir d'achat dans ce pays après 10 ans ?

20 [Déforestation] On a observé qu'une forêt perdait 7% de sa surface tous les 3 ans. Elle occupe aujourd'hui une surface de 250 000 m^2. On utilise le modèle $S(t) = \alpha \cdot (1+i)^{kt}$.

(a) Quelle surface occupait-elle il y a 5 ans ?

(b) Quelle surface occupera-t-elle dans 7 ans ?

21 [Terre cultivable] Si la surface cultivable diminue continûment au taux nominal annuel de 3,5% en raison de la densification urbaine, quelle fraction de la terre cultivable actuelle aura été perdue dans 15 ans ?

22 [Croissance du personnel] Dans une usine, on a observé que le nombre N d'ouvriers présents après t années pouvait être représenté par la formule ci-après :

$$N(t) = 200(0,04)^{0,5^t}$$

(a) Quel est le nombre initial d'ouvriers ?

(b) Combien d'ouvriers l'usine comptera-t-elle dans 3 ans ?

(c) Combien d'ouvriers l'usine comptera-t-elle à long terme ?

23 [Intérêt continu] Un capital de 20 000 frs est placé à intérêt composé continu au taux nominal de 6% l'an.

(a) Déterminer la situation du compte après 5 ans ?

(b) Quel taux d'intérêt composé annuel i conduirait à la même situation après 5 ans ?

24 [Amortissement comptable] L'administration fédérale des contributions autorise l'amortissement d'un ordinateur à raison de 40% de sa valeur comptable. Sachant qu'un ordinateur a été acheté 3 000 frs,

(a) quelle sera sa valeur comptable après 6 ans ?

(b) quel amortissement annuel constant conduirait à la même valeur comptable après 6 ans ?

9.3 Logarithmes

9.3.1 Introduction

La fonction logarithme est la **fonction réciproque** de la fonction exponentielle. Cette fonction est aussi importante que la fonction exponentielle. À toute forme logarithmique correspond une forme exponentielle et réciproquement. On sait par exemple que $10^3 = 1000$. En termes de logarithmes on écrira $\log_{10}(1000) = 3$. Ces deux écritures sont parfaitement équivalentes.

On définit d'une manière générale la fonction logarithme **de base a** ($a > 0$ et $a \neq 1$) par l'équation suivante :

$$y = \log_a(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad a^y = x$$

Le passage de la forme logarithme à la forme exponentielle n'est pas toujours évidente lorsque l'on aborde les logarithmes. Le tableau ci-après permet de bien saisir le passage d'une forme à l'autre.

Forme exponentielle		Forme logarithmique
$4^2 = 16$	$\Leftrightarrow$	$\log_4(16) = 2$
$5^0 = 1$	$\Leftrightarrow$	$\log_5(1) = 0$
$4^{-2} = \frac{1}{16}$	$\Leftrightarrow$	$\log_4(\frac{1}{16}) = -2$
$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$	$\Leftrightarrow$	$\log_{\frac{1}{2}}(4) = -2$

9.3.2 Logarithmes particuliers

À l'inverse des exponentielles, les calculatrices basiques ne permettent pas le calcul de tous les logarithmes. Seuls les logarithmes en base 10 ou en base e ($e = 2,7172\cdots$) peuvent être calculés. Les touches des calculatrices sont du reste couplées la plupart du temps :

$$(10^x \quad \text{et} \quad \log) \qquad \text{et} \qquad (e^x \quad \text{et} \quad \ln)$$

Par mesure de simplification, ces deux fonctions s'écrivent normalement :

$$\log_{10}(x) = \log(x) = \textbf{Logarithme en base 10}$$
$$\log_e(x) = \ln(x) = \textbf{Logarithme naturel}$$

On vérifie facilement avec la calculatrice que $\log(1000) = 3$ ou encore $\ln(e) = 1$. Pour calculer les logarithmes qui ne sont ni en base 10 ou en base e, on utilise la règle de changement de base suivante :

$$\log_a(x) = \frac{\log(x)}{\log(a)} = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

Excel dispose de plusieurs fonctions pour calculer les logarithmes :

- `LOG` (nombre ; [base]) calcule le logarithme dans la base choisie (base 10 par défaut)
- `LOG10` (nombre) calcule le logarithme dans la base 10
- `LN` (nombre) calcule le logarithme dans la base e

Exemple 9.13

Calculer $\log_4(16)$

Solution

Ce calcul revient à se poser la question : «4 puissance combien égal 16 ?». Il est évident que la réponse est 2. En utilisant la règle du changement de base (soit en base 10 ou en base e) on trouve :

$$\log_4(16) = \frac{\log(16)}{\log(4)} = \frac{\ln(16)}{\ln(4)} = 2$$

$\log_4(16) =$ `LOG` $(16;4)$

Exemple 9.14

Calculer $\log_2(10)$

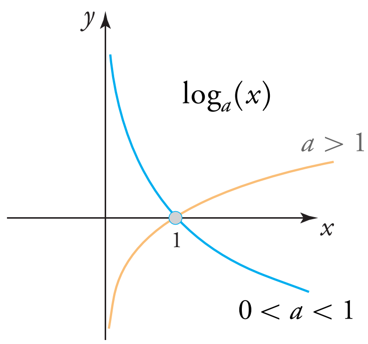
Solution

Ici, on n'arrive pas à trouver directement la valeur de x telle que $2^x = 10$. En passant par le changement de base on trouve :

$$\log_2(10) = \frac{\log(10)}{\log(2)} = \frac{\ln(10)}{\ln(2)} \simeq 3,321928$$

9.3.3 Graphe de la fonction logarithme

Le graphe de la fonction logarithme $f(x) = \log_a(x)$ est définie comme pour l'exponentielle pour $a > 0$ et $a \neq 1$ et possède une des deux formes représentées par la figure ci-après :



9.3.4 Propriétés des logarithmes

$\log_a(1) = 0$	$\log_a(a) = 1$
$\log_a(a^u) = u$	$a^{\log_a(u)} = u$
$\log_a(u) + \log_a(v) = \log_a(uv)$	$\log_a(u) - \log_a(v) = \log_a\left(\frac{u}{v}\right)$
$\log_a\left(\frac{1}{v}\right) = -\log_a(v)$	$\log_a(u^n) = n \cdot \log_a(u)$

Exemple 9.15

Écrire sous forme d'un logarithme l'expression suivante :

$$\ln(x^3) - \frac{1}{3}\ln(y^9) + 3\ln(x^{-1})$$

Solution

En utilisant les différentes propriétés, on obtient :

$$\begin{aligned}
&\ln(x^3) - \frac{1}{3}\ln(y^9) + 3\ln(x^{-1}) && \text{Donnée}\\
&= \ln(x^3) - \ln(y^{9(1/3)}) + \ln(x^{-1(3)}) && \text{Propriété } n\ln(x) = \ln(x^n)\\
&= \ln(x^3) - \ln(y^3) + \ln(x^{-3}) && \text{Simplifier les exposants}\\
&= \ln\left(\frac{x^3}{y^3}\cdot x^{-3}\right) && \text{Selon } \ln(x) + \ln(y) = \ln(xy)\\
&= \ln\left(\frac{x^0}{y^3}\right) && \text{Simplifier les exposants}\\
&= \ln\left(y^{-3}\right) && \text{Solution}
\end{aligned}$$

9.3.5 Equations logarithmiques

Domaine de définition

Dans une équation logarithmique, il faut être attentif à l'ensemble de définition. En effet, $\log_a(x)$ n'est défini que pour $x > 0$.

Exemple 9.16

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction : $f(x) = \sqrt{\log(x-3) - 2}$

Solution

- D'une part : $x - 3 > 0 \quad \rightarrow \quad x > 3$
- D'autre part : $\log(x-3) - 2 \geq 0$, ce qui conduit à :

$$\begin{aligned}
\log(x-3) &\geq 2 && \text{Isoler le log dans un membre}\\
x - 3 &\geq 10^2 && \text{Fonction réciproque appliquée de chaque côté}\\
x &\geq 103 && \text{Isoler x}
\end{aligned}$$

En résumant ces deux conditions on obtient : $x \in [103; +\infty[$

Formes simples

Les formes simples d'équations logarithmiques peuvent se ramener à une équivalence de deux logarithmes de même base ou d'un logarithme égal à une constante.

Exemple 9.17

Résoudre l'équation logarithmique suivante : $\ln(3x-12)=\ln(9)$

Solution

L'ensemble de définition est donné par : $3x-12>0$, c'est-à-dire $x>4$.

$\ln(3x-12)=\ln(9)$	Donnée
$3x-12=9$	On peut égaler le contenu des log
$x=7 \quad \in \text{ ED}$	Solution

Exemple 9.18

Résoudre l'équation exponentielle $3^x=10$

Solution

$3^x=10$	Donnée
$x=\log_3(10)$	Fonction réciproque
$x=\dfrac{\ln(10)}{\ln(3)}$	Changement de base
$x\simeq 2,0959$	Solution

Remarque

On arrive au même résultat par un chemin différent :

$3^x=10$	Donnée
$\ln(3^x)=\ln(10)$	On prend le ln de chaque côté
$x\cdot\ln(3)=\ln(10)$	Selon la propriété $\ln(x^n)=n\ln(x)$
$x=\dfrac{\ln(10)}{\ln(3)}$	Diviser par $\ln(3)$
$x\simeq 2,0959$	Solution

Exemple 9.19

Résoudre l'équation $\ln(x-3)+\ln(2)=\ln(9-x)$

Solution

- D'une part $x-3>0 \quad \rightarrow \quad x>3$
- D'autre part $9-x>0 \quad \rightarrow \quad x<9$

Ainsi, l'ensemble de définition ED s'écrit : $x \in]3;9[$

$$
\begin{aligned}
\ln(x-3)+\ln(2) &= \ln(9-x) && \text{Donnée}\\
\ln[2(x-3)] &= \ln(9-x) && \text{Selon la propriété } \ln(a)+\ln(b)=\ln(ab)\\
\ln(2x-6) &= \ln(9-x) && \text{Effectuer à l'intéreur du crochet}\\
2x-6 &= 9-x && \text{Égaler le contenu des deux ln}\\
3x &= 15 && \text{Résoudre}\\
x &= 5 \quad \in \text{ ED} && \text{Solution}
\end{aligned}
$$

Inéquations logarithmiques ou exponentielles
Comment résoudre une inéquation logarithmique ou exponentielle.

9.3.6 Transformations de modèles exponentiels

Les propriétés des logarithmes permettent très souvent de pouvoir résoudre des équations dont l'inconnue x se trouve en exposant. D'une manière plus générale, ils permettent de transformer une expression de type exponentielle en forme logarithmique et réciproquement.

Exemple 9.20

On donne la formule : $C_n = C_0(1+i)^n$. Résoudre par rapport à n.

Solution

$$
\begin{aligned}
C_n &= C_0(1+i)^n && \text{Donnée}\\
(1+i)^n &= \frac{C_n}{C_0} && \text{Isoler la partie exponentielle}\\
\ln(1+i)^n &= \ln\left(\frac{C_n}{C_0}\right) && \text{Appliquer le ln des deux côtés}\\
n\cdot\ln(1+i) &= \ln\left(\frac{C_n}{C_0}\right) && \text{Appliquer la propriété } \ln(x^n)=n\ln(x)\\
n &= \frac{\ln(C_n/C_0)}{\ln(1+i)} && \text{Diviser par } \ln(1+i) \text{ des deux côtés}
\end{aligned}
$$

Exemple 9.21

On donne la formule suivante $L = \alpha \cdot \log\left(\frac{P}{P_0}\right)$. Résoudre par rapport à P.

Solution

$L = \alpha \cdot \log\left(\frac{P}{P_0}\right)$	Donnée
$\frac{L}{\alpha} = \log\left(\frac{P}{P_0}\right)$	Diviser chaque membre par α
$10^{\frac{L}{\alpha}} = \frac{P}{P_0}$	Appliquer la fonction réciproque de chaque côté
$P = 10^{\frac{L}{\alpha}} \cdot P_0$	Multiplier par P_0 de chaque côté

9.3.7 Échelle logarithmique

L'**échelle logarithmique** est une alternative à l'échelle linéaire. Elle peut s'avérer préférable lorsque l'on étudie un phénomène utilisant une gamme étendue de valeurs. L'échelle logarithmique espace alors les valeurs faibles et rapproche les valeurs fortes.

Une **échelle semi - logarithmique** consiste à utiliser une graduation exponentielle sur un des deux axes. Dans l'exemple ci-après, l'axe des ordonnées suit une graduation exponentielle, en puissances de 10. Dans ce cas, le zéro n'apparaîtra pas.

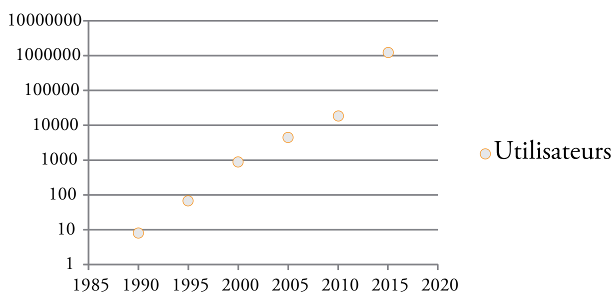
Exemple 9.22

Le nombre d'utilisateurs d'un certain produit a évolué comme suit :

Année	1990	1995	2000	2005	2010	2015
Utilisateurs	8	65	850	4 300	18 200	1 200 000

Établir un graphique semi-logarithmique correspondant à cette situation.

Solution



Exercices d'application de la section 9.3

25 [D'une forme à l'autre] Écrire ces égalités sous forme logarithmique :

(a) $4^x = 7$ **(b)** $12^2 = 144$ **(c)** $X^p = R$

26 [D'une forme à l'autre] Écrire ces égalités sous forme logarithmique :

(a) $2^x = 1/t$ **(b)** $e^{17x} = 1$ **(c)** $x^5 = 3$

27 [D'une forme à l'autre] Écrire ces égalités sous forme exponentielle :

(a) $\log_4(x) = 6$ **(b)** $\ln(\sqrt{x+1}) = 17$ **(c)** $\log_x(ab) = t$

28 [D'une forme à l'autre] Écrire ces égalités sous forme exponentielle :

(a) $\log_n(x) = 0$ **(b)** $\log(10x) = -1$ **(c)** $\ln(3 + \ln(2)) = \alpha$

29 [Sans calculatrice] Évaluer en utilisant les propriétés :

(a) $\log_2(32)$ **(b)** $\log_9(27)$ **(c)** $10^{3-\log(250)}$

30 [Sans calculatrice] Évaluer en utilisant les propriétés :

(a) $\log_2\left(\dfrac{16}{\sqrt{2}}\right)$ **(b)** $\log_{81}(3)$ **(c)** $9^{\log_3(4)}$

31 [Écriture concentrée] Écrire sous la forme d'un seul logarithme :

(a) $\ln(x) - \ln(x+1) + \ln(5)$ **(c)** $\log(x) - 3$

(b) $\dfrac{1}{2}(\log(x) + \log(y) - \log(2))$

32 [Écriture concentrée] Écrire sous la forme d'un seul logarithme :

(a) $\log_3(x) + \log_3(y) - \log_3(6)$ **(c)** $2[\ln(x) - 3(\ln(y) + \ln(z))]$

(b) $2\log(x^2 - 1) - \log(x+1) - \log(x-1)$

33 [ED] Donner l'ensemble de définition des fonctions ou équations ci-après :

(a) $f(x) = \log(x-1) + \log(3-x)$ **(c)** $\ln(5 - |x|) = 7$

(b) $f(x) = \dfrac{\log(x+2)}{\log(x) + 2}$

34 [ED] Donner l'ensemble de définition des fonctions ou équations ci-après :

(a) $\ln(6-x)=\ln(x^2-4)$

(b) $\log\left(2+\frac{1}{x}\right)=\log\left(2-\frac{1}{x}\right)$

(c) ☹ $f(x)=\sqrt{\dfrac{\log_{0,5}|x-2|}{|x|}}$

35 [Équation exponentielle] Résoudre les équations exponentielles suivantes :

(a) $3^{x+1}=50$ **(b)** $e^{\sqrt{x-1}}=10$ **(c)** $4^x-3\cdot 4^{-x}=8$

36 [Équation exponentielle] Résoudre les équations exponentielles suivantes :

(a) $\dfrac{5}{2^x}=1$ **(b)** $9^x-3^x=2$ **(c)** $3^{2-3x}=4^{2x+1}$

37 [Équation logarithmique] Résoudre les équations logarithmiques suivantes :

(a) $\ln(x-1)+\ln(3)=\ln(6)$

(b) $\log(x^2+1)-\log(x)=1$

(c) $\log(x)-\log(\sqrt{x})=1/2$

38 [Équation logarithmique] Résoudre les équations logarithmiques suivantes :

(a) $\ln(x)+\ln(x-1)=2\ln(x)$

(b) $\log^2(x)-\log(x)=6$

(c) $\log(x+2)-\log(\sqrt{x+2})=2$

39 [Transformation d'équation] Exprimer par rapport à x :

(a) $A=B(1+i)^x$ **(b)** $A=B(1+Ce^{kx})$ **(c)** $a^{bx+c}=d^{ex+f}$

40 [Transformation d'équation] Exprimer par rapport à x :

(a) $T=P-\beta\cdot\log(\beta-x)$ **(b)** $Y=A\cdot K^x\cdot L^{1-x}$ **(c)** ☹ $y=\dfrac{a^x-a^{-x}}{a^x-a^{-x}}$

41 [Inéquations] Résoudre les inéquations suivantes :

(a) $\log(5-x)\geq 1$ **(b)** $\log_{0,5}(3x-1)>2$ **(c)** $4^{x+2}\geq 4\cdot 2^{3x}$

42 [Inéquations] Résoudre les inéquations suivantes :

(a) $\log(5-x)\leq 1$ **(b)** $\ln(\log(4x+2))\geq 0$ **(c)** $-3^{2x}+7\cdot 3^x+18\geq 0$

9.4 Problèmes et exercices de synthèse

43 [Croissance de population] Si la population mondiale croît au taux nominal annuel continu de 2,54%, dans combien d'années aura-t-elle doublée ?

44 [Intérêts composés] Un capital de 35 000 frs est placé à intérêts composés au taux de 2,75%. Quelle est la durée du dépôt si le capital final sur le compte se monte à 44 679,11 frs ?

45 [Mémoire] Une étude dans une entreprise a montré que si l'on soumet une liste de 100 mots à une personne, le nombre N de mots qu'elle retiendra après t heures peut être modélisé par la formule :

$$N(t) = \frac{720}{10 + \ln^2(t)} \quad \text{pour } t \geq 1$$

(a) De combien de mots se souvient-elle après 2,5 heures ?

(b) Après combien d'heures se souvient-elle de 60 mots ?

46 [Annuités] Un établissement de crédit travaille avec un taux d'intérêt annuel i de 9%. Pour calculer l'annuité (montant fixe annuel) que le client devra payer en fonction de la durée n choisie, il utilise la formule suivante :

$$\text{Annuité} = \text{Capital emprunté} \times \frac{i}{1 - \left(\frac{1}{1+i}\right)^n}$$

(a) Quelle annuité paiera un client qui emprunte 40 000 frs pour une durée de 4 ans $(n = 4)$?

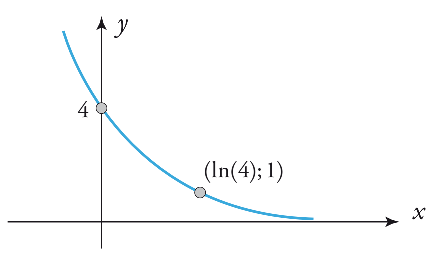
(b) Sachant qu'un client paie une annuité de 8 877,40 frs pour un capital emprunté de 34 530 frs, quelle est la durée de son crédit ?

47 [Amortissement comptable] Selon l'administration fédérale des contributions, il est admis d'amortir les machines de bureau à raison de 40% par an de leur valeur comptable. Un ordinateur ainsi qu'une photocopieuse viennent d'être achetés pour un prix global de 18 400 frs.

(a) Quelle est la valeur au bilan de ce matériel deux ans plus tard ?

(b) En combien d'années ce matériel aura perdu 90% de sa valeur initiale ?

48 Déterminer les paramètres α et β de la fonction exponentielle $f(x) = (1 + \alpha) \cdot e^{-\beta \cdot x}$ dont le graphe passe par les points suivants :



49 [Formule de Gompertz] Après t années, le nombre d'unités fabriquées par une entreprise est donné par la fonction de Gompertz suivante :

$$q(t) = 1000 \cdot 0,5^{(0,3^t)}$$

(a) Quelle est la production initiale ?

(b) Après combien d'années la barre des 990 unités sera-t-elle atteinte ?

50 [Offre et demande] Les fonctions de demande et d'offre d'un bien sont données par les expressions suivantes :

$$p = (q+1)e^{q} \qquad \text{et} \qquad p = 4(q+1)e^{-q}$$

Calculer les coordonnées du point d'équilibre.

51 [Table de mortalité] La table de mortalité belge HS 68/72 a été ajustée au moyen de la formule de Makeham suivante :

$$p_x = s\, g^{[c^x(c-1)]}$$

où p_x représente la probabilité annuelle de survie d'une personne d'âge x. Dans cette table, à quel âge une personne a-t-elle une probabilité de survie annuelle de 0,700685, connaissant les valeurs des paramètres ci-après :

$$s = 0,999407846 \qquad g = 0,999534390 \qquad \text{et} \quad c = 1,105046035$$

52 [Table de logarithmes] Voici un extrait des tables de logarithmes publiées en 1795 par Jean-François Callet (mathématicien français, 1744 - 1798)

ln(2)	0,69314
ln(3)	1,09861
ln(5)	1,60943
ln(6)	1,79175

Sans utiliser les fonctions logarithmes de votre calculatrice, donnez les valeurs approchées de :

(a) $\ln(2,5)$

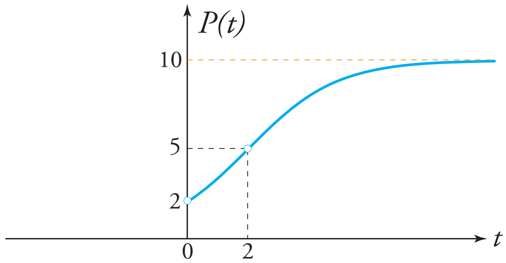
(b) $\ln(1/9)$

(c) $\ln(9 \cdot \sqrt{3})$

(d) $\ln(100\,000)$

(e) 2×3

53 [Fonction logistique] La croissance d'une certaine population en fonction du temps t (exprimé en années) a été la suivante :



En utilisant les informations fournies par le graphe, déterminer les paramètres A, C et r de cette fonction exponentielle définie comme suit :

$$P(t) = \frac{A}{1 + C \cdot 2^{-r \cdot t}} \qquad \text{avec } r \geq 1$$

54 [Nombre de chiffres] Pour connaître le nombre N de chiffres que comporte un nombre entier x, on peut utiliser la formule suivante :

$$N = \lfloor 1 + \log(x) \rfloor$$

(a) Combien le nombre 43 milliards compte-il de chiffres ?

(b) Classer ces nombres par ordre croissant : $9^{99} \quad 9^{(9^9)} \quad \left(9^9\right)^9 \quad 99^9$

55 [Défi] On donne l'équation $\log_x(y) + \log_y(x) = -2$. Que vaut alors $x\,y$?

56 [Défi] Résoudre algébriquement et sans calculatrice les équations suivantes :

(a) $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$

(b) ☹ $4^x + 6^x = 9^x$

(c) ☹ $(4 + \sqrt{15})^x + (4 - \sqrt{15})^x = 62$

57 [Défi] Quelle est la valeur de P ?

$$P = \sum_{k=3}^{5} \log_{60}(k^2)$$

Chapitre 10

Inéquations et systèmes d'inéquations

Objectifs du chapitre

- résoudre des inéquations linéaires.
- résoudre des inéquations polynomiales et rationnelles.
- résoudre des inéquations contenant des valeurs absolues.
- résoudre des inéquations contenant des racines carrées.
- déterminer l'ensemble de définition faisant appel aux inéquations.
- illustrer graphiquement l'ensemble des solutions d'un système d'inéquations linéaires.

Une **inéquation** est une égalité conditionnelle entre deux expressions algébriques. Elle est constituée de deux membres séparés par l'un des signes d'inégalité : $\leq$, $\geq$, $<$ ou $>$.

Les inéquations peuvent être résolues par des méthodes algébriques ou géométriques. Dans ce chapitre, on traitera surtout des méthodes algébriques.

Exemples d'inéquations

$$2x + 3 \leq 4x - 3 \qquad \text{Inéquation linéaire du premier degré}$$

$$2x + \frac{3}{x-2} > \frac{4x-1}{x+3} \qquad \text{Inéquation rationnelle}$$

$$x^2 - 8x \leq 5x + 7 \qquad \text{Inéquation du second degré}$$

Remarque

On utilise le même vocabulaire pour les inéquations et les équations : les **membres de gauche et de droite** de l'inéquation, l'**ensemble de définition** de l'inéquation, une **solution** de l'inéquation, l'ensemble des solutions de l'inéquation, **résoudre** l'inéquation, des inéquations équivalentes, une inéquation **impossible**, une inéquation **indéterminée**, etc...

10.1 Inéquations du premier degré

10.1.1 Propriétés

Soient a, b et c trois nombres réels,

- si $a < b$, alors $a + c < b + c$
- si $a < b$, et si $c > 0$, alors $ac < bc$
- si $a < b$, et si $c < 0$, alors $ac > bc$

Pour résoudre un inéquation on applique les mêmes règles que pour les équations à une seule différence près :

On change le sens d'une inégalité si l'on multiplie ou si l'on divise chaque membre de l'inéquation par un nombre négatif.

Exemple 10.1

Multiplier chaque membre de l'inégalité $-3 < 5$ par -2

Solution

$-3 < 5$	Donnée
$-3 \times (-2) > 5 \times (-2)$	Attention au changement de signe
$6 > -10$	

10.1.2 Exemples de résolution

Exemple 10.2

Résoudre l'inéquation suivante : $5(x-2) - 4(2x-3) \geq 40$

Solution

$5(x-2) - 4(2x-3) \geq 40$	Donnée
$5x - 10 - 8x + 12 \geq 40$	Effectuer les produits
$-3x \geq 38$	Réduire
$x \leq -\dfrac{38}{3}$	Diviser chaque membre par -3

Exemple 10.3

Résoudre l'inéquation suivante : $3(x-1)-2(x+2)>x$

Solution

$3(x-1)-2(x+2)>x$	Donnée
$3x-3-2x-4>x$	Effectuer les produits
$-7>0$	Réduire

Cette inéquation est impossible car la dernière inégalité n'est pas vérifiée : $S=\varnothing$

Exemple 10.4

Résoudre l'inéquation suivante : $4(2x+1)-3(2x-1)\geq 2x$

Solution

$4(2x+1)-3(2x-1)\geq 2x$	Donnée
$8x+4-6x+3\geq 2x$	Effectuer les produits
$7\geq 0$	Réduire

Inéquation indéterminée car la dernière inéquation est toujours vérifiée : $S=\mathbb{R}$

Exemple 10.5

Un analyste financier a montré que le coût pour produire et vendre x unités d'un certain produit est donné par $C=20x+1000$. Les revenus attendus sont donnés par $R=70x$. Trouver les valeurs pour x pour lesquelles la compagnie atteindra le seuil de rentabilité sur ce produit.

Solution

Il s'agit de résoudre l'inéquation suivante : $R\geq C$

$R\geq C$	Donnée
$70x\geq 20x+1000$	
$50x\geq 1000$	Réduire
$x\geq 20$	Diviser chaque membre par 50

La compagnie devra produire au moins 20 unités pour atteindre le seuil de rentabilité.

Exercices d'application de la section 10.1

1 [Inéquations du premier degré] Résoudre les inéquations suivantes :

(a) $\frac{x}{2} - \frac{4-x}{3} > 6$ **(b)** $x(x-6)+3 \leq x^2 - 2x$ **(c)** $(x-1)^2 - 5 > x(x-2)$

2 [Inéquations du premier degré] Résoudre les inéquations suivantes :

(a) $4(1-3x) - 2(5x-2) > 5$

(b) $6(x+2) + 8(1-2x) > -5(2x+4)$

(c) $113 + x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} > \frac{x}{5}$

3 [Intervalle] Exprimer les inéquations suivantes par un intervalle :

(a) $x \leq 14$ **(b)** $12 > x \geq -5$ **(c)** $x < 2$ ou $x \geq 18$

4 [Intervalle] Exprimer les inéquations suivantes par un intervalle :

(a) $100 < -x$

(b) $-5 \leq x \leq 5$

(c) $x \leq 4$ ou $x < 5$ ou $x > 7$

5 [Traduction] Traduire en inéquations les phrases suivantes :

(a) l'avoir de x dépasse la moitié de celui de y.

(b) Le bénéfice de l'entreprise x est au moins 3 fois plus grand que celui de l'entreprise y.

(c) Le total des ventes des trimestres $t_1; t_2; \ldots; t_4$ ne dépasse pas le budget fixé B.

6 [Traduction] Traduire en inéquations les phrases suivantes :

(a) Le triple de A est inférieur à B d'au moins 100.

(b) Une garderie accueille au moins 2 fois plus de garçons (x) que de filles (y).

(c) x coûte au moins 3 fois plus cher que y.

10.2 Les inéquations polynomiales et rationnelles

On appelle inéquations polynomiales ou rationnelles des inéquations du type :

$$x^2 - 5x + 6 \geq 0, \quad x^3 - x < 0, \quad \text{ou} \quad \frac{5x-6}{8x-5} > 18$$

Pour leur résolution, on peut utiliser une approche algébrique ou graphique.

10.2.1 Approche graphique

En faisant usage de la calculatrice, il faut :

1. représenter graphiquement la fonction.
2. déterminer les valeurs qui annulent la fonction (zéros de la fonction).
3. repérer le ou les intervalles où l'inéquation est satisfaite.

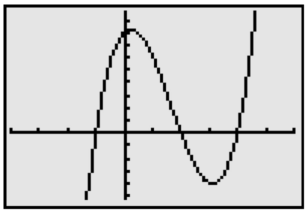
Exemple 10.6

Résoudre graphiquement l'inéquation suivante :

$$x^3 - 5x^2 + 2x + 8 \leq 0$$

Solution

À l'aide de la calculatrice, on trace le graphe de la fonction $f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8$



On repère ensuite les intervalles dans lesquelles la fonction f est plus petite ou égale à zéro, c'est-à-dire sous l'axe des x.
On constate alors que cette inéquation est satisfaite pour

$$x \in]-\infty; -1] \cup [2; 4]$$

10.2.2 Approche algébrique

Ce type d'équation peut être résolu presque plus simplement par voie algébrique. Pour cela il faut commencer par ramener l'inéquation à l'une des 4 formes suivantes :

$$\frac{P(x)}{Q(x)} > 0 \quad ; \quad \frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0 \quad ; \quad \frac{P(x)}{Q(x)} < 0 \quad ; \quad \frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0$$

(a) On dresse ensuite le **tableau des valeurs** en calculant les zéros de $P(x)$ et $Q(x)$.

(b) On note également les valeurs de x qui annulent le dénominateur. (L'ensemble des valeurs qui annulent ou devant être exclues sont appelées **valeurs critiques**)

(c) On calcule une valeur dans chaque intervalle (déterminé par les valeurs critiques) pour évaluer le signe de l'inéquation.

Exemple 10.7

Résoudre l'inéquation suivante $x^2 - x < 12$

Solution

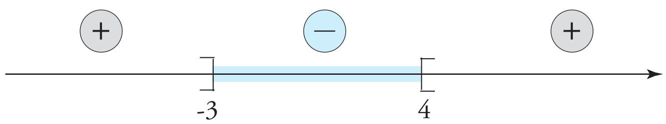
On commence par réécrire cette inéquation $x^2 - x - 12 < 0$ et l'on recherche les zéros de $x^2 - x - 12$

$$\begin{aligned} x^2 - x - 12 &= 0 \\ (x+3)(x-4) &= 0 \\ x+3 = 0 \quad \text{ou} \quad x-4 &= 0 \\ x = -3 \quad \text{ou} \quad x &= 4 \end{aligned}$$

On évalue cette inéquation dans chaque intervalle au moyen de valeurs arbitraires prises dans les intervalles respectifs :

- Par exemple, pour $x = -5$, on a : $(-5)^2 - (-5) - 12 = 18$ [Positif]
- Par exemple, pour $x = 0$, on a : $0^2 - 0 - 12 = -12$ [Négatif]
- Par exemple, pour $x = 5$, on a : $5^2 - 5 - 12 = 8$ [Positif]

Ces informations peuvent être synthétisées au moyen du tableau de signes suivant :



Donc $x^2 - x - 12 < 0$ est vérifiée pour $x \in]-3;4[$

Exemple 10.8

Résoudre l'inéquation suivante $\dfrac{2x-1}{3x+4} \leq 5$

Solution

On détermine l'ensemble de définition :

$$\text{ED} : x \in \left]-\infty; -\frac{4}{3}\right[\cup \left]-\frac{4}{3}; +\infty\right[$$

Il faut éviter l'erreur qui consiste à multiplier les deux membres par $3x+4$. En effet, l'expression $3x+4$ peut être positive ou négative selon la valeur de x ce qui peut conduire à devoir changer le signe de l'inéquation !

$$\frac{2x-1}{3x+4} \leq 5 \qquad \text{Donnée}$$

$$\frac{2x-1}{3x+4} - 5 \leq 0 \qquad \text{Ajouter } -5 \text{ dans chaque membre}$$

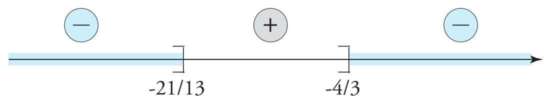
$$\frac{2x-1-5(3x+4)}{3x+4} \leq 0 \qquad \text{Mise au même dénominateur}$$

$$\frac{-13x-21}{3x+4} \leq 0 \qquad \text{Réduire}$$

On calcule ensuite les zéros du numérateur et du dénominateur :

$$\begin{cases} -13x-21=0 & \text{ou} \quad x=-21/13 \\ 3x+4=0 & \text{ou} \quad x=-4/3 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \text{Valeur à inclure} \\ \text{Valeur à exclure} \end{array}$$

Cela nous permet de créer 3 intervalles dans lesquels on teste une valeur.



L'inéquation est plus petite ou égale à zéro pour $x \in \left]-\infty; -\frac{21}{13}\right] \cup \left]-\frac{4}{3}; +\infty\right[$

Exercices d'application de la section 10.2

7 [Inéquations polynomiales] Résoudre les inéquations suivantes :

(a) $x^2 > 5$ **(b)** $-\frac{1}{4}(x+3)\left(x-\frac{1}{3}\right) > 0$ **(c)** $2x^2+4x+9 \leq 0$

8 [Inéquations polynomiales] Résoudre les inéquations suivantes :

(a) $3x^2+1 > 2x(x+1)$ **(b)** $x^3+2x^2-9x-18 \leq 0$ **(c)** $x^3(x+2) > x^5(5-x)$

9 [Inéquations polynomiales] Résoudre les inéquations suivantes :

(a) $\dfrac{x^2-1}{4x^2-9} \geq 0$ **(b)** $\dfrac{x(x+1)(x-3)}{x} < 0$ **(c)** $\dfrac{(1-x)^3(x-2)^2}{(x-3)^2} > 0$

10 [Inéquations polynomiales] Résoudre les inéquations suivantes :

(a) $\dfrac{(4x+3)^2}{4-2x} \geq 0$ **(b)** $\dfrac{(x-3)(5x-6)}{x^2(10x-2)} \geq 0$ **(c)** $\dfrac{-x^2+5x-6}{x^2+4x-5} < 0$

11 [Inéquations polynomiales] Résoudre les inéquations suivantes :

(a) $x \leq \dfrac{1}{x}$ **(b)** $\dfrac{x+3}{x+2} < \dfrac{2x}{x-5}$ **(c)** $\dfrac{1}{x^2-1} \geq \dfrac{1}{x-1}$

12 [Inéquations polynomiales] Résoudre les inéquations suivantes :

(a) $\dfrac{3}{4+x} - \dfrac{2x}{x-1} \leq 0$ **(b)** $\dfrac{x+1}{x+2} + \dfrac{x+3}{x+4} > 2$ **(c)** $\dfrac{(2x-1)^3}{x^2} < 4-8x$

10.3 Autres types d'inéquations

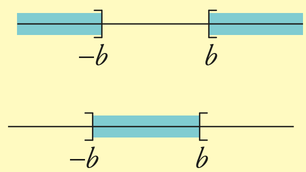
10.3.1 Inéquations avec valeurs absolues - cas simple

Si l'inéquation est de la forme

$$|x| > b \quad ; \quad |x| \geq b \quad ; \quad |x| < b \quad ; \quad |x| \leq b \quad (\text{avec } b \in \mathbb{R})$$

on peut alors appliquer les règles suivantes :

- Si $b > 0$ alors $\begin{cases} |x| \geq b \begin{array}{l} \nearrow x \geq b \quad \textbf{ou} \\ \searrow x \leq -b \end{array} \\ |x| \leq b \begin{array}{l} \nearrow x \leq b \quad \textbf{et} \\ \searrow x \geq -b \end{array} \end{cases}$



- Si $b < 0$ alors $\begin{cases} |x| \geq b \rightarrow \mathbb{R} \\ |x| \leq b \rightarrow \text{Impossible} \end{cases}$

Exemple 10.9

Résoudre l'inéquation suivante : $|x-3| < 2$

Solution

Comme $b = 2 > 0$, on peut écrire immédiatement :

$$\begin{array}{ccc} x-3 < 2 & \text{et} & x-3 > -2 \\ x < 5 & \text{et} & x > 1 \end{array}$$

Conclusion : $x \in]1;5[$

Exemple 10.10

Résoudre l'inéquation suivante : $|x-3|>2$

Solution
Comme $b=2>0$, on peut écrire immédiatement :

$$\begin{aligned} x-3&>2 && \text{ou} && x-3<-2 \\ x&>5 && \text{ou} && x<1 \end{aligned}$$

Conclusion : $x \in]-\infty;1[\cup]5;\infty[$

Exemple 10.11

Résoudre l'inéquation suivante : $|3x-\sqrt{15}|>-17$

Solution
Une valeur absolue étant toujours positive, toutes les valeurs de x vérifient donc cette inéquation.
Conclusion : $x \in \mathbb{R}$

Exemple 10.12

Résoudre l'inéquation suivante : $|3x-\sqrt{15}|<-17$

Solution
Une valeur absolue étant positive ne peux jamais être plus petite qu'un nombre négatif donné. Par conséquent cette inéquation n'a pas de solution.
Conclusion : $x \in \varnothing$

10.3.2 Inéquations avec valeurs absolues - cas général

La méthode générale permet de résoudre des inéquations de la forme : $|x-3|>2x$ ou $|3x-5|\leq x+8$, etc.. D'une manière générale on peut écrire :

- Si l'inéquation est de la forme : $|f(x)|\geq g(x)$, alors :

$$f(x)\geq g(x) \quad \text{ou} \quad f(x)\leq -g(x)$$

- Si l'inéquation est de la forme : $|f(x)|\leq g(x)$, alors :

$$f(x)\leq g(x) \quad \text{et} \quad f(x)\geq -g(x)$$

Équations ou inéquations avec valeurs absolues
Technique rapide de résolution.

Exemple 10.13

Résoudre l'inéquation suivante : $|x-3| < x$

Solution

$$x-3<x \qquad \textbf{et} \qquad x-3>-x$$

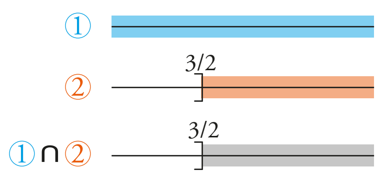
En simplifiant :

$$-3<0 \qquad \textbf{et} \qquad x>3/2$$

C'est-à-dire :

$$\mathbb{R} \ ① \qquad \textbf{et} \qquad x>3/2 \ ②$$

Graphiquement, cela donne :



La synthèse donne : $x \in \left]\frac{3}{2}\,;+\infty\right[$

Exemple 10.14

Résoudre l'inéquation suivante : $|3x+4| > -x$

Solution

$$3x+4>-x \qquad \textbf{ou} \qquad 3x+4<x$$

En simplifiant :

$$x>-1 \qquad \textbf{ou} \qquad x<-2$$

C'est-à-dire : $x \in \left]-\infty\,;-2\right[\cup \left]-1\,;\infty\right[$

10.3.3 Doubles inéquations

On appelle une double inéquation, une inéquation de la forme

$$a < x < b \quad ; \quad a \leq x \leq b \quad (\text{avec } a, b \in \mathbb{R})$$

Dans ce cas, il s'agit simplement de séparer le problème en deux inéquations ou d'isoler, si possible, l'inconnue au centre de l'inéquation, en vérifiant au préalable que la relation $a < b$ soit vraie.

Exemple 10.15

Résoudre l'inéquation suivante : $-6 < 2x - 3 \leq 5$

Solution

Méthode 1 : Séparer le problème en deux :

$$\begin{array}{rcr} -6 < 2x - 3 & \quad \textbf{et} \quad & 2x - 3 \leq 5 \\ -3 < 2x & & 2x \leq 8 \\ -3/2 < x & & x \leq 4 \end{array}$$

Conclusion : $x \in \left]-\frac{3}{2}; 4\right]$.

Méthode 2 : Isoler l'inconnue au centre de l'inéquation :

$$\begin{array}{rcl} -6 < & 2x - 3 & \leq 5 \\ -6+3 < & 2x & \leq 5+3 \\ -\frac{3}{2} < & x & \leq \frac{8}{2} \end{array}$$

La dernière ligne donne directement la solution : $x \in \left]-\frac{3}{2}; 4\right]$.

10.3.4 Inéquations avec des racines carrées

Inéquations de la forme $\sqrt{f(x)} < g(x)$

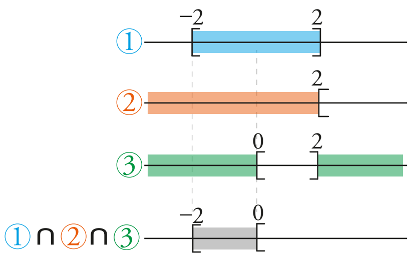
$$\sqrt{f(x)} < g(x) \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < g(x)^2 \end{cases}$$

Exemple 10.16

Résoudre l'inéquation $\sqrt{4-x^2} < 2-x$

Solution

$$\begin{cases} 4-x^2 \geq 0 \\ 2-x > 0 \\ 4-x^2 < (2-x)^2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} (2-x)(2+x) \geq 0 & ① \\ x < 2 & ② \\ 2x(x-2) > 0 & ③ \end{cases}$$



Ainsi : $x \in [-2;0[$

Inéquations de la forme $\sqrt{f(x)} > g(x)$

$$\sqrt{f(x)} > g(x) \longrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \quad \textbf{ou} \quad \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > g(x)^2 \end{cases}$$

Exemple 10.17

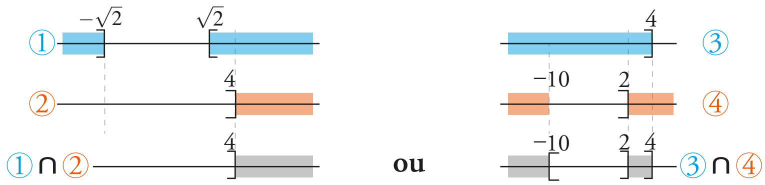
Résoudre l'inéquation $\sqrt{2x^2-4} > 4-x$

Solution

$$\begin{cases} 2x^2-4 \geq 0 \\ 4-x < 0 \end{cases} \quad \textbf{ou} \quad \begin{cases} 4-x \geq 0 \\ 2x^2-4 > (4-x)^2 \end{cases}$$

Après simplification...

$$\begin{cases} (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}) \geq 0 & ① \\ x > 4 & ② \end{cases} \quad \textbf{ou} \quad \begin{cases} x \leq 4 & ③ \\ (x-2)(x+10) > 0 & ④ \end{cases}$$



Ainsi : $x \in [-\infty; -10[\cup]2; \infty[$

10.3.5 Domaine de définition et inéquations

On a recours souvent aux inéquations pour calculer l’ensemble de définition d’une fonction ou d’une équation.

Les deux situations suivantes amènent à la résolution d’une inéquation :

$$\begin{cases} \sqrt[\text{paire}]{x}, & \text{conduit à } x \geq 0 \\ \log(x) \text{ ou } \ln(x) & \text{conduit à } x > 0 \end{cases}$$

Exemple 10.18

Déterminer l’ensemble de définition de : $f(x) = \ln(\sqrt{x-4} - 10)$

Solution

Il faut envisager deux cas de figure :

$$\begin{aligned} x - 4 &\geq 0 \\ x &\geq 4 \end{aligned} \qquad \textbf{et} \qquad \begin{aligned} \sqrt{x-4} - 10 &> 0 \\ \sqrt{x-4} &> 10 \\ x - 4 &> 100 \\ x &> 104 \end{aligned}$$

Donc $x \in]104; +\infty[$

Exemple 10.19

Déterminer l’ensemble de définition et tracer le graphe de la fonction :

$$f(x) = \sqrt{\frac{x-3}{x^2-4}}$$

Solution

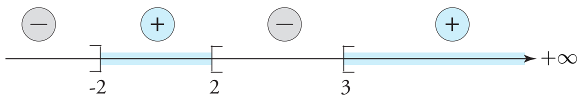
Cette fonction est définie si :

$$x^2 - 4 \neq 0 \quad \text{et} \quad \frac{x-3}{x^2-4} \geq 0$$

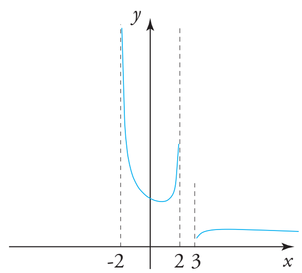
Comme $x^2 - 4$ est compris dans l'étude de $\dfrac{x-3}{x^2-4}$, il suffit d'analyser :

$$\frac{x-3}{x^2-4} \geq 0$$
$$\frac{x-3}{(x-2)(x+2)} \geq 0 \qquad \text{Factoriser la fraction}$$

On dresse ensuite le tableau des signes en excluant 2 et -2 du dénominateur.



Conclusion : ED est donné par $x \in]-2;2[\cup [3;+\infty[$
Le graphe de cette fonction est le suivant :



Exercices d'application de la section 10.3

13 [Valeurs absolues simples] Résoudre les inéquations suivantes :

(a) $|1-2x| < 3$ **(b)** $|4x+3| \geq 5$ **(c)** $\dfrac{|3x+4|}{-3} > -2$

14 [Valeurs absolues simples] Résoudre les inéquations suivantes :

(a) $|x+1|+1 > 0$ **(b)** $-4|-x-2| > -4$ **(c)** $\dfrac{3}{|5-2x|} < 2$

15 [Valeurs absolues] Résoudre les inéquations suivantes :

(a) $|4-2x| > x+1$ **(b)** $|10x| < 5x+15$ **(c)** $|2-x^2|+3x+2 \geq 0$

16 [Valeurs absolues] Résoudre les inéquations suivantes :

(a) $|13-14x| \leq 15-4x$ **(b)** $-3|-2x+4| > 6-2x$ **(c)** $|3+2x^2| < 3x+5$

17 [Doubles inéquations] Résoudre les inéquations suivantes :

(a) $-2 \leq 2-x \leq 3,5$

(b) $4 \leq x^2 \leq 16$

(c) $\begin{cases} 7x-5 \geq x+1 \\ 9-2x > 2x+1 \end{cases}$

18 [Doubles inéquations] Résoudre les inéquations suivantes :

(a) $20 > \dfrac{5x-15}{3} \geq 10$

(b) $-200 < \dfrac{1}{x} < -100$

(c) $-(x+3) \leq \dfrac{4x}{6-x} \leq 2x+10$

19 [Inéquations avec racines] Résoudre les inéquations suivantes :

(a) $\sqrt{x-2} > 4$ **(b)** $x+\sqrt{x} \leq 1$ **(c)** $\sqrt{2x+1} \geq x+1$

20 [Inéquations avec racines] Résoudre les inéquations suivantes :

(a) $\sqrt{x^2-4} > -2$ **(b)** $\sqrt{5x^2+1}-2x+5 \leq 0$ **(c)** $x+1 > \sqrt{x^2-x}$

21 [ED] Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

(a) $f(x) = \sqrt{2x+11}-|x|$

(b) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2-x}{x^2+2x}}$

(c) $f(x) = (1-5x^{-1}+6x^{-2})^{-1/2}$

22 [ED] Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

(a) $f(x) = \dfrac{\ln(|x|-3)}{x}$ **(b)** $f(x) = \sqrt{x-2\sqrt{x}}$ **(c)** $f(x) = \sqrt{12x-|6x|}$

10.4 Systèmes d'inéquations linéaires

10.4.1 Introduction

Une **inéquation linéaire** est une inéquation pouvant être écrite sous l'une des formes suivantes :

$$ax+by<c \quad ax+by>c \quad ax+by \leq c \quad ax+by \geq c$$

Résoudre une inéquation en x et y signifie trouver tous les points $(a;b)$ dans le plan xy qui satisfont l'inéquation donnée.

Exemple 10.20

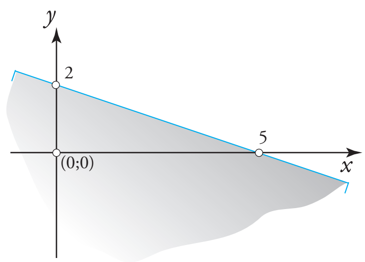
Le point $(4;5)$ vérifie l'inéquation linéaire suivante : $3x - 2y \leq 6$, car :

$$3 \times 4 - 2 \times 5 = 2 \leq 6$$

Une inéquation linéaire possède en principe une infinité de solutions. La façon la plus simple de représenter ces solutions c'est la représentation graphique en hachurant **la partie du plan** satisfaisant l'inéquation.

Exemple 10.21

L'inéquation linéaire $2x + 5y \leq 10$, est satisfaite pour l'ensemble des points $(x;y)$ du demi-plan ci-après :



10.4.2 Représentation graphique

Pour représenter graphiquement une inéquation linéaire, on procède de la façon suivante :

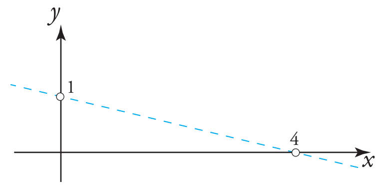
1. On remplace le signe d'inégalité par le signe d'égalité : $ax + by = c$
2. On trace la droite d'équation y en traitillés si l'inéquation est de la forme $<$ ou $>$ (**les points sur la droite sont exclus**) ou en trait plein si elle est de la forme $\leq$ ou $\geq$ (**les points sur la droite vérifient l'inéquation**). On appelle cette droite la **frontière**.
3. On choisit un point quelconque qui n'est pas sur la frontière, par exemple le point $(0;0)$. Si ce point vérifie l'inéquation donnée, alors on hachure la partie du plan contenant ce point. Si ce n'est pas le cas, on hachure l'autre partie du plan.

Exemple 10.22

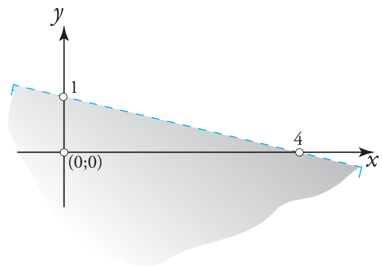
Représenter l'ensemble des solutions de $x + 4y < 4$

Solution

1. $x + 4y = 4$
2. $4y = -x + 4$ ou $y = -\frac{x}{4} + 1$ (frontière)
3. Comme cette inéquation a le signe $<$, on trace cette droite en traitillés pour indiquer que les points sur la frontière **ne sont pas des solutions** de l'inéquation.



4. On choisit par exemple le point $(0;0)$. Ce point vérifie l'inéquation donnée car $0 + 4 \times 0 = 0$. Comme $0 < 4$, ce point est solution de cette inéquation. On hachure donc le demi-plan contenant le point $(0;0)$.

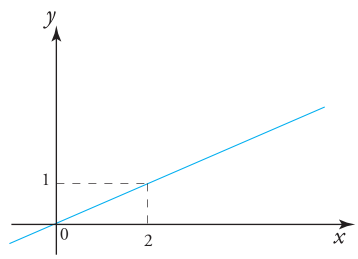


Exemple 10.23

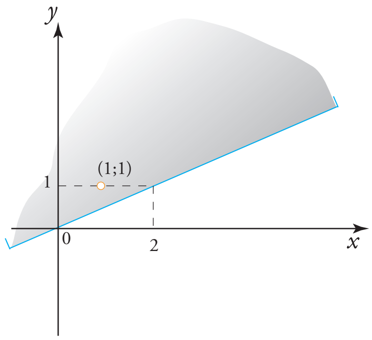
Représenter l'ensemble des solutions de $x \leq 2y$

Solution

1. $x = 2y$
2. $y = \frac{x}{2}$ (frontière)
3. Comme cette inéquation a le signe $\leq$, on trace cette droite en trait plein pour indiquer que les points sur la frontière sont des solutions de l'inéquation.



4. On choisit par exemple le point $(1;1)$. Ce point vérifie l'inéquation donnée car $1 \leq 2 \times 1$. Comme $1 \leq 2$, ce point est solution de cette inéquation. On hachure donc le demi-plan contenant le point $(1;1)$.



10.4.3 Systèmes d'inéquations linéaires

Lorsque l'on est en présence d'un système d'inéquations linéaires, on commence par traiter séparément chaque inéquation et à dessiner son graphe. La région du plan commune aux deux inéquations représente alors la solution du système.

Pour s'épargner des difficultés de représentation on peut utiliser pour chaque inéquation deux crochets orientés vers la région du plan satisfaisant l'inéquation.

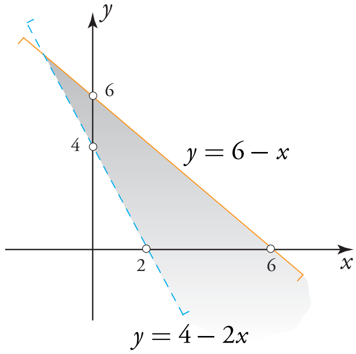
Exemple 10.24

Représenter l'ensemble des solutions du système :

$$\begin{cases} x + y \leq 6 \\ 2x + y > 4 \end{cases}$$

Solution

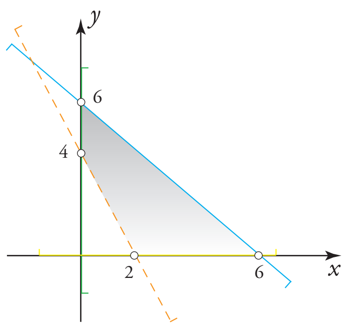
1. On commence par tracer les deux frontières :
   $y = 6 - x$ (en trait plein) et $y = -2x + 4$ (en traitillés).
2. On choisit un point test, qui n'est pas sur les deux droites, par exemple $(0;0)$. Ce point satisfait la première inéquation. On met alors deux crochets sur cette droite du côté où l'inéquation est satisfaite.
3. On teste ensuite $(0;0)$ dans l'autre inéquation. L'inéquation n'étant pas satisfaite en ce point, on met alors deux crochets sur cette droite mais orientés de l'autre côté.
   Il suffit ensuite d'hachurer la région comprise entre les «pinces de la tenaille».



Dans les calculs de programmation linéaire dont on parlera dans un prochain chapitre, on complète souvent les systèmes d'inéquations par des conditions sur les x et les y, par exemple $x \geq 0$ ou $y \geq 0$. Dans ce cas, l'exemple précédent s'écrirait en termes d'inégalités :

$$\begin{cases} x + y \leq 6 \\ 2x + y > 4 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

Ce qui conduirait à la solution suivante :



Exercices d'application de la section 10.4

23 [Test de valeur] Quel point vérifie l'inéquation $3x - 5y < -8$?

$A(0;0)$ $\quad B(\sqrt{18};\sqrt{18})$ $\quad C(1;2)$ $\quad D(25;15)$

24 [Test de valeur] Quel point ne vérifie pas le système suivant ? $\begin{cases} 2x - 3y \geq 4 \\ x + y \leq 8 \end{cases}$

$A(5;2)$ $\quad B(8;0$ $\quad C(5.6;2.4)$ $\quad D(3;1)$

25 [Représentation graphique] Dessiner la partie du plan vérifiant les systèmes suivants :

(a) $\begin{cases} y+5<15x \\ y-x>4 \end{cases}$ **(b)** $\begin{cases} 10y-10x \geq 20 \\ 8y-4x \leq 24 \end{cases}$

26 [Représentation graphique] Dessiner la partie du plan vérifiant les systèmes suivants :

(a) $\begin{cases} 3x+5y<15 \\ y-x \leq 0 \end{cases}$ **(b)** $\begin{cases} 4x+11y-44>0 \\ 50x-82y+82 \geq 0 \end{cases}$

27 [Représentation graphique] Dessiner la partie du plan vérifiant les systèmes suivants :

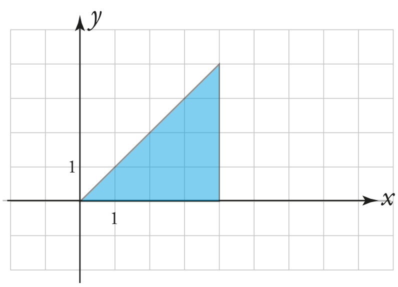
(a) $\begin{cases} x \geq y \\ x \leq 2y \\ x \leq 3 \end{cases}$ **(b)** $\begin{cases} |x| \leq 3 \\ |y|>1 \end{cases}$

28 [Représentation graphique] Dessiner la partie du plan vérifiant les systèmes suivants :

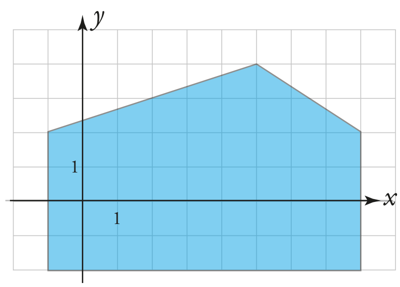
(a) $\begin{cases} |x+5| \leq 2 \\ |y-3| \leq 3 \end{cases}$ **(b)** $\begin{cases} |x+y|>3 \\ y \leq 2 \\ y \geq 0 \end{cases}$

29 [Système d'inéquations] Écrire le système d'inéquations correspondant aux régions suivantes :

(a)

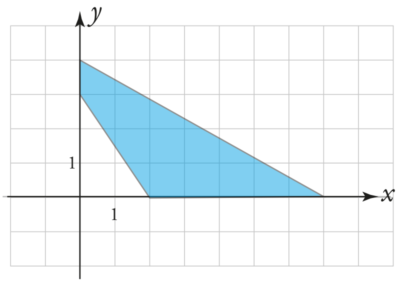


(b)

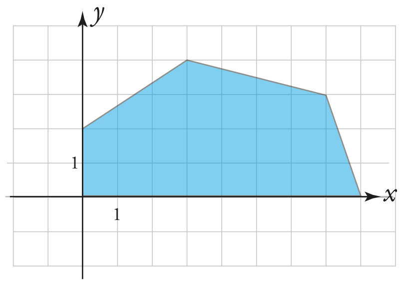


30 [Système d'inéquations] Écrire le système d'inéquations correspondant aux régions suivantes :

(a)



(b)



10.5 Problèmes et exercices de synthèse

31 [Production] Un fabricant de rasoirs électriques fabrique deux modèles, le $G1$ et le $G2$. Pour réponde à la demande, la production du modèle $G1$ ne dépasse pas la moitié de la production du modèle $G2$. Par ailleurs, la capacité de production totale de l'entreprise ne peut dépasser les 1 200 rasoirs par semaine.

(a) Écrire un système d'inégalités qui décrive les possibilités de fabrication hebdomadaire x du modèle $G1$ et y du modèle $G2$.

(b) Représenter graphiquement ces inégalités.

32 [Dépenses] Un commercial parcourt la Suisse romande et la Suisse allemande. Ses dépenses quotidiennes moyennes sont de 120 frs en Suisse allemande et de 100 frs en Suisse romande. Sa compagnie lui accorde un enveloppe annuelle de 18 000 frs pour ses dépenses, mais lui impose de passer au moins 50 jours en Suisse allemande et 60 jours en Suisse romande. Quelles sont ses possibilités d'action ?

33 [Investissement] Vous disposez d'une somme maximale de 5 000 frs que vous souhaitez investir dans des actions et des obligations. Vous ne souhaitez pas investir plus que 4 000 frs en actions ni plus de 4 000 frs en obligations. Quelles sont vos possibilités de placement ?

34 [Stockage] Dans un entrepôt, on stocke deux types d'appareils, A et B. En fonction de la demande, il y a lieu d'avoir au moins 3 fois plus d'appareils A que d'appareils B. De plus, il faudrait toujours avoir au moins 5 appareils B et 10 appareils A afin de ne pas être en rupture de stock. Représenter graphiquement les possibilités de stockage de ces deux appareils sachant que l'entrepôt ne peut contenir que 120 appareils au maximum.

35 [production agricole] Un cultivateur de légumes a un terrain de 10 hectares pour la saison. Il a décidé de cultiver de la laitue et des fèves sur ce terrain, et il a prévu un budget de 4 000 frs à cette fin. La laitue coûte 300 frs /hectare à cultiver et les fèves 500 frs /hectare.

(a) Écrire un système d'inégalités qui décrive les possibilités de production.

(b) Représenter graphiquement ces inégalités.

36 [Concert] Un concert est organisé dans la cathédrale de Lausanne. Il y a 900 places disponibles. Les meilleures places sont à 40 frs et toutes les autres places à 20 frs. Il est impératif que l'on vende au moins 300 places à 40 frs. L'ensemble des ventes permettant de couvrir les frais devrait atteindre les 20 000 frs. Représenter graphiquement un système d'inéquations permettant de décrire toutes les possibilités de fixer le nombre de billets de chaque type de place.

37 [Espérance de vie] À l'âge x, avec $0 \leq x \leq 80$, l'espérance de vie (e_x) d'un homme selon une certaine table de mortalité est donné par : $e_x = -0,8x + 70,5$ Pour quelle tranche d'âge a-t-on une espérance de vie comprise entre 42,5 ans et 54,5 ans ?

38 [Température] La formule suivante lie la température Fahrenheit et Celsius :

$$C = \frac{5}{9}(F - 32)$$

En Suisse, le 26 janvier 2005, la température s'est située entre : $-30,4° \leq C \leq -3°$. Exprimer cette situation en degrés Fahrenheit.

39 [Coûts] Deux entreprises sont en concurrence sur un même type de produit.

- L'entreprise A a des charges fixes de 600 000 frs et des coûts variables estimés à $200x$.
- L'entreprise B a des charges fixes de 400 000 frs et des coûts variables estimés à $250x$.

Jusqu'à quel niveau de production x l'entreprise B a-t-elle un coût total (CT) de production inférieur à l'entreprise A ?

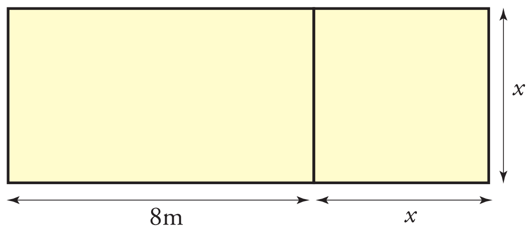
40 [Rémunération] La Société Speedza livre des pizzas à domicile. À ses vendeurs, elle offre à choix deux modèles de rémunération :

- Modèle 1 : Salaire mensuel 4500 frs + 5% de commission sur les ventes.
- Modèle 2 : Salaire mensuel 4000 frs + 10% de commission sur les ventes.

Quel volume mensuel de vente un vendeur doit-il atteindre pour que le modèle 2 soit plus intéressant ?

41 [Profit mensuel] On souhaite ouvrir un nouveau restaurant. On sait que si on aménage 120 places, on aura un profit mensuel de 72 frs par place. Cependant, pour chaque place au delà de 120, le profit mensuel par place diminue de 0,5 frs. Combien de places doit-on aménager si l'on souhaite un profit mensuel compris entre 8640 frs et 8712 frs ?

42 [Surface commerciale] On souhaite aménager deux locaux commerciaux contigus selon le schéma suivant :



Quelle(s) valeur(s) faut-il donner à x (en nombre entier de mètres) pour que l'aire globale des locaux soit comprise entre 75 et 100 m^2 ?

43 [Surface terrain] On dispose de 100 m de clôture pour entourer un terrain rectangulaire. Pour quelle largeur x la surface clôturée aura-t-elle au moins 600 m^2 ?

44 [Possibilités de consommation] Un pain au noix coûte 20 cts de moins qu'un pain bûcheron. Avec un billet de 20 frs, un client a pu acheter 6 pains aux noix et 9 pains bûcherons. Trouver les prix possibles d'un pain au noix, sachant qu'il coûte plus de 1 fr et que les prix sont toujours arrondis à 5 centimes.

45 [Défi] Deux personnes se donnent rendez-vous à un endroit déterminé entre 19h00 et 20h00. Elles conviennent que la première arrivée s'en ira après une attente de 20 minutes au maximum. Déterminer graphiquement la zone de rencontre possible de ces deux personnes.

46 [Défi] La réponse de cet exercice

$$\left|1-\frac{|x|}{1+|x|}\right| \geq \frac{1}{2}$$

peut être donnée sous la forme $a \leq x \leq b$. Que vaut $b-a$?

Chapitre 11

Optimisation linéaire

Objectifs du chapitre

- formuler et représenter les contraintes sous forme d'inéquations.
- illustrer graphiquement et résoudre des problèmes d'optimisation linéaire à deux variables.
- utiliser le Solver Excel pour la résolution de problèmes d'optimisation linéaire ou non linéaire à plusieurs variables ou en nombres entiers.

11.1 Introduction

L'**optimisation** ou **programmation linéaire** est un ensemble de méthodes mathématiques permettant en principe de modéliser et d'optimiser des systèmes de production. C'est un outil de décision basé essentiellement sur des prévisions ou des contraintes non probabilistes.

Les domaines d'application de ces problèmes sont très nombreux dans les secteurs de l'industrie, de l'énergie, des transports et des télécommunications, de la finance, etc.

Dans les cas les plus simples, les problèmes d'optimisation linéaires peuvent être résolus graphiquement. Dans les cas plus complexes, on a recours au solveur d'Excel.

Dans bien des cas en optimisation linéaire, il s'agit de rendre maximum (ou minimum) une équation, représentant généralement un bénéfice (ou un coût), appelée **fonction objectif** ou **fonction économique** et dépendant d'un ensemble de conditions appelées **contraintes** touchant les différents types d'objets produits. Ces contraintes peuvent concerner par exemple leur fabrication (parc de machines n'autorisant qu'un certain nombre d'heures de travail), leur stockage (place à disposition limitée), leur vente (nombre minimum et maximum de pièces qu'il faut mettre en circulation pour approvisionner le marché), etc.

L'ensemble des contraintes est formée par des systèmes d'inéquations étudiés au chapitre précédent. Ces contraintes sont de la forme :

$$2x + 3y + 4z \leq 80 \quad \text{ou} \quad x \geq 0 \quad \text{ou} \quad y \geq 0$$

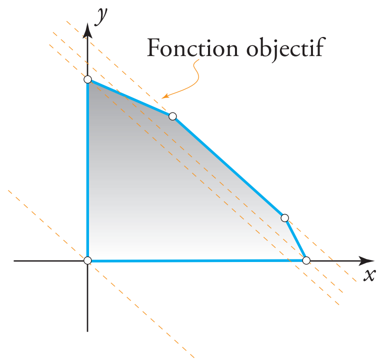
La fonction objectif est de la forme :

$C = 2x - 3y$ ou plus général dans le cas de n variables : $Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n$

11.2 Optimisation linéaire à deux variables

11.2.1 Résolution par évaluation des sommets

Lorsque le nombre de types d'objets ou de variables est égal à 2 (ou peut se ramener à 2), il est possible de représenter graphiquement la situation sur un système d'axes x, y.



Pour résoudre le problème d'optimisation, on procède de la façon suivante :

1. On trace la région délimitée par l'ensemble des contraintes. (voir figure ci-dessus)
2. On détermine les coordonnées de chaque sommet de la région.
3. On évalue la fonction objectif pour chacun des sommets déterminés.
4. On choisit le ou les sommets donnant la valeur maximum ou minimum de la fonction objectif.
5. Si deux sommets donnent un même maximum de la fonction objectif, alors tout le segment de droite entre ces deux sommets est un maximum de la fonction objectif.

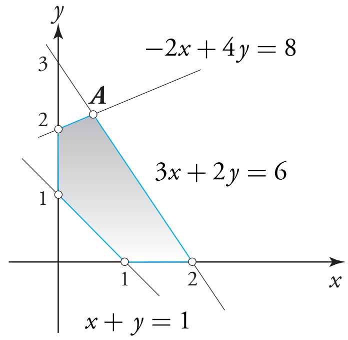
Exemple 11.1

Trouver les valeurs maximum et minimum de la fonction objectif
$Z = 2x + 5y$, sous contraintes :

$$\begin{cases} 3x + 2y & \leq & 6 \\ -2x + 4y & \leq & 8 \\ x + y & \geq & 1 \\ x\,;\,y & \geq & 0 \end{cases}$$

Solution

On commence par tracer la région délimitée par l'ensemble des contraintes :



On détermine ensuite les différents sommets de la région. Pour le sommet A, il suffit de résoudre le système suivant :

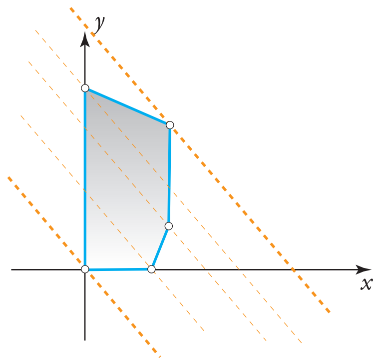
$$\begin{cases} 3x+2y &= 6 \\ -2x+4y &= 8 \end{cases}$$

Ce qui donne $x=0,5$ et $y=2,25$.
Nous avons donc les sommets suivants : $(0;1)$ $(0;2)$ $(0,5;2,25)$ $(2;0)$ $(1;0)$
Pour chaque sommet, on détermine la valeur Z de la fonction objectif :

Sommet	Valeur de Z	$=2x+5y$
$(0;1)$	$2(0)+5(1)$	$=5$
$(0;2)$	$2(0)+5(2)$	$=10$
$(0,5;2,25)$	$2(0,5)+5(2,25)$	$=12,25$ (maximum)
$(2;0)$	$2(2)+5(0)$	$=4$
$(1;0)$	$2(1)+5(0)$	$=2$ (minimum)

11.2.2 Résolution par translation de la fonction objectif

La fonction objectif est représentée par une infinité de droites parallèles. Seules les droites passant par les sommets de la région peuvent donner une valeur maximum ou minimum à la fonction objectif.



Pour trouver la valeur maximum ou minimum de la fonction objectif, on cherche la droite dont l'ordonnée à l'origine est la plus grande, respectivement plus petite. Ce qui est représenté par les traitillés en gras sur le graphique précédent.

Exemple 11.2

Un artisan fabrique des objets A et des objets B. La réalisation d'un objet A demande 30 frs de matière première et 125 frs de main-d'oeuvre. La réalisation des objets B demande 70 frs de matière première et 75 frs de main-d'oeuvre. Les profits réalisés sont de 54 frs par objets A, et de 45 frs par objet B. La dépense journalière en matière première ne doit pas dépasser 560 frs . La dépense journalière en main-d'oeuvre ne doit pas dépasser 1 250 frs . Déterminer la production journalière d'objets A et B qui assure un bénéfice maximum.

Solution

Soit x le nombre d'objets A fabriqués, et y le nombre d'objets B fabriqués, en une journée.
Le bénéfice journalier (Z) qu'il faut maximiser s'exprime par :

$$Z = 54x + 45y$$

les contraintes de production, s'expriment par :

$$\begin{cases} 30x + 70y & \leq & 560 \\ 125x + 75y & \leq & 1250 \\ x\,;\,y & \geq & 0 \end{cases}$$

Ces inégalités se simplifient en :

$$\begin{cases} 3x + 7y & \leq & 56 \\ 5x + 3y & \leq & 50 \\ x\,;\,y & \geq & 0 \end{cases}$$

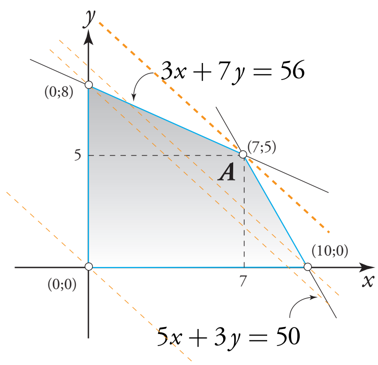
On détermine la région formée par ces différentes contraintes, puis on calcule les différents sommets de la région. Pour le sommet A, il suffit de résoudre l'équation suivante :

$$\begin{cases} 5x+3y &= 50 \\ 3x+7y &= 56 \end{cases}$$

Ce qui donne $x=7$ et $y=5$.
On représente les différentes fonctions objectif. Le plus simple consiste à tracer la fonction objectif passant par le point $(0;0)$. Ainsi $Z = 54\times 0 + 45\times 0 = 0$. Ce qui donne comme équation :

$$54x+45y=0 \qquad \text{ou} \qquad y=-\frac{54x}{45}$$

On trace ensuite par translation, les droites parallèles à cette fonction objectif passant par tous les sommets. On retient au final celle dont l'ordonnée est la plus élevée (en traitillés gras sur la figure ci-après).



Ainsi le point $(7;5)$ est celui qui donne un bénéfice maximum. Ce bénéfice s'obtient en calculant :

$$Z = 54\times 7 + 45\times 5 = 603$$

Le bénéfice de 603 est donc atteint pour une production de 7 objets A et 5 objets B.

11.2.3 Optimisation linéaire en nombres entiers

Un problème d'optimisation linéaire en nombres entiers consiste à maximiser ou minimiser une fonction objectif linéaire, sous des contraintes linéaires et dans lequel on impose que certaines variables soient des valeurs entières. Cette contrainte s'exprime par l'une ou l'autre des formes suivantes :

$$x \text{ entier} \quad y \text{ entier} \quad \text{où} \quad x\,;\,y \text{ entiers}$$

Si dans un problème d'optimisation linéaire, on trouve par exemple comme solution une production de 4,3 chaises ou 18,43 avions, cela n'a pas vraiment de sens. L'optimisation en nombre entiers permet alors d'obtenir des résultats entiers. L'optimum peut alors être totalement différent de la solution sans utiliser la contrainte des nombres entiers, comme le montre l'exemple ci-après :

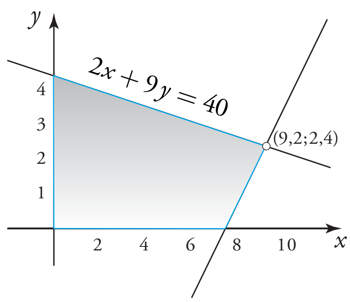
Exemple 11.3

Maximiser $Z = 3x + 13y$ sous contraintes :

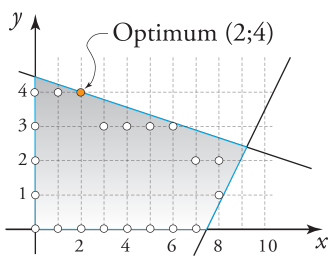
$$\begin{cases} 2x + 9y & \leq & 40 \\ 11x - 8y & \leq & 82 \\ x; y \geq 0 & & x; y \text{ entiers} \end{cases}$$

Solution

En résolvant ce problème sans tenir compte que x et y doivent être entiers, on trouve la solution maximum au sommet $(9,2\,;\,2,4)$, ce qui donne une valeur maximum $Z = 58,8$.



Pour tenir compte des valeurs entières, il faut éviter l'erreur qui consiste à arrondir le résultat obtenu $(9,2\,;\,2,4) \to (9;2)$. En effet, cette solution n'est pas optimale. De plus, la contrainte $11x - 8y \leq 82$ n'est plus respectée. Pour trouver l'optimum, on doit évaluer la fonction objectif Z pour toutes les valeurs entières à l'intérieur de la région et proches de la frontière :



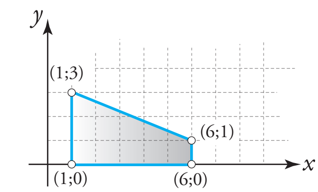
Le calcul de toutes ces valeurs donne :

$(x;y)$	Z	$(x;y)$	Z
$(0;0)$	0	$(6;3)$	57
$(1;0)$	3	$(5;3)$	54
$(2;0)$	6	$(4;3)$	51
$(3;0)$	9	$(3;3)$	48
$(4;0)$	12	$(2;4)$	**58**
$(5;0)$	15	$(1;4)$	55
$(6;0)$	18	$(0;4)$	52
$(7;0)$	21	$(0;3)$	39
$(8;1)$	37	$(0;2)$	26
$(8;2)$	50	$(0;2)$	13
$(7;2)$	47		

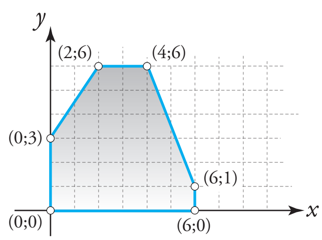
En tenant compte des valeurs entières imposées à x et y, la valeur maximum de Z est maintenant atteinte au point $(2;4)$.

Exercices d'application de la section 11.2

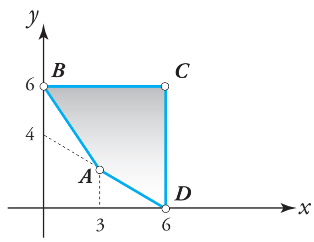
1 [Évaluation des sommets] Trouver les valeurs maximum et minimum de la fonction objectif $Z = x - y + 4$, dans la région ci-après :



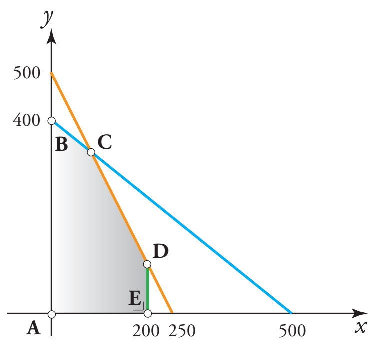
2 [Évaluation des sommets] Trouver les valeurs maximum et minimum de la fonction objectif $Z = 2x + 2y + 4$, décrite par la région ci-après :



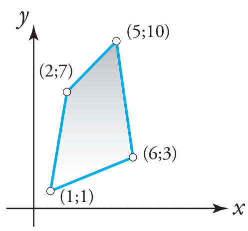
3 [Évaluation des sommets] Déterminer le maximum de la fonction objectif $C = x + y$ dans la région ci-après :



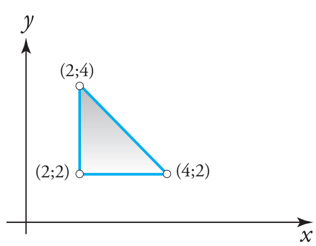
4 [Évaluation des sommets] Trouver le maximum de la fonction objectif $C = 2x - 3y$ dans la région décrite ci-après :



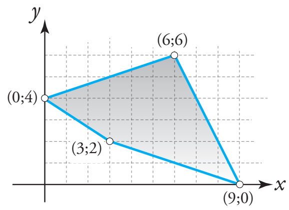
5 [Translation de la fonction objectif] Tracer la fonction objectif $Z = 3x + 5y$ passant par chaque sommet de la région ci-après et déterminer en quel(s) point(s) Z est maximale et minimale.



6 [Translation de la fonction objectif] Tracer la fonction objectif $Z = 3x + 2y$ passant par chaque sommet de la région ci-après et déterminer en quel(s) point(s) Z est minimale.



7 [Frontière maximum] Trouver les valeurs maximum et minimum de la fonction objectif $Z = 2x + 6y$ décrite par la région ci-après :



8 [Frontière maximum] Maximiser $C = 4x + 4y$ avec les contraintes suivantes :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x + y & \leq & 13 \\ 5x + 2y & \leq & 50 \\ 4x + 5y & \leq & 60 \\ x\,;\, y & \geq & 0 \end{array}\right.$$

9 [Plus de contraintes] Minimiser $C = x - 2y$ avec les contraintes suivantes :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & \geq & 2 \\ x & \leq & 4 \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{rcl} y & \geq & 1 \\ y & \leq & 5 \end{array}\right.$$

10 [Plus de contraintes] Maximiser $Z = 3x + 4y$ avec les contraintes suivantes :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x + y & \leq & 10 \\ x + 2y & \leq & 18 \\ 3x + y & \leq & 20 \\ 4x + y & \leq & 26 \\ x\,;\, y & \geq & 0 \end{array}\right.$$

11 [PLNE] Maximiser $Z = 4x + 3y$ sous contraintes :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3x + 5y & \leq & 15 \\ x & \leq & 4 \\ x\,;\, y & \geq & 0 \end{array}\right. \qquad \text{et } x\,;\, y \text{ entiers}$$

12 [PLNE] On cherche à maximiser la fonction $f = -9x + 5y$ avec les contraintes :

$$\left\{\begin{array}{rcl} -7x + 5y & \leq & 9 \\ -7x - 3y & \geq & -32 \\ 0 \leq y \leq 3 & \text{et} & x \geq 0 \end{array}\right.$$

(a) Représenter graphiquement la région délimitée par les contraintes puis calculer le maximum de f.

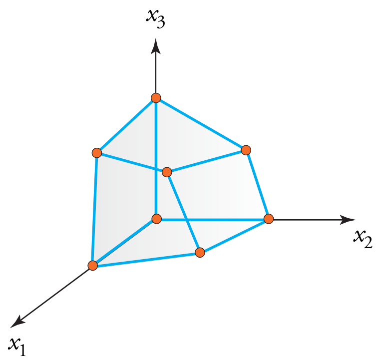
(b) Représenter graphiquement les points candidats pour maximiser f si l'on impose que x et y soient des nombres entiers. Calculer dans ce cas le maximum de f.

11.3 Optimisation avec plus de deux variables : Solveur Excel

Lorsque l'on est en présence de 3 variables, il est encore possible de représenter graphiquement l'ensemble des contraintes, mais cela devient assez délicat puisque ces contraintes représentent non plus une région du plan mais un polyèdre convexe. On passe donc de la deuxième à la troisième dimension. À titre d'exemple, le système de contraintes suivant

$$\begin{cases} 30x_1 + 30x_2 + 20x_3 & \leq & 2400 \\ 10x_1 + 10x_2 + 20x_3 & \leq & 1200 \\ 30x_1 + 10x_2 + 10x_3 & \leq & 1200 \\ \text{où } x_i & \geq & 0 \text{ pour } i = 1, 2, 3. \end{cases}$$

conduit à la représentation graphique ci-après :



Pour résoudre ce type de problèmes, plusieurs algorithmes ont été mis au point, dont notamment l'**algorithme du simplexe** de George Dantzig (mathématicien américain 1914-2005).

Dans cet ouvrage, on se «contentera» du **solveur d'Excel** qui permet de résoudre très facilement tout type de problèmes d'optimisation linéaire.

Le Solver d'Excel (Données/Solveur) est une macro complémentaire qu'il faut préalablement activer. Cette activation se fait par la commande suivante : Fichier > Options > Compléments > Atteindre > Complément Solver.

Dans certains cas cependant, la **méthode du dual** permet également de résoudre des problèmes d'optimisation linéaire.

La méthode du dual
Qu'est-ce que le dual et à quoi peut-il servir ?

Exemple 11.4

Maximiser $Z = 3x + 13y$ sous contraintes :

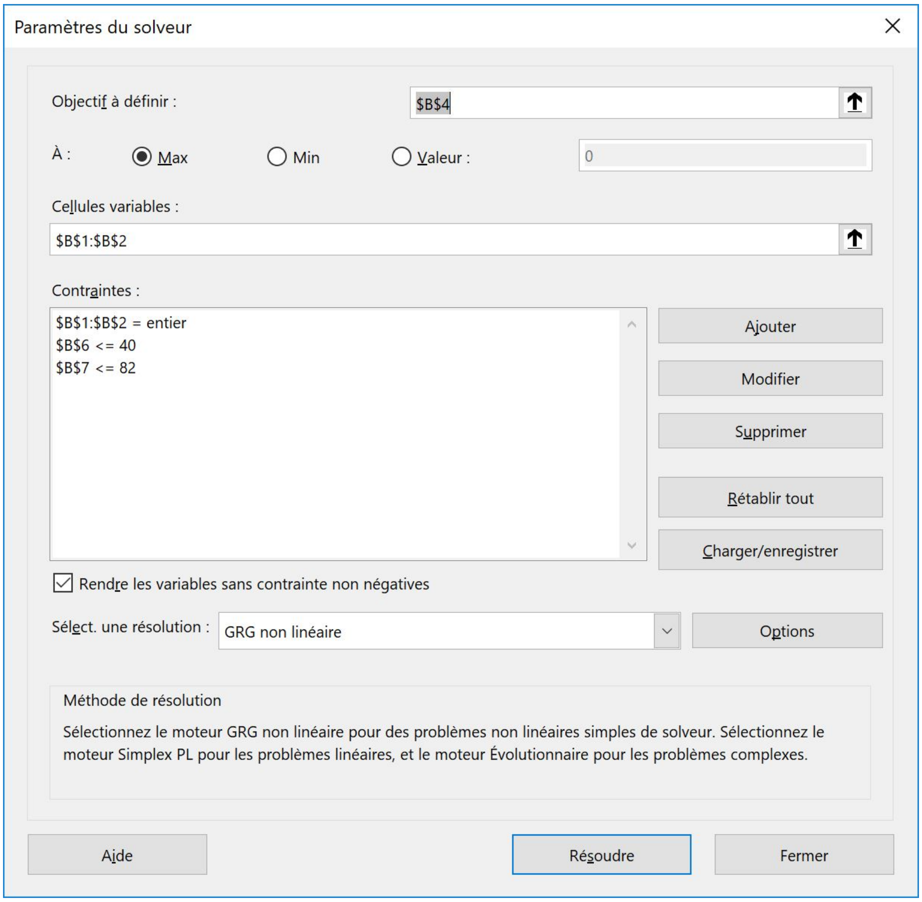
$$\begin{cases} 2x + 9y & \leq & 40 \\ 11x - 8y & \leq & 82 \\ \text{où } x\,;\, y \geq 0 & \text{et} & x\,;\, y \text{ entiers} \end{cases}$$

Solution

1. Sur une feuille Excel, entrez les textes et formules ci après :

	A	B
1	x	0
2	y	0
3		
4	Z=3*x+13*y	=3*B1+13*B2
5		
6	Contraintes	=2*B1+9*B2
7		= 11*B1–8*B2

2. Cliquez sur Outils > Solveur
3. Définissez la cellule cible (fonction objectif)[ici B4] et les cellules variables (en général x et y) [ici B1 :B2]
4. Ajoutez l'ensemble des contraintes comme indiqué ci-après :



5. Cliquez sur Résoudre pour afficher la solution proposée par le solveur, à savoir $x = 2$ et $y = 4$ pour un maximum de 58.

Remarque

L'utilisation du solveur disponible dans Excel ne s'arrête pas aux problèmes linéaires. Que les relations qu'il traite soient du premier degré ou non, peu importe. La seule chose essentielle est que le problème soit formulable à l'aide d'un langage mathématique.

Exemple 11.5

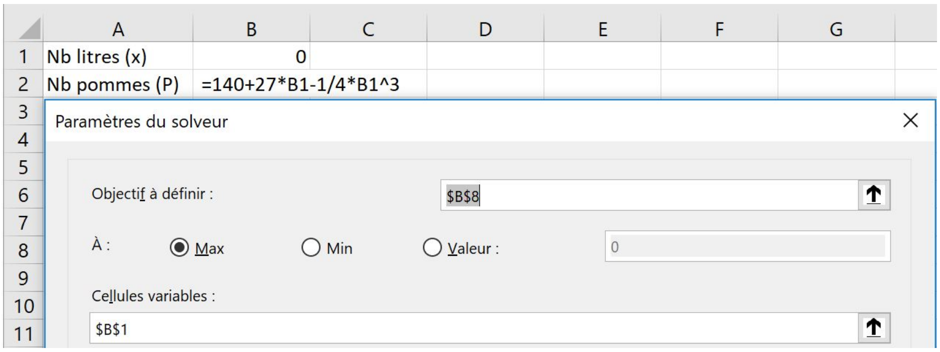
Un agriculteur a pu vérifier que le nombre de pommes produites par arbre dépend de la quantité d'engrais utilisée sur cet arbre selon la fonction :

$$P = 140 + 27x - 0,25x^3$$

où P représente le nombre de pommes cueillies dans un arbre et x le nombre de litres d'engrais utilisés sur cet arbre. Quelle quantité d'engrais doit-il utiliser sur chaque arbre afin d'obtenir une production maximale ?

Solution

Il suffit d'entrer les valeurs suivantes dans une feuille Excel et dans le solveur.



En cliquant sur Résoudre on obtient la solution $x = 6$ et $P = 248$.

Exercices d'application de la section 11.3

13 [Deux variables] Minimiser $Z = x + 3y$ sous contraintes :

$$\begin{cases} x + 2y & \geq & 30 \\ x + 4y & \geq & 40 \\ x\,;\,y & \geq & 0 \end{cases}$$

14 [Deux variables] Maximiser $F = x + 4y$ sous contraintes :

$$\begin{cases} 3x + 16y & \leq & 80 \\ -14x + 2y & \geq & -105 \\ 3x + 2y & \geq & 6 \\ x\,;\,y & \geq & 0 \end{cases}$$

(a) si x et $y \in \mathbb{R}$.

(b) si x et $y \in \mathbb{N}$.

15 [Plus de variables] Minimiser $F = 3x + y + 2z$ sous contraintes :

$$\begin{cases} x + y + z & \geq & 20 \\ 5x - y + z & \geq & 10 \\ x \, ; \, y \, ; \, z & \geq & 0 \end{cases}$$

16 [Plus de variables] Maximiser $Z = 2x_1 + 3x_2 + 21x_3 + 2x_4$ sous contraintes :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 & \leq & 2 & \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 & \leq & 2 & \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 & \leq & 1 & \\ x_j & \geq & 0 & \text{pour } j = 1 \text{ à } 4 \end{cases}$$

17 [Méthode du dual] En utilisant la méthode du dual présentée en vidéo, maximiser $F = 19x + 16y + 20z$ sous contraintes :

$$\begin{cases} 2x + 3y + z & \leq & 1 \\ 3x + 2y + 5z & \leq & 1 \\ x \, ; \, y \, ; \, z & \geq & 0 \end{cases}$$

18 [Méthode du dual] En utilisant la méthode du dual présentée en vidéo, minimiser $F = 20x + 30y + 16z$ sous contraintes :

$$\begin{cases} 2,5x + 3y + z & \geq & 3 \\ x + 3y + 2z & \geq & 4 \\ x \, ; \, y \, ; \, z & \geq & 0 \end{cases}$$

19 [Solver] Utiliser le Solver pour déterminer le maximum de la fonction :

$$f(x) = x + \ln(x) - x^2 + 5$$

20 [Solver] Utiliser le Solver pour résoudre le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} 2,35x + 4,6y = 32,81 \\ 17x - 4,5y = 25,8 \end{cases}$$

11.4 Problèmes et exercices de synthèse

21 [Équipement] Une entreprise d'équipement de construction fabrique un véhicule léger (4 roues) qui se vend 30 000 frs et un véhicule lourd (6 roues) qui se vend 40 000 frs. Chaque jour, l'entreprise reçoit 300 roues et 60 moteurs qui peuvent être installés sur l'un ou l'autre des véhicules. Déterminer le nombre de véhicules de chaque genre qui doivent être fabriqués pour réaliser les ventes les plus élevées possibles.

Dans ce problème on demande uniquement d'établir la fonction objectif ainsi que le jeu de contraintes.

22 [Fabrication horlogère] Une fabrique horlogère réalise un bénéfice de 8 frs sur chaque modèle Plastoc et 15 frs sur chaque modèle Mastoc. Pour répondre à la demande, la production journalière des Plastoc devrait se situer entre 40 et 80, et la production journalière des Mastoc entre 10 et 40. La capacité quotidienne totale pour les deux modèles est limitée à 80. Combien faut-il fabriquer de montres de chaque modèle par jour, pour réaliser un bénéfice maximum ?

23 [Investissement] Un club d'investisseur a 30 000 frs pour investir dans deux projets A et B. On ne peut investir dans chaque projet que par tranches de 1 000 frs. Le taux de rendement du projet A se situe aux alentours de 12% et celui du projet B de 7%. La politique du club est d'investir au moins deux fois plus dans le projet B qui est moins risqué que dans le projet A. Combien de parts le club doit-il investir dans chaque projet pour maximiser son gain espéré ?

24 [Fabrication] Une petite entreprise fabrique des perceuses électriques et des visseuses à accumulateur. Pour que toute sa production s'écoule de manière régulière, il faut qu'elle produise au moins 2 fois plus de perceuses que de visseuses. Chaque perceuse nécessite 10 minutes de montage manuel, alors qu'il en faut 15 pour une visseuse. On dispose d'un maximum de 80 heures de main d'oeuvre pour le montage par jour. Le temps d'usinage est de 7 minutes par perceuse, 7 minutes également par visseuse et les capacités sont de 49 heures d'usinage par jour au maximum. Si la fabrique gagne 6 frs par perceuse et 8 frs par visseuse, quelle nombre de perceuses, respectivement de visseuses, l'entreprise doit-elle fabriquer par jour si elle souhaite maximiser son gain ?

25 [Transport] On souhaite acheter un certain nombre de bus et de camionnettes avec un budget total n'excédant pas 300 000 frs. Par ailleurs, on ne souhaite pas dépenser plus de 1 500 frs par mois en frais d'entretien. Quel est le nombre de camionnettes et de bus à acheter si l'on souhaite maximiser la capacité en passagers ?

Véhicule	Achat	Frais mensuels	Nbre de passagers
Bus	60'000 frs	225 frs	25
Camionnette	30'000 frs	300 frs	15

26 [Fabrication] Un fabricant de jouets en bois décide de produire des tables pour enfants et des maisons de poupées. Pour fabriquer une table, il faut 6 minutes de sciage, 8 minutes d'assemblage et 8 minutes à l'atelier de peinture. Pour fabriquer une maison, il faut 4 minutes de sciage, 12 minutes d'assemblage et 8 minutes à l'atelier de peinture. Les temps libres actuels par semaine sont de 72 minutes à l'atelier de sciage, 144 minutes à l'atelier d'assemblage et 112 minutes à l'atelier de peinture. La compagnie peut faire un profit de 50 frs par table et 60 frs pour une maison. Combien d'articles faut-il produire pour maximiser le profit de la compagnie ? Quels seront les temps libres dans chaque atelier si le plan de production trouvé est appliqué ?

27 [3 variables] Un fermier peut contenir dans sa basse-cour jusqu'à 600 volatiles : des canards, des oies et des poules. Il veut avoir au moins 20 canards et 20 oies, mais pas plus de 100 canards, ni plus de 80 oies, ni plus de 140 des deux. L'élevage d'une poule coûte 3 frs , d'un canard 6 frs et d'une oie 8 frs . Ces derniers peuvent être vendus respectivement, 8 frs , 13 frs et 20 frs . Comment ce fermier peut-il réaliser un bénéfice maximum ?

28 [3 variables] Un épicier prépare une commande de tablettes de chocolat, qui doit se faire par cartons entiers de 24 tablettes chacun, toutes d'une même sorte pour un carton donné. Connaissant les goûts de sa clientèle, l'épicier se dit qu'il doit commander au moins 20 cartons de chocolat noir, mais pas plus de 60, au moins 20 cartons de chocolat aux noisettes, au plus 50 cartons de chocolat au lait ; enfin la commande de chocolat aux noisettes ne doit pas dépasser le double de celle de chocolat au lait. Par plaque vendue, il gagne 30 cts avec le chocolat aux noisettes, 20 cts avec celui au lait, 25 cts avec le noir ; et il veut commander au maximum 100 cartons en tout. Quelle commande doit-il passer pour réaliser le plus grand bénéfice possible ?

29 [Lots] Dans une école, un groupe d'élèves se charge de la distribution des pains au chocolat et des croissants lors de la récréation de dix heures. Pour pouvoir satisfaire la demande, ils doivent disposer au minimum de 108 pains au chocolat et de 96 croissants. Deux boulangers proposent pour le même prix (p) :

- l'un le lot A comprenant 12 pains au chocolat et 8 croissants ;
- l'autre le lot B composé de 9 pains au chocolat et 12 croissants.

Déterminer le nombre de lots A et le nombre de lots B qui doivent être achetés pour satisfaire la demande au moindre coût.

30 [Lots] Un club de tennis souhaite commander auprès de deux fournisseurs des balles ainsi que des raquettes de tennis pour les juniors. Il souhaite utiliser des balles de marque Wilson Junior pour les enfants et des balles de marque Tretorn pour les adultes. Les balles Wilson sont conditionnées dans des tubes contenant 3 balles et les Tretorn dans des tubes contenant 4 balles. Le fournisseur A propose un lot contenant 3 tubes Wilson, 10 tubes Tretorn et une raquette junior au prix de 200 frs . Le fournisseur B propose un lot contenant 4 tubes Wilson, 6 tubes Tretorn et une raquette junior au prix de 150 frs .

Le club souhaite donc passer commande d'un certain nombre de lots auprès des deux fournisseurs. Pour ses besoins, le club souhaite disposer au moins du stock utilisé l'an passé, à savoir 117 balles Wilson, 344 balles Tretorn ainsi que 10 raquettes junior. Déterminer le nombre de lots à commander auprès des deux fournisseurs afin de minimiser les coûts.

Le problème du sac à dos
Présentation et résolution avec le solveur Excel.

31 [Sac à dos] Célia participe à un vide grenier dont il est permis d'emporter un maximum de 10 kg. Quels objets doit-elle emporter afin de maximiser son profit et quel sera son profit ? (utiliser le principe montré dans la vidéo du problème du sac à dos)

32 [Sac à dos] Boucle d'Or aime bien le chocolat. Dans une confiserie elle souhaiterait acheter un chocolat différent de l'assortiment ci-après mais n'a malheureusement que 20 frs sur elle.

Chocolat	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Prix	2	3	2,5	2,2	2,6	2	2,5	2,2	2,6	2,6

(a) Quels chocolats pourra-t-elle choisir ?

(b) Combien va lui rendre la vendeuse ?

33 [Plus de variables] Trois machines A, B, C peuvent produire chacune deux types de composants : C_1 et C_2. Le temps de fabrication en heures de chaque composant par machine est donné par :

	A	B	C
C_1	3	4	4
C_2	4	6	5

On souhaite fabriquer pour un coût minimum 6 composants C_1 et 8 composants C_2. La machine A ne peut fonctionner que durant 14 heures, contre 24 heures pour les autres machines. Le coût horaire des machines A, B, C est respectivement de : 20 frs , 15 frs et 18 frs .

(a) Écrire le programme de programmation linéaire

(b) Résoudre le problème

34 [Plus de variables] Une entreprise dispose de 2 usines et 3 entrepôts. Chaque usine peut acheminer les produits fabriqués dans n'importe quel entrepôt. La capacité de production de l'usine 1 est de 100 pièces au maximum et celle de l'usine 2 de 150 pièces au maximum. L'entrepôt 1 doit disposer de 50 pièces, le second de 70 pièces et le troisième de 80 pièces. Les coûts de transports entre les usines et les entrepôts sont donnés par :

	Entrepôt 1	Entrepôt 2	Entrepôt 3
Usine 1	4	3	6
Usine 2	3	5	3

Déterminer les quantités à transporter de chaque usine vers chaque entrepôt, de manière à minimiser le coût total de transport tout en respectant les contraintes de capacité des usines et de demande des entrepôts.

35 [Plus de variables] Fredy souhaite investir un capital de 100 000 frs dans les obligations suivantes :

Obligation	Rendement annuel	Horizon	Risque	Région
A	6%	Long terme	Élevé	Suisse
B	7%	Court terme	Faible	Suisse
C	6%	Long terme	Faible	Euro
D	8%	Long terme	Élevé	Suisse
E	8%	Court terme	Faible	USA

Il souhaite investir au moins 40% de son capital dans des obligations à court terme mais pas plus que 20% dans des obligations à risque élevé. Au moins 30% du capital devrait être placé sur le marché local. Il souhaiterait également que le revenu annuel placé sur le marché étranger atteigne au moins 40% du revenu total. Dans ces conditions, quel montant Fredy doit-il investir dans chaque obligation afin de maximiser son revenu annuel ?

36 [Plus de variables] Les besoins quotidiens en chauffeurs dans une petite entreprise de taxi sont les suivants :

Jour	Lu	Ma	Me	Je	Ve	Sa	Di
Nb. de chauffeurs	5	5	7	8	8	10	6

Les chauffeurs travaillent 5 jours d'affilée et peuvent donc prendre leur deux jours de congé consécutifs n'importe quand dans la semaine. Déterminer les effectifs formant les sept équipes possibles de chauffeurs de manière à couvrir tous les besoins et d'engager un nombre minimum de chauffeurs.

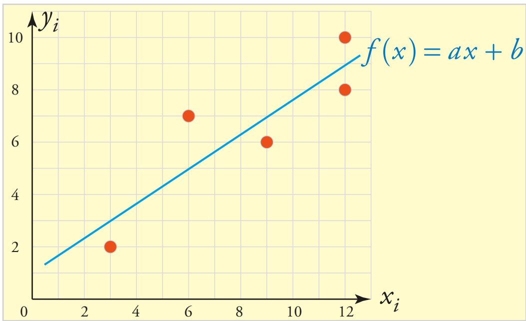
37 [Variables binaires] Julien a transmis ses tickets de restaurant à la comptable de l'entreprise. Parmi ceux-ci, seuls 5 sont pris en charge par l'entreprise pour un montant global de 600 frs. Sauriez-vous les identifier ?

Restaurant	Montant
Le Miam miam	124 frs
La Pinte vaudoise	216 frs
Le Napoli	84 frs
Buffet de la gare	166 frs
Café Tivoli	176 frs
Tricatel Royal	113 frs
Au Ticino	134 frs
Mac do	13 frs
La truffe d'Or	126 frs

38 [Variables binaires] Laura souhaite enregistrer sur son portable ses chansons préférées. Malheureusement il ne lui reste qu'une demi-heure d'enregistrement possible. Quels titres ne pourra-t-elle pas enregistrer ?

Titre	Minutes
No Woman, No Cry	2 min 48 sec
La maman des poissons	3 min 17 sec
Louie Louie	1 min 44 sec
Mistral gagnant	2 min 51 sec
Frère Jacques (remix)	6 min 06 sec
La dondon dodue	3 min 47 sec
Dancing Queen	4 min 05 sec
Highway to Hell	3 min 21 sec
Anna, qu'est-ce que t'attends !	3 min 23 sec
The Sound of Silence	2 min 33 sec
Get Up, Stand Up	3 min 15 sec

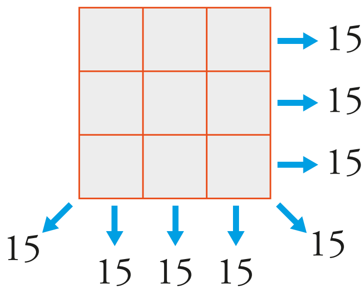
39 [Défi] On souhaite trouver une fonction affine $f(x) = ax + b$ qui passe «au mieux» à travers l'ensemble des points $(x_i ; y_i)$ ci-après. Par «au mieux» on entend la méthode qui consiste à trouver les paramètres a et b de telle sorte que la somme $S = \sum_{i=1}^{5}(y_i - f(x_i))^2$ soit minimale.



(a) Trouver les valeurs a et b au moyen du Solver.

(b) Représenter graphiquement l'ensemble de ces points et ajouter sur le graphique la courbe ainsi que l'équation de tendance linéaire. Que constate-t-on ?

40 [Défi] Résoudre au moyen du Solver Excel le carré magique ci-après. Il s'agit de placer les nombres de 1 à 9 une seule fois afin que la somme de chaque ligne, chaque colonne ou chaque diagonale soit égale à 15.



Chapitre 12

Les progressions

Objectifs du chapitre

- progressions arithmétiques
- progressions géométriques
- applications économiques liées aux progressions

Les progressions représentent des suites mathématiques particulières, dont les applications sont très diverses en économie ainsi qu'en mathématiques financières. Dans ce chapitre, nous traiterons uniquement des aspects techniques liés aux progressions. Pour une approche plus globale, on pourra se référer au chapitre intitulé «Équations différentielles et de récurrence».

12.1 Progressions arithmétiques

12.1.1 Définition

Une progression arithmétique est une suite de nombres rangés dans un ordre tel que chacun d'eux s'obtient en ajoutant ou en retranchant un nombre constant à celui qui le précède. Ce nombre constant que nous noterons r est appelé **raison** de la progression. Autrement dit, un terme quelconque, noté a_n peut être défini par son terme précédent a_{n-1} par la formule :

$$a_n = a_{n-1} + r$$

Remarques

- Les lettres utilisées pour désigner une progression sont libres. On trouve fréquemment des progressions écrites sous la forme $u_n = u_{n-1} + r$ ou encore $y_t = y_{t-1} + r$, etc...
- On peut tout aussi définir le $n+1^{\text{e}}$ terme en fonction du n^{e} terme :

$$a_{n+1} = a_n + r$$

- Lorsque la raison est positive, la progression est dite **croissante**. Elle est décroissante dans le cas contraire.
- Chaque nombre de la suite est appelé **terme** de la progression. Lorsque qu'une progression contient un nombre fini de termes, la progression est dite **limitée**. Dans le cas contraire, la progression est **illimitée**.

Exemple 12.1

Définir les éléments constitutifs de cette progression : 4 ; 6 ; 8 ; 10 ; 12

Solution

Il s'agit d'une progression arithmétique dont le premier terme $a_1 = 4$, le 5[e] et dernier terme $a_5 = 12$. Le nombre de termes est $n = 5$ et la raison $r = +2$.
Pour tous les termes, on a bien :

$$a_n = a_{n-1} + r$$
$$6 = 4 + 2 \qquad 8 = 6 + 2, \qquad \text{etc...}$$

12.1.2 Calcul du n^e terme

L'objectif ici est de pouvoir exprimer non plus un terme en fonction de celui qui le précède mais en fonction du premier terme qui est normalement connu. Le raisonnement suivant conduit rapidement à la formule recherchée :

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + r \\ a_3 &= a_2 + r = a_1 + 2r \\ a_4 &= a_3 + r = a_1 + 3r \\ &\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

Exemple 12.2

D'une progression arithmétique, on connaît le deuxième terme ($a_2 = 4$) ainsi que le cinquième ($a_5 = 10$). Calculer le troisième terme (a_3).

Solution

Solution 1 : On exprime a_2 et a_5 en fonction de a_1
On forme alors le système :

$$\begin{cases} a_2 = a_1 + r \\ a_5 = a_1 + 4r \end{cases} \quad \text{ou encore} \quad \begin{cases} 4 = a_1 + r \\ 10 = a_1 + 4r \end{cases}$$

En résolvant ce système, on trouve facilement $r = 2$ et $a_1 = 2$. Ainsi :

$$a_3 = a_1 + 2r = 2 + 2 \times 2 = 6$$

Solution 2 : On décale tous les indices de -1. La donnée devient alors la suivante : «D'une progression arithmétique, on connaît le premier terme ($a_1 = 4$) ainsi que le quatrième ($a_4 = 10$). Calculer le deuxième terme (a_2)». Comme :

$$a_4 = a_1 + 3r \qquad \text{ou encore} \qquad 10 = 4 + 3r$$

on trouve immédiatement $r = 2$ et par conséquent

$$a_2 = a_1 + r = 4 + 2 = 6$$

Exemple 12.3

Insérer 3 **moyens arithmétiques** entre les nombres 10 et 20.

Solution

On cherche 3 nombres x, y et z de telle sorte que cela forme la progression ci-après :

$$\boxed{10} \xrightarrow{+r} \boxed{x} \xrightarrow{+r} \boxed{y} \xrightarrow{+r} \boxed{z} \xrightarrow{+r} \boxed{20}$$

Cela se traduit par une progression comportant 5 termes (les 3 termes intermédiaires ainsi que les deux extrêmes). Comme :

$$a_5 = a_1 + 4r \qquad \text{ou encore} \qquad 20 = 10 + 4r$$

on trouve immédiatement $r = 2,5$ et par conséquent les termes manquants seront :

$$x = 10 + 2,5 = 12,5 \qquad y = x + 2,5 = 15 \qquad \text{et} \qquad z = 15 + 2,5 = 17,5$$

12.1.3 Somme des termes d'une progression arithmétique

Soit $a_1, a_2, \cdots, a_n$ les n termes d'une progression arithmétique donnée. On cherche à calculer :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

Pour trouver une formule plus simple, on écrit S_n dans l'ordre inverse :

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_3 + a_2 + a_1$$

et l'on ajoute ces deux égalités membre à membre en regroupant les termes comme suit :

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \cdots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

Comme chaque parenthèse est égale, on peut écrire $2S_n = n(a_1 + a_n)$, puis finalement :

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \times n$$

Exemple 12.4

Soit la progression arithmétique $4\,;6\,;8\,;10\,;\cdots$ Calculer la somme des 100 premiers termes de cette progression.

Solution

$$a_1 = 4$$
$$a_{100} = 4 + 99 \times 2 = 202$$
$$n = 100$$

Ainsi :

$$S_n = \frac{4 + 202}{2} \times 100 = 10\,300$$

Exercices d'application de la section 12.1

1 [Trouver un terme] Calculer le 5^e, le 10^e et le n^e terme des progressions arithmétiques suivantes :

(a) $2\,;4\,;6\,;8\,;\cdots$

(b) $x-5\,;x-3\,;x-1\,;x+1\,;\cdots$

2 [Trouver un terme] Calculer le 5^e, le 10^e et le n^e terme des progressions arithmétiques suivantes :

(a) $\frac{1}{4}\,;\frac{1}{3}\,;\frac{5}{12}\,;\frac{1}{2}\,;\cdots$

(b) $5a-3b\,;4a-2b\,;3a-b\,;\cdots$

3 [Trouver un terme] Trouver le 15^e terme d'une progression arithmétique connaissant $a_6 = 12$ et $a_8 = 48$.

4 [Trouver un terme] Trouver le 9^e terme d'une progression arithmétique connaissant $a_4 = 3x + y$ et $a_8 = 3x + 2y$.

5 [Insertion de moyens] Insérer 6 moyens arithmétiques

(a) entre 10 et 24 **(b)** entre p et $15p+7$

6 [Insertion de moyens] Insérer 6 moyens arithmétiques

(a) entre -6 et 6. **(b)** entre A et B

7 [Somme d'une PA] La somme des 8 premiers termes d'une progression arithmétique de raison $r=2$ est 1020. Calculer le 6^e terme de cette progression.

8 [Somme d'une PA] Dans une progression arithmétique, on sait que la somme des 5 premiers termes est égale à 100 et la somme des 8 premiers termes à 220.

(a) Déterminer la raison de la progression

(b) Déterminer le premier terme de cette progression

(c) Déterminer le 8^e terme de cette progression

9 [Recherche de n] La somme des n premiers nombres entiers est 496. Trouver n.

10 [Recherche de n] Résoudre par rapport à n :

$$\sum_{k=4}^{n}(3k-24)=0$$

11 [Rang] Trouver le rang du dernier terme positif de la progression $10\,;\,\frac{67}{7}\,;\,\frac{63}{7}\,;\cdots$

12 [Rang] Combien de termes peut-on additionner avant que cette somme ne devienne négative ?

$$10+\frac{67}{7}+\frac{63}{7}+\cdots$$

13 [PA particulière] On donne les premiers termes d'une progression :

$$\log(a) \quad ; \quad \log(at) \quad ; \quad \log(at^2) \quad ; \quad \cdots$$

(a) Est-ce une progression arithmétique ?

(b) Quelle est la raison de cette progression ?

(c) Quelle est la somme des n premiers termes ?

14 [PA particulière] On donne une progression arithmétique dont la raison s'exprime par $r=S_n-\alpha S_{n-1}+S_{n-2}$. Que vaut α ?

12.2 Progressions géométriques

12.2.1 Définition

Une progression géométrique est une suite de nombres rangés dans un ordre tel que chacun d'eux s'obtient en **multipliant** par un nombre constant celui qui le précède. Ce nombre constant que nous noterons r est appelé **raison** de la progression. Autrement dit, un terme quelconque, noté a_n peut être défini par son terme précédent a_{n-1} par la formule :

$$a_n = a_{n-1} \times r$$

✎ Lorsque la raison est négative, la progression est dite **alternée**.

Exemple 12.5

Montrer que les 3 termes suivants forment une progression géométrique :

3	12,6	52,92

Solution

Il suffit de diviser les termes successifs entre eux :

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{12,6}{3} = 4,2$$
$$\frac{a_3}{a_2} = \frac{52,92}{12,6} = 4,2$$

On constate que l'on a bien une progression géométrique de raison $r = 4,2$.

12.2.2 Calcul du n^{e} terme

Par un raisonnement similaire à celui effectué précédemment, on peut obtenir une relation entre le n^{e} terme et le premier :

$$a_2 = a_1 \times r$$
$$a_3 = a_2 \times r = a_1 \times r^2$$
$$a_4 = a_3 \times r = a_1 \times r^3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_n = a_1 \times r^{n-1}$$

Exemple 12.6

D'une progression géométrique, dont tous les termes sont positifs, on connaît le deuxième terme ($a_2 = 3,5$) ainsi que le sixième ($a_6 = 56$). Calculer le quatrième terme (a_4).

Solution

Solution 1 : On exprime a_4 et a_5 en fonction de a_1.
On forme alors le système :

$$\begin{cases} a_2 = a_1 \times r \\ a_6 = a_1 \times r^5 \end{cases} \quad \text{ou encore} \quad \begin{cases} 3,5 = a_1 \times r \\ 56 = a_1 \times r^5 \end{cases}$$

En résolvant ce système, on trouve facilement $r = 2$ et $a_1 = 1,75$. Ainsi :

$$a_4 = a_1 \times r^3 = 1,75 \times 2^3 = 14$$

Solution 2 : On décale tous les indices de -1. La donnée devient alors la suivante : «D'une progression géométrique à termes positifs, on connaît le premier terme ($a_1 = 3,5$) ainsi que le cinquième ($a_5 = 56$). Calculer le troisième terme (a_3)». Comme :

$$a_5 = a_1 \times r^4 \qquad \text{ou encore} \qquad 56 = 3,5 \times r^4$$

on trouve immédiatement $r = \sqrt[4]{\frac{56}{3,5}} = 2$ et par conséquent

$$a_3 = a_1 \times r^2 = 3,5 \times 2^2 = 14$$

Exemple 12.7

Insérer 2 **moyens géométriques** entre les nombres 10 et 1,25.

Solution

On cherche 2 nombres x et y de telle sorte que cela forme la progression ci-après :

$$\boxed{10} \xrightarrow{\times r} \boxed{x} \xrightarrow{\times r} \boxed{y} \xrightarrow{\times r} \boxed{1{,}25}$$

Il s'agit d'une progression comportant 4 termes (les 2 termes intermédiaires ainsi que les deux extrêmes). Comme :

$$a_4 = a_1 \times r^3 \qquad \text{ou} \qquad 1,25 = 10 \times r^3$$

on trouve immédiatement $r = \sqrt[3]{\frac{1,25}{10}} = 0,5$ et par conséquent les termes manquants seront :

$$x = 10 \times 0,5 = 5 \qquad \text{et} \qquad y = 5 \times 0,5 = 2,5$$

12.2.3 Somme des termes d'une progression géométrique

Nombre de termes limités

Soit $a_1, a_2, \cdots, a_n$ les n termes d'une progression géométrique donnée.
On cherche à calculer :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

En exprimant chaque terme en fonction du premier, on peut écrire :

$$S_n = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \cdots + a_1 r^{n-2} + a_1 r^{n-1}$$

On multiplie ensuite chaque membre de cette équation par r et l'on obtient :

$$r S_n = a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + \cdots + a_1 r^{n-1} + a_1 r^n$$

On soustrait ensuite les deux expressions pour trouver :

$$S_n - r S_n = a_1 - a_1 r^n$$
$$S_n(1-r) = a_1(1-r^n)$$

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-r^n}{1-r} \qquad \text{ou} \qquad S_n = a_1 \cdot \frac{r^n-1}{r-1}$$

Exemple 12.8

Calculer la somme des 8 premiers termes de la progression $2; 6; 18; \cdots$

Solution

La raison de la progression vaut $r = 3$ et le premier terme est $a_1 = 2$. Ainsi :

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-r^n}{1-r} = 2 \cdot \frac{1-3^8}{1-3} = 6\,560$$

Exemple 12.9

Dans l'une des formes du jeu de l'avion (appelé aussi système pyramidal), une personne doit pour s'enrichir recruter 6 personnes, chacune devant recruter 6 personnes, etc... Si l'on veut compter le nombre de personnes qu'il faut recruter à un niveau n donné, on calcule :

$$S_n = 6^1 + 6^2 + 6^3 + \cdots + 6^{n-1} + 6^n$$

Imaginons que le «truc» ait fonctionné ne fût-ce que 12 fois. C'est très réaliste comme hypothèse, non ? Combien d'individus faudrait-il contacter pour que tout le monde puisse s'enrichir ?

Solution

Il s'agit d'une progression géométrique de raison $r = 6$ et de premier terme $a_1 = 6$. La somme des 12 premiers termes de cette progression géométrique est donnée par :

$$S_{12} = a_1 \cdot \frac{1-r^n}{1-r} = 6 \times \frac{1-6^{12}}{1-6} \simeq 2,612 \text{ milliards}$$

En d'autres termes, la moitié de la population de la terre n'y suffirait pas. Les initiateurs de la pyramide (niveau 1, 2, 3, voire 4) s'enrichissent fortement sur les «pigeons» du niveau supérieur (qui croissent de manière exponentielle) et qui n'arrivent jamais à trouver les personnes nécessaires à la survie du système. Ce jeu, décliné dans beaucoup de variantes est passible d'amende et d'emprisonnement dans de nombreux pays !

Nombre de termes illimités

Soit une progression géométrique dont la raison r est un nombre compris entre $-1 < r < 1$. Dans ce cas, le nombre r^n tend vers 0 lorsque n augmente indéfiniment. On peut donc directement écrire la somme d'une progression géométrique illimitée sous la forme :

$$S_\infty = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i = \frac{a_1}{1-r}$$

Exemple 12.10

Calculer la somme infinie de la progression $18 ; 6 ; 2 ; \cdots$

Solution

La raison de la progression vaut $r = 1/3$ et le premier terme est $a_1 = 18$. Ainsi :

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r} = \frac{18}{1-\frac{1}{3}} = 27$$

Exemple 12.11

Écrire le nombre réel $5,4444\cdots$ sous la forme d'un nombre rationnel.

Solution

On commence par écrire ce nombre sous la forme :

$$5 + 0,4 + 0,04 + 0,004 + 0,0004 + \cdots$$

À partir du second terme, on constate une progression géométrique de raison $r = \frac{1}{10}$ avec $a_1 = 0,4 = \frac{4}{10}$. Selon la formule de la somme illimitée on peut écrire :

$$\begin{aligned} 5,44444\cdots &= 5 + \frac{\frac{4}{10}}{1-\frac{1}{10}} \\ &= 5 + \frac{4}{9} = \frac{49}{9} \end{aligned}$$

Exercices d'application de la section 12.2

15 [Trouver un terme] Trouver le 6^e terme des progressions géométriques monotones [1] suivantes :

(a) Si $a_1 = 3$ et $a_7 = 46\,875$

(b) Si $u_1 = \dfrac{t^2}{y}$ et $u_3 = \dfrac{t^4}{4y}$

16 [Trouver un terme] Trouver le 6^e terme des progressions géométriques monotones suivantes :

(a) Si $a_7 = 2\,278\,125$ et $a_5 = 1\,012\,500$

(b) Si $y_1 = \sqrt{3}$ et $y_2 = \sqrt{6}$

17 [Terme général] Trouver le n^e terme en fonction de n des progressions géométriques suivantes :

(a) $5\,;30\,;180\,;\cdots$

(b) $a_1 = 9$ et $a_k = 2a_{k-1}$

18 [Terme général] Trouver le n^e terme en fonction de n des progressions géométriques suivantes :

(a) $a_3 = \dfrac{16}{3}$ et $a_5 = \dfrac{63}{27}$

(b) $a_1 = 30$ et $a_{k+2} = -\dfrac{2}{3}a_{k+1}$

19 [Somme d'une PG] Calculer les sommes suivantes :

(a) $2+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{8}+\cdots+\dfrac{1}{2048}$

(b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{9} 2^{i-1}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=3}^{7} 64\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

1. Progression ou suite n'ayant pas de termes alternés.

20 [Somme d'une PG] Calculer les sommes suivantes :

(a) $5+15+45+\cdots+3\,645$ **(b)** $\sum_{j=1}^{15} 2\left(\frac{4}{3}\right)^j$ **(c)** $\sum_{t=0}^{5} 300(1,06)^t$

21 [Somme illimitée] Calculer les sommes suivantes :

(a) $8+6+\frac{9}{2}+\frac{27}{8}+\cdots$ **(b)** $\sum_{i=0}^{\infty} 5(0,45)^i$

22 [Somme illimitée] Calculer les sommes suivantes :

(a) $9+90+900+9000+\cdots$ **(b)** $\sum_{t=0}^{\infty} -3(-0,9)^t$

23 [Recherche de n] On considère la suite géométrique de raison $1/2$, de premier terme $u_1 = 3$.

(a) Calculer $S_n = \sum_{t=1}^{n} u_t$

(b) Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $S_n > \frac{17}{3}$

24 [Progression particulière] On considère la suite u_n de nombres réels strictement positifs, définie par : $u_0 = 2$, et plus généralement par :

$$\ln(u_{n+1}) = 1 + \ln(u_n)$$

(a) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n

(b) Préciser la nature de cette suite

(c) Exprimer la somme $\sum_{k=0}^{n} u_k$ en fonction de n.

25 [PG en vrac] Calculer la somme suivante :

$$\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{100}+\frac{2}{100}+\cdots+\frac{99}{100}\right)$$

26 [Une sacrée PG] Trouver les trois termes positifs d'une progression géométrique, dont on connait :

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 13 \\ a_3 - a_1 = 8 \end{cases}$$

12.3 Problèmes et exercices de synthèse

27 [Concours] Pour un concours, on souhaite attribuer 10 prix en argent d'une valeur totale de 5 000 frs. Entre chaque prix on souhaite avoir une différence de 50 frs. Quels seront les prix maximum et minimum offerts ?

28 [Bonus] Dans une entreprise, on souhaite attribuer le bonus de fin d'année, d'une valeur globale de 12 600 frs aux 7 employés. L'employé le moins méritant touchera 600 frs et la différence entre chaque employé devra être constante. Quel sera le bonus de l'employé le plus méritant ?

29 [Parking] Un parking comporte actuellement 350 voitures. On prévoit une augmentation du passage dans le parking de 25 voitures supplémentaires tous les jours. Combien de véhicules au total auront passé dans le parking après 5 jours ?

30 [Forage] On souhaite faire un forage pour trouver une nappe phréatique. Une subvention de 100 000 frs a été allouée pour réaliser ce projet. L'entreprise chargée de la réalisation propose les prix suivants :

- forage du premier mètre : 150 frs
- forage par mètre supplémentaire 55 frs de plus que le précédent

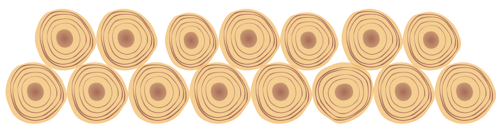
Calculer :

(a) le coût de forage du 3^{e} mètre

(b) le coût de forage du 10^{e} mètre

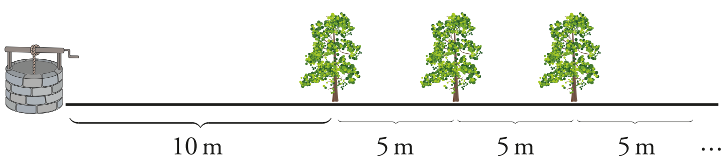
(c) le nombre de mètres maximum que l'on peut forer avec la subvention accordée.

31 [Buches] Un paysan entasse des bûches de bois selon le modèle ci-après :



La rangée du bas en compte 25 et celle du dessus en compte 10. Quel est le nombre total de bûches dans la pile ?

32 [Arrosage] Dans un parc sont plantés 48 arbustes à 5 m l'un de l'autre. Pour les arroser, un jardinier dispose d'un puits situé à 10 m du premier arbuste. Son arrosoir peut contenir une quantité d'eau nécessaire à l'arrosage de 3 arbustes. Calculer le trajet total parcouru par le jardinier pour arroser l'ensemble de la plantation et revenir au puits ?



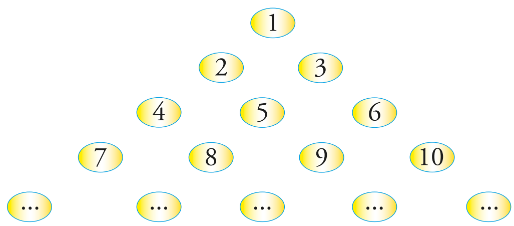
33 [Rente] Sachant que $v = \frac{1}{1+i}$, montrer que l'expression

$$a_{\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{n} v^t$$

peut être écrite sous la forme :

$$a_{\overline{n}|} = \frac{1 - v^n}{i}$$

34 [Triangle magique] Dans ce triangle, la valeur tout à droite du troisième rang est 6 et la somme des valeurs de ce rang est 15. (*indice :* $6 = 1 + 2 + 3$)



(a) Déterminer la valeur tout à droite du 30ème rang.

(b) Calculer la somme des valeurs du 30ème rang.

35 [Production] On suppose que chaque année la production d'une usine subit une baisse de 4% sur les résultats de l'année précédente. Au cours de l'année 2020, la production a été de 25 000 unités. On note $P_0 = 25\,000$ et P_n la production prévue au cours de l'année $2020 + n$.

(a) De quel type de suite s'agit-il ?

(b) Quelle est la raison ?

(c) Si la production descend au dessous de 15 000 unités, l'usine sera en faillite. Quand cela risque-t-il d'arriver si la baisse de 4% par an persiste ?

36 [Location] La location annuelle initiale d'une surface commerciale se monte à 3 500 frs. Le locataire s'engage à la louer durant 7 années complètes. Le propriétaire lui propose deux contrats :

(a) une augmentation annuelle de 5% de loyer par rapport à l'année précédente

(b) une augmentation annuelle de 200 frs

Quel sera au final le contrat le plus intéressant pour le locataire ?

37 [Amortissement comptable] Selon la notice de l'Administration fédérale des contributions, l'amortissement comptable autorisé pour une machine de bureau est de 40% de sa **valeur comptable**. Quelle est la valeur comptable après 4 ans d'une machine achetée 30 000 frs ?

38 [Amortissement comptable] Selon la notice de l'Administration fédérale des contributions, l'amortissement comptable autorisé pour une machine de bureau est de 20% de sa **valeur d'acquisition**. Quelle est la valeur comptable après 4 ans d'une machine achetée 30 000 frs ?

39 [Amortissement comptable] En comptabilité, l'amortissement arithmétique décroissant est parfois utilisé comme outil de dépréciation des biens d'équipement. Si une machine a une valeur initiale V_0 et une valeur résiduelle V_n, l'amortissement A_k est donné par la formule suivante avec $k = 1, 2, 3, \cdots, n$

$$A_k = \frac{2(V_0 - V_n)}{n(n+1)}(n - k + 1)$$

La suite $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$ forme une suite arithmétique décroissante.

- **(a)** Calculer le premier amortissement A_1
- **(b)** Calculer le dernier amortissement A_n
- **(c)** Quelle est la somme de tous les amortissements réalisés ? Interpréter le résultat.

40 [Prêt] Une personne a obtenu un prêt de 75 000 frs. Il est prévu qu'elle rembourse sa dette en 6 versements, chacun d'eux étant égale au précédent plus 5%.

- **(a)** Calculer le montant du premier remboursement
- **(b)** Calculer le montant du dernier remboursement.

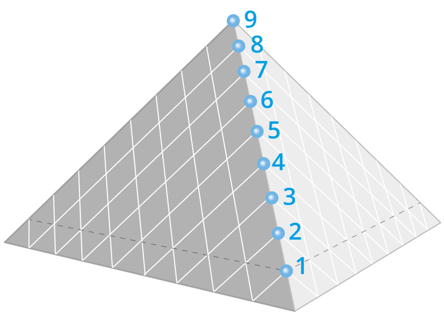
41 [Valeur actuelle d'une rente] Exprimer au moyen d'une formule simplifiée :

$$\mathrm{VA} = 300(1+i)^{-1} + 300(1+i)^{-2} + 300(1+i)^{-3} + \cdots + 300(1+i)^{-10}$$

42 [Valeur finale d'une rente] Exprimer au moyen d'une formule simplifiée :

$$\mathrm{VF} = A + A(1+i) + A(1+i)^2 + \cdots + A(1+i)^{n-1}$$

43 [Pyramide] La pyramide suivante est composée de 4 faces latérales et de 9 niveaux (boules bleues). Une face est composée de losanges ainsi que de triangles. On note $L(n)$ et $T(n)$ le nombre de losanges, respectivement de triangles qui composent une pyramide similaire constituée de n niveaux.



(a) Trouver la la formule générale pour $L(n)$ et $T(n)$.

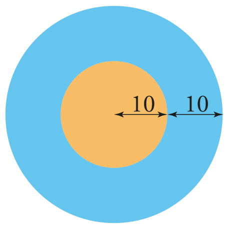
(b) La pyramide du Louvre à Paris, construite sur ce modèle comporte 18 niveaux. Combien compte-elle de losanges, respectivement de triangles ?

44 [Martingale] La règle d'un jeu est la suivante : tout joueur gagnant reçoit 2 fois sa mise ; s'il est perdant, il perd sa mise. Un joueur mise k frs à la première partie et il perd. Il mise alors $2k$ frs à la seconde partie et il perd encore. Il continue à jouer en doublant ainsi la mise précédente à chaque partie jusqu'à la partie gagnante qui est la n-ième.

(a) Quel sera le bénéfice de ce joueur après 3 parties pour une mise initiale de 10 frs ?

(b) Quel sera le bénéfice de ce joueur après n parties pour une mise initiale de k frs ?

45 [Oeuvre d'art] Un artiste souhaite réaliser une toile en peignant des anneaux concentriques de largeur 10 toujours plus grands. Il peint ainsi le premier jour la surface orange, puis le lendemain la surface bleue, etc...



(a) Quelle surface S_i peindra-t-il les 1, 2, 3, 4, ..., $i^{\text{ème}}$ jour ?

(b) Quelle est la nature de la suite $S_1, S_2, S_3, \cdots, S_i$

(c) Calculer $\displaystyle\sum_{i=1}^{10} S_i$

(d) Interpréter le résultat obtenu.

46 [Défi] Exprimer S_n en fonction du nombre de termes :

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{7}{8} + \frac{15}{16} + \cdots$$

47 [Défi] Trouver la somme des nombres naturels inférieurs à 200 qui ne sont ni divisibles par 3, ni divisibles par 5.

48 [Défi] Dans la table de multiplication suivante, la somme de toutes les cellules dans la grille bleue vaut 6 084. Que vaut n ?

$\times$	1	2	$\cdots$	n
1	1	2		
2	2	4		
$\vdots$			$\ddots$	
n				n^2

Deuxième partie

Calcul matriciel

Chapitre 13

Calcul matriciel de base

Objectifs du chapitre

- savoir identifier les différents types de matrices.
- maîtriser les opérations élémentaires sur les matrices.
- traduire une situation économique sous forme matricielle.
- traduire un graphe sous forme matricielle.

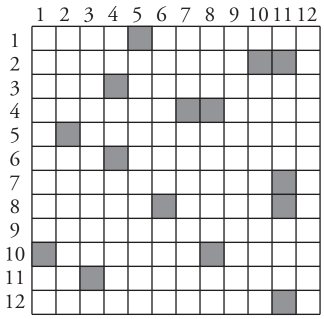
13.1 Généralités sur les matrices

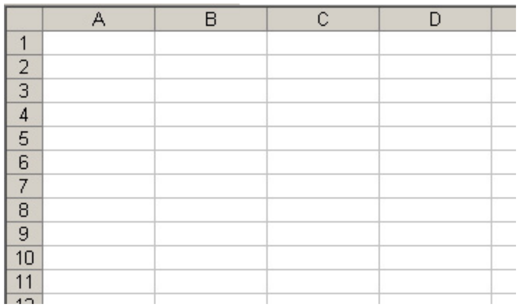
13.1.1 Définitions

On appelle **matrice** un tableau rectangulaire de nombres à m lignes et n colonnes. Les éléments composant la matrice sont caractérisés par une valeur et une position. Ainsi, on note a_{ij} ces **éléments** ; l'indice i indique la ligne de l'élément et l'indice j sa colonne. Ces indices donnent l'adresse de chacun des éléments. Une matrice de cette forme est dite de dimension $m \times n$ et se lit «m fois n». Cela signifie que la matrice est formée de m lignes et de n colonnes. Par convention on note une matrice avec une lettre majuscule et ses éléments en minuscule. Ainsi, une matrice A de m lignes et n colonnes s'écrit :

$$A = \begin{array}{c} \\ \text{ligne } 1 \\ \text{ligne } 2 \\ \vdots \\ \text{ligne } m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{colonne } 1 & \text{colonne } 2 & \cdots & \text{colonne } n \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array}$$

Les matrices sont très utilisées en pratique. On les rencontre non seulement en économie mais dans beaucoup de domaines très divers, comme l'infographie, la finance ou les systèmes de production ou tout simplement sous forme d'une feuille Excel ou encore d'une grille de mots-croisés.





13.1.2 Mise en situation

En général, on considère une matrice comme tableau de nombres. Commençons par illustrer la notion de matrice par un petit exemple.

Exemple 13.1

Considérons les trois villes de Fribourg, Berne et Lausanne. Le tableau suivant permet d'écrire la distance en kilomètres entre ces trois villes :

	Fribourg	Berne	Lausanne
Fribourg	0	31	66
Berne	31	0	97
Lausanne	66	97	0

Structurer ce tableau sous une forme matricielle.

Solution

Appelons D la matrice des distances. On peut alors l'écrire tout simplement en omettant les en-têtes qui ne sont pas indispensables ici :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 31 & 66 \\ 31 & 0 & 97 \\ 66 & 97 & 0 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est de dimension 3×3.

13.1.3 Matrices particulières

- **Matrice carrée** : On appelle matrice carrée d'**ordre** n une matrice ayant n lignes et n colonnes, comme par exemple les matrices A, B et C suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 6 \\ 11 & 5 & -6 \\ 7 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- **Matrice colonne ou vecteur colonne** : On appelle vecteur colonne une matrice de dimension $m \times 1$, comme par exemple :

$$A = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- **Matrice ligne ou vecteur ligne** : On appelle vecteur ligne une matrice de dimension $1 \times n$, comme par exemple :

$$B = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

- **Matrice unité** ou **identité** : On appelle matrice unité une matrice **carrée** dont tous les éléments de la diagonale principale sont égaux à 1 ($a_{ii} = 1$) et dont tous les autres éléments sont nuls. Une telle matrice est notée I_n ou encore I. Les 3 matrices suivantes sont des exemples de matrices unité d'ordre 1, 2 et 3.

$$I_1 = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} \qquad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- **Matrice nulle** : On appelle matrice nulle une matrice de dimension quelconque composée uniquement de zéros, comme par exemple :

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- **Matrices égales** : Deux matrices A et B sont **égales** si elles ont le même format et si tous les éléments qu'elles contiennent sont égaux. Dans l'exemple qui suit $A = B$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1+2 & \sqrt{16} \\ 2+3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- **Sous-matrice** : Une **sous-matrice** est une matrice obtenue en supprimant certaines lignes ou colonnes. Par exemple, C est une sous-matrice de A obtenue en supprimant la ligne 1 et la colonne 3.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad C = \begin{pmatrix} 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercices d'application de la section 13.1

1 [Éléments d'une matrice] On donne la matrice A suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -3 & 6 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Déterminer les valeurs suivantes :

(a) a_{12} et a_{31} **(b)** $\sum_{i=1}^{3} a_{i2}$ **(c)** $\sum_{j=1}^{3} a_{j,4-j}$ **(d)** $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_{i,j}$

2 [Éléments d'une matrice] On donne la matrice A suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer les valeurs suivantes :

(a) $\sum_{i=1}^{3} a_{ii}$ **(b)** $\prod_{i=1}^{3} a_{i2}$ **(c)** $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=i}^{3} a_{i,j}$ **(d)** $\sum_{i=1}^{3}\prod_{j=1}^{3} a_{i,j}$

3 [Éléments d'une matrice] Soit A une matrice carrée d'ordre 4. Écrire la matrice A dans chacun des cas suivants :

(a) $a_{ij} = i + j$ **(b)** $a_{ij} = 2i - j$ **(c)** $a_{ij} = |i - 2j|$

4 [Éléments d'une matrice] Soit A une matrice carrée d'ordre 3. Écrire la matrice A dans chacun des cas suivants :

(a) $a_{ij} = (-1)^i \cdot j + i$

(b) $a_{ij} = (-1)^{i-j} \cdot (i + j)$

(c) $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } |i-j| > 1 \\ -1 & \text{si } |i-j| \leq 1 \end{cases}$

5 [Retrouver la formule] Trouver une formule permettant de construire les matrices suivantes :

(a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 4 & 6 & 8 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}$ **(b)** $B = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 16 \\ 9 & 16 & 25 \\ 16 & 25 & 36 \end{pmatrix}$

6 [Retrouver la formule] Trouver une formule permettant de construire les matrices suivantes :

(a) $K = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ **(b)** $L = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$

7 [Forme matricielle] Un commerçant propose des T-shirts disposés sur un présentoir selon la couleur et la taille. Les lignes de la matrice A représentent les couleurs proposées (bleu, jaune, rouge) et les colonnes les différentes tailles (S, M, L).

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 4 \\ 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Combien y a-t-il de T-shirts jaunes de taille M ?

(b) Que représentent les sommes $\sum_{i=1}^{3} a_{2i}$ et $\sum_{i=1}^{3} a_{i3}$?

8 [Forme matricielle] Dans une entreprise on compte 290 collaborateurs : 250 ouvriers dont 120 hommes, 36 cadres dont les deux tiers sont des femmes et 4 dirigeants dont une seule femme. Traduire ces données sous forme matricielle.

13.2 Opérations matricielles de base

13.2.1 Addition et soustraction matricielles

Soit A et B deux matrices de même dimension $m \times n$. La somme ou la différence de ces matrices, notée $A \pm B$, est une matrice de dimension $m \times n$ où à chaque élément a_{ij} de la matrice A est additionné ou soustrait l'élément correspondant b_{ij} de la matrice B :

$$A \pm B = a_{ij} \pm b_{ij}$$

Exemple 13.2

Effectuer la somme des matrices A et B suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -6 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Solution

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -6 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 1 & -6 & 6 \end{pmatrix}$$

13.2.2 Multiplication d'une matrice par un scalaire

Soit une matrice A de dimension $m \times n$ et un scalaire (nombre réel) k. Multiplier un scalaire par une matrice consiste à multiplier chaque élément de la matrice par le scalaire, c'est-à-dire :

$$kA = k(a_{ij}) = (ka_{ij})$$

Exemple 13.3

Calculer $3A$ et αA sachant que :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Solution

$$3A = \begin{pmatrix} 12 & -3 & 6 \\ 0 & 9 & 15 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \alpha A = \begin{pmatrix} 4\alpha & -\alpha & 2\alpha \\ 0 & 3\alpha & 5\alpha \end{pmatrix}$$

Exemple 13.4

Les prix unitaires hors taxes de 3 produits peuvent être résumés par le vecteur colonne P ci-après. Déterminer le nouveau vecteur colonne des prix TTC P' après l'introduction d'un taux de TVA de 7,7%.

$$P = \begin{pmatrix} 12,00 \\ 18,50 \\ 31,10 \end{pmatrix}$$

Solution

$$P' = 1,077P = \begin{pmatrix} 1,077 \times 12,00 \\ 1,077 \times 18,50 \\ 1,077 \times 31,10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12,924 \\ 19,9245 \\ 33,44947 \end{pmatrix}$$

13.2.3 Matrice transposée

Soit A une matrice de dimension $m \times n$. On appelle A^T la matrice transposée de A. Cette matrice est alors de dimension $n \times m$. Cela signifie que l'élément de la ligne i et de la colonne j de la matrice A devient l'élément de la ligne j et de la colonne i de la matrice transposée.

Les matrices suivantes sont transposées l'une par rapport à l'autre :

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -3 \\ 4 & 7 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A^T = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 1 & 7 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

13.2.4 Multiplication de deux matrices

Soit A une matrice de format $(m \times n)$ et B une matrice de format $(n \times p)$ alors leur produit C, noté $A \times B$ est donné par :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{in} b_{nj}$$

Cette opération n'est possible que si le nombre de colonnes de la première matrice est égal au nombre de lignes de la seconde matrice, ce que l'on peut présenter schématiquement par :

$$\underset{m \times n}{A} \times \underset{n \times p}{B} = \underset{m \times p}{C}$$

égal

Exemple 13.5

Donner le format de la matrice $C = A \times B$ dans les cas suivants :

(a) $A(3 \times 4)$ et $B(4 \times 5)$ **(b)** $A(1 \times 3)$ et $B(3 \times 1)$ **(c)** $A(2 \times 5)$ et $B(2 \times 5)$

Solution

(a) $3 \times 4 \; 4 \times 5 = 3 \times 5$

(b) $1 \times 3 \; 3 \times 1 = 1 \times 1$

(c) $2 \times 5 \; 2 \times 5 =$ impossible

Exemple 13.6

Multiplier les matrices A et B suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Solution

Le produit de la matrice A par la matrice B est compatible et donne une matrice de format 2×2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 3 + 2 \times 2 + 3 \times 0 & 1 \times 1 + 2 \times (-4) + 3 \times 2 \\ 2 \times 3 + (-1) \times 2 + 1 \times 0 & 2 \times 1 + (-1) \times (-4) + 1 \times 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Exemple 13.7

Multiplier les matrices A et B suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Solution

Le produit de la matrice $A(1 \times 3)$ par la matrice $B(3 \times 1)$ est compatible et donne une matrice de format (1×1).

$$C = A \times B = \begin{pmatrix} 1 \times 4 + 2 \times 5 + 3 \times 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \end{pmatrix}$$

Exemple 13.8

Multiplier les matrices A et B suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Solution

Le produit de la matrice $A(3 \times 1)$ par la matrice $B(1 \times 3)$ est compatible et donne une matrice de format (3×3).

$$C = A \times B = \begin{pmatrix} 1 \times 4 & 1 \times 5 & 1 \times 6 \\ 2 \times 4 & 2 \times 5 & 2 \times 6 \\ 3 \times 4 & 3 \times 5 & 3 \times 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \\ 12 & 15 & 18 \end{pmatrix}$$

Exemple 13.9

Multiplier la matrice A par elle-même :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 6 \\ 7 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Solution

Cette multiplication n'est pas possible car les formats ne sont pas compatibles (les deux chiffres centraux étant différents) : $A(2 \times 3)$ et $A(2 \times 3)$.

13.2.5 Propriétés

Soit A, B et C des matrices, k un scalaire, I une matrice unité et 0 une matrice nulle. Voici quelques propriétés associées au calcul matriciel de base :

$A+B=B+A$	Commutativité de l'addition
$A+(B+C)=(A+B)+C$	Associativité de l'addition
$A+(-A)=(-A)+A=0$	Matrice opposée
$A+0=0+A=A$	Élément neutre pour l'addition
$k(A+B)=kA+kB$	Distributivité avec un scalaire
$A(B+C)=(AB)+(AC)$	Distributivité à gauche
$(A+B)C=(AC)+(BC)$	Distributivité à droite
$A(BC)=(AB)C$	Associativité du produit
$AI=A$ et $IB=B$	Matrice unité
$AI=IA=A$	Matrice unité associée à une matrice carrée
$I=I^2=I^3=\cdots=I^n$	Puissance d'une matrice unité
$A^p=\underbrace{A\times A\times A\times\cdots\times A}_{p\text{ fois}}$	Puissance d'une matrice carrée
$(A^T)^T=A$	Double transposition
$(A+B)^T=A^T+B^T$	Transposée d'une somme
$(AB)^T=B^TA^T$	Transposée d'un produit

Exemple 13.10

Soit A une matrice 3×3 et B une matrice 4×3.

(a) Donner le format de l'expression matricielle $(AB^T)^T$.

(b) Simplifier cette expression.

Solution

(a) B^T est de format 3×4. Donc AB^T est compatible. Le résultat de cette multiplication est de format 3×4. En transposant ce résultat on obtient finalement une matrice de dimension 4×3.

(b) On simplifie cette expression à l'aide des propriétés énoncées :

$$(AB^T)^T=(B^T)^TA^T=BA^T$$

13.2.6 Utilisation d'Excel

L'utilisation d'Excel permet un maniement simple des matrices. Les fonctions suivantes sont disponibles sous Excel :

L'addition et la soustraction	$+$ et $-$
La multiplication	PRODUITMAT()
La transposition	TRANSPOSE()
L'inversion	INVERSEMAT()
Matrice unité	MATRICE.UNITAIRE()

Pour simplifier le calcul sous Excel, on nomme les plages de cellules contenant les matrices à utiliser. On peut ensuite calculer des expressions matricielles uniquement en utilisant le nom des cellules nommées.

Exemple 13.11

Calculer l'expression matricielle suivante : $(AB^T)^T$ à partir des deux matrices ci-après :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & -3 \\ 6 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} -5 & 6 & 9 \\ 7 & 8 & 2 \\ -4 & 3 & 5 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Solution

Le résultat produit une matrice de format 4×3. On nomme A la plage de cellules contenant la matrice A et B celle contenant la matrice B. On sélectionne ensuite une plage de cellules de grandeur 4×3 dans laquelle on tape la formule suivante :

=Transpose(Produitmat(A ;Transpose(B)))

On valide ensuite cette expression par la commande :

Ctrl + **Maj** + **Entrée**

ce qui donne :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	4	2	1			1	2	-6	
2	5	0	3	Matrice A		46	41	54	Matrice C
3	6	1	2			-5	-5	-11	
4						26	36	40	
5	-5	6	9						
6	7	8	2	Matrice B					
7	-4	3	5						
8	6	0	2						

Dans Excel, la fonction puissance pour le calcul matriciel n'est pas possible. Il faut utiliser la fonction Produitmat().

Exemple 13.12

On donne la matrice carrée $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Calculer A^2

Solution

1. On saisit la matrice dans une plage de cellules que l'on nomme par exemple A.
2. On sélectionne une plage de cellules vides comportant 2 lignes et 2 colonnes.
3. On entre la formule matricielle : Produitmat(A ;A)
4. On valide le tout par la commande : Ctrl+Maj+Entrée et l'on obtient :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$$

Puissance d'une matrice
Comment créer une fonction Excel personnalisée ?

Exercices d'application de la section 13.2

9 [Expressions matricielles] Soit les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer :

(a) $-3A + B$ **(b)** $\frac{1}{3}(A+B)$ **(c)** $\frac{1}{4}(2A+C)$ **(d)** $-5(C+2C)$

10 [Expressions matricielles] Soit les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Calculer tous les produits possibles.

11 [Équation matricielle] Trouver la matrice X satisfaisant à l'équation matricielle suivante : $2X = 3(A+X)$, si la matrice A est la suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -12 \\ -3 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

12 [Équation matricielle] Trouver la matrice X satisfaisant à l'équation matricielle suivante :

$$2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 4 & 1\\ 2 & -3\end{pmatrix} + 3X + \begin{pmatrix}-5 & 2\\ 1 & 7\\ 0 & -2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

13 [Équation matricielle] Quel nombre réel x est solution de l'équation matricielle suivante :

$$x\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix} + x\begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}12 & 16\\ 20 & 24\end{pmatrix}$$

14 [Équation matricielle] Soit les matrices d'inventaire initial (I_0), d'inventaire final (I_1) et des ventes (V), calculer la matrice (A) des achats :

$$I_0 = \begin{pmatrix}30 & 20\\ 18 & 22\end{pmatrix} \quad I_1 = \begin{pmatrix}10 & 8\\ 12 & 10\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V = \begin{pmatrix}21 & 18\\ 22 & 15\end{pmatrix}$$

15 [Format matriciel] Donner le format de l'expression matricielle ci-après si $A = (n \times p)$ et W une matrice carrée d'ordre n :

$$A^T W A$$

16 [Format matriciel] On donne un nombre réel h ainsi que le format de 3 matrices sous la forme suivante :

$$W_{n;n} \qquad K_{n-z;n} \qquad V_{n;1}$$

Quel est le format de la matrice U donnée par : $U = (W + hK^T K)V$?

17 [Utilisation d'Excel] Calculer avec Excel l'expression matricielle suivante $A^T W A$ avec les matrices A et W suivantes :

$$A = \begin{pmatrix}2 & 1 & 7\\ 6 & 0 & 4\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad W = \begin{pmatrix}1 & 3\\ 5 & 1\end{pmatrix}$$

18 [Utilisation d'Excel] Réaliser cette opération avec Excel :

$$(AB^T + 2AB)^T \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix}4 & 0 & 2\\ 3 & 5 & 6\end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix}-1 & 3 & 0\\ 4 & 1 & 6\\ 2 & -3 & 1\end{pmatrix}$$

19 [Puissance matricielle] Calculer M^2 et M^3 si la matrice M est donnée par :

$$M = \begin{pmatrix}a & a & 0\\ 0 & a & 0\\ 0 & a & a\end{pmatrix}$$

20 [Puissance matricielle] On donne la matrice A^n suivante :

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & x \end{pmatrix}$$

(a) Calculer A^2, A^3 puis A^n

(b) Déterminer la valeur de x et de n connaissant :

$$A^n = \begin{pmatrix} 6,25 & 5 \\ 0 & 6,25 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A^{n+1} = \begin{pmatrix} 15,625 & 18,75 \\ 0 & 15,625 \end{pmatrix}$$

21 [Une grande puissance] Soit la matrice $D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Calculer D^2, D^3, D^4, D^5, puis D^{2022}

22 [Formule générale] Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 1 & x \end{pmatrix}$

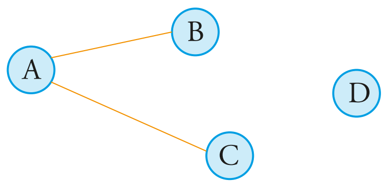
Calculer A^2, A^3, puis A^n

13.3 Graphes et matrices

13.3.1 Éléments de vocabulaire liés aux graphes

Un graphe est constitué d'un ensemble de points appelés **sommets** reliés entre eux par des **arêtes**. Le nombre de sommets est appelé l'**ordre** du graphe.

Exemple 13.13

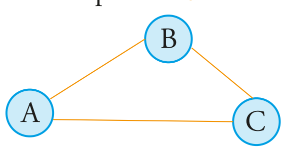


Graphe d'ordre 4
comportant 2 arêtes

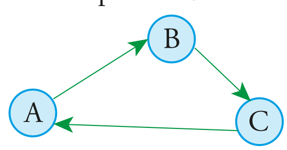
Un graphe peut être **non orienté** ou orienté par des flèches appelées **arcs**.

Exemple 13.14

Graphe non orienté
comportant 3 arêtes



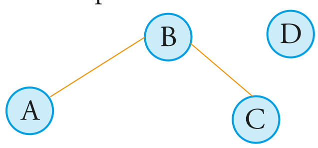
Graphe orienté
comportant 3 arcs



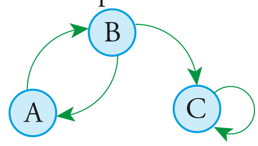
Un graphe est dit **simple** s'il n'y a qu'une seule arête ou arc entre deux sommets connectés. Un **multigraphe** par compte peut contenir plusieurs arêtes ou arcs reliant deux sommets connectés ainsi que des boucles.

Exemple 13.15

Graphe simple
comportant 2 arêtes



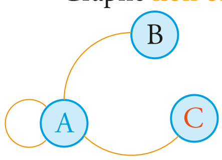
Multigraphe
comportant 4 arcs



Dans un graphe non orienté, le **degré** d'un sommet s, noté $d(s)$ est le nombre d'arêtes qui touchent le sommet s. Les boucles comptent pour 2.
Dans un graphe orienté, le **degré entrant** d'un sommet s, noté $d^-(s)$ est le nombre d'arêtes qui arrivent sur le sommet s et le **degré sortant**, noté $d^+(s)$ est le nombre d'arêtes qui partent du sommet s. Les boucles comptent pour 1.

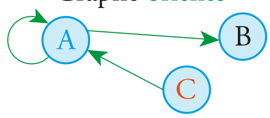
Exemple 13.16

Graphe non orienté



$d(A) = 4$ et $d(C) = 1$

Graphe orienté



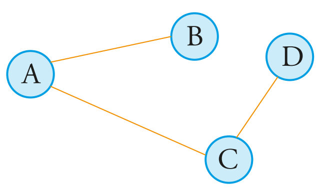
$d^+(A) = 2$ et $d^+(C) = 1$

$d^-(A) = 2$ et $d^-(C) = 0$

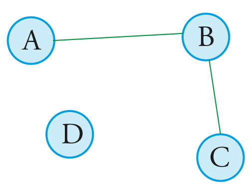
On parle d'un graphe **connexe** lorsque tous les sommets sont accessibles à partir de n'importe quel sommet.

Exemple 13.17

Graphe connexe



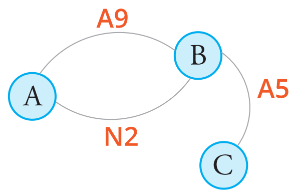
Graphe non connexe



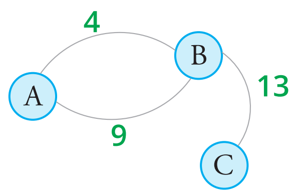
Un graphe est **étiqueté** si ses arêtes sont affectées d'un symbole. Lorsque ces symboles sont des nombres positifs, on parle de **graphe pondéré**.

Exemple 13.18

Graphe étiqueté



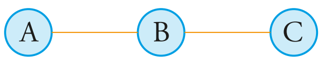
Graphe pondéré



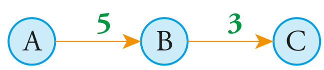
✎ Il ne faut pas confondre la longueur d'une **chaine** (ou d'un **chemin**) avec le poids d'une chaîne ou d'un chemin. [1]

Exemple 13.19

Chaîne de longueur 2



Chemin de poids 8



Trouver un chemin de poids minimal entre deux sommets d'un graphe est une problématique importante en supply chain et dans les problèmes de transport. L'**algorithme de Dijkstra** permet, par exemple, de déterminer le plus court chemin pour se rendre d'une ville à une autre connaissant le réseau routier d'une région.

Algorithme de Dijkstra
Fonctionnement à partir d'un exemple

13.3.2 Matrices associées

Il est possible d'associer plusieurs types de matrices à un graphe selon les informations requises. Parmi ces matrices, les matrices d'adjacence et les matrices de poids des arcs jouent un rôle important d'un point de vue économique. Nous les abordons succinctement ici mais nous y reviendrons plus en détail au chapitre consacré aux applications matricielles.

1. On parle de chaîne pour les graphes non orientés et de chemin pour les graphes orientés.

Matrice d'adjacence d'un graphe

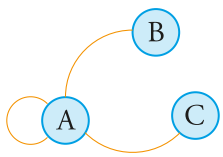
Graphe non orienté

Soit G un graphe non orienté qui possède n sommets. On appelle **matrice d'adjacence** du graphe G la matrice carrée A d'ordre n telle que :

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si il existe une relation directe entre le sommet } i \text{ et le sommet } j \\ 0 & \text{si il n'y a pas de relation directe entre le sommet } i \text{ et le sommet } j \end{cases}$$

Exemple 13.20

Graphe G



Matrice d'adjacence associée

$$A = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

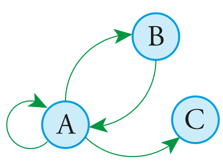
Graphe orienté

Soit G un graphe orienté qui possède n sommets. On appelle **matrice d'adjacence** du graphe G la matrice carrée A d'ordre n telle que :

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si il existe un arc partant du sommet } i \text{ vers le sommet } j \\ 0 & \text{si il n'y a pas d'arc partant du sommet } i \text{ vers le sommet } j \end{cases}$$

Exemple 13.21

Graphe G



Matrice d'adjacence associée

$$A = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

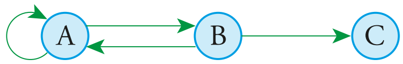
Remarque

Pour connaitre le nombre de chaînes d'un **graphe simple** ou de chemins de longueur p entre certains sommets, il suffit d'élever la matrice d'adjacence A à la puissance p. Ainsi :

Si $N = A^p$, alors les éléments $n_{i,j}$ de la matrice N indiquent le nombre de chaînes (ou de chemins) de longueur p reliant le sommet i au sommet j.

Exemple 13.22

Combien de chemins de longueur 4 permettent de relier A à C ?



Solution

On élève la matrice d'adjacence associée à la puissance 4, ce qui donne :

$$N = A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il y a donc 2 chemins possibles de longueur 4 :

- $A \rightarrow A \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C$
- $A \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C$

Matrice de poids des arêtes ou des arcs

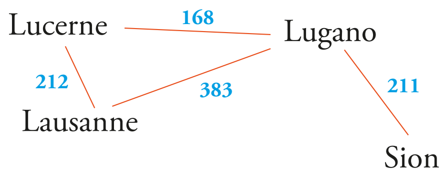
La matrice de poids des arêtes ou des arcs s'apparente à la matrice d'adjacence. Au lieu d'utiliser la valeur 1 quand il y a une liaison ou une arrête entre deux sommets, on place le poids dans la case appropriée de la matrice.

Pour une liaison inexistante on ne peut plus utiliser la valeur 0 (puisque la valeur 0 indique précisément une arête ou un arc de valeur 0 !). Dans ce cas on écrit -1 ou encore ∞. Ainsi, si A représente la matrice des poids associée à un graphe G, on définit :

$$a_{i,j} = \begin{cases} \text{poids de l'arête ou de l'arc si le sommet } i \text{ est relié au sommet } j \\ \infty \text{ ou } -1 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Exemple 13.23

Écrire la matrice D des distances (en km) reliant les villes suisses suivantes :



Solution

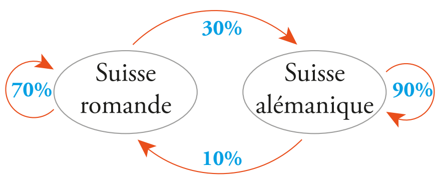
Implicitement, et comme il s'agit de distances, on suppose une boucle de poids nul sur chaque ville. Ainsi :

$$D = \begin{array}{c} \\ \text{Lucerne} \\ \text{Lausanne} \\ \text{Lugano} \\ \text{Sion} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{Lucerne} & \text{Lausanne} & \text{Lugano} & \text{Sion} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 212 & 168 & \infty \\ 212 & 0 & 383 & \infty \\ 168 & 383 & 0 & 211 \\ \infty & \infty & 211 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Exemple 13.24

Une étude économique a montré que durant une certaine année 30% des romands se sont rendus en Suisse alémanique et que 70% n'ont pas quitté la Romandie. Dans cette même année seulement 10% des alémaniques se sont rendus en Suisse romande et 90% sont restés en Suisse allemande. Modéliser cette situation au moyen d'un graphe pondéré et sa matrice associée.

Solution



$$D = \begin{array}{c} \\ \text{SR} \\ \text{SA} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{SR} & \text{SA} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 70\% & 30\% \\ 10\% & 90\% \end{pmatrix} \end{array}$$

Exercices d'application de la section 13.3

23 [Graphe de situation] Au World Economic Forum de Davos, le président russe s'entretient en tête à tête avec son homologue suisse, chacun accompagné de son interprète personnel. Représenter cette situation par un graphe d'ordre 4 dans lequel chaque arrête représente : «i sert la main à j».

24 [Graphe de situation] Le tableau suivant indique les relations d'amitié sur Facebook de 5 clients d'un pub.

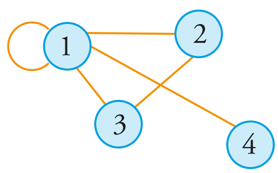
Individu (i)	1	2	3	4	5
Amis de i	2, 4, 5	1, 3, 4	2	1, 2	

(a) Représenter cette situation par un graphe dont les sommets i et j indiquent une relation d'amitié entre i et j.

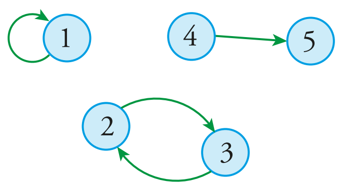
(b) Comment pourrait-on qualifier un graphe de ce type mais vérifiant l'adage «les amis de nos amis sont nos amis» ?

25 [Matrice d'un graphe] Écrire les matrices d'adjacence associées aux deux graphes suivants :

Graphe 1



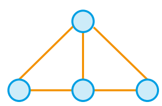
Graphe 2



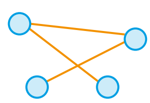
26 [Matrice d'un graphe] Parmi les 3 graphes ci-après, quel est le seul pouvant être associé à la matrice A ?

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Graphe 1

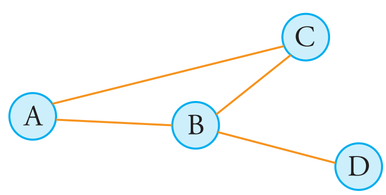


Graphe 2



Graphe 3

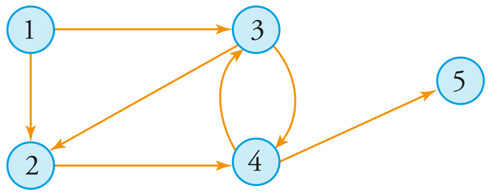
27 [Longueur d'une chaîne] On donne le graphe suivant :



(a) Combien y a-t-il de chaînes de longueur 5 permettant de relier le sommet D à lui-même ?

(b) Donner la liste de toutes les chaînes calculées sous **(a)**

28 [Longueur d'un chemin] On donne le graphe suivant :



Si A est la matrice d'adjacence associée au graphe est A, que vaut, **sans effectuer de calculs**, la matrice A^4 ?

13.4 Problèmes et exercices de synthèse

29 [Matrice des achats] Pour la fête annuelle d'une école, les étudiants ont établi 2 stands dans lesquels ils vendent des bières, des eaux minérales et des tartelettes. Au premier stand il y a 120 tartelettes, 80 bières et 140 minérales. Au second stand il y a 200 bières, 320 minérales et 180 tartelettes. Les bières sont achetées à 1,20 frs, les minérales à 1,40 frs et les tartelettes à 1 fr.

(a) Construire la matrice S qui décrit l'inventaire dans les stands.
(b) Construire la matrice C des prix d'achat.
(c) Construire la matrice P des prix de vente sachant que les prix d'achat représentent 2/3 des prix de vente.
(d) Quelle est la valeur du stock dans chaque stand ?

30 [Profit] Le McDonald's propose actuellement en promotion le Hamburger à 2,50 frs, le Double cheeseburger à 4,50 frs et le Sundae à 2 frs. Pour le McDonald's, le prix de revient de ces articles est respectivement de 1,40 frs, 3,80 frs et 1,20 frs. Cette semaine, un McDonald's a vendu 3500 Hamburger, 2023 Double cheeseburger et 717 Sundae. Calculer le profit hebdomadaire de ce McDonald's en utilisant une approche matricielle.

31 [Vols aéronautiques] La compagnie easyJet propose les vols suivants entre Genève, Berlin et Naples

(a) Déterminer la matrice d'adjacence (A) représentant cette situation

(b) Calculer A^2 et interpréter les résultats

(c) Calculer $A + A^2$ et interpréter les résultats

32 [Club de sport] Un club de sport a mis en place trois niveaux d'apprentissage : Débutant (D), Moyen (M) et Avancé (A). D'une année sur l'autre, on constate que :

- parmi les débutants, 40% restent à ce niveau et 60% passent au niveau moyen ;
- parmi les adhérents moyens, 60% restent à ce niveau et 40% passent au niveau supérieur ;
- parmi les adhérents de niveau avancé, 90% restent à ce niveau, et les autres 10% préfèrent réintégrer le niveau moyen.

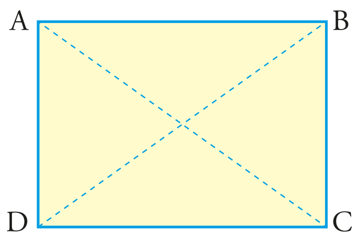
(a) Représenter cette situation par un graphe

(b) Construire la matrice associée à ce graphe

33 [Diviseurs] Construire un graphe orienté dont les sommets sont les entiers compris entre 1 et 8 et dont les arcs représentent la relation «être diviseur de».

34 [Frontières] Construire un graphe ainsi qu'une matrice d'adjacence associée représentant les pays frontaliers de la Suisse et les frontières qu'ils partagent.

35 [Matrice des distances] Soit un rectangle de 4 cm sur 3 cm.



Construire une matrice A qui indique la plus **courte** distance entre chaque sommet.

36 [Matrice de compétition] Dans un écosystème, 3 espèces d'animaux se battent pour de la nourriture. On a constaté que l'espèce i l'emporte sur l'espèce j dans la proportion :

$$a_{ij} = \frac{i}{i+j}$$

(a) Construire la matrice de compétition entre ces 3 espèces animales.

(b) Expliquer les valeurs $a_{11}; a_{22}$ et a_{33}

37 [Moyennes scolaires] La matrice A suivante indique les moyennes annuelles de 3 étudiants pour différentes matières.

A	Maths	Stats	Info	Compta
Julien	4	6	3	6
Sylvie	4,5	3,5	5	3,5
Pierre	3,5	4,5	4	2

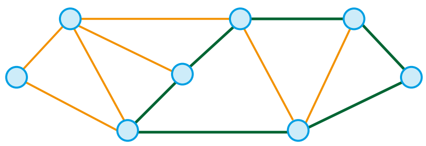
(a) Calculer $A \times B^T$ avec $B = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$.
Que signifie ce résultat ?

(b) Si maths et stats ne font qu'une seule note et que la compta compte double, quelle doit être la matrice B afin que le produit $A \times B^T$ donne la moyenne annuelle finale pour chaque étudiant ?

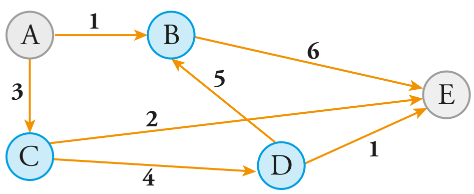
(c) Calculer, puis donner la signification de l'opération $C \times A \times B^T$, si :

$$C = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

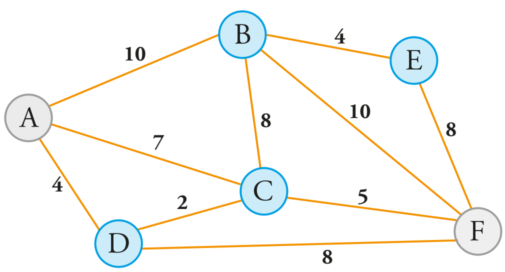
38 [Cycles] Les arêtes en vert sur le graphe ci-après représentent un cycle. Un cycle est un chemin dont le point de départ et d'arrivée coïncident. Combien de cycles de longueur 6 possède ce graphe ?



39 [Dijsktra] Utiliser l'algorithme de Dijsktra pour trouver le plus court chemin menant de A à E.



40 [Dijsktra] Utiliser l'algorithme de Dijsktra pour trouver le plus court chemin menant de A à F.



41 [Défi] Dans les nombres complexes, le **nombre imaginaire** i a les propriétés suivantes : $i^2 = -1$; $i^3 = -i$; $i^4 = 1$, etc. Calculer P^{2000} si P est donné par :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

42 [Défi] Une matrice A est **booléenne** si tous ses éléments sont égaux à 0 ou à 1. Si A est une matrice booléenne de format $m \times k$, B une matrice booléenne de format $k \times n$ et C une matrice booléenne carrée, alors on peut définir les opérations booléennes suivantes :

- Produit booléen : $A \otimes B = \bigvee_{k=1}^{n} a_{i,k} \wedge b_{k,j}$
- Puissance booléenne : $C^{[p]} = \underbrace{C \otimes C \otimes \cdots \otimes C}_{p \text{ fois}}$
- Opérateur logique ET : $x \wedge y = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
- Opérateur logique OU : $x \vee y = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1 \text{ ou } y = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Dans ces conditions, que vaut $A^{[2]}$ si la matrice booléenne A est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Chapitre 14

Déterminants et matrices inverses

Objectifs du chapitre

- savoir calculer un déterminant d'ordre 2 et 3.
- savoir calculer un déterminant d'ordre supérieur à 3 par la méthode de Laplace.
- savoir inverser une matrice d'ordre 2 et 3 par la méthode des cofacteurs ou par transformations élémentaires des lignes.
- résolution d'un système d'équations linéaires au moyen des déterminants ou des matrices inverses.

14.1 Déterminants et cofacteurs

Les **déterminants** s'utilisent dans le calcul des inversions de matrices, pour vérifier l'existence de solutions dans les systèmes d'équations linéaires ainsi que dans leur résolution au moyen de la méthode de Cramer.

Le calcul d'un déterminant se fait en principe de manière récursive. Calculer le déterminant d'une matrice 10×10, fait appel au calcul d'un déterminant d'une matrice 9×9 qui lui-même fait appel à celui d'une matrice 8×8, etc... Le nombre d'opérations est ainsi proportionnel à $n!$ (n factorielle). [1]

Le déterminant d'ordre n, associé à une matrice carrés d'ordre n se note :

$$\det(A) = |A| = \det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

1. On dit que l'algorithme de calcul est de complexité $O(n!)$.

14.1.1 Déterminants d'ordre 1 et 2

Déterminant d'ordre 1

Le déterminant d'ordre 1 correspond tout simplement à la valeur contenue dans la matrice :

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} \end{vmatrix} = a_{11}$$

Déterminant d'ordre 2

Le déterminant d'une matrice A (2×2) se calcule au moyen de la formule suivante :

$$\det(A) = |A| = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Exemple 14.1

Calculer le déterminant de la matrice suivante : $A = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

Solution

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -3 & 6 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = (-3)4 - 6(-2) = -12 + 12 = 0$$

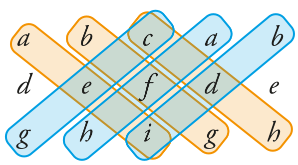
Déterminant d'ordre 3

Le déterminant d'une matrice A (3×3) se calcule au moyen de la méthode de **Méthode de Sarrus** (mathématicien français 1798 - 1861).

1. Recopier les deux premières colonnes à droite de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$$

2. Additionner les produits en orange (diagonales principales) et soustraire les produits en bleu (diagonales secondaires) :



$$\det(A) = a \cdot e \cdot i + b \cdot f \cdot g + c \cdot d \cdot h - g \cdot e \cdot c - h \cdot f \cdot a - i \cdot d \cdot b$$

Exemple 14.2

Calculer le déterminant de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & 7 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Solution

$$\det(A) = \left|\begin{array}{ccc|cc} 5 & -1 & 4 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 7 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right| \qquad \text{Ajout des deux premières colonnes}$$

$$= 5 \cdot (-2) \cdot 2 + (-1) \cdot 7 \cdot 0 + 4 \cdot 1 \cdot 3 \qquad \text{Produit des diagonales principales}$$

$$- 0 \cdot (-2) \cdot 4 - 3 \cdot 7 \cdot 5 - 2 \cdot 1 \cdot (-1) \qquad \text{Produit des diagonales secondaires}$$

$$= -111$$

Déterminant d'ordre supérieur

La méthode de Sarrus ne fonctionne plus pour des déterminants d'ordre supérieur à 3. Pour calculer un déterminant d'ordre supérieur, on utilise la méthode des **mineurs** et **cofacteurs**.

Soit A une matrice carrée d'ordre n.

- Le mineur $\mathcal{M}_{ij}$ d'un élément $a_{i,j}$ est le déterminant de la matrice obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j de la matrice A.
- Le cofacteur $\mathcal{A}_{ij}$ d'un élément $a_{i,j}$ se calcule comme suit :

$$\mathcal{A}_{ij} = (-1)^{i+j} \mathcal{M}_{ij}$$

Exemple 14.3

Calculer le mineur et le cofacteur de l'élément a_{23} de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Solution

On supprime la ligne 2 et la colonne 3, puis on calcule le déterminant restant.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \longrightarrow \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = 1 \times 8 - 2 \times 7 = -6$$

Ainsi : $\mathscr{M}_{23} = -6$ et $\mathscr{A}_{23} = (-1)^{2+3} \times \mathscr{M}_{23} = 6$

Le déterminant d'une matrice carrée d'ordre n ($n \geq 2$) peut être obtenu selon la méthode suivante, appelée aussi **développement de Laplace** (mathématicien français 1749 - 1827) :

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11}\mathscr{A}_{11} + a_{12}\mathscr{A}_{12} + \cdots + a_{1n}\mathscr{A}_{1n}$$

✎ Cette méthode fonctionne par analogie à partir de n'importe quelle ligne ou colonne de la matrice. Pour éviter de longs calculs on privilégiera une colonne contenant 1 ou plusieurs zéros.

Exemple 14.4

Calculer le déterminant de la matrice A par la méthode des mineurs et cofacteurs :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 5 \\ 3 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Solution

On applique le développement de Laplace à partir de la 2ème colonne :

$$\det(A) = -2.\mathscr{A}_{12} + 0.\mathscr{A}_{22} + 0.\mathscr{A}_{32} = -2 \times \mathscr{A}_{12}$$

Pour calculer $\mathscr{A}_{12}$, on calcule au préalable le mineur $\mathscr{M}_{12}$:

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 5 \\ 3 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \mathscr{M}_{12} = \det\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = 3 \times 3 - (-2) \times (-1) = 7$$

Puis $\mathscr{A}_{12} = (-1)^{1+2} = -7$.
Finalement : $\det(A) = -2.\mathscr{A}_{12} = 14$

Exercices d'application de la section 14.1

1 [Déterminant d'ordre 2] Calculer les déterminants des matrices suivantes :

(a) $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ **(b)** $B = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 2^{5/2} \\ \sqrt{2} & 2^{3/2} \end{pmatrix}$

2 [Déterminant d'ordre 2] Calculer les déterminants des matrices suivantes :

(a) $A = \begin{pmatrix} 1/x & y^{-1} \\ y & x^2 \end{pmatrix}$ **(b)** $B = \begin{pmatrix} 1 & \log_x(y) \\ \log_y(x) & 1 \end{pmatrix}$

3 [Déterminant d'ordre 3] Calculer les déterminants des matrices suivantes selon la méthode de Sarrus.

(a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ **(b)** $B = \begin{pmatrix} x & y & 0 \\ 0 & x & 0 \\ x & y & x \end{pmatrix}$

4 [Déterminant d'ordre 3] Calculer les déterminants des matrices suivantes selon la méthode de Sarrus.

(a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ **(b)** $B = \begin{pmatrix} -\lambda & -1 & 0 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$

5 [Mineurs et cofacteurs] Pour chacune des matrices, calculer les mineurs et cofacteurs :

(a) $\mathscr{M}_{1;2}$ **(b)** $\mathscr{M}_{2;2}$ **(c)** $\mathscr{A}_{1;1}$ **(d)** $\mathscr{A}_{2;1}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

6 [Mineurs et cofacteurs] Pour chacune des matrices, calculer les mineurs et cofacteurs :

(a) $\mathscr{M}_{1;2}$ **(b)** $\mathscr{M}_{2;2}$ **(c)** $\mathscr{A}_{1;1}$ **(d)** $\mathscr{A}_{2;1}$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 6 & -3 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 4 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

7 [Méthode de Laplace] Calculer le déterminant selon la méthode de Laplace en suivant la ligne ou la colonne en orange :

(a) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ **(b)** $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

8 [Méthode de Laplace] Calculer le déterminant selon la méthode de Laplace en suivant la ligne ou la colonne en orange :

(a) $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ **(b)** $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 & 3 \\ -2 & 4 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & 5 \\ 3 & -4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

9 [Déterminant] Calculer le déterminant de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & e & f & g \\ 0 & 0 & h & i \\ 0 & 0 & 0 & j \end{pmatrix}$$

10 [Déterminant] Calculer le déterminant de la matrice $A_{n;n}$ donnée par :

$$a_{i;j} = \begin{cases} 2 & \text{pour } i \leq j \\ 0 & \text{pour } i > j \end{cases}$$

11 [Équation matricielle] Trouver la valeur du nombre réel x qui satisfait l'équation matricielle : $\det(A - xB) = 0$

$$\text{si } A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

12 [Équation matricielle] Trouver la valeur du nombre réel x qui satisfait l'équation matricielle : $\det(A - xI) = 0$

$$\text{si } A = \begin{pmatrix} -1 & 9 & 17 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

14.2 Matrice inverse

14.2.1 Inversion par la méthode du déterminant

Soit A, une matrice carrée d'ordre n, on appelle matrice inverse de A, si elle existe, la matrice A^{-1} telle que :

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

où I est la matrice unité d'ordre n.

Une matrice A est inversible si et seulement si : $\det A \neq 0$. On parle alors de **matrice régulière**. Pour toute matrice régulière A d'ordre n il y a une et une seule matrice inverse A^{-1} que l'on peut calculer au moyen de la formule :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \mathscr{A}^T = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} \mathscr{A}_{11} & \cdots & \mathscr{A}_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathscr{A}_{1n} & \cdots & \mathscr{A}_{nn} \end{pmatrix}$$

Exemple 14.5

Calculer la matrice inverse de $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

Solution

1. Calculer le déterminant : $\det(A) = 4 \times 3 - 2 \times 5 = 2$. Ce déterminant étant différent de 0, A est inversible.
2. Calculer la matrice des mineurs $\mathscr{M}$:

$$\begin{array}{ll} \mathscr{M}_{11} = \det(3) = 3 & \mathscr{M}_{12} = \det(2) = 2 \\ \mathscr{M}_{21} = \det(5) = 5 & \mathscr{M}_{22} = \det(4) = 4 \end{array}$$

$$\mathscr{M} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

3. Calculer la matrice des cofacteurs $\mathscr{A}$ et des cofacteurs transposée $\mathscr{A}^T$. Il suffit de changer les signes des éléments entourés en bleu (c'est-à-dire des éléments dont la somme des indices est impaire, car $\mathscr{A}_{ij} = (-1)^{i+j} \mathscr{M}_{ij}$).

$$\mathscr{M} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \mathscr{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \mathscr{A}^T = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

4. Diviser chaque élément de $\mathscr{A}^T$ par le déterminant de A :

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 & -2,5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exemple 14.6

Calculer la matrice inverse de $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

Solution

1. Calculer le déterminant : $\det(A) = -1$. Ce déterminant étant différent de 0, A est inversible.
2. Calculer la matrice des mineurs $\mathscr{M}$:

$\mathscr{M}_{11} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -2$	$\mathscr{M}_{12} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -1$	$\mathscr{M}_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 0$
$\mathscr{M}_{21} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 10$	$\mathscr{M}_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 6$	$\mathscr{M}_{23} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -1$
$\mathscr{M}_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -3$	$\mathscr{M}_{32} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2$	$\mathscr{M}_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$$\mathscr{M} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 10 & 6 & -1 \\ -3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Calculer la matrice des cofacteurs $\mathscr{A}$ et des cofacteurs transposée $\mathscr{A}^T$.

$$\mathscr{M} = \begin{pmatrix} -2 & \boxed{-1} & 0 \\ \boxed{10} & 6 & \boxed{-1} \\ -3 & \boxed{-2} & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \mathscr{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -10 & 6 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \mathscr{A}^T = \begin{pmatrix} -2 & -10 & -3 \\ 1 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Diviser chaque élément de $\mathscr{A}^T$ par le déterminant de A :

$$A^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} -2 & -10 & -3 \\ 1 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 3 \\ -1 & -6 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

14.2.2 Inversion par la méthode de Cayley-Hamilton

Cette méthode utilise la propriété énoncée par les mathématiciens Harthur Cayley et William Hamilton : «*Toute matrice carrée satisfait sa propre équation caractéristique*». Cette propriété permet de déterminer l'inverse d'une matrice en suivant la méthode suivante :

Pour inverser une matrice carrée d'ordre n selon la méthode Cayley-Hamilton, il faut :

1. Écrire et développer l'**équation caractéristique** : $\det(A - xI_n) = 0$
2. Remplacer x par A et les coefficients α_i de l'équation par $\alpha_i I_n$
3. Réécrire cette équation matricielle sous la forme : $A \times A^* = I$, où A^* est alors l'inverse de A.

Méthode de Cayley-Hamilton
Démonstration de la méthode dans le cadre d'une matrice carrée d'ordre 2.

Exemple 14.7

Inverser la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$

Solution

1. Calcul de $A - xI_n$:

$$A - xI_n = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-x & 2 \\ 7 & 5-x \end{pmatrix}$$

2. Développer $\det(A - xI_n) = 0$

$$\begin{aligned} \det(A - xI_n) &= (3-x)(5-x) - 2 \times 7 \\ &= x^2 - 8x + 1 = 0 \end{aligned}$$

3. Remplacer x par A et le coefficient 1 de l'équation par I :

$$A^2 - 8A + I = 0$$

4. Transformation :

$$\begin{aligned} A^2 - 8A + I &= 0 && \text{Équation matricielle originale} \\ A^2 - 8A &= -I && \text{Isoler la matrice unité dans le membre de droite} \\ -A^2 + 8A &= I && \text{Diviser chaque membre par } -1 \\ A(\underbrace{-A + 8I}_{\text{inverse de } A}) &= I && \text{Mettre } A \text{ en évidence} \end{aligned}$$

Donc $A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -7 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}$

14.2.3 Inversion par la méthode des transformations élémentaires des lignes

Inversion matricielle
Par la méthode des transformations élémentaires des lignes.

14.2.4 Propriétés des matrices inverses

Soit A et B deux matrices régulières d'ordre n, I une matrice unité d'ordre n et k une constante différente de zéro.

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I \qquad \text{Inverse à gauche et à droite}$$

$$(A^{-1})^{-1} = A \qquad \text{Inverse de l'inverse}$$

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1} \qquad \text{Inverse d'un produit}$$

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T \qquad \text{Inverse d'une matrice transposée}$$

$$(kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1} \qquad \text{Multiplication par une constante}$$

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} \qquad \text{Déterminant d'une matrice inverse}$$

Exemple 14.8

Calculer l'inverse de la matrice $B = \begin{pmatrix} 100 & 400 \\ 200 & 900 \end{pmatrix}$

Solution

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 100 & 400 \\ 200 & 900 \end{pmatrix}^{-1} \qquad \text{Matrice originale}$$

$$= \left[100 \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 9 \end{pmatrix} \right]^{-1} \qquad \text{Mise en évidence de 100}$$

$$= \frac{1}{100} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}^{-1} \qquad \text{Propriété des matrices inverses}$$

$$= \frac{1}{100} \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{Solution}$$

Exercices d'application de la section 14.2

13 [Inverse] Montrer que les matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0,1 & -0,3 \\ 0,2 & 0,4 \end{pmatrix}$ sont l'inverse l'une de l'autre.

14 [Inverse] Trouver la valeur de y pour que les matrices A et B soient inverses l'une de l'autre.

$$A = \begin{pmatrix} y-1 & -3 \\ 2 & y+5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$$

15 [Formule générale] Trouver la formule générale pour l'inverse d'une matrice carrée d'ordre 2.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

16 [Format de matrice] Quel est le format de l'expression matricielle suivante connaissant le format des matrices $W(n-z; n-z)$, $K(p; n-z)$, $L(p; 1)$ et $h \in \mathbb{R}$?

$$[(hW + K^T K)^{-1} \cdot K^T L]^T$$

17 [Inversion matricielle] Calculer l'inverse des matrices suivantes :

(a) $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

(b) $B = \begin{pmatrix} x & 0 & x \\ 0 & x & 0 \\ x & 0 & x \end{pmatrix}$

18 [Inversion matricielle] Calculer l'inverse des matrices suivantes :

(a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

(b) $B = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

19 [Cayley-Hamilton] Calculer l'inverse des matrices suivantes par la méthode de Cayley-Hamilton :

(a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

(c) $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

20 [Cayley-Hamilton] On donne les équations caractéristiques de 3 matrices carrées. Donner l'expression de l'inverse des matrices correspondantes par la méthode de Cayley-Hamilton :

(a) $x^2 + x - 1 = 0$

(b) $x^3 - 5x^2 + 6 = 0$

(c) $a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$

14.3 Résolution des systèmes d'équations linéaires

14.3.1 Méthode de la matrice inverse

Nous monterons pour simplifier l'application de cette méthode dans le cas d'un système de deux équations à deux inconnues. Elle se généralise facilement à un système de n équations à n inconnues.

Soit le système suivant :

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

Ce système peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ f \end{pmatrix}$$

On pose :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} c \\ f \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Le système s'écrit alors sous forme matricielle suivante :

$$AX = B$$

On résout cette équation matricielle en fonction de X comme suit :

$$\begin{aligned} AX &= B && \text{Équation originale} \\ A^{-1} \cdot (A \cdot X) &= A^{-1} \cdot B && \text{Multiplication à gauche par } A^{-1} \\ I \cdot X &= A^{-1} \cdot B && \text{Propriété de l'inverse} \\ X &= A^{-1} \cdot B && \text{Propriété de la matrice identité} \end{aligned}$$

Finalement :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} c \\ f \end{pmatrix}$$

En résumé :

Un système linéaire de n équations à n inconnues :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

peut être écrit sous forme matricielle $AX = B$

avec : $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

et admet une unique solution $X = A^{-1}B$ si A est inversible.

Exemple 14.9

Résoudre le système linéaire suivant : $\begin{cases} 3x - y = 1 \\ 2x + 2y = 14 \end{cases}$

Solution

Ce système s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 14 \end{pmatrix}$$

On calcule directement :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 14 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1/4 & 1/8 \\ -1/4 & 3/8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 14 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Les solutions de ce système linéaire sont : $x = 2$ et $y = 5$

Exemple 14.10

Résoudre le système linéaire suivant : $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ -x + y - z = 2 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$

Solution

Ce système s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On calcule donc le produit matriciel suivant :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0 & -0,5 & -0,5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Les solutions de ce système linéaire sont : $x = 1$ et $y = 2$ et $z = -1$

Méthode de Cramer

Nous montrerons, pour simplifier, l'application de la méthode de Cramer (mathématicien suisse 1704 - 1752) dans le cas d'un système de deux équations à deux inconnues. Elle se généralise à un système de n équations à n inconnues.

Soit le système suivant :

$$\begin{cases} a_{11}\,x + a_{12}\,y = b_1 \\ a_{21}\,x + a_{22}\,y = b_2 \end{cases}$$

Ce système peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

On pose :

$$D = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad D_x = \det\begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D_y = \det\begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{pmatrix}$$

La solution de l'équation est donnée par :

$$x = \frac{D_x}{D} \quad \text{et} \quad y = \frac{D_y}{D}$$

La méthode générale peut s'exprimer ainsi :

Le vecteur solution X d'un système d'équations linéaires $AX = B$, avec A une matrice carrée régulière, est déterminé de façon unique par :

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

où A_i désigne la matrice obtenue à partir de la matrice A en y remplaçant la i-ème colonne de D par le vecteur colonne B.

Exemple 14.11

Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 2x + y - z = 9 \\ x + 3y + z = 9 \\ 3x - y + 2z = -1 \end{cases}$$

Solution

On commence par calculer D :

$$D = \det\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 25$$

Cette valeur n'étant pas nulle, le système admet une solution.
On calcule finalement D_x, D_y et D_z :

$$\begin{aligned} D_x &= \det\begin{pmatrix} 9 & 1 & -1 \\ 9 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 50 \\ D_y &= \det\begin{pmatrix} 2 & 9 & -1 \\ 1 & 9 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 75 \\ D_z &= \det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 9 \\ 1 & 3 & 9 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} = -50 \end{aligned}$$

Les 3 solutions sont données par :

$$x = \frac{D_x}{D} = 2 \quad y = \frac{D_y}{D} = 3 \quad \text{et} \quad z = \frac{D_z}{D} = -2$$

Exercices d'application de la section 14.3

21 [Système linéaire] Résoudre les systèmes linéaires suivants par inversion matricielle :

(a) $\begin{cases} x+y=10 \\ x-y=2 \end{cases}$ **(b)** $\begin{cases} x=3-y \\ x+y=z \\ x+z=5 \end{cases}$

22 [Système linéaire] Résoudre les systèmes linéaires suivants par inversion matricielle :

(a) $\begin{cases} x+y=10 \\ x+y=11 \end{cases}$ **(b)** $\begin{cases} x=2y \\ y=2z \\ z=2x \end{cases}$

23 [Méthode de Cramer] Résoudre les systèmes linéaires suivants par la méthode de Cramer :

(a) $\begin{cases} 8x-3y=1 \\ x+y=7 \end{cases}$ **(b)** $\begin{cases} 2x+y+z=3 \\ x-y+z=0 \\ 4x+3y-2z=-4 \end{cases}$

24 [Méthode de Cramer] Résoudre les systèmes linéaires suivants par la méthode de Cramer :

(a) $\begin{cases} 2x-y=3 \\ -4x+2y=-6 \end{cases}$ **(b)** $\begin{cases} \dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{4} \\ x+y-z=1 \end{cases}$

25 [Inversion matricielle] Résoudre le système linéaire suivant sous Excel en utilisant l'inversion matricielle :

$$\begin{cases} 23x_1-12x_2+6x_3+4x_4=191 \\ 17x_1+25x_2-11x_3+13x_4=296 \\ 26x_1-14x_2+32x_3+19x_4=337 \\ 25x_1+25x_2+12x_3-32x_4=189 \end{cases}$$

26 [Méthode de Cramer] Résoudre le système linéaire suivant sous Excel en utilisant la méthode de Cramer : (utiliser la fonction : `DETERMAT(A)`).

$$\begin{cases} 17x+21y-6z=142 \\ 54x+32y+19z=554 \\ -72x+26y+14z=204 \end{cases}$$

14.4 Problèmes et exercices de synthèse

✎ Dans les exercices qui suivent, on utilisera une approche matricielle ainsi que des outils informatiques pour les résoudre (Excel / calculatrice).

27 [Commande de café] Un client demande 11 kg de café dans un magasin spécialisé. Le marchand dispose de deux sortes de grains dont les prix sont respectivement de 6 et 8 frs le kilogramme. Le client souhaite payer exactement 80 frs au total. Comment peut-il être satisfait ?

28 [Investissement] Un groupe d'investisseurs souhaite investir 200 000 frs dans des actions de 3 sociétés. La société A vend des parts de 50 frs et a un rendement attendu de 10%. La société B vend des parts de 80 frs et a un rendement attendu de 6%. La société C vend des parts de 20 frs et a un rendement attendu de 5%. Par précaution, ce groupe souhaite investir 9 fois plus de parts dans la société C que dans la société B. Globalement, ces investisseurs tablent sur un rendement de 6,95%. Combien de parts doivent alors être investies dans chacune des compagnies ?

29 [Artisanat] Un artisan fabrique quotidiennement trois types de poupées en bois notées A, B et C. Les informations liées à la production de ces poupées sont fournies dans le tableau suivant :

Poupée	Temps de travail	Bois
A	2 heures	800 grammes
B	1 heure	500 grammes
C	30 minutes	300 grammes

Durant 1 mois, l'artisan a fabriqué 150 poupées qui ont nécessité 161 heures de travail et 75 kilos de bois. Déterminer le nombre de poupées de chaque type fabriquées durant 1 mois.

30 [Industrie] Une usine fabrique 3 articles (X, Y et Z) à l'aide de 3 machines (A, B et C). La consommation d'électricité (en kWh) par machine et par article est la suivante :

Article	Machine A	Machine B	Machine C
X	1	0	4
Y	2	1	1
Z	3	2	0

À la fin de la semaine, le compteur des machines indique une consommation d'énergie de, respectivement, 430 kWh, 240 kWh et 220 kWh. Quelle est la quantité d'articles fabriqués ?

31 [Équation d'une droite] En utilisant une approche matricielle, déterminer l'équation de la droite $y = ax + b$ passant par les points $A(1;5)$ et $B(3;9)$.

32 [Fonction quadratique] Trouver une fonction quadratique $f(x) = ax^2 + bx + c$ pouvant représenter l'évolution des températures de janvier à décembre. Seules les températures de 3 mois sont connues. À quelle température peut-on s'attendre au mois de juin selon ce modèle ?

Mois (x)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Températures $f(x)$		2°			20°						2°	

33 [IS-LM] En économie, le modèle **IS-LM** permet de déterminer le niveau du revenu et le taux d'intérêt tels que les marchés des biens et de la monnaie soient simultanément en équilibre.

Soit l'équation IS : $0,3Y + 100i - 252 = 0$ et l'équation LM : $0,25Y - 200i - 176 = 0$. Trouver le revenu (Y) ainsi que le taux d'intérêt d'équilibre (i).

34 [Courbe de Phillips] Une économie est décrite par les trois équations suivantes :

$$U_t - U_{t-1} = -0,4(g_{yt} - 0,03) \qquad \text{Loi d'Okun}$$

$$\pi_t - \pi_t^e = -(U_t - 0,06) \qquad \text{Courbe de Phillips}$$

$$g_{yt} = g_{mt} - \pi_t \qquad \text{Demande agrégée}$$

Avec :

- U_t : taux de chômage à la date t
- U_{t-1} : taux de chômage à la date $t-1$
- g_{yt} : taux de croissance de l'économie
- π_t : taux d'inflation à la date t
- π_t^e : taux d'inflation anticipée pour l'année t
- g_{mt} : taux de croissance de la masse monétaire.

Si $\pi_t^e = \pi_{t-1} = 4\%$; $U_{t-1} = 7\%$ et $g_{mt} = 6\%$, quel est le taux de croissance de l'économie, le taux de chômage et d'inflation en t ?

35 [Défi] Une entreprise envoie chaque semaine à ses collaborateurs un message secret pour donner le code de la porte d'entrée. Ce message est donné sous la forme d'une matrice carrée M d'ordre 3. Pour pouvoir déchiffrer ce message, les employés doivent multiplier M par A^{-1}.
La matrice A est connue de l'entreprise et des collaborateurs et constitue la **clé de chiffrement**. Cette matrice est la suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Pour obtenir le message en clair, il faut encore convertir chaque valeur de la matrice ainsi obtenue par sa position dans l'alphabet : $1 = a$, $2 = b$, etc...

(a) Quel était le code de la porte d'entrée cette semaine si la matrice M suivante a été communiquée aux collaborateurs :

$$M = \begin{pmatrix} 27 & 73 & 65 \\ 40 & 98 & 33 \\ 15 & 33 & 2 \end{pmatrix}$$

(b) La semaine prochaine, le code d'entrée sera «AUSTRALIE». Quelle sera la matrice M communiquée aux collaborateurs ?

36 [Défi] Le modèle de classement de Colley (astrophysicien américain) est un modèle de classement convenant à différentes disciplines sportives.[2]. La méthode de calcul peut se résumer comme suit :

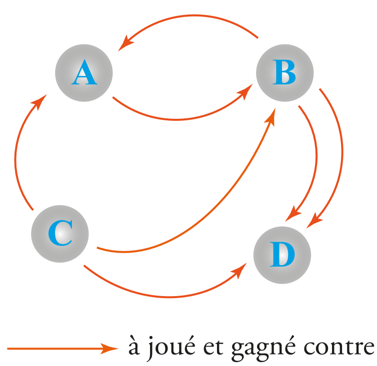
Le classement de n joueurs ou équipes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ est obtenu par résolution du système linéaire suivant : $AX = B$
Avec :

- $A_{ij}(n \times n) = \begin{cases} 2 + t_i & \text{si } i = j \\ -n_{ij} & \text{si } i \neq j \end{cases}$
- t_i = nombre total de parties disputées par le joueur i
- n_{ij} = nombre de fois où les joueurs i et j ont joué l'un contre l'autre
- $B(n \times 1)$ vecteur d'équilibre des victoires et des défaites :

$$b_i = 1 + \frac{1}{2}(w_i - l_i)$$

- w_i = nombre de victoires du joueur i
- l_i = nombre de défaites du joueur i

Le graphique suivant représente 4 joueurs, ayant disputés des rencontres. Chaque rencontre est représentée par une flèche. Le sens de la flèche indique si la rencontre a été gagnée ou perdue. Établir le classement de ces joueurs selon la méthode de Colley.



2. La méthode est décrite dans un article disponible sur : http://www.colleyrankings.com/

Chapitre 15

Applications matricielles

Objectifs du chapitre

- savoir établir un graphe de transition d'une chaine de Markov.
- savoir calculer une évolution à long terme d'une chaine de Markov.
- savoir calculer le nombre moyen de transition d'une chaine de Markov.
- savoir établir une matrice technologique dans un modèle de Leontiev.
- comprendre les relations entre production et demande extérieure dans un modèle de Leontiev.

Les matrices trouvent de nombreuses applications concrètes, en physique, chimie, en informatique ainsi que dans de nombreux autres domaines. En économie, les chaines de Markov et le modèle Input-Output de Leontiev que nous nous proposons d'exposer ici, constituent deux applications de première importance des matrices. Dans ce chapitre l'utilisation de la calculatrice ou d'un tableur sera particulièrement utile dans la résolution de la plupart des exercices proposés.

15.1 Les chaines de Markov

Les chaines de Markov du nom du mathématicien russe (1856-1922) décrivent un processus aléatoire portant sur un nombre fini d'états, auxquels on attribue des probabilités (ou fréquences) de transition. La particularité d'une chaine de Markov est d'être un processus sans mémoire. En d'autres termes, l'état futur du système ne dépend que de l'état actuel du système mais non des états précédents.

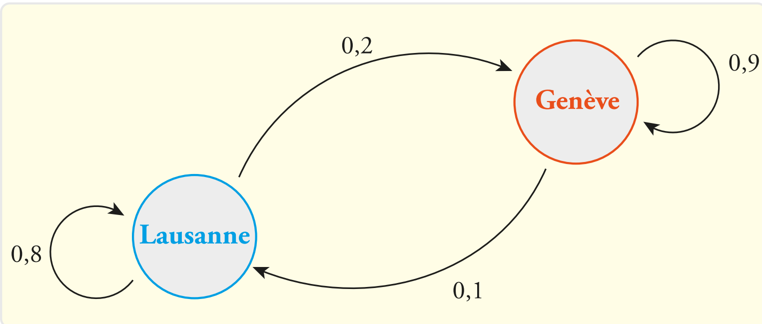
15.1.1 Notions

Pour expliquer facilement le fonctionnement des chaines de Markov considérons l'exemple suivant :

Supposons que, dans un secteur donné, chaque année 20% des lausannois vont travailler à Genève, mais que dans le même temps 10% des genevois viennent travailler à Lausanne. En supposant que la population reste stable d'une année sur l'autre on résume la situation ainsi :

- 80% des lausannois restent à Lausanne et 20% migrent à Genève
- 90% des genevois restent à Genève et 10% migrent à Lausanne

Cette situation peut être représentée au moyen d'un graphe appelé **graphe de transition** : [1]



Dans ce graphe sont représentés les deux **états** du système (Lausanne et Genève).

15.1.2 Matrice de transition

Directement liée au graphe de transition, la **matrice de transition** représente la proportion ou la probabilité de passage d'un état à un autre. Ainsi, chaque élément $t_{i,j}$ de cette matrice représente la probabilité de passage de l'état i à l'état j.

La matrice de transition est une **matrice carrée** d'ordre deux s'il y a deux états, 3 s'il y en a trois, etc...

En considérant par exemple Lausanne comme l'état 1 et Genève comme l'état 2, on peut alors écrire :

$$T = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc}\text{Lausanne} & \text{Genève}\end{array} \\ \begin{array}{c}\text{Lausanne}\\ \text{Genève}\end{array} & \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix} \end{array}$$

Dans une matrice de transition, la somme de chaque ligne est égal à 1.

1. Graphe probabiliste connexe pondéré orienté dont les étiquettes sont des probabilités et dont la somme des poids des arêtes issues d'un sommet est égale à 1.

15.1.3 Le vecteur de probabilités

Le vecteur de probabilités P est une matrice de format $(1 \times n)$ indiquant la situation du système pour chaque état à une époque donnée. Ainsi, P_0 représente la situation initiale du système, P_1 la situation après un an, etc...

Supposons que dans le secteur en question, Lausanne compte initialement 30 000 travailleurs et Genève 50 000. Le vecteur initial de probabilités s'écrira donc sous l'une ou l'autre des formes suivantes :

- *En valeur absolue : (sans probabilités)*

$$P_0 = \begin{pmatrix} 30\,000 & 50\,000 \end{pmatrix}$$

- *En valeur relative :*

$$P_0 = \begin{pmatrix} \frac{30\,000}{80\,000} & \frac{50\,000}{80\,000} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,375 & 0,625 \end{pmatrix}$$

Sans autre information, on utilisera comme vecteur initial de probabilités :

$$P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{etc...}$$

15.1.4 Estimation future

L'intérêt principal des chaines de Markov est de pouvoir prédire l'état du système dans le futur. Pour cela, on utilise la formule récursive suivante :

$$\begin{aligned} P_1 &= P_0 T \\ P_2 &= P_1 T = P_0 T^2 \\ &\dots \\ P_n &= P_{n-1} T = P_0 T^n \end{aligned}$$

État du système après n transitions : $\qquad P_n = P_0 \times T^n$

Exemple 15.1

Estimer la population à Lausanne et Genève l'an prochain et dans 10 ans du secteur en question.

Solution

Population l'an prochain :

$$P_1 = P_0 T = \begin{pmatrix} 3000 & 50\,000 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29\,000 & 51\,000 \end{pmatrix}$$

Population dans 10 ans :

$$P_{10} = P_0 T^{10} = \begin{pmatrix} 30\,000 & 50\,000 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}^{10} \simeq \begin{pmatrix} 26\,761 & 53\,239 \end{pmatrix}$$

15.1.5 Limite du processus

Que se passe-t-il à très long terme ? Arrive-t-on vers une distribution stable ? Si tel est le cas, la matrice de transition ne doit à ce moment-là plus avoir d'effet sur la répartition de la population. En d'autres termes, on cherche un vecteur S tel que $ST = S$. Ce vecteur S est alors appelé **vecteur stable** ou point invariant du système.

Pour déterminer la limite du processus on peut utiliser l'une ou l'autre des méthodes suivantes :

- *Méthode 1 :*

1. Établir le système de n équations à n inconnues

$$(u\ v\ \ldots)\ T = (u\ v\ \ldots)$$

2. Choisir $(n-1)$ lignes et former un nouveau système de n équations à n inconnues en y ajoutant la condition $u + v + \cdots = 1$
3. $u, v, \ldots$ sont les valeurs à long terme du processus.

- *Méthode 2 : utiliser la calculatrice*

$$P_\infty \simeq P_0 \cdot T^\infty \quad \text{(On prendra par exemple } \infty = 100\text{)}$$

Exemple 15.2

Calculer le vecteur stable de la matrice de transition

$$T = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$$

Solution

- *Méthode 1 :*

On commence par résoudre l'équation suivante :

$$\begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix}$$

Ce qui revient à écrire le système suivant :

$$\begin{cases} 0,8u + 0,1v = u \\ 0,2u + 0,9v = v \end{cases}$$

On choisit ensuite une des deux équations à laquelle on rajoute la condition : $u + v = 1$. En choisissant par exemple la première équation, on forme alors le système suivant :

$$\begin{cases} 0,8u + 0,1v = u \\ u + v = 1 \end{cases}$$

Les solutions sont, après résolution : $u = 1/3$ et $v = 2/3$.

Dans le cas de l'exemple précédent, on peut prévoir une population à long terme de $\dfrac{80\,000}{3} \simeq 26\,667$ personnes sur Lausanne contre $80\,000 \times \dfrac{2}{3} \simeq 53\,333$ personnes sur Genève.

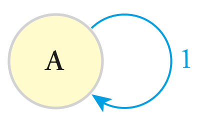
► *Méthode 2 :*

On choisit une période de temps relativement longue, par exemple $n = 100$ et on détermine simplement l'état du système dans 100 ans :

$$P_{100} \simeq P_0 T^{100} = \begin{pmatrix} 30\,000 & 50\,000 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}^{100} \simeq \begin{pmatrix} 26\,667 & 53\,333 \end{pmatrix}$$

15.1.6 Chaine de Markov absorbante

Une chaine de Markov est absorbante s'il existe un ou plusieurs états qu'il est impossible de quitter une fois entré. Cela se caractérise sur le graphe de transition par une flèche retournée sur elle-même et de valeur 1 :



Probabilité de se retrouver dans un état absorbant après *n* transitions

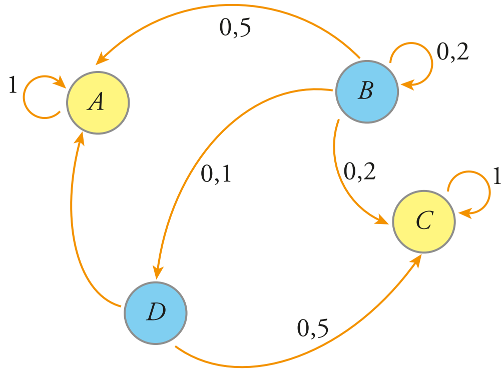
Pour trouver cette probabilité, il suffit d'additionner horizontalement les probabilités correspondantes aux différents **états absorbants**[2] de la matrice T^n.

2. Par opposition à un état absorbant, on parle d'état non absorbant ou encore d'état **transient**.

Exemple 15.3

Déterminer, à partir du graphe de transition suivant, et pour chaque état initial A, B, C ou D la probabilité de se retrouver dans un état absorbant après 3 transitions.

Solution



Cette chaine de Markov comporte deux états absorbants A et C. La matrice de transition initiale T et après 3 transitions T^3 est donnée par :

$$T = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0,2 & 0,2 & 0,1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0,5 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{et} \quad T^3 = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0,68 & 0,008 & 0,308 & 0,004 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0,5 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Ainsi, la probabilité d'être dans un état absorbant après 3 transitions est donnée par :

- Si l'état initial est A : $1 + 0 = 1$ (colonne 1 et 3)
- Si l'état initial est B : $0,68 + 0,308 = 0,988$
- Si l'état initial est C : $0 + 1 = 1$
- Si l'état initial est D : $0,5 + 0,5 = 1$

Selon ce même raisonnement on peut facilement calculer la probabilité d'absorption à long terme en choisissant un nombre suffisamment élevé de transitions, par exemple $n = 100$.

Nombre moyen de transitions avant l'absorption

Le nombre moyen de transitions avant l'absorption se détermine au moyen de la méthode suivante :

1. Regrouper les états absorbants dans le coin supérieur gauche de la matrice de transition ce qui donne une matrice partitionnée de la forme :

$$T = \begin{array}{c|c} & \text{absorbants} \quad \text{non absorbants} \\ \hline \begin{array}{r} \text{absorbants} \\ \text{non absorbants} \end{array} & \left(\begin{array}{c|c} I_m & O \\ \hline R & Q \end{array}\right) \end{array}$$

   où I_m est une matrice identité avec m égal au nombre d'états absorbants et O une matrice nulle.
2. Déterminer la **matrice fondamentale** $N = (I_n - Q_n)^{-1}$

   avec I_n une matrice unité de même format que Q.

   N_{ij} indique le nombre moyen de transitions par j en partant de i.
3. La somme de chaque ligne de la matrice N indique le nombre moyen de transitions pour chaque état avant l'absorption.
4. Le produit NR représente la matrice des probabilités de passage d'un état non absorbant à un état absorbant.

Matrice fondamentale
Comment l'obtenir et que signifie-t-elle ?

Exemple 15.4

Trouver le nombre moyen de transitions avant l'absorption de la chaine de Markov représentée par la matrice de transition suivante :

$$T = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0,2 & 0,2 & 0,1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0,5 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Solution

1. On regroupe les états absorbants dans le coin supérieur gauche de la matrice de transition :

$$T = \begin{array}{c|cc} & \begin{matrix} A & C \end{matrix} & \begin{matrix} B & D \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} A \\ C \\ B \\ D \end{matrix} & \begin{matrix} \overbrace{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}}^{I_m} \\ \underbrace{\begin{matrix} 0,5 & 0,2 \\ 0,5 & 0,5 \end{matrix}}_{R} \end{matrix} & \begin{matrix} \overbrace{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}}^{O} \\ \underbrace{\begin{matrix} 0,2 & 0,1 \\ 0 & 0 \end{matrix}}_{Q} \end{matrix} \end{array}$$

2. On détermine la matrice $N = (I - Q)^{-1}$ avec $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} N &= \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 0,8 & -0,1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1,25 & 0,125 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. Le nombre moyen de transitions pour chaque état est alors donné par :
   - En partant de B : $1,25 + 0,125 = 1,375$
   - En partant de D : $0 + 1 = 1$

Exercices d'application de la section 15.1

1 [Matrice de transition] Dire si les matrices de transition suivantes correspondent à des chaînes de Markov.

(a) $T = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,7 \\ 0,8 & 0,3 \end{pmatrix}$ **(b)** $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0,2 & 0 & 0,8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **(c)** $T = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

2 [Vecteur de probabilité] Dire si les vecteurs suivants sont des vecteurs de probabilités.

(a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 0,02 & 0,08 & 0 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{3}{4} & \frac{2}{16} \end{pmatrix}$

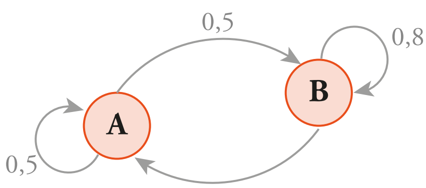
(d) $\begin{pmatrix} 0,4 & 0,7 & -0,1 \end{pmatrix}$

3 [Graphe de transition] Construire les graphes de transition correspondant aux matrices de transitions suivantes :

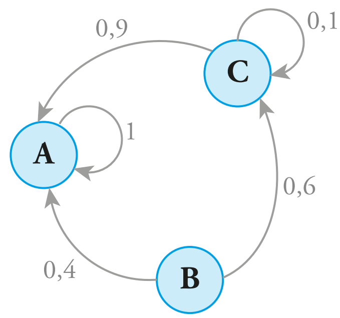
(a) $T = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}$ **(b)** $T = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 & 0,4 \\ 0 & 0,3 & 0,7 \\ 0,9 & 0 & 0,1 \end{pmatrix}$

4 [Matrice de transition] Écrire les matrices de transition correspondant aux diagrammes de transition suivants :

(a)



(b)



5 [Évolution future] Calculer P_2 sans faire usage d'une calculatrice.

(a) Si $P_0 = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}$

(b) Si $P_0 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

6 [Évolution future] Calculer P_n sans faire usage d'une calculatrice, si :

$$P_0 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7 [Vecteur stable] Déterminer le vecteur stable des matrices de transitions suivantes :

(a) $T = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$ **(b)** $T = \begin{pmatrix} 0 & 0,4 & 0,6 \\ 0,2 & 0,6 & 0,2 \\ 0,8 & 0,1 & 0,1 \end{pmatrix}$

8 [Vecteur stable] Calculer le vecteur stable des matrices de transition suivantes :

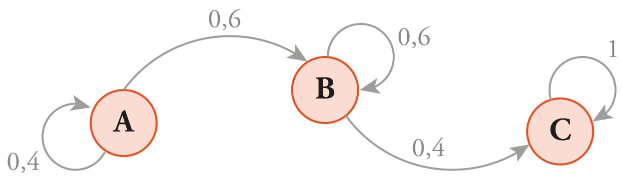
(a) $T = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$ **(b)** $T = \begin{pmatrix} 0 & 0,9 & 0,1 \\ 0,8 & 0 & 0,2 \\ 0,3 & 0,3 & 0,4 \end{pmatrix}$

9 [Distribution à long terme] À partir du graphe de transition suivant, déterminer pour chaque état transient :

(a) la probabilité d'être dans un état absorbant dans 3 transitions

(b) la probabilité d'être dans un état absorbant à long terme

(c) le nombre moyen de transitions avant l'absorption.



10 [Nombre moyen de transitions] Déterminer pour chaque état transient, le nombre moyen de transitions avant l'absorption :

(a) $T = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$

(c) $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0,4 & 0,3 & 0,3 \\ 0,4 & 0,5 & 0,1 \end{pmatrix}$

(d) $T = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,7 & 0,1 & 0,1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0,2 & 0,3 & 0,2 & 0,2 & 0,1 \\ 0,4 & 0,2 & 0,1 & 0,2 & 0,1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

15.2 Le modèle Input-Output de Leontiev

Le modèle Input-Output de Leontiev du nom du mathématicien russe Wassily Leontief (1905-1999) et prix Nobel d'économie en 1973, considère un système économique comprenant plusieurs secteurs ou industries interdépendants. En d'autres termes, la production d'une industrie sert de ressources à d'autres industries du système (et parfois à elle-même).

15.2.1 La matrice technologique *A*

C'est l'outil de base du modèle. Dans ce dernier, on considère n secteurs produisant chacun un seul type de bien. La **matrice technologique** [3] définit alors l'interaction entre les secteurs. Il s'agit d'une matrice carrée d'ordre n dans laquelle a_{ij} représente la quantité nécessaire du secteur i pour produire une unité du secteur j.

Par exemple si $a_{12} = 0,6$, on dira que pour produire une unité du bien 2 on utilise 0,6 unités du bien 1.

3. Cette matrice s'appelle aussi matrice des **coefficients techniques** ou des **coefficients d'échanges**.

Exemple 15.5

Interpréter la matrice technologique suivante :

$$A = \begin{array}{c} \\ \text{Électricité} \\ \text{Automobile} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Électricité} & \text{Automobile} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0,25 & 0,3 \\ 0 & 0,1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Solution

On dira que pour fabriquer une unité d'électricité on utilise uniquement 0,25 unités d'électricité (autoconsommation). Par contre, pour fabriquer une unité d'automobile on utilise 0,3 unités d'électricité et également 0,1 unités de biens automobiles.

15.2.2 La production totale X

Dans le modèle de Léontiev, la production totale X de tous les secteurs doit couvrir d'une part les consommations intermédiaires des secteurs-mêmes AX et les consommations finales (ou demande externe) Z.

On peut alors écrire en termes matriciels :

$$X = AX + Z$$

Ou encore :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

Avec :

- x_i = la production du secteur i
- z_i = les exportations ou la demande du secteur i

De cette relation, on peut exprimer :

- les exportations (la demande) en fonction de la production :

$$Z = (I - A)X$$

- la production en fonction des exportations (demande) :

$$X = (I - A)^{-1} Z$$

Exemple 15.6

Soit une matrice technologique définissant l'interdépendance entre deux industries I_1 et I_2 :

$$\begin{array}{c} \\ I_1 \\ I_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} I_1 & I_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0,2 & 0 \\ 0,4 & 0,3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Calculer la production qui réponde à une demande de 5 unités de I_1 et de 15 unités de I_2.

Solution

On a les éléments suivants :

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0 \\ 0,4 & 0,3 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad Z = \begin{pmatrix} 5 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Il suffit donc de calculer : $X = (I - A)^{-1} Z$, c'est-à-dire :

$$X = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,2 & 0 \\ 0,4 & 0,3 \end{pmatrix} \right)^{-1} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6,25 \\ 25 \end{pmatrix}$$

Remarque

Lorsque les consommations i nécessaires au secteur j, que l'on peut noter (c_{ij}), sont données d'une manière globale, il faut diviser les quantités fournies par i par la production totale de j afin de construire la matrice A. En d'autres termes :

$$a_{ij} = \frac{c_{ij}}{x_j}$$

Exemple 15.7

La production globale de deux secteurs économiques X et Y sont données sous la forme globale suivante :

	Production totale		Consommation X		Consommation Y		Demande
Secteur X	120	=	30	+	40	+	50
Secteur Y	60	=	20	+	10	+	30

Déterminer cette économie sous forme matricielle.

Solution

La matrice technologique est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 30/120 & 40/60 \\ 20/120 & 10/60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & 2/3 \\ 1/6 & 1/6 \end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 120 \\ 60 \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1/4 & 2/3 \\ 1/6 & 1/6 \end{pmatrix}}_{A} \times \underbrace{\begin{pmatrix} 120 \\ 60 \end{pmatrix}}_{X} + \underbrace{\begin{pmatrix} 50 \\ 30 \end{pmatrix}}_{Z}$$

Exercices d'application de la section 15.2

11 [Matrice technologique] Écrire la matrice technologique (2×2) dans laquelle 1 unité d'électricité nécessite 0,5 unité d'eau et 0,2 unité d'électricité, tandis qu'une unité d'eau nécessite uniquement 0,25 unité d'électricité.

12 [Matrice technologique] On suppose une économie composée de 3 secteurs : agriculture, industrie manufacturière et transports. La production d'une unité d'agriculture nécessite 0,4 unité de manufacture et 0,5 unité de transport. La production d'une unité de manufacture nécessite 0,3 unité d'agriculture et 0,2 unité de transport. La production d'une unité de transport nécessite 0,25 unité d'agriculture et 0,25 unité de manufacture. Écrire la matrice technologique de cette économie.

13 [Deux secteurs] Une économie est composée de deux secteurs : les industries énergétiques et les transports. Les productions ainsi que les consommations sont exprimées en millions d'unités monétaire. Le tableau des échanges inter-industriels est le suivant :

		Consommations intermédiaires				
		Énergie	Transport	Total	Demande (exportations)	Production
Production	Énergie	4	6		40	
	Transport	3	8		19	

(a) Compléter ce tableau

(b) Exprimer ce tableau sous forme matricielle.

14 [Trois secteurs] Une économie est composée de trois secteurs : l'acier, l'électricité et l'automobile. Les productions ainsi que les consommations sont exprimées en millions d'unités monétaire. Le tableau des échanges inter-industriels est le suivant :

		Consommations intermédiaires					
		Acier	Électricité	Automobile	Total	Demande (exportations)	Production
Production	Acier	200	500	300			4000
	Électricité	100	300	200			2800
	Automobile	100	300	100			1200

(a) Compléter ce tableau

(b) Exprimer ce tableau sous forme matricielle.

15 [Production totale] Une économie comporte deux secteurs de production : l'acier et l'électricité. La production d'une unité monétaire d'acier nécessite 0,4 unité monétaire d'acier et 0,2 unité monétaire d'électricité. La production d'une unité monétaire d'électricité nécessite 0,6 unité monétaire d'acier et 0,2 unité monétaire d'électricité. Les demandes des consommateurs correspondent à 450 000 unités monétaires d'acier et 600 000 unités monétaires d'électricité. Soit x la quantité d'acier et y la quantité d'électricité à produire, exprimées en milliers d'unités monétaires.

(a) Exprimer cette économie sous forme matricielle.

(b) Exprimer cette économie sous la forme d'un système de 2 équations à 2 inconnues.

(c) Déterminer les quantités totales d'acier et d'électricité à produire.

16 [Production totale] L'économie d'un pays se décompose en trois secteurs : l'agriculture, l'industrie et les services.

- Pour produire 1 unité monétaire de produits agricoles il faut : 0,3 unité monétaire de produits agricoles et 0,1 unité monétaire de produits industriels.
- Pour produire 1 unité monétaire de produits industriels il faut : 0,2 unité monétaire de produits agricoles, 0,3 unité monétaire de produits industriels et 0,5 unité monétaire de services.
- Pour produire 1 unité monétaire de services il faut : 0,1 unité monétaire de produits industriels et 0,2 unité monétaire de services.

La demande finale est de 584 unités monétaires de produits agricoles, 700 unités monétaires de produits industriels et 650 unités monétaires de services. On désigne par x, y, z les productions, en unité monétaire, du secteur agricole, du secteur industriel et du secteur des services.

(a) Exprimer cette économie sous forme matricielle.

(b) Exprimer cette économie sous la forme d'un système de 3 équations à 3 inconnues.

(c) Calculer le niveau de production de chaque secteur permettant de satisfaire les consommations intermédiaires et les demandes finales.

17 [Demande] Déterminer la demande Z connaissant la matrice technologique ainsi que la production X suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0,1 & 0,3 & 0,1 \\ 0,2 & 0,1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad X = \begin{pmatrix} 1\,840 \\ 1\,220 \\ 1\,300 \end{pmatrix}$$

18 [Exportations] L'économie d'un pays comporte deux secteurs, l'agriculture et l'industrie. La production de l'agriculture s'élève à 150 tandis que celle de l'industrie à 200. Les échanges à l'intérieur du pays sont les suivants :

- de l'agriculture vers l'industrie : 60
- de l'agriculture vers elle-même : 40
- de l'industrie vers l'agriculture : 20
- de l'industrie vers elle-même : 30

(a) Déterminer la matrice technologique

(b) Déterminer les exportations

(c) Si les exportations de l'agriculture augmentent de 5% et celles de l'industrie de 10%, quelle doit être la nouvelle production ?

15.3 Problèmes et exercices de synthèse

19 [Forfait téléphonique] Julien a un téléphone mobile avec un forfait mensuel de 2 heures. Afin de bien gérer son forfait, il constate que :

- si au cours du mois, il a dépassé son forfait, la probabilité qu'il le dépasse le mois suivant est de $1/5$
- si au cours du mois, il n'a pas dépassé son forfait, la probabilité qu'il le dépasse le mois suivant est de $2/5$

(a) Définir les états de cette chaine de Markov

(b) Définir la matrice de transition

(c) À long terme, Julien aura-t-il tendance à dépasser son forfait ?

20 [Météo] Un pays connaît exactement 3 types de temps :

- Pluvieux noté P
- Beau temps noté B
- Neigeux noté N

Les règles d'évolution du temps sont immuables et ne souffrent d'aucune exception ; ainsi :

1. S'il fait beau, il ne fera pas beau le lendemain et il y a autant de chance qu'il pleuve ou qu'il neige le lendemain.

2. S'il pleut ou s'il neige, il y a une chance sur deux qu'il fasse le même temps le lendemain et une chance sur quatre qu'il fasse beau le lendemain.

(a) Représenter le graphe de transition de cette chaine de Markov

(b) Il pleut aujourd'hui, quel temps fera-t-il demain ?

(c) Quelle sera l'évolution du temps dans ce pays à longue échéance ?

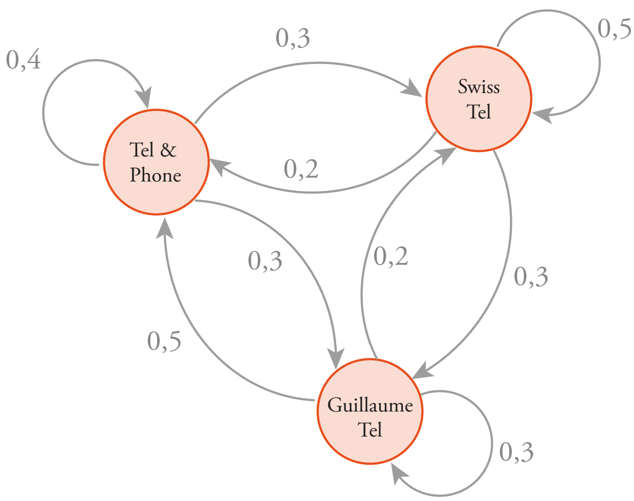
21 [Parts de marché] Dans une économie on constate qu'au cours d'une année 10% des entreprises saines connaissent des difficultés financières et que seulement 5% des entreprises avec des difficultés financières arrivent à meilleure fortune.
En supposant que cette économie compte initialement 200 entreprises saines et qu'aucune nouvelle entreprise ne se crée ou disparaît, déterminer :

(a) le nombre d'entreprises saines l'an prochain

(b) le nombre d'entreprises en difficultés financières dans 5 ans.

(c) le nombre d'entreprises en difficultés financières à long terme.

22 [Parts de marché] Trois compagnies téléphoniques se partagent un marché. Une enquête a permis de déterminer le graphe de transition ci-après (comportement mensuel des consommateurs) :



Actuellement, l'état du marché se répartit comme suit : $P_0\begin{pmatrix} 30\% & 40\% & 30\% \end{pmatrix}$

(a) Construire la matrice de transition

(b) Trouver la répartition du marché dans 2 mois

(c) Estimer les parts de marché à long terme

23 [Programme de formation] Un programme de formation d'instructeur comporte deux étapes :

- une formation théorique de 3 semaines et
- un stage de 3 semaines sous la direction d'un inspecteur certifié.

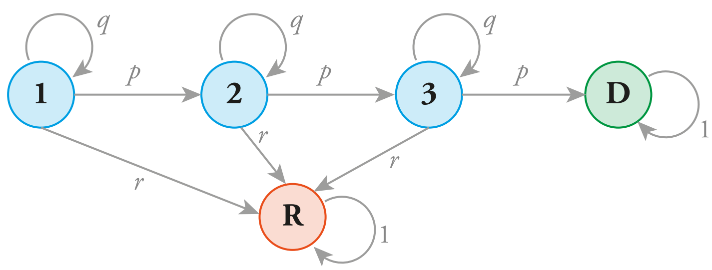
L'expérience montre que 60% des personnes inscrites en première étape seront admises et passeront en seconde étape ; les autres 40% quitteront la formation définitivement. 70% des personnes admises en stage seront diplômées inspecteur de production, 10% répéteront le stage et 20% quitteront définitivement la formation.

(a) Déterminer le graphe de transition et la matrice de transition pour les quatre états de cette chaine de Markov.

(b) Quel sera à long terme le pourcentage de personnes qui auront quitté la formation sans devenir inspecteur ?

(c) Quel sera à long terme le pourcentage de personnes qui seront inspecteur de production ?

24 [École Rustule] Pour obtenir un diplôme (**D**) dans cette école, il faut 3 ans d'études pour autant que l'on ne soit pas renvoyé (**R**). Quelle est la durée moyenne des études si les probabilités associées au cursus sont données ci-après ?



25 [Matrice de transition] On donne la matrice de transition T d'une chaine de Markov à 3 états sous la forme

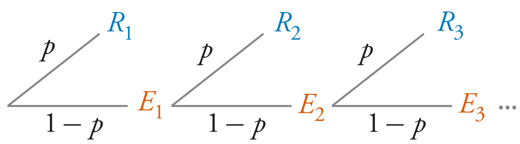
$$T_{i;j} = \frac{2i + j - 2}{6i}$$

(a) Écrire T sous forme matricielle.

(b) La répartition initiale des 3 états est donnée par $V_0 = \begin{pmatrix} 20\% & 40\% & 40\% \end{pmatrix}$. Quelle sera la répartition l'an prochain ?

(c) Quelle sera la répartition à long terme ?

26 [Loi géométrique] On réitère une expérience aléatoire tant qu'il n'y a pas de réussite. Pour chaque expérience i, la probabilité de réussite est $P(R_i) = p$ et celle d'échec $P(E_i) = 1 - p$. Si X est la variable aléatoire donnant le rang du premier succès, calculer $E(X)$.



27 [Prime d'assurance] Une assurance automobile comporte 3 niveaux de primes : minimale, normale et maximale. La première année, l'assuré paie la prime normale.

- S'il n'a pas été responsable d'un accident durant l'année, il passe au tarif inférieur l'année suivante. S'il est déjà au tarif minimal, il y reste.
- S'il a été responsable d'un accident au cours d'une année, il remonte d'un niveau de tarif l'année suivante. S'il est déjà au tarif maximal, il y reste.

La compagnie d'assurance estime à 10% la probabilité qu'un assuré soit responsable d'un accident au cours d'une année. Quel sera à long terme la répartition des assurés entre les trois catégories de tarif?

28 [Prime d'assurance] La compagnie d'assurance Mondass a instauré une formule de primes basée sur les sinistres déclarés (**système bonus malus**). Si aucun accident ne s'est produit durant l'année, l'assuré baisse d'une classe de tarif. Si l'assuré a connu un ou plusieurs accidents il remonte à la classe 3 (classe maximum). Les analyses basées sur les statistiques sont encore incomplètes et l'on supposera que :

- la probabilité de ne pas avoir de sinistre durant l'année est de λ
- la probabilité d'avoir un ou plusieurs sinistres durant l'année est de $1 - \lambda$

Le niveau de classe et la prime correspondante sont définies dans le tableau suivant :

Classe	Prime
1	40
2	60
3	100

(a) Représenter le graphe de transition de cette chaine de Markov

(b) Représentez la matrice de transition correspondante

(c) Quelle sera la prime moyenne à long terme?

29 [Matrice technologique] Soit la matrice technologique de 3 secteurs économiques, l'acier, le charbon et le fer :

$$\begin{array}{c} \\ A \\ C \\ F \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & C & F \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0,1 & 0,03 & 0,3 \\ 0,3 & 0,08 & 0,2 \\ 0,4 & 0,2 & 0,07 \end{pmatrix} \end{array}$$

(a) Quelle quantité de fer est nécessaire à la production d'une unité de charbon ?

(b) Quel est le plus gros consommateur de fer ?

(c) De quelle industrie le secteur du fer est-il le plus dépendant ?

30 [Demande et production] Soit une matrice technologique A définissant l'interdépendance entre 3 industries :

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0 & 0,6 \\ 0,4 & 0,3 & 0,1 \\ 0 & 0,5 & 0,3 \end{pmatrix}$$

(a) Calculer Z si $X = \begin{pmatrix} 160 \\ 200 \\ 200 \end{pmatrix}$

(b) Calculer X si $Z = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix}$

31 [Économie régionale] L'économie d'une région est fondée sur 2 secteurs S_1 et S_2 dont on dispose des renseignements suivants :

- Ventes du secteur 1 au secteur 2 : 60
- Ventes du secteur 2 au secteur 1 : 60
- Auto-consommation du secteur 1 : 20
- Auto-consommation du secteur 2 : 80
- Exportations du secteur 1 vers l'étranger : 20
- Exportations du secteur 2 vers l'étranger : 60

(a) Déterminer la matrice technologique de cette économie

(b) Quelle devrait-être la production des deux secteurs si les exportations vers l'étranger du secteur 1 devaient s'accroître de 50% et celles du secteur 2 vers l'étranger de 30% ?

32 [Économie rurale] Une économie rurale comporte deux secteurs : artisanat et agriculture. L'artisanat produit 800 et vend 240 à l'agriculture et exporte 400. Le secteur agricole produit 600, vend 200 au secteur artisanal et exporte 100.

(a) Déterminer la matrice technologique de cette économie

(b) Comment modifier les productions pour augmenter les exportations agricoles de 10% ?

33 [Jeu de hasard] Dans un jeu de hasard, vous commencez au temps 0 avec 20 frs. À chaque fois vous misez 10 frs. Si vous obtenez 0 fr ou 40 frs, le jeu s'arrête. La probabilité de gagner à chaque fois est de 0,3 et 0,7 de perdre.

(a) Quelle est la durée moyenne du jeu si vous avez initialement 20 frs ?

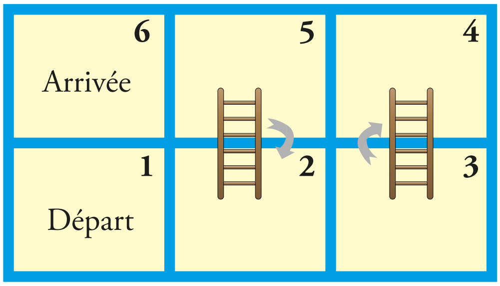
(b) Si vous avez initialement 20 frs, quelle est la probabilité que vous allez les perdre ?

34 [Jeu de hasard] Jean-Pierre possède 1 fr et a besoin de 5 frs. Pour acquérir l'argent qui lui manque, il participe au jeu de hasard suivant : à chaque coup, la somme misée sera gagnée avec la probabilité p et perdue avec la probabilité $q = 1 - p$. Jean-Pierre décide de miser à chaque coup la somme qui le rapprocherait le plus (en cas de gain) des 5 frs sans toutefois dépasser ce montant. Il ne peut naturellement pas miser plus d'argent qu'il ne possède et le nombre de coups n'est pas limité.

(a) Donner la matrice de transition de cette chaine de Markov.

(b) Dans le cas où le jeu est équilibré c'est-à-dire $p = q = 1/2$, calculer la probabilité d'une part que Jean-Pierre soit ruiné et d'autre part qu'il obtienne les 5 frs convoités.

35 [Jeu de l'oie] Le jeu de l'oie ci-après est constitué de 6 cases numérotées de 1 à 6. La case 1 est la case de départ et la case 6 est la case d'arrivée.

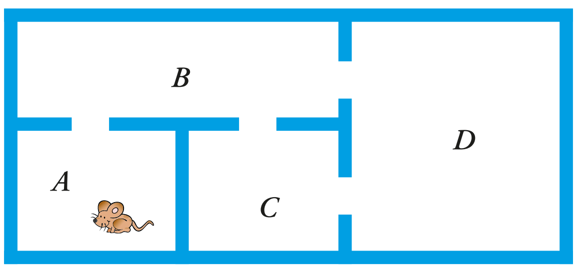


Pour faire avancer le pion, on lance un dé à 6 faces numérotées de 1 à 6 et on avance le pion d'un nombre de cases égal au nombre obtenu avec le dé. Le jeu s'arrête lorsque le pion tombe exactement sur la case 6. Sinon le pion recule. Par exemple, si le pion se trouve sur la case 4 et si le dé tombe sur 4, le pion reste à la case 4. Si au coup suivant, le dé tombe sur 1, le pion retourne sur la case 2.

(a) Donner la matrice de transition de cette chaine de Markov.

(b) Combien de lancers de dé en moyenne faut-il pour terminer ce jeu ?

36 [Labyrinthe] On place une souris dans le compartiment A du labyrinthe ci-après. Chaque fois qu'elle entend une sonnerie, apeurée, elle change de compartiment en choisissant au hasard une des portes du compartiment où elle se trouve.



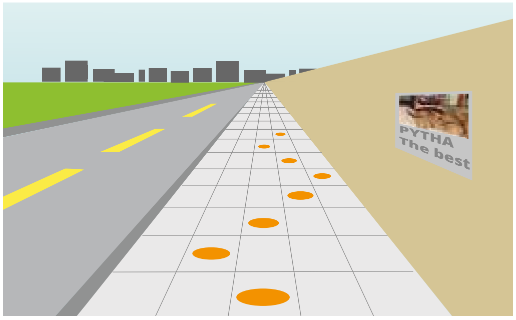
(a) Après trois périodes de temps, quelle est la probabilité que la souris se retrouve à nouveau dans le compartiment A ?

(b) À long terme, quel sera la distribution des visites dans chaque compartiment ?

37 [Marche aléatoire] Un ivrogne marche le long d'un trottoir. À chaque pas, il avance toujours vers l'avant mais soit sur la gauche ou soit sur la droite avec des probabilités égales. S'il tombe du trottoir il se fait écraser.

(a) Combien fera-t-il de pas en moyenne ?

(b) Quelle est la probabilité d'arriver à sa maison tout au bout de la rue ?



38 [Défi] Chaque semaine, Lana achète sa tablette Choco. Chaque tablette contient une figurine représentant un monstre qui est soit rouge, bleu ou vert. En supposant que ces trois figurines sont équi-réparties entre les tablettes, combien de tablettes doit-elle acheter pour être sûre à plus de 95% d'avoir les trois types de figurines ?

Troisième partie

Analyse

Chapitre 16

Limites

Objectifs du chapitre

- comprendre le concept du calcul des limites.
- savoir calculer des limites en utilisant la définition et les propriétés.
- savoir lever un indétermination.
- savoir calculer et esquisser une asymptote.

Le calcul des **limite** est une étape fondamentale en analyse mathématique. Les limites permettent notamment de poser les bases du calcul différentiel et intégral.

16.1 Calculs des limites

16.1.1 Notion

Considérons la fonction f définie par l'équation $f(x) = 0,4x - 0,2$. En calculant plusieurs points, il est facile de visualiser le comportement de cette fonction pour des valeurs de x, par exemple de plus en plus près de 3. On se rend compte que plus l'on s'approche de 3 par valeurs inférieures (**limite à gauche**) ou par valeurs supérieures (**limite à droite**), plus $f(x)$ s'approche de 1 :

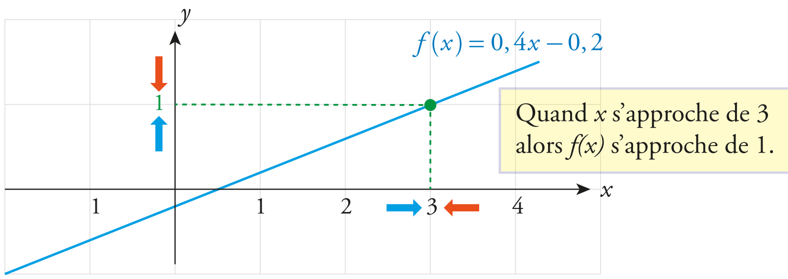
Limite à gauche	
x	$f(x)$
2,9	0,96
2,95	0,98
2,99	0,996

Limite à droite	
x	$f(x)$
3,1	1,04
3,05	1,02
3,01	1,004

On écrit mathématiquement cette situation comme suit :

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^+} f(x) = 1$$

En d'autres termes, $f(x)$ s'approche de 1 lorsque que x s'approche de 3 par valeurs plus petites (3^-) ou par valeurs plus grandes (3^+).

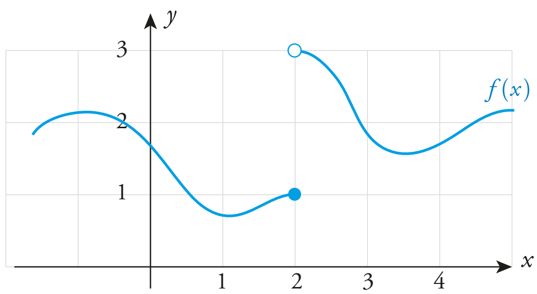


On dira ainsi qu'une fonction f admet une limite L au point a si la limite à gauche de a ou à droite de a est la même :

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L \\ \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L \end{cases} \quad \text{où } a, L \in \mathbb{R}$$

Exemple 16.1

Calculer les éléments suivants :



(a) $f(2)$ **(b)** $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$ **(c)** $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$ **(d)** $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

Solution

(a) $f(2) = 1$ (le point plein indique la valeur de la fonction)

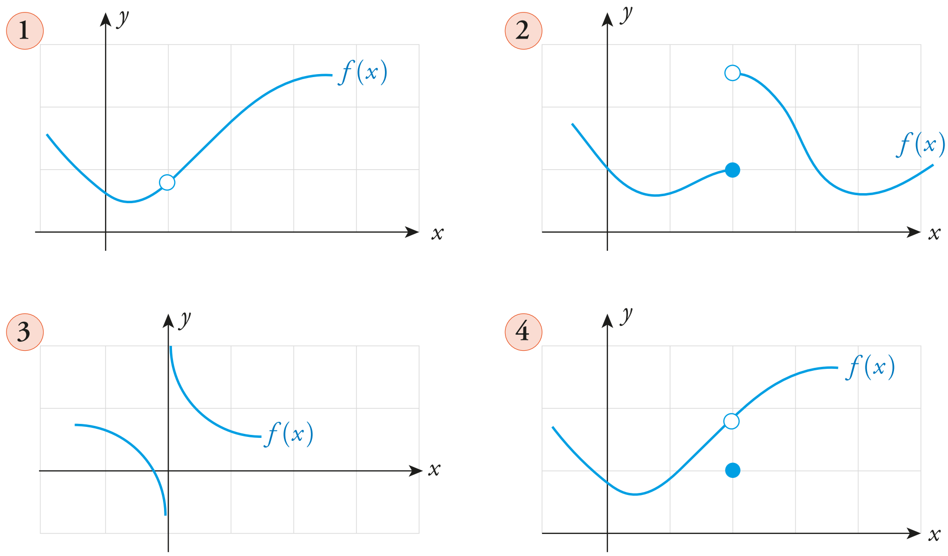
(b) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 1$ (limite à gauche)

(c) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 3$ (limite à droite)

(d) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ n'existe pas car la limite à gauche et à droite est différente.

16.1.2 Notion de continuité

On dira qu'une fonction est **continue** si on peut la tracer, dans son ensemble de définition, sans lever le crayon. C'est le cas de toutes les fonctions polynomiales en particulier.
La discontinuité intervient généralement dans le cas des fonctions définies par morceaux, des fonctions rationnelles, des fonctions avec racines ainsi que des fonctions logarithmiques.
Voici quelques exemples de fonctions discontinues :



- La fonction 1 n'est pas définie en $x = 1$
- La fonction 2 fait un saut dès que $x > 2$
- La fonction 3 n'est pas définie en $x = 0$
- La fonction 4 est définie en $x = 2$ mais sa valeur n'est pas située sur le graphe de f.

Une fonction est alors continue si sa limite à gauche coïncide avec sa limite à droite est aussi avec la valeur de la fonction.

f est continue en a si :

$$\underbrace{\lim_{x \to a^-} f(x)}_{\text{limite à gauche}} = \underbrace{\lim_{x \to a^+} f(x)}_{\text{limite à droite}} = f(a)$$

16.1.3 Substitution et propriétés des limites

En principe, pour évaluer une limite en un point, on remplace la valeur du point dans la fonction :

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \qquad \text{On substitue } x \text{ par } a$$

On a immédiatement :

- $\lim\limits_{x \to a} c = c$
- $\lim\limits_{x \to a} x = a$
- $\lim\limits_{x \to a} x^n = a^n$
- $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$

Propriétés des limites :

Soit f et g des fonctions admettant des limites en a et c un nombre réel, alors :

$$\lim_{x \to a} c \cdot f(x) = c \cdot \lim_{x \to a} f(x) \qquad \text{Mise en évidence}$$

$$\lim_{x \to a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \to a} f(x)\right]^n \qquad \text{Puissance}$$

$$\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x) \qquad \text{Somme ou différence}$$

$$\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x) \qquad \text{Produit}$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)} \quad \text{si} \quad \lim_{x \to a} g(x) \neq 0 \qquad \text{Quotient}$$

Exemple 16.2

Déterminer la limite suivante : $\lim\limits_{x \to 1} 5x + 2$

Solution

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1} 5x + 2 &= \lim_{x \to 1} 5x + \lim_{x \to 1} 2 && \text{Limite d'une somme} \\ &= 5 \cdot \lim_{x \to 1} x + 2 && \text{Mise en évidence} \\ &= 5 \times 1 + 2 = 7 && \text{Substitution} \end{aligned}$$

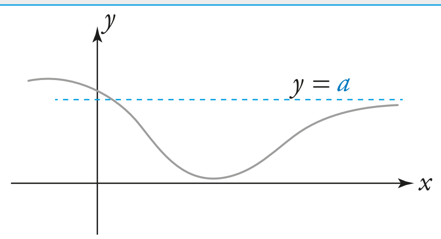
✎ Par substitution, on obtient immédiatement : $\lim\limits_{x \to 1} 5x + 2 = 5 \times 1 + 2 = 7$

16.1.4 Limites infinies et limites à l'infini

- On appelle **limite à l'infini** de f, l'expression suivante : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = a$.
  La droite imaginaire d'équation $y = a$ est appelée **asymptote horizontale**.
- On appelle **limite infinie** de f, l'expression suivante : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$.
  La droite imaginaire d'équation $x = a$ est appelée **asymptote verticale**.

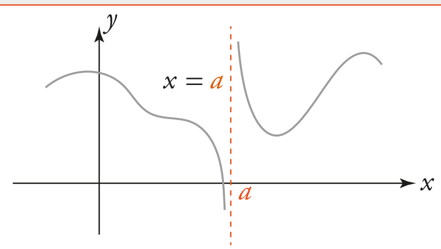
Limite à l'infini: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = a$

Asymptote horizontale: $y = a$



Limite infinie: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$

Asymptote verticale: $x = a$



Le calcul des limites infinies ou des limites à l'infini n'a de sens que pour connaître le comportement de la fonction aux bornes **ouvertes** de son domaine de définition.

Exemple 16.3

Déterminer toutes les limites de la fonction suivante $f(x) = \dfrac{3}{x} + 5$

Solution

L'ensemble de définition de cette fonction donne : $x \in]-\infty\ ;\ 0\ [\ \cup\ ]\ 0\ ;\ +\infty[$.
Comme il y a 4 bornes ouvertes, il faut calculer les 4 limites suivantes :

1. Si x tend vers plus ou moins l'infini, alors :

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \frac{3}{\pm\infty} + 5 = 0 + 5 = 5 \qquad \text{asymptote horizontale d'équation } y = 5$$

2. Si x tend vers 0 par valeurs plus grandes ou plus petites alors :

$$\lim_{x\to 0^\pm} f(x) = \frac{3}{0^\pm} + 5 = \pm\infty \qquad \text{asymptote verticale d'équation } x = 0$$

Propriétés des limites infinies

Pour une constante c positive, on peut énoncer les propriétés suivantes :

$\infty + \infty = \infty$	$\infty \times \infty = \infty$	$\infty \times (-\infty) = -\infty$
$\infty \times c = \infty$	$\frac{\infty}{c} = \infty$	$\frac{c}{0} = \infty$
$\infty + c = \infty$	$\infty - c = \infty$	$\frac{c}{\infty} = 0$
$\ln(\infty) = \infty$	$\sqrt{\infty} = \infty$	$e^{\infty} = \infty$

Exemple 16.4

Calculer la limite suivante : $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2x+5}{x-3}$

Solution

Selon que x tende vers 3 par valeur plus grande ou plus petite, on trouve par substitution :

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \frac{11}{0^-} = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to 3^+} f(x) = \frac{11}{0^+} = +\infty$$

Exemple 16.5

Calculer la limite suivante : $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 - 5x + 6$.

Solution

On constate que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \infty - \infty$. Cependant, en utilisant les propriétés énoncées plus haut et en écrivant $f(x) = x(x-5)+6$, on obtient :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \infty(\infty - 5) + 6 = \infty \times \infty = +\infty$$

À partir de cet exemple, on peut tirer la règle suivante :

> La limite d'un polynôme lorsque x tend vers $\pm\infty$
> est égale à la limite de son terme de plus haut degré

Exemple 16.6

Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 - 5x + 6$

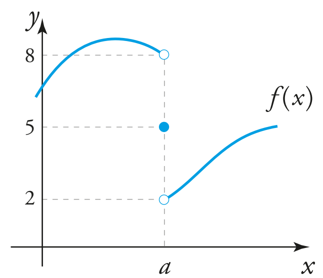
Solution

$$\lim_{x \to -\infty} x^3 - 5x + 6 = \lim_{x \to -\infty} x^3 = (-\infty)^3 = -\infty$$

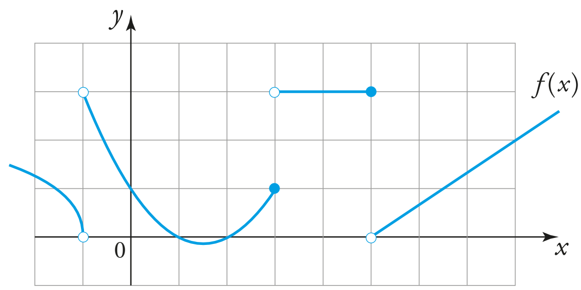
Exercices d'application de la section 16.1

1 [Notion de limite] Déterminer les valeurs suivantes à partir du graphe ci-après :

(a) $f(a)$ **(b)** $\lim_{x\to a^-} f(x)$ **(c)** $\lim_{x\to a^+} f(x)$ **(d)** $\lim_{x\to a} f(x)$



2 [Notion de limite] Déterminer les différentes valeurs à partir du graphe suivant :



(a) $f(3)$ **(c)** $\lim_{x\to 3^+} f(x)$ **(e)** $\lim_{x\to 5^-} f(x)$ **(g)** $f(5)$

(b) $\lim_{x\to 3^-} f(x)$ **(d)** $f(-1)$ **(f)** $\lim_{x\to 5^+} f(x)$ **(h)** $\lim_{x\to -1} f(x)$

3 [Continuité] Déterminer la valeur de la constante k pour que la fonction suivante soit continue sur l'ensemble des réels.

$$f(x) = \begin{cases} kx+1, & \text{si } x \leq 5 \\ kx^2-1, & \text{si } x > 5 \end{cases}$$

4 [Continuité] Déterminer la valeur de la constante k pour que la fonction f soit continue sur l'ensemble des réels.

(a) $f(x) = \begin{cases} kx+5, & \text{si } x < 1 \\ 8, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ **(b)** $f(x) = \begin{cases} x^2+kx, & \text{si } x < 2 \\ \sqrt{x-2}, & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

5 [Substitution directe] Déterminer les limites suivantes par substitution directe :

(a) $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{2x}{x^2-1}$ **(b)** $\lim\limits_{x\to3} \sqrt[3]{x^2-1}$ **(c)** $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{10^x-1}{5^x+2}$

6 [Substitution directe] Déterminer les limites suivantes par substitution directe :

(a) $\lim\limits_{x\to e} \dfrac{\ln(x^2)}{2}$ **(b)** $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{1}{|x-1|-1}$ **(c)** $\lim\limits_{x\to0} \lfloor x\rfloor + \sqrt{x-\lfloor x\rfloor}$

7 [Propriétés des limites] On donne $\lim\limits_{x\to a} f(x)=4$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x)=-1$. Calculer :

(a) $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]^2$

(b) $\lim\limits_{x\to a}[3f(x)g(x)]$

(c) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{3g(x)}{4f(x)}$

(d) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{g(x)}{\sqrt{f(x)}}$

8 [Propriétés des limites] On donne $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-2$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x)=3$. Calculer :

(a) $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]$

(b) $\lim\limits_{x\to a}[-g(x)+5f(x)]$

(c) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{2}f(x)g(x)$

(d) $\lim\limits_{x\to 3} f(g(x))$

9 [Limites et infini] Calculer les limites suivantes :

(a) $\lim\limits_{x\to-1^+} \dfrac{-3}{x+1}$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{617}{x-5}$

(c) $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{\sqrt{2}}{(x+1)^2}$

(d) $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{2x-5}{3^x-1}$

(e) $\lim\limits_{x\to-2^-} \dfrac{(4x)^2-3}{x^2-4}$

(f) $\lim\limits_{x\to+\infty} (e-x^2)\cdot e^x$

10 [Limites et infini] Calculer les limites suivantes :

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5-x}{5}(x^4-5)$

(b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x}{x}$

(c) $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{e^x\cdot\ln(x)}{3+x}$

(d) $\lim\limits_{x\to+\infty} (-x\cdot4^x\cdot\log(x))^2$

(e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{\ln(x)}{e^{-x}}+\dfrac{\sqrt{3}}{x}\right)$

(f) $\lim\limits_{x\to1^-} \left(\dfrac{2^x}{\log_2(x)}+\dfrac{2}{x-1}\right)$

11 [Esquisse de graphe] Esquisser un graphe possible ayant pour limites :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=2^+ \qquad \lim_{x\to0^\pm} f(x)=+\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x)=0^+$$

12 [Esquisse de graphe] Esquisser un graphe possible d'une fonction ayant les caractéristiques suivantes :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=5 \qquad \lim_{x\to4^-} f(x)=+\infty \qquad \lim_{x\to2^+} f(x)=0 \qquad f(2)=1 \qquad f(0)=3$$

16.2 Formes indéterminées

Il arrive souvent que des limites conduisent à des **formes indéterminées** suivantes :

$$\frac{\infty}{\infty} \qquad \frac{0}{0} \qquad 0 \times \infty \qquad \infty - \infty$$

On cherche alors à **lever** ces indéterminations. L'idée générale est de ramener ces limites à une forme $\frac{\infty}{\infty}$ ou $\frac{0}{0}$ puis à simplifier par factorisation. Avec des racines, cette factorisation s'obtient en principe par l'emploi du conjugué.

Exemple 16.7

Déterminer la limite suivante : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-x^4+5x^2-6}{x^2+3}$

Solution

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-x^4+5x^2-6}{x^2+3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^4}{x^2} = \frac{-\infty}{\infty}$$ Limite des termes de plus haut degré

$$= \lim_{x\to+\infty} -x^2 = -\infty$$ Diviser numérateur et dénominateur par x^2

Exemple 16.8

Déterminer la limite suivante : $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{-x^2-5x+6}{x-2}$

Solution

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-5x+6}{x-2} = \frac{2^2-5\times 2+6}{2-2} = \frac{0}{0}$$ Par substitution

$$= \lim_{x\to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x-3)}{\cancel{x-2}}$$ Factorisation du numérateur

$$= \lim_{x\to 2} x-3 = -1$$ Après simplification par $x - 2$

Exemple 16.9

Déterminer la limite suivante : $\lim\limits_{x\to 1} (x^2+x-2)\cdot \dfrac{1}{x-1}$

Solution

$$\lim_{x\to 1} (x^2+x-2)\cdot\frac{1}{x-1} = (1^2+1-2)\times\frac{1}{1-1} = 0\times\infty$$ Par substitution

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{x-1} = \frac{0}{0}$$ Regroupement en une seule fraction

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+2)}{\cancel{x-1}} = 1+2 = 3$$ Factorisation et simplification

Exemple 16.10

Déterminer la limite suivante : $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1}$

Solution

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} = \frac{1}{0} - \frac{2}{0} = \infty - \infty \qquad \text{Par substitution}$$
$$= \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-1} \qquad \text{Mise au même dénominateur}$$
$$= \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{x-1}}{(\cancel{x-1})(x+1)} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \qquad \text{Factorisation et simplification}$$

Exemple 16.11

Déterminer la limite suivante : $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

Solution

En faisant tendre x vers 1 on arrive sur une forme indéterminée $\frac{0}{0}$. On multiplie alors le numérateur et le dénominateur par le conjugué $\sqrt{x}+1$, ainsi :

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} \qquad \text{Multiplication par le conjugué}$$
$$= \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{x-1}}{(\cancel{x-1})(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2} \qquad \text{Simplification et substitution}$$

16.2.1 Limites exponentielles et logarithmiques

On montrera sans démonstration les limites des fonctions logarithmiques et exponentielles suivantes : [1]

$$\lim_{n\to +\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

En particulier :

$$\lim_{n\to +\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Les limites suivantes sont également présentées sans démonstration, pour $a, b > 0$:

$\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to 0^+} x^a \cdot \ln(x) = 0$	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln(a)$	$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^a} = 0$	$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^{ax}}{x^b} = +\infty$	$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^b}{e^{ax}} = 0$

1. La démonstration du calcul de ces limites utilise la règle de Bernoulli-Hospital présentée dans le chapitre suivant.

Exemple 16.12

Déterminer la limite suivante : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+2}{e^{2x}}$

Solution

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+2}{e^{2x}} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{e^{2x}} + \frac{2}{e^{2x}}\right) = 0+0=0$$

Exemple 16.13

Déterminer la limite suivante : $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x+2}{e^{2x}}$

Solution

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x+2}{e^{2x}} = \frac{-\infty}{e^{-\infty}} = \frac{-\infty}{\frac{1}{e^{\infty}}} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty \cdot \frac{1}{0^+} = -\infty \cdot (+\infty) = -\infty$$

$\lim\limits_{x\to 0} x^x$
Comment calculer cette étrange limite ?

Exercices d'application de la section 16.2

13 [Type 0/0] Calculer les limites suivantes :

(a) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x-5}{x^2-25}$

(b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-8}{x-2}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{x+1}-1}{x}$

(d) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$

(e) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}$

(f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x-1)^2-1}{x}$

14 [Type 0/0] Calculer les limites suivantes (avec $a>0$) :

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3-3x}{x}$

(b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^5-32}{x-2}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{3+x}-\frac{1}{3}}{x}$

(d) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}$

(e) $\lim\limits_{x\to 0^-} \exp\left(\dfrac{3x}{x^4}\right)$

(f) $\lim\limits_{x\to 8} \dfrac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}$

15 [Type ∞/∞] Calculer les limites suivantes :

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2+x+x^3}{2x^2-x}$

(b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{5x-x^2}{6x^2-5}$

(c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-x^3}{x^2-x^3-x^4}$

16 [Type ∞/∞] Calculer les limites suivantes :

(a) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-4x^6+1}{4x^5-1-x^3}$ **(b)** $\displaystyle\lim_{h\to+\infty}\frac{(2h^4-83)^5}{(h^2+84)^{10}}$ **(c)** $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{2x-1}$

17 [Type $0\times\infty$] Calculer les limites suivantes :

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt{n+1}$ **(b)** $\displaystyle\lim_{x\to0}\left(1+\frac{1}{x}\right)\cdot x^{100}$ **(c)** $\displaystyle\lim_{x\to1}(3x^2-3)\cdot\frac{1}{x-1}$

18 [Type $0\times\infty$] Calculer les limites suivantes :

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\pi}(x-\pi)\left(\frac{\pi}{\pi-x}\right)$ **(b)** $\displaystyle\lim_{x\to3}\left(\frac{1}{x-3}\right)\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{9}\right)$ **(c)** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{x^2+3}}$

19 [Type $\infty-\infty$] Calculer les limites suivantes :

(a) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}x^{40}-x^{60}$ **(b)** $\displaystyle\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{3x^2-3}-\frac{2x}{x-1}\right)$ **(c)** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-\pi^x}{\pi^x-e^x}$

20 [Type $\infty-\infty$] Calculer les limites suivantes :

(a) $\displaystyle\lim_{x\to0}\left(\frac{5}{x^2+x}-\frac{5}{x}\right)$ **(b)** $\displaystyle\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{x^2-x}-\frac{2}{x^2-1}\right)$ **(c)** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{3^{x+1}-5^{x+1}}{3^x-5^x}$

21 [Exp-log] Déterminer les limites des fonctions suivantes :

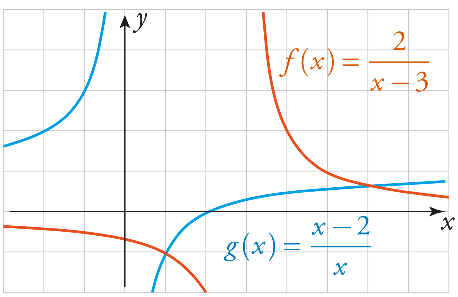
(a) $\displaystyle\lim_{x\to0^+}x^3(\log(x))^3$ **(b)** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{3x+1}}{x^2-5}$ **(c)** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x^4}{\ln(400x^5)}$

22 [Exp-log] Déterminer les limites des fonctions suivantes :

(a) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{B^x}{x}-\frac{1}{x}\,(B>0)$ **(b)** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^5-30x^2}{e^{2x}}$ **(c)** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+10}{x}\right)^x$

16.3 Problèmes et exercices de synthèse

23 [Fonction composée] Déterminer les limites des fonctions composées suivantes.

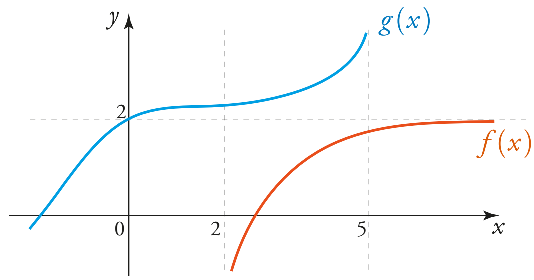


(a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f[g(x)]$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to0}g[f(x)]$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to-1^+}f[g(x)]$

24 [Fonction composée] L'illustration ci-après représente le graphe d'une fonction f comportant une asymptote horizontale et verticale ainsi que le graphe d'une fonction g comportant une asymptote verticale.



Déterminer les limites suivantes :

(a) $\lim_{x\to 0^+} (f \circ g)(x)$ (b) $\lim_{x\to 5^-} (f \circ g)(x)$

25 [Frais d'impression] Les frais d'impression d'un ouvrage sont divisés en frais fixes (composition, couverture) et frais variables (tirage, papier,...). Considérons le cas d'un livre comportant 30 000 frs de frais fixes et 25 frs de frais variables. Comment se comporte le prix unitaire pour des grandes quantités d'ouvrages produits?

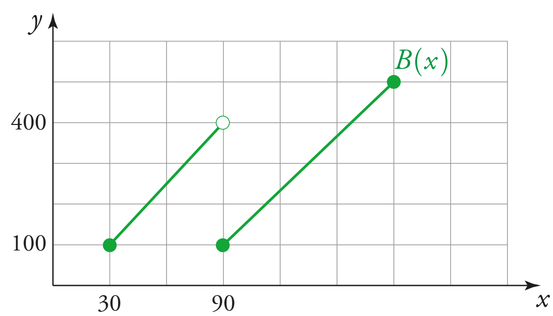
26 [Fonction financière] Soit la fonction financière suivante :

$$a_{\overline{n}|} = \frac{1 - v^n}{i} = \sum_{t=1}^{n} v^t \qquad \text{avec } v = \frac{1}{1+i} \qquad \text{et } 0 < i < 1$$

Calculer les limites suivantes :

(a) $\lim_{n\to\infty} a_{\overline{n}|}$ (b) $\lim_{i\to 0} a_{\overline{n}|}$

27 [Bénéfice] Un petit commerçant s'est installé sur une place pour vendre des paninis. Son bénéfice quotidien en fonction du nombre de paninis vendus est le suivant :



(a) Exprimer ce graphe à l'aide d'une fonction définie par morceaux.

(b) Calculer $\lim\limits_{x \to 70} B(x)$

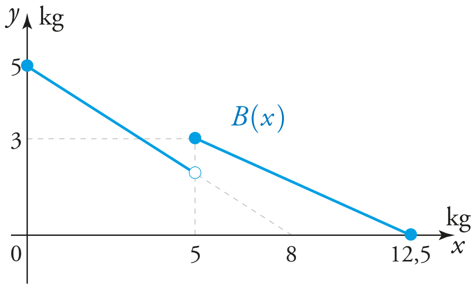
(c) Calculer $\lim\limits_{x \to 90^-} B(x)$

(d) Calculer $\lim\limits_{x \to 90^+} B(x)$

(e) Calculer $\lim\limits_{x \to 90} B(x)$

(f) Pour pouvoir satisfaire la demande, ce commerçant a loué les services d'un auxiliaire. À partir de combien d'unités vendues, cela devient-il intéressant pour lui ?

28 [Fonction de budget] Le graphe suivant représente une fonction de budget, c'est-à-dire toutes les possibilités de consommation en kg de deux biens x et y pour un budget donné de 100 frs.



(a) Déterminer $B(5)$

(b) Quel est le prix du kg du bien y ?

(c) Quel est le prix du kg du bien x pour une commande de ce bien inférieure à 5 kg ?

(d) Expliquer la raison de la discontinuité au point $x = 5$

29 [Production à long terme] Dans une entreprise, l'estimation de la production mensuelle d'un bien (en milliers d'unités) est représentée selon le modèle suivant :

$$P(t) = \frac{50}{8 + 2e^{-0{,}05t}}$$

(a) Quelle est la production initiale de ce bien ?

(b) Dans combien de mois, la barre des 6000 unités sera-t-elle atteinte ?

(c) Quelle sera la production à long terme si la tendance actuelle se maintient ?

30 [Prévision à long terme] Les fonctions suivantes représentent des modèles de prévision. Sans calculatrice, donner la valeur initiale et à long terme de chacun de ces modèles.

(a) $f(t) = \dfrac{120}{2(1 + 5e^{-0{,}3t})}$

(b) $f(t) = A \cdot B^{0{,}5^t}$

(c) $f(t) = k \cdot e^{(-\alpha \cdot e^{-\beta t})} \quad (\beta > 0)$

(d) $f(t) = a \cdot e^{-t} + b + \dfrac{c}{e^{-t} + 1}$

31 [Limite d'une sommation] En utilisant les propriétés des sommations, calculer :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{i+2}{n^2}$$

32 [Limite d'une sommation] En utilisant les propriétés des sommations, calculer :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(1+\frac{i}{n}\right)^2 \left(\frac{1}{n}\right)$$

33 [Processus à long terme] On définit le processus probabiliste suivant en fonction de son état antérieur :

$$P_{n+1} = P_n \times \frac{1}{4} + (1-P_n) \times \frac{3}{4} \qquad \text{avec } P_1 = 1$$

(a) Mettre cette fonction sous la forme $P_{n+1} = a \cdot P_n + b$

(b) Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} P_n$ sachant que P_n peut être déterminé comme suit :

$$P_n = a^{n-1} \cdot P_1 + b\left(\frac{a^{n-1}-1}{a-1}\right)$$

34 [Médicament] Pour une certaine maladie, l'efficacité E (en %) d'un médicament peut être mesuré durant les t premières heures d'administration par la formule :

$$E(t) = 100 \times 2^{-0,5(t-4)^2}$$

(a) Qu'en est-il de l'efficacité du médicament lors des toutes premières secondes d'administration ?

(b) Qu'en est-il de l'efficacité du médicament après de longues heures ?

(c) Après combien d'heures, l'efficacité du médicament est-elle maximale ?

35 [Défi] La méthode de Gordon-Shapiro est un modèle d'actualisation des actions mis au point en 1956. Ce modèle permet de calculer la valeur théorique d'une action P_0 en fonction du dividende anticipé de la première période D_1, du taux de rendement k attendu par l'actionnaire et du taux de croissance g des dividendes. ($k > g$). Selon ce modèle, P_0 est défini par :

$$P_0 = \lim_{n\to\infty} \sum_{t=1}^{n} \frac{(1+g)^{t-1} \cdot D_1}{(1+k)^t}$$

Trouver une formule simplifiée pour P_0.

Chapitre 17

Les dérivées

Objectifs du chapitre

- savoir calculer la dérivée au moyen de la limite
- connaître les principales dérivées
- connaître les règles de dérivation
- savoir utiliser la règle de l'Hospital
- connaitre la méthode de Newton-Raphson
- utiliser les dérivées pour le calcul de l'élasticité
- utiliser les dérivées dans les calculs de développements limités.

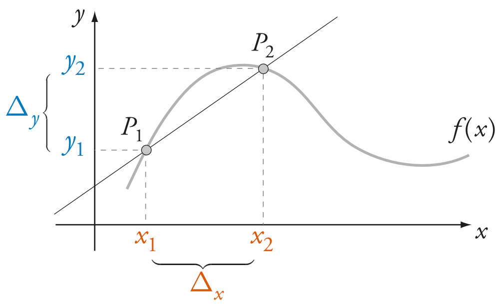
17.1 Notion de dérivée et règles de dérivation

La notion de **dérivée** est une notion fondamentale en analyse. Elle permet d'étudier les variations d'une fonction, de construire des tangentes à une courbe ou de résoudre des problèmes d'optimisation.
Mathématiquement, la dérivée correspond à la pente de la tangente en un point quelconque d'une courbe. Pour bien comprendre, on va calculer dans un premier temps la pente entre deux points P_1 et P_2, puis regarder ce qui se passe quand P_2 se rapproche de P_1.

17.1.1 Pente entre deux points

La **pente** ou **taux d'accroissement** entre deux points $P_1(x_1; y_1)$ et $P_2(x_2; y_2)$ se calcule ainsi :

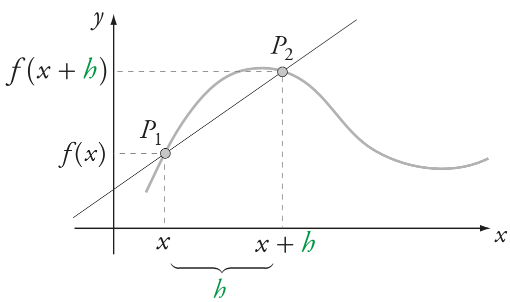
$$\text{Pente} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



Afin d'alléger l'écriture, on utilise cependant plus volontiers la notation suivante pour définir la pente ou taux d'accroissement entre deux points P_1 et P_2 :

- Soit le point P_1 de coordonnées $(x; f(x))$ et
- P_2 le point de coordonnées $(x + h; f(x + h))$, alors :

$$\text{Pente} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$



Exemple 17.1

Calculer le taux d'accroissement de $f(x) = x^2 - 5x + 6$ sur l'intervalle $[-1; 4]$

Solution

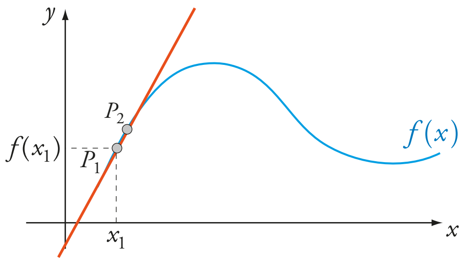
On calcule successivement :

- $f(-1) = (-1)^2 - 5(-1) + 6 = 12$ et $f(4) = 4^2 - 5 \times 4 + 6 = 2$
- $h = 4 - (-1) = 5$, ainsi :

$$\text{Taux d'accroissement} = \frac{f(4) - f(-1)}{h} = \frac{2 - 12}{5} = -2$$

17.1.2 Nombre dérivé

Si, dans le calcul de la pente entre deux points P_1 et P_2, on fait tendre h vers zéro, c'est-à-dire si l'on rapproche le point P_2 du point P_1, alors cette pente devient à la limite la tangente en P_1



Ainsi, on appelle **nombre dérivé** au point $P_1(x_1; f(x_1))$, la limite suivante si elle existe :

$$f'(x_1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

Ce nombre dérivé, noté $f'(x_1)$, correspond à la pente de la tangente au point $P_1(x_1; f(x_1))$.

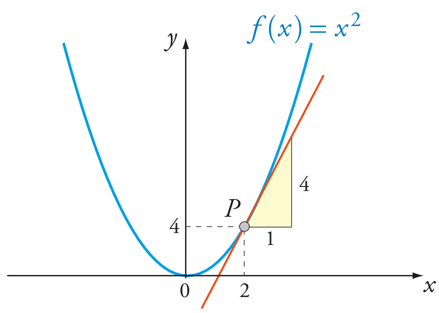
Exemple 17.2

Déterminer le nombre dérivé de $f(x) = x^2$ au point $P(2;4)$

Solution

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} && \text{Définition} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{(2+h)^2 - 2^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4 + 4h + h^2 - 4}{h} = \frac{0}{0} && \text{Indétermination} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(h+4)}{\cancel{h}} = \lim_{h \to 0} h + 4 = 4 && \text{Lever l'indétermination} \end{aligned}$$

Ainsi, la tangente, ou nombre dérivé au point $P(2;4)$ a une pente de 4, ce qui peut se représenter comme suit :



17.1.3 Dérivée d'une fonction

Le calcul de la dérivée ou fonction dérivée permet de trouver la pente d'une tangente, non seulement en un point particulier x_0, mais en tout point arbitraire x. Ainsi, on appelle **dérivée** de f, la fonction notée $f'(x)$ ou encore $\frac{dy}{dx}$, la limite suivante si elle existe :

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Exemple 17.3

Déterminer la dérivée de $f(x) = x^2$

Solution

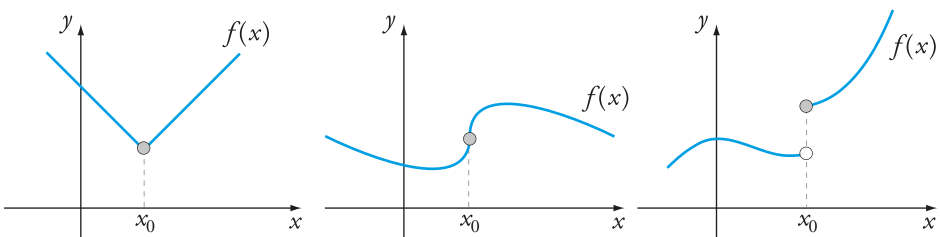
$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} && \text{Définition} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2x\cdot h + h^2 - x^2}{h} && \text{Développer} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h^2 + 2x\cdot h}{h} = \frac{0}{0} && \text{Simplifier-indétermination} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}(h+2x)}{\cancel{h}} = \lim_{h\to 0} h + 2x = 2x && \text{Lever l'indétermination} \end{aligned}$$

Ainsi, $f'(x)$ représente la pente ou **taux de variation instantané** en tout point de la fonction $f(x) = x^2$. On peut, par exemple, obtenir facilement les nombres dérivés suivants :

- Au point $x = 0$: $f'(0) = 2 \times 0 = 0$ (pente nulle en 0)
- Au point $x = 2$: $f'(2) = 2 \times 2 = 4$ (pente de 4), etc...

Remarque

Lorsqu'une fonction f n'est pas dérivable en un point particulier x_0, on dit que la dérivée n'existe pas en ce point. Cette situation se rencontre en général dans les cas de figure suivants :



Point anguleux ou de rebroussement — Pente infinie ou tangente verticale — Point de discontinuité

17.1.4 Principales dérivées et règles de dérivation

Calculer une dérivée en utilisant un calcul de limite devient rapidement fastidieux. Les principales formules et règles suivantes simplifient considérablement cette tâche :

Principales dérivées

Fonction	Dérivée	Fonction	Dérivée
k (constante)	0	e^x	e^x
x	1	a^x	$a^x \cdot \ln(a)$
x^n	nx^{n-1}	$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\log_a(x)$	$\dfrac{1}{x \cdot \ln(a)}$

Exemple 17.4

Déterminer la dérivée de $f(x) = x^{0,2}$

Solution

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{0,2} && \text{Donnée} \\ f'(x) &= 0,2x^{0,2-1} && \text{Dérivée de } x^n \\ &= 0,2x^{-0,8} && \text{Simplification} \end{aligned}$$

Exemple 17.5

Déterminer la dérivée de $f(x) = \sqrt{x}$

Solution

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x} = x^{1/2} && \text{Écriture en puissance} \\ f'(x) &= \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} && \text{Dérivée de } x^n \\ &= \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} && \text{Simplification} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} && \text{Écriture avec les racines} \end{aligned}$$

La dérivée des fonctions exponentielles et logarithmiques.
Comment établir ces formules ?

Règles de dérivation

Soient f et g $(g \neq 0)$, deux fonctions dérivables et λ un nombre réel :

$$(f \pm g)' = f' \pm g' \qquad (\lambda \cdot f)' = \lambda \cdot f'$$

$$(f \cdot g)' = f'g + fg' \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Exemple 17.6

Trouver la dérivée de la fonction $f(x) = x^2 + 3x - 5$

Solution

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^2)' + (3x)' - (5)' && \text{Dérivée d'une somme} \\ &= 2x + 3(x)' - 0 && \text{Mise en évidence de 3} \\ &= 2x + 3 \end{aligned}$$

Exemple 17.7

Trouver la dérivée de la fonction $f(x) = x \cdot e^x$

Solution

$$\begin{aligned} f'(x) &= x' \cdot e^x + x \cdot (e^x)' && \text{Dérivée d'un produit de fonctions} \\ &= 1 \cdot e^x + x \cdot e^x \\ &= e^x(x+1) && \text{Mise en évidence de } e^x \end{aligned}$$

Exemple 17.8

Trouver la dérivée de la fonction $f(x) = \dfrac{x-1}{x}$

Solution

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x-1)'x - (x-1)x'}{x^2} && \text{Dérivée d'un quotient de fonctions} \\ &= \frac{1x - (x-1)1}{x^2} \\ &= \frac{x - (x-1)}{x^2} = \frac{1}{x^2} && \text{Simplifier} \end{aligned}$$

Fonctions composées

Lorsque l'on est en présence de fonctions composées, il faut encore tenir compte de la **dérivée interne** :

$$f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

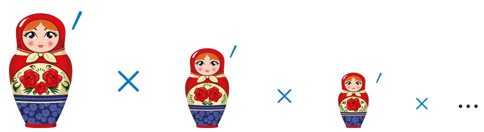
Exemple 17.9

Trouver la dérivée de la fonction $f(x) = \ln(3x)$

Solution

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\ln(3x))' && \text{Dérivée de la fonction ln} \\ &= \frac{1}{3x} \cdot (3x)' && \text{Multiplication par la dérivée interne} \\ &= \frac{1}{3x} \cdot 3 = \frac{1}{x} && \text{Simplification} \end{aligned}$$

Il peut y avoir plusieurs compositions de fonctions. Il faut alors chaque fois multiplier par la dérivée interne de chaque fonction, selon le principe des poupées russes suivant :



Exemple 17.10

Trouver la dérivée de la fonction $f(x) = e^{\sqrt{3x}}$

Solution

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{\sqrt{3x}} \cdot \sqrt{3x}' && \text{Dérivée interne de ce qui est en exposant} \\ &= e^{\sqrt{3x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{3x}} \cdot (3x)' && \text{Dérivée interne de ce qui est sous la racine} \\ &= e^{\sqrt{3x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{3x}} \cdot 3 \\ &= \frac{3e^{\sqrt{3x}}}{2\sqrt{3x}} && \text{Simplification} \end{aligned}$$

17.1.5 Dérivée seconde

La dérivée seconde de f est la fonction notée f'' et qui se définit comme la dérivée de la dérivée :

$$f''(x) = \left[f'(x)\right]'$$

On peut ainsi, selon ce principe, définir des dérivées d'ordre supérieur :
$f'''(x)$, $f^{(4)}(x)$, $\cdots$ $f^{(n)}(x)$ (dérivée d'ordre n)

Exemple 17.11

Calculer les dérivées d'ordre 1, 2 et 3 de la fonction : $f(x) = x^3 + 3x^2 + 5x$

Solution

$$f'(x) = 3x^2 + 6x + 5 \quad \text{Dérivée première}$$
$$f''(x) = 6x + 6 \quad \text{Dérivée seconde}$$
$$f'''(x) = 6 \quad \text{Dérivée troisième}$$

La dérivée seconde permet de mesurer la **concavité** de la fonction dans un intervalle I :

Si $f''(x) > 0$ pour tout x dans I, alors f a une **concavité positive** $\smile$ sur I
Si $f''(x) < 0$ pour tout x dans I, alors f a une **concavité négative** $\frown$ sur I

Exemple 17.12

Que peut-on dire de la pente et de la concavité de la fonction $f(x) = x^3 - 4x^2 + 2x$ au point $x = 1$?

Solution

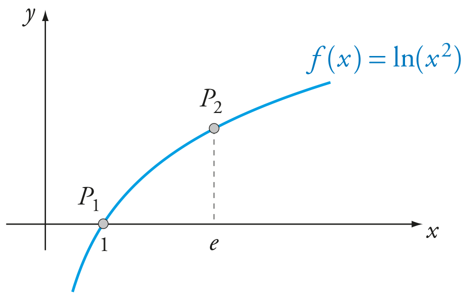
$$f'(x) = 3x^2 - 8x + 2 \quad \text{Première dérivée}$$
$$f'(1) = 3 \times 1^2 - 8 \times 1 + 2 = -3 \quad \text{Pente négative}$$
$$f''(x) = 6x - 8 \quad \text{Deuxième dérivée}$$
$$f''(1) = 6 \times 1 - 8 = -2 \quad \text{Concavité négative}$$

Remarque

La dérivée seconde s'exprime parfois au moyen de la **notation de Leibniz**, philosophe et mathématicien allemand (1646-1716) : $f''(x) = \dfrac{d^2y}{dx^2}$.

Exercices d'application de la section 17.1

1 [Pente entre 2 points] Déterminer la pente entre P_1 et P_2 à partir du graphe ci-après :



2 [Pente entre 2 points] Monter que la pente de la fonction $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ est identique entre les points $x = -1$ et $x = 0$ qu'entre les points $x = 2$ et $x = 3$.

3 [Avec les limites] Dériver les fonctions suivantes en utilisant uniquement les limites :

(a) $f(x) = x^3 - 3$ **(b)** $g(x) = ax + b$ **(c)** $N(t) = e^t$

4 [Avec les limites] Dériver les fonctions suivantes en utilisant uniquement les limites :

(a) $g(x) = \sqrt{x}$ **(b)** $f(x) = x^{-1}$ **(c)** $f(x) = \dfrac{2}{x-3}$

5 [Fonction différentiable] On donne la fonction suivante :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & , \text{si } x \leq 1 \\ 2x & , \text{si } x > 1 \end{cases}$$

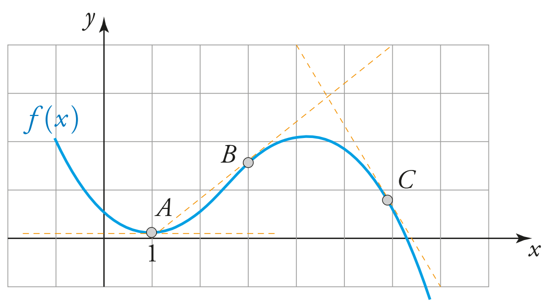
Montrer que cette fonction est continue et différentiable au point $x = 1$.

6 [Fonction différentiable] On donne la fonction suivante :

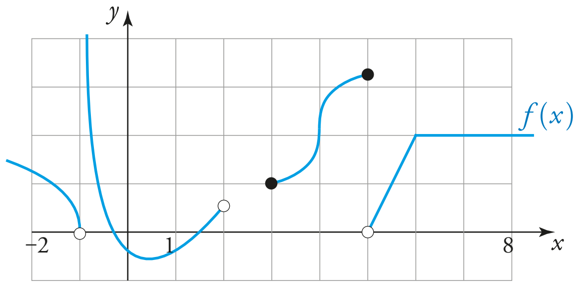
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & , \text{si } x \leq 1 \\ x + 3 & , \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Montrer que cette fonction est continue mais pas différentiable au point $x = 1$.

7 [Nombre dérivé] Estimer le nombre dérivé de la fonction f aux points A, B et C



8 [Dérivée] Indiquer pour quelle(s) valeur(s) de x entre -2 et $+8$, la dérivée de la fonction représentée ci-après n'existe pas.



9 [Dérivées] Calculer les trois premières dérivées des fonctions suivantes :

(a) $f(x) = x^4 - 5x^3 + 2x^2$ **(b)** $f(x) = a^n x^n + b^n$ **(c)** $f(t) = t^{9/2}$

10 [Dérivées] Calculer les trois premières dérivées des fonctions suivantes :

(a) $f(x) = 7x^{-5}$ **(b)** $f(x) = x^{-3} + x^{-5}$ **(c)** $f(x) = 2/\sqrt{x}$

11 [Dérivées] Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

(a) $f(x) = \dfrac{2-x}{x}$ **(b)** $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^3-1}$ **(c)** $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$

12 [Dérivées] Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

(a) $f(x) = \dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$ **(b)** $f(t) = \dfrac{\beta}{\alpha - 3t^2}$

(c) $f(y) = (y+2)(y-3)(y+3)$

13 [Fonctions composées] Calculer la dérivée des fonctions composées suivantes :

(a) $f(x) = e^{x^2-5x-8}$ **(b)** $f(x) = e^{\sqrt{x^2-x}}$ **(c)** $f(x) = \ln(xe^x - 3)$

14 [Fonctions composées] Calculer la dérivée des fonctions composées suivantes :

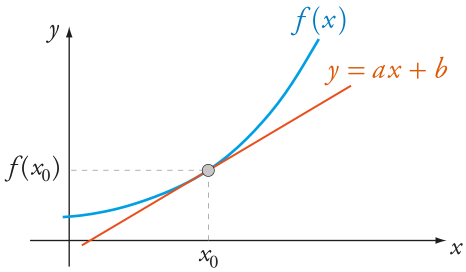
(a) $f(x) = \ln(e^{3x})$ **(b)** $f(x) = \ln\left(\sqrt{e - x^2}\right)$ **(c)** $f(x) = x(\ln(3x^2) - 1)$

17.2 Quelques utilisations des dérivées

17.2.1 Équation de la tangente en un point d'une fonction

Soit une fonction f dérivable au point x_0. Le graphe de f admet une tangente au point $P(x_0; f(x_0))$ d'équation :

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$



Exemple 17.13

Déterminer l'équation de la tangente au graphe de la fonction $f(x) = 0,5x^2 - 3x + 2$ au point $x_0 = 4$.

Solution

On calcule successivement :

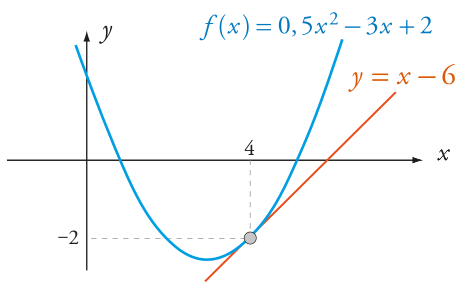
$$f'(x) = 2 \times 0,5 \cdot x - 3 = x - 3 \qquad \text{Dérivée de } f$$

$$f'(4) = 4 - 3 = 1 \qquad \text{Nombre dérivé au point } x_0 = 4$$

$$f(4) = 0,5 \times 4^2 - 3 \times 4 + 2 = -2 \qquad \text{Valeur de } f \text{ au point } x_0 = 4$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} y &= f'(4)(x-4) + f(4) \\ &= 1(x-4) - 2 \\ &= x - 6 \end{aligned}$$



17.2.2 Approximations polynomiales

L'idée des approximations polynomiales est de remplacer des fonctions compliquées par des fonctions polynomiales plus simples au voisinage d'un point donné x_0. On l'a vu à la section précédente avec l'équation de la tangente en un point que si x est proche de x_0 on pourrait très bien utiliser la fonction affine $y = ax + b$ en ce point, voir tout proche de celui-ci. On parle alors d'**approximation affine**. Si l'on souhaite une meilleure approximation au voisinage de x_0 on peut utiliser une approximation quadratique, voir cubique, etc..

Les différentes approximations peuvent être définies par les formules suivantes : [1]

- **Approximation affine** de f au voisinage de $x = x_0$:

$$f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

- **Approximation quadratique** de f au voisinage de $x = x_0$:

$$f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0) \cdot (x - x_0)^2$$

- Approximation d'ordre n (ou de **Taylor**) de f au voisinage de $x = x_0$:

$$f(x) \simeq f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Exemple 17.14

Donner une approximation quadratique de $f(x) = x \cdot e^x$ pour des valeurs de x proches de 0.

Solution

$f(x) = x \cdot e^x$	$f(0) = 0 \cdot e^0 = 0$	Valeur de f au point 0
$f'(x) = x \cdot e^x + e^x$	$f'(0) = 0 \cdot e^0 + e^0 = 1$	Valeur de f' au point 0
$f''(x) = x \cdot e^x + 2e^x$	$f''(0) = 0 \cdot e^0 + 2e^0 = 2$	Valeur de f'' au point 0

En utilisant la formule de l'approximation quadratique, on obtient :

$$\begin{aligned} f(x) &\simeq f(0) + f'(0) \cdot (x - 0) + \frac{1}{2} f''(0) \cdot (x - 0)^2 \\ &\simeq 0 + 1(x - 0) + \frac{1}{2} \cdot 2(x - 0)^2 \\ &\simeq x + x^2 \end{aligned}$$

1. Dans certains cas, plus n est grand, plus la fonction approximative se confond avec la fonction à approximer. On parle dans ce cas d'un **développement en série entière**.

17.2.3 Règle de l'Hospital

La règle de l'Hospital, mathématicien français (1661-1704) est une règle permettant de calculer aisément des limites de quotients dans des cas indéterminés tels que $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$. Cette règle s'énonce comme suit :

Si $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{0}{0}$ ou $\dfrac{\infty}{\infty}$ alors $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

Cette règle reste aussi valable si x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.

Exemple 17.15

Lever l'indétermination suivante : $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x^2+x-2} = \dfrac{0}{0}$

Solution

Les conditions d'application de la règle de l'Hospital sont réunies. En dérivant numérateur et dénominateur, on obtient :

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)'}{(x^2+x-2)'} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{2x+1} = \frac{1}{3}$$

Exemple 17.16

Lever l'indétermination suivante : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\ln(x)} = \dfrac{\infty}{\infty}$

Solution

Les conditions d'application de la règle de l'Hospital sont réunies. En dérivant numérateur et dénominateur, on obtient :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x'}{\ln(x)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{1} = +\infty$$

Remarque

Cette règle peut être appliquée plusieurs fois de suite si l'indétermination n'est toujours pas levée.

Exemple 17.17

Lever l'indétermination suivante : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^2} = \dfrac{\infty}{\infty}$

Solution

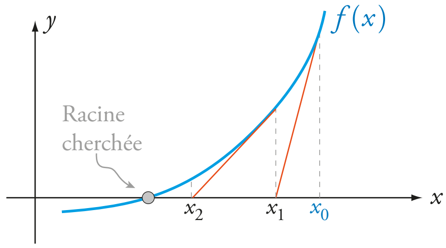
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(e^x)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty$$

17.2.4 Méthode de Newton-Raphson

La méthode de Newton-Raphson, du nom des mathématiciens anglais Isaac Newton (1643-1727) et Joseph Raphson (1648-1715) est un algorithme efficace pour trouver numériquement une approximation précise d'un zéro (ou racine) d'une fonction.

La méthode consiste à choisir un point arbitraire x_0, de calculer ensuite $f(x_0)$, puis de tracer la tangente en ce point. La tangente coupe l'axe des x en x_1. On réitère ce même procédé en calculant x_2 en fonction de x_1, puis x_3 en fonction de x_2, etc.

On s'arrête au niveau de la précision ϵ souhaitée, c'est-à dire quand $|x_{t+1} - x_t| < \epsilon$.



On calcule ainsi successivement x_1, x_2, x_3 au moyen de la formule suivante :

$$x_{t+1} = x_t - \frac{f(x_t)}{f'(x_t)}$$

Formule de Newton-Raphson
Comment établir cette formule ?

Exemple 17.18

Résoudre numériquement l'équation $x^2 - 4 = 0$ par la méthode de Newton-Raphson en procédant à 4 itérations, en partant de $x_0 = 5$.

Solution

Comme $f(x) = x^2 - 4$, $f'(x) = 2x$. Ainsi : $x_{t+1} = x_t - \dfrac{x_t^2 - 4}{2x_t}$

La suite x_0, x_1, x_2, etc.. converge rapidement vers la solution $x = 2$.

t	x_t	x_{t+1}
0	5	2,9
1	2,9	2,13965517
2	2,13965517	2,00455764
3	2,00455764	2,00000518

17.2.5 Calcul de l'élasticité

On appelle élasticité de y par rapport à x, notée $e_{y/x}$,[2] le rapport entre le taux d'évolution en % de y et le taux d'évolution en % de x.

$$e_{y/x} = \frac{\frac{y_1-y_0}{y_0}\times 100}{\frac{x_1-x_0}{x_0}\times 100} = \frac{\frac{y_1-y_0}{y_0}}{\frac{x_1-x_0}{x_0}} = \frac{\frac{\Delta_y}{y_0}}{\frac{\Delta_x}{x_0}}$$

Ainsi, l'élasticité de y par rapport à x représente la variation relative en % de y provoquée par une augmentation de 1% de x. Elle est donnée par :

$$e_{y/x} = \frac{x}{y}\cdot\frac{\Delta_y}{\Delta_x}$$

Avec x et y les valeurs initiales x_0 et y_0
(parfois aussi la moyenne entre x_0 et x_1 respectivement y_0 et y_1)

Exemple 17.19

On a mesuré dans une école que lorsque le prix passe de 2 frs à 2,2 frs, la quantité demandée de barres chocolatées passait de 10 à 8. Calculer l'élasticité de la demande (q) par rapport aux prix (p).

Solution

Avec : $p_0 = 2$, $p_1 = 2,2$; $q_0 = 10$ et $q_1 = 8$, on obtient :

$$e_{q/p} = \frac{p_0}{q_0}\cdot\frac{(q_1-q_0)}{q_0(p_1-p_0)} = \frac{2}{10}\cdot\frac{(8-10)}{(2,2-2)} = -2$$

Ainsi, si le prix augmente de 1% alors la quantité demandée baisse de 2%.

Lorsque l'on mesure l'élasticité pour une toute petite variation de x, le rapport $\frac{\Delta_y}{\Delta_x}$ tend vers $\frac{dy}{dx}$, c'est-à-dire y' ou encore $f'(x)$. Ainsi on définit l'**élasticité point** de y par rapport à x :

$$e_{y/x} = \frac{x}{y}\cdot y' \quad \text{ou encore} \quad e_{y/x} = \frac{x}{f(x)}\cdot f'(x)$$

2. Il existe d'autres notations comme par exemple $\epsilon(y,x)$ ou encore $E_x(y)$

Exemple 17.20

La quantité demandée d'un bien exprimée par rapport à son prix est donnée par la formule : $D(p) = 100 - 5p$. Calculer l'élasticité point de la demande par rapport à son prix pour un prix de 16.

Solution

$$E_{D/p} = \frac{p}{D(p)} \cdot D'(p) = \frac{p}{100 - 5p} \cdot (-5)$$

Au point $p = 16$, on obtient :

$$E_{D/p} = \frac{16}{100 - 5 \times 16} \times (-5) = -4$$

Ainsi, une augmentation d'environ 1% des prix fait chuter la demande de 4%.

Remarque

- Si $|e_{y/x}| > 1$ on dit que y est élastique en x
- Si $|e_{y/x}| = 1$ on dit que y a une élasticité unitaire en x
- Si $|e_{y/x}| < 1$ on dit que y est inélastique en x

Exercices d'application de la section 17.2

15 [Tangente en 1 point] Déterminer l'équation de la tangente au point $x = 16$ de la fonction $f(x) = 2 + 4\sqrt{x}$.

16 [Tangentes passant par 1 point] Trouver les équations des deux droites passant par le point $P(4; 20)$, tangentes au graphe de la fonction $f(x) = -x^2 + 8x$.

17 [Approximation quadratique] Donner une approximation quadratique des fonctions suivantes au voisinage de $x = 0$.

(a) $f(x) = \left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^2$ **(b)** $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$

18 [Développement de Taylor] Donner une approximation de Taylor d'ordre 3 des fonctions suivantes au voisinage de $x = 1$, puis mesurer l'erreur commise si $x = 1,2$.

(a) $f(x) = \ln(x)$ **(b)** $f(x) = x^4 - 3x^2 + 6x$

19 [Hospital] Calculer à l'aide de la règle de l'Hospital les limites suivantes :

(a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{e^x - e^2}{x-2}$ **(b)** $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^8-1}{x+1}$ **(c)** $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot e^{-x}$

20 [Hospital] Calculer à l'aide de la règle de l'Hospital les limites suivantes :

(a) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\ln(2+x)}{x+1}$ **(b)** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(\sqrt{x})}{x}$ **(c)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\cdot 10^{2x+1}}{1-10^x}$

21 [Newton-Raphson] Trouver au moins une racine dans l'intervalle donné au moyen de la méthode de Newton-Raphson :

(a) $2x^5 - 3x^2 - 4 = 0$ dans $[1;2]$ **(b)** $x + 2^x = 11$ dans $[2;4]$

22 [Newton-Raphson] Trouver au moins une racine dans l'intervalle donné au moyen de la méthode de Newton-Raphson :

(a) $\sqrt{x+5} - \sqrt{x+3} = x$ dans $[0;10]$ **(b)** $\log(x) + \sqrt{x-1} = 4$ dans $[2;15]$

23 [Élasticité] Déterminer l'élasticité $e_{y/x}$ des fonctions suivantes :

(a) $y = ax + b$ **(b)** $y = a^x$ **(c)** $y = x^3$

24 [Élasticité] Déterminer l'élasticité $e_{y/x}$ des fonctions suivantes :

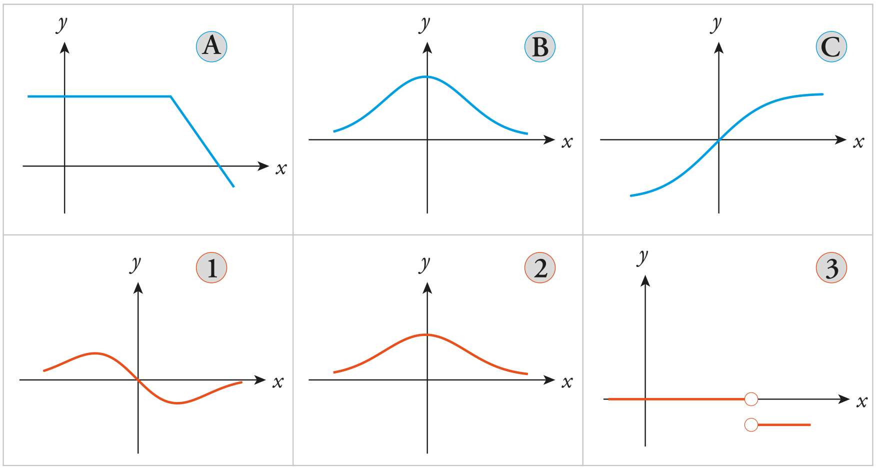
(d) $y = k\cdot x^a$ **(e)** $y = a/x$ **(f)** $y = e^{ax+b}$

25 [Élasticité] Une demande d'un produit est donnée par l'équation : $p = \dfrac{500}{q+2}$. Calculer l'élasticité prix quand $q = 98$.

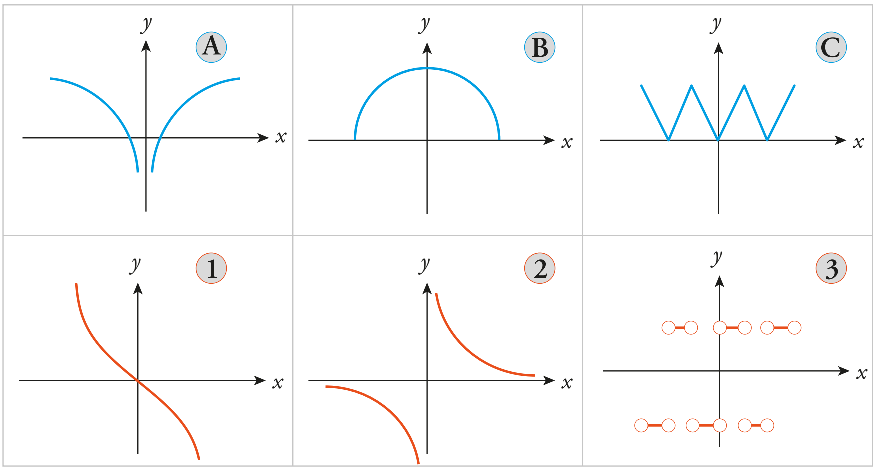
26 [Élasticité] Une demande d'un produit est donnée par l'équation : $q = \sqrt{2500-p}$. Calculer son élasticité prix quand $p = 900$. La demande est-elle élastique ?

17.3 Problèmes et exercices de synthèse

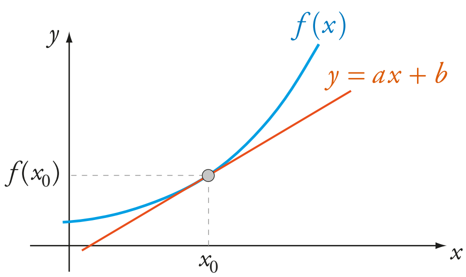
27 [Correspondances] Faire correspondre la fonction avec sa dérivée.



28 [Correspondances] Faire correspondre la fonction avec sa dérivée.



29 [Équation de la tangente] Établir la formule de l'équation de la tangente à la courbe décrite par une fonction $f(x)$ au point $(x_0; f(x_0))$.



30 [Équation de la tangente] Si $f(1) = 4$ et $f'(1) = 2$, donner l'équation de la tangente au graphe de f en $x = 1$.

31 [Coefficients] Déterminer les coefficients a, b et c de $f(x) = ax^2 + bx + c$, tels que $f(0) = 12$, $f(1) = 9$ et $f'(2) = 12$.

32 [Coefficients] Déterminer les coefficients a, b et c de la fonction :

$$f(x) = \frac{ax^2 + b}{x - c} \qquad \text{si :}$$

- la droite $x = -2$ est une asymptote de f
- $f'(0) = 3/4$
- le graphe passe par le point $(3;3)$

33 [Dérivées successives] Trouver une formule pour $f^{(n)}(t)$, si $f(t) = \ln(t-1)$.

34 [Tangentes horizontales] Pour quelle(s) valeur(s) de x, les fonctions suivantes admettent-elles des tangentes horizontales ?

(a) $f(x) = x^2 - 5x + 6$

(b) $f(x) = \dfrac{2x^2+1}{x}$

35 [Sommation/Produit] Déterminer la dérivée des fonctions suivantes :

(a) $e(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - x)^2$

(b) $h(x) = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} 2xi$

36 [Sommation] Déterminer la dérivée seconde des fonctions suivantes :

(a) $A(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (x_i - 2x)^{-2}$

(b) $y(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$

37 [Règle de 70] À intérêt composé, le capital acquis au bout de n années est donné par $C(n) = C_0(1+i)^n$. Au moyen d'une approximation affine, montrer que le temps pour qu'un capital double à intérêt composé est donné par $n \simeq \dfrac{70}{i\%}$.

38 [Racine carrée] Déterminer la racine carrée de 10 avec 5 décimales exactes en faisant usage de la méthode de Newton-Raphson. Prendre comme valeur initiale $x_0 = 4$.

39 [Défi] Calculer la dérivée de la fonction : $f(x) = x^x$.

40 [Défi] Montrer que $P_n'(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k \cdot x^k}{k} = \frac{x^{2n} - 1}{x + 1}$

41 [Défi] On donne $f(x) = (x^3 + 1704)^{30}$. Si $f^{(n)}(x)$ est un polynôme de degré 20, quelle est la valeur de n ?

Chapitre 18

Optimisation

Objectifs du chapitre

- savoir calculer l'optimum d'une fonction économique d'une variable
- savoir calculer des dérivées partielles
- savoir calculer un extremum local avec 2 variables
- savoir résoudre des problèmes d'optimisation sous contraintes

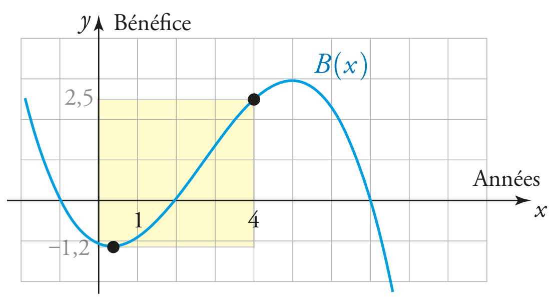
18.1 Fonctions d'une variable

Notions de maximum et minimum

Il arrive souvent que, dans la pratique, on ait à chercher la meilleure procédure, la plus grande distance ou encore le moindre coût à atteindre. Le procédé visant à trouver les paramètres qui rendent une fonction minimale ou maximale est appelé **optimisation**.

Avant de chercher à maximiser ou minimiser une fonction économique, il est important de connaître l'intervalle I qui fait sens selon le contexte. Imaginons par exemple, un bénéfice évoluant selon la fonction suivante au cours des 4 premières années :

$$B(x) = (7 - x)(x - 2)\,\frac{x+1}{12}$$



On constate clairement que cette fonction n'a de sens que pour les valeurs de $x \geq 0$, et que, pour l'intervalle considéré $I = [0,4]$, cette fonction admet un minimum (ici une perte) d'environ $-1,2$ et un maximum de 2,5 pour $x = 4$. On dira que dans l'intervalle $I = [0,4]$, 2,5 est un **maximum global** et $-1,2$ est un **minimum global**.

Par ailleurs, il se peut que dans l'intervalle considéré, la fonction passe localement par des maxima ou des minima. On parle alors d'**extrema locaux**. Ces extrema s'obtiennent par le calcul des dérivées.

Soit f une fonction dont f, f' et f'' sont continues sur un intervalle I.

- f admet un maximum local en $a \in I$, si $f'(a) = 0$ et $f''(a) < 0$.
- f admet un minimum local en $a \in I$, si $f'(a) = 0$ et $f''(a) > 0$.
- f admet un maximum global en $a \in I$, si pour tout $x \in I$, $f(x) \leq f(a)$.
- f admet un minimum global en $a \in I$, si pour tout $x \in I$, $f(x) \geq f(a)$.

✎ Pour déterminer l'ensemble des extrema globaux sur un intervalle fermé, on procède comme suit :

1. Calculer les extrema locaux avec la première et seconde dérivée.
2. Évaluer la fonction aux bornes de l'intervalle.
3. Prendre le maximum ou le minimum des valeurs trouvées.

Exemple 18.1

Soit la fonction de bénéfice : $B(x) = (7-x)(x-2)\frac{x+1}{12}$ définie maintenant dans l'intervalle $I = [2,7]$. Déterminer l'ensemble des extrema globaux de cette fonction.

Solution

$$B(x) = (7-x)(x-2)\frac{x+1}{12} \qquad \text{Fonction initiale}$$

$$B'(x) = \frac{-3x^2+16x-5}{12} \qquad \text{Dérivée première}$$

$$B''(x) = \frac{-6x+16}{12} \qquad \text{Dérivée seconde}$$

1. Calcul des extrema locaux :

   $B'(x) = 0$ pour $x = 1/3$ ou $x = 5$. Comme $x = 1/3$ n'appartient pas à l'intervalle $[2,7]$ on n'en tient pas compte. Pour $x = 5$ on atteint un extremum local valant :

   $$B(5) = (7-5)(5-2)\frac{5+1}{12} = 3$$

   Il s'agit d'un maximum car $B''(5)$ est négatif :

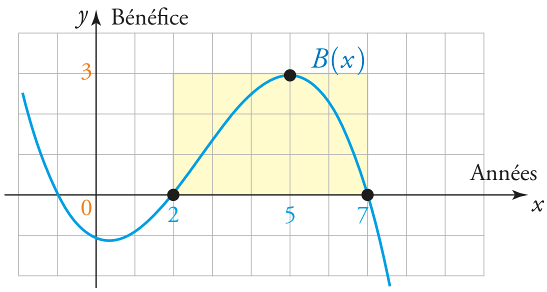
   $$B''(5) = \frac{-6 \times 5 + 16}{12} \simeq -1,17$$

2. Évaluation de la fonction aux bornes de l'intervalle $I = [2,7]$:

$$B(2) = (7-2)(2-2)\frac{2+1}{12} = 0$$
$$B(7) = (7-7)(7-2)\frac{7+1}{12} = 0$$

3. Maximum ou minimum des valeurs trouvées :

x	Valeur de $f(x)$
2	0 ← minimum global sur *I*
5	3 ← maximum global sur *I* mais aussi maximum local sur *I*
7	0 ← minimum global sur *I*



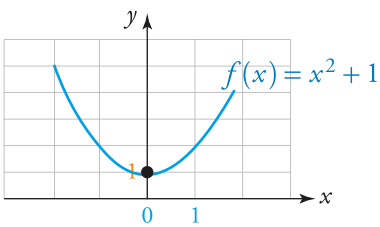
Exemple 18.2

Déterminer les extrema globaux de la fonction $f(x) = x^2 + 1$

Solution

Les deux premières dérivées donnent : $f'(x) = 2x$ et $f''(x) = 2$

1. Calcul des extrema locaux :
   Comme $f'(x) = 0$ pour $x = 0$ et $f''(0) = 2$, la fonction a un minimum global en $x = 0$ qui vaut $f(0) = 0^2 + 1 = 1$.
2. Évaluation de la fonction aux bornes de l'intervalle $I = \mathbb{R} =]-\infty;+\infty[$:
   Comme $f(\pm\infty) = +\infty$ il n'y a aucun maximum global. Par conséquent la fonction $f(x) = x^2 + 1$ admet qu'un minimum global de 1 en $x = 0$.
   [ce minimum se trouve être aussi un minimum local]



18.1.1 Maximisation du profit du producteur

Pour maximiser son profit ou bénéfice, un producteur doit pouvoir connaitre la structure de ses coûts et de ses recettes.

Les coûts

Un producteur connait habituellement les différents coûts de production suivants :

$C(x)$ **Coût total** de production en fonction des quantités produites

$\overline{C}(x)$ **Coût moyen** de production en fonction des quantités produites [1]

$$\overline{C}(x) = \frac{C(x)}{x}$$

$C'(x)$ **Coût marginal** de production, c'est-à-dire à le coût de la $(x+1)^{\text{ème}}$ unité. [2]

✎ Le coût marginal peut également être approximé comme suit :

$$C'(x) \simeq C(x+1) - C(x)$$

Exemple 18.3

Une entreprise a calculé que le coût de production total en frs de x unités d'un produit est égal à $C(x) = 0,05x^2 + 3x + 800$. Calculer

(a) Les coûts fixes totaux

(b) Le coût moyen de production de 500 unités

(c) Le coût marginal de production de la $501^{\text{ème}}$ unité

Solution

(a) Les coûts fixes totaux sont donnés par : $C(0) = 800$ frs.

(b) Le coût moyen de production est donné par :

$$\overline{C}(x) = \frac{0,05x^2 + 3x + 800}{x} = 0,05x + 3 + \frac{800}{x} \quad \rightarrow \quad \overline{C}(500) = 29,6 \text{ frs.}$$

(c) Le coût marginal de production est donné par :

$$C'(x) = 0,1x + 3 \quad \rightarrow \quad C'(500) = 53 \text{ frs.}$$

1. D'autres notations sont utilisées selon les auteurs, comme par exemple $C_M(x)$.
2. Certains auteurs définissent aussi $C'(x) \simeq C(x) - C(x-1)$.

La recette totale

La recette totale, générée par la vente de x unités au prix unitaire $p(x)$ est donnée par :

$$R(x) = x \cdot p(x)$$

avec $p(x) = \begin{cases} P & \text{Prix fixe en cas de concurrence parfaite} \\ f(x) & \text{fonction de demande en cas de monopole} \end{cases}$

Le bénéfice ou profit

À un certain niveau de vente ou de quantités produites x, le bénéfice total est de :

$$B(x) = R(x) - C(x)$$

Pour maximiser le bénéfice, il suffit de calculer :

$$B'(x) = R'(x) - C'(x) = 0$$

Pour s'assurer qu'il s'agisse bien d'un maximum, il faut vérifier que $B''(x) < 0$.

Exemple 18.4

Déterminer le niveau de production donnant un bénéfice maximum, connaissant les fonctions de coût total et de demande suivantes :

$$C(x) = 600 + 4x + 0,01x^2 \qquad \text{et} \qquad p(x) = 12 - 0,002x$$

Solution

- La recette totale s'exprime par : $R(x) = x \cdot p(x) = 12x - 0,002x^2$
- Le bénéfice total s'exprime par : $B(x) = R(x) - C(x) = -0,012x^2 + 8x - 600$
- Les deux premières dérivées de $B(x)$ donnent :

$$B'(x) = -0,024x + 8 \quad \text{et} \quad B''(x) = -0,024$$

- Le bénéfice maximum est obtenu pour :

$$-0,024x + 8 = 0 \qquad \text{Dérivée première = 0}$$
$$x =\simeq 333,33 \qquad \text{Quantités à produire}$$

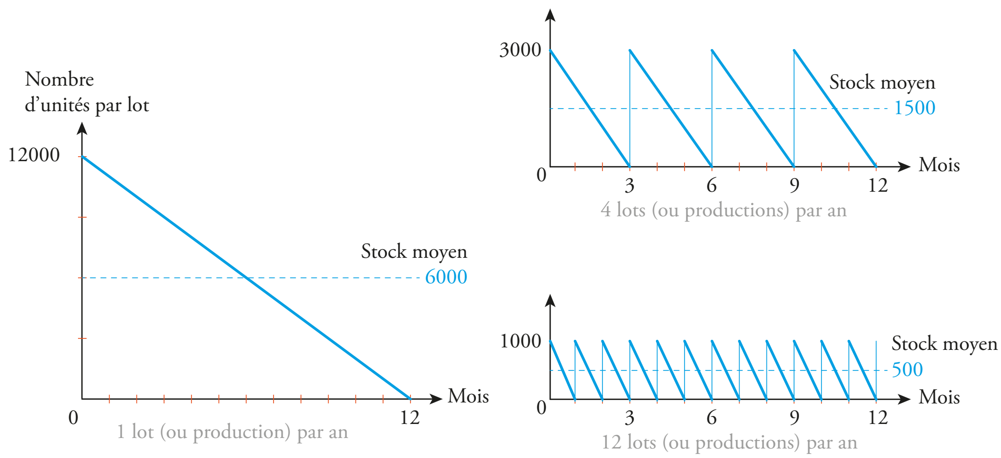
Comme $B''(333) = -0,024$, il s'agit donc bien d'un bénéfice maximum.
Ce dernier vaut :

$$B(333,33) = -0,012 \times 333,33^2 + 8 \times 333,33 - 600 \simeq 733,3$$

18.1.2 Formule de Wilson

La **formule de Wilson** (développée par Ford W. Harris en 1913 et R.H. Wilson en 1934) également connue sous le nom de **Quantité Economique de Commande**[3] apporte une réponse dans l'arbitrage entre le coût des commandes d'approvisionnement et coût de stockage en définissant la quantité économique optimale à commander ou fabriquer.

Pour faire simple, imaginons une entreprise ayant une demande de 12 000 unités annuelles d'un certain produit. Elle peut opter par exemple pour une seule production en début d'année. Dans ce cas elle aura une seule fois des coûts liés à la production, mais d'un autre côté elle devra faire face à un important stockage, générateur de coûts. Pour réduire les coûts de stockage, elle pourra lancer plusieurs productions durant l'année avec des quantités plus petites (voir graphique ci-après) mais dans ce cas, les coûts totaux annuels de fabrication vont grimper. On va donc s'intéresser ici à établir le nombre de productions (ou lots) par année à lancer afin de minimiser l'ensemble des deux coûts.



Notations

- D Nombre d'unités annuelles produites (demande annuelle)
- x Nombre de productions (ou lots) par année
- S Coût annuel de stockage d'une unité produite
- a Frais fixes liés au lancement d'une production[4]
- b Frais variables liés au lancement d'une production

Durant l'année, l'entreprise lancera x productions de D/x unités (par exemple 4 productions de 3000 unités). Chacune de ces productions engendrera des coûts fixes et variables par unité produite :

$$a + b\left(\frac{D}{x}\right)$$

3. Cette formule est connue aussi sous l'appellation EOQ (Economic Order Quantity).
4. On parle aussi de coût de passation d'une commande.

Ainsi, pour x productions annuelles, le coût total annuel de production sera de :

$$x \cdot \left[a + b\left(\frac{D}{x}\right)\right]$$

Comme chaque production engendre un stock de D/x unités, il y aura donc sur l'année un stock moyen dans les entrepôts de :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{D}{x}\right) = \frac{D}{2x} \text{ unités.}$$

Le coût de stockage par unité étant de S, le coût total annuel de stockage sera de :

$$S \cdot \left(\frac{D}{2x}\right) = \frac{SD}{2x}$$

Il reste finalement à déterminer le nombre de productions annuelles x minimisant le coût total C suivant :

$$C(x) = x \cdot \left[a + b\left(\frac{D}{x}\right)\right] + \frac{SD}{2x}$$

En posant $C'(x) = 0$, on trouve, après quelques calculs demandés en exercice, le nombre de productions annuelles x ainsi que la quantité économique de commande ou de fabrication par production Q_e :

$$x = \sqrt{\frac{SD}{2a}} \text{ productions /an} \qquad \text{et} \qquad Q_e = \frac{D}{x} = \sqrt{\frac{2aD}{S}} \text{ unités par production}$$

Exemple 18.5

Un restaurant de la Côte a une demande annuelle de 800 bouteilles de Petite Arvine du Valais. Le coût annuel de stockage chez le restaurateur est estimé à 1,20 frs par bouteille. Calculer le nombre annuel de commandes a effectuer ainsi que la quantité par commande si chaque commande engendre 7,50 frs de frais fixes.

Solution

On a : $D = 800$; $S = 1,2$ et $a = 7,5$. Donc :

$$x = \sqrt{\frac{1,2 \times 800}{2 \times 7,5}} = 8 \text{ commandes/an} \qquad \text{et} \qquad Q_e = \frac{800}{8} = 100 \text{ bouteilles par commande.}$$

Exercices d'application de la section 18.1

1 [Extremum global] Trouver les extrema globaux des fonctions suivantes :

- **(a)** $f(x) = -x^2 + 3x + 4$, dans l'intervalle $[0, 5]$
- **(b)** $f(x) = 0,5x^3 - 3,75x^2 + 6x$, dans $\mathbb{R}$
- **(c)** $f(x) = \dfrac{3}{x+1}$, dans l'intervalle $[0, 4]$

2 [Extremum global] Trouver les extrema globaux des fonctions suivantes :

- **(a)** $g(x) = xe^{-x}$, dans $\mathbb{R}$
- **(b)** $f(x) = \dfrac{x^2+6}{2x+1}$, dans l'intervalle $[0, 6]$
- **(c)** $G(K) = K^2 - 12 \cdot \ln(K+1)$, dans l'intervalle $[0, 5]$

3 [Extremum local] Trouver les extrema locaux des fonctions suivantes :

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}$ **(b)** $f(x) = \dfrac{x^4}{4} + x^3$ **(c)** $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{2x}$

4 [Extremum local] Trouver les extrema locaux des fonctions suivantes :

(a) $f(x) = x \cdot e^x$ **(b)** $f(x) = x^2(x-2)^4$ **(c)** $f(x) = \dfrac{x+1}{3e^x}$

5 [Consommation minimale] Pour un certain type de voiture, on a estimé que la consommation d'essence C au 100 km, peut s'exprimer en fonction de la vitesse v par la formule :

$$C(v) = 0,04v + \frac{100}{v} \qquad \text{avec } C \text{ en litres et } v \text{ en km/h}$$

- **(a)** Pour quelle(s) vitesse(s) a-t-on une consommation de 5 litres/100 km ?
- **(b)** Pour quelle vitesse a-t-on une consommation minimale ?

6 [Chaîne de production] Sur une chaîne de production, on estime que k employés peuvent produire par jour n unités selon la formule suivante : $n = 80k^2 - 0,1k^4$. Combien faut-il assigner d'ouvriers sur cette chaîne de production ?

7 [Coût moyen minimum] Une entreprise, qui produit entre 10 000 et 40 000 unités d'une machine de chantier, connaît l'évolution suivante de son coût moyen (en frs) en fonction de sa production x exprimée en milliers d'unités.

$$\overline{C}(x) = -11,57x^3 + 845,1x^2 - 18\,917x + 155\,394$$

À quel niveau de production l'entreprise connaît-elle connu un coût moyen minimum ?

8 [Coût moyen et marginal] Une entreprise fabrique des articles de luxe. Une étude a montré que le coût total de la production, noté $C(q)$, exprimé en francs, varie en fonction du nombre q d'articles fabriqués selon la relation :

$$C(q) = 0,002q^3 - 90 \cdot q \cdot \ln(0,01q) + 100q \qquad \text{avec } q \geq 1$$

(a) Calculer le coût moyen de 100 articles.

(b) Calculer le coût marginal du $151^{\text{ème}}$ article de deux manières.

(c) Déterminer la valeur de q pour laquelle le coût moyen est minimal

9 [Formule de Wilson] Boissons Store a une demande annuelle constante de 9 600 packs de bière. Il lui en coûte 3 frs pour stocker un pack pendant un an et paie 16 frs de frais fixes pour chaque nouvelle commande. Trouvez le nombre de commandes par an ainsi que le nombre de packs de bière que devrait passer Boissons Store.

10 [Formule de Wilson] Un fournisseur de pièces automobiles vend des batteries de marque Battery Man aux concessionnaires automobiles et aux mécaniciens automobiles. La demande annuelle est d'environ 1 200 batteries. Le fournisseur paie 25 frs pour chaque batterie et estime le coût de détention annuel à 30% de la valeur de la batterie. Il en coûte environ 20 frs pour passer une commande (frais de gestion et de bureau). Le fournisseur commande actuellement 100 batteries par mois.

(a) Déterminez les coûts annuels de commande et de stockage pour la quantité de commande actuelle.

(b) Déterminez la quantité économique de commande ainsi que le nombre annuel de commandes.

(c) Déterminer sur la base d'une année commerciale de 360 jours le nombre de jours entre chaque commande.

(d) Déterminez les coûts annuels de commande et de stockage pour la quantité économique de commande.

11 [Formule de Wilson] Un commerce vend 100 machines à laver par année. Pour chaque commande, le coût se compose de 40 frs de frais administratifs et de 16 frs par machine. Le stockage d'une machine pendant une année revient à 20 frs. Combien de commandes ce magasin devra-t-il passer par année et quelle taille devraient avoir ces commandes de manière à minimiser ses frais d'inventaire ?

12 [Formule de Wilson] Déterminer le nombre x de productions annuelles ainsi que la quantité économique de commande $Q_e = \dfrac{D}{x}$ qui minimise le coût total :

$$C(x) = x \cdot \left[a + b\left(\frac{D}{x}\right)\right] + \frac{SD}{2x}$$

18.2 Fonctions de deux variables

Une **fonction de deux variables** peut être vue comme une machine de calcul qui en entrée accepte d'abord un nombre x puis un nombre y et en sortie donne un résultat appelé z ou encore $f(x, y)$.

Imaginons un capital de 5 000 frs placé au taux d'intérêt composé i durant n années. La formule de l'intérêt composé permet d'écrire :

$$\begin{aligned} C_n &= C_0 \times (1+i)^n \\ &= 5\,000 \times (1+i)^n \end{aligned}$$

On voit immédiatement que le capital final acquis dépend de deux variables i et n. On peut donc l'écrire sous la forme :

$$C(i, n) = 5\,000\,(1+i)^n$$

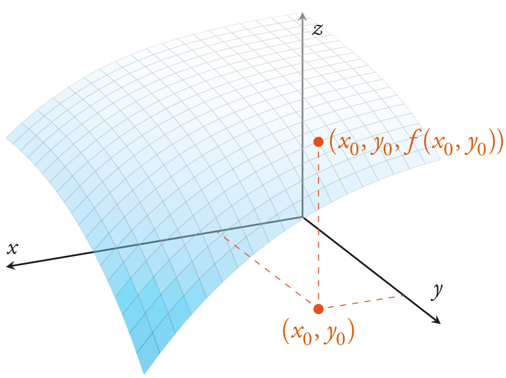
✎ La notion de fonction de deux variables peut s'étendre à trois, quatre ou plusieurs variables. Par exemple, la formule de l'intérêt composé pourrait s'écrire comme une fonction de trois variables :

$$C(P, i, n) = P(1+i)^n \quad \text{avec } P\text{, le montant déposé.}$$

18.2.1 Représentation graphique

Le graphe d'une fonction de deux variables, $z = f(x, y)$ est en général une **surface**. On se situe donc non plus dans le plan, mais dans un espace à 3 dimensions.

Ainsi, si (x_0, y_0) est dans le domaine de la fonction f, le point de coordonnées $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ se situe à la verticale du point (x_0, y_0).



La représentation graphique d'une fonction de deux variables n'est pas très simple sans l'aide d'un logiciel comme Excel ou GeoGebra par exemple. Cependant, certaines surfaces comme les plans peuvent être représentés facilement à partir de 3 points.

Dans l'espace, un plan est donné par l'équation suivante :

Équation cartésienne du plan : $ax + by + cz + d = 0$

Exemple 18.6

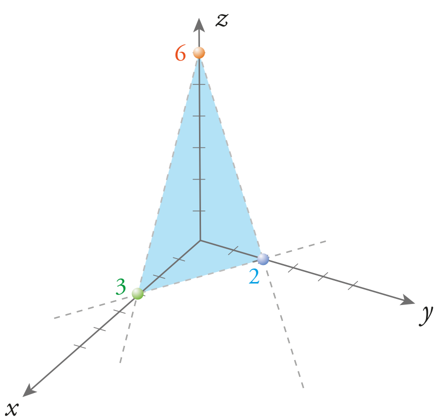
Représenter dans un système de coordonnées cartésiennes le plan d'équation

$$2x + 3y + z = 6$$

Solution

- Si $x = 0$ et $y = 0$, alors $z = 6$
- Si $x = 0$ et $z = 0$, alors $3y = 6$, donc $y = 2$
- Si $y = 0$ et $z = 0$, alors $2x = 6$, donc $x = 3$

On a donc 3 points de coordonnées : $(0,0,6)$, $(0,2,0)$ et $(3,0,0)$. Le plan passe alors par ces 3 points :



18.2.2 Dérivées partielles

La dérivée partielle d'une fonction de deux ou plusieurs variables est sa dérivée par rapport à l'une de ses variables, les autres étant traitées comme des constantes.

- On note f_x la dérivée partielle de f par rapport à x, en considérant y comme une constante.[5]
- On note f_y la dérivée partielle de f par rapport à y, en considérant x comme une constante.

5. D'autres notations sont possibles : $\frac{\partial f}{\partial x}$ ou f'_x ou $\partial_x f$ ou plus formellement, de façon similaire à la dérivée d'une seule variable : $f_x(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$.

Exemple 18.7

Calculer f_x et f_y si $z = f(x,y) = x^2 + 3xy - 5$

Solution

- $f_x = \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x + 3y$ dérivée par rapport à x
- $f_y = \dfrac{\partial z}{\partial y} = 3x$ dérivée par rapport à y

Les règles de dérivation des fonctions composées restent valables :

Exemple 18.8

Calculer f_x et f_y si $z = f(x,y) = e^{3x} + e^{xy}$

Solution

- $f_x = \dfrac{\partial z}{\partial x} = 3e^{x} + e^{xy} \cdot y$ dérivée par rapport à x
- $f_y = \dfrac{\partial z}{\partial y} = e^{xy} \cdot x$ dérivée par rapport à y

Exemple 18.9

Un artisan fabrique 2 modèles de poteaux, le modèle simple A en acier et le modèle B en acier galvanisé. Le coût total en frs pour la fabrication hebdomadaire de x poteaux du modèle A et y poteaux du modèle B est donné par :

$$C = f(x,y) = 0,05x^2 + 7x + 20y + 500$$

Déterminer les coûts marginaux f_x et f_y quand $x = 100$ et $y = 50$ et interpréter les résultats.

Solution

- $f_x = \dfrac{\partial C}{\partial x} = 0,1x + 7 \quad \rightarrow \quad f_x(100,50) = 17$

  En augmentant la production du modèle A de 100 à 101 pièces, tout en gardant la production du modèle B à 50 pièces, cela entraînera une augmentation de son coût total d'environ 17 frs.
- $f_y = \dfrac{\partial C}{\partial y} = 20 \quad \rightarrow \quad f_y(100,50) = 20$

  En augmentant la production du modèle B de 50 à 51 pièces, tout en gardant la production du modèle A à 100 pièces, cela entraînera une augmentation de son coût total d'environ 20 frs.

Dérivées partielles de second ordre

Selon la même approche que dans le cas des fonctions d'une variable, on peut définir des dérivées secondes appelées ici dérivées partielles de **second ordre**.

Fonction	Dérivée partielle	Dérivée partielle de second ordre	
$z = f(x, y)$	$f_x = \dfrac{\partial z}{\partial x}$	$f_{xx} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$	Dérivée 2 fois par rapport à x
		$f_{xy} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$	Dérivée une première fois par rapport à x puis une seconde fois par rapport à y
	$f_y = \dfrac{\partial z}{\partial y}$	$f_{yx} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$	Dérivée une première fois par rapport à y puis une seconde fois par rapport à x
		$f_{yy} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$	Dérivée 2 fois par rapport à y

✎ Dans la plupart des applications et fonctions économiques $f_{xy} = f_{yx}$.

Exemple 18.10

Calculer les dérivées partielles de premier et second ordre de la fonction :

$$f(x, y) = 2x^3 - 4x^2 y + 5y^3$$

Solution

- Dérivées de premier ordre :

$$f_x = 6x - 8xy \qquad \text{et} \qquad f_y = -4x^2 + 15y^2$$

- Dérivées de second ordre :

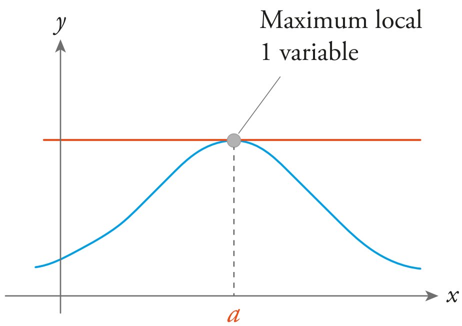
$$f_{xx} = 6 - 8y \qquad \text{et} \qquad f_{yy} = 30y$$

$$f_{xy} = -8x \qquad \text{et} \qquad f_{yx} = -8x$$

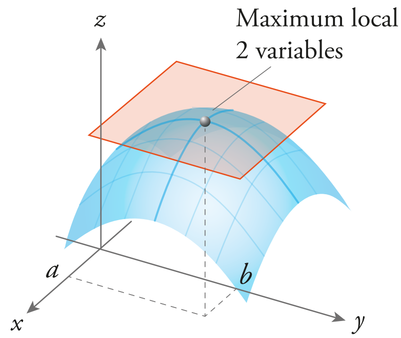
On constate bien que $f_{xy} = f_{yx}$.

18.2.3 Extremum local

Dans la section précédente on a traité des fonctions d'une variable et l'on a fait la distinction entre maximum global et maximum local. Dans le cas des fonctions de deux variables, la recherche d'un extremum global est assez complexe. On s'intéressera ici uniquement aux extrema locaux comme le montre l'illustration suivante :



$f'(a) = 0$



$f_x(a,b) = 0$ et $f_y(a,b) = 0$

La recherche d'extrema locaux, appelés aussi **extrema libres**, se fait au moyen de la méthode décrite ci-après :[6]

Soit une fonction $f(x,y)$ dont les dérivées partielles f_{xx}, f_{yy} et f_{xy} existent.

1. Rechercher les points critiques (a,b) en résolvant le système :

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases}$$

2. Calculer la valeur de $M = f_{xx}(a,b) \cdot f_{yy}(a,b) - [f_{xy}(a,b)]^2$
3. Conclure sur la nature du point critique (a,b) :

Valeur de M	$f_{xx}(a,b) < 0$	$f_{xx}(a,b) > 0$
$M > 0$	maximum local en (a,b)	minimum local en (a,b)

$M = 0$	Pas d'informations
$M < 0$	**Point selle** (ou **col**)

6. La démonstration de cette méthode dépasse le cadre de cet ouvrage.

Exemple 18.11

On donne la fonction $f(x,y) = x^2 - y^2$. Trouver son extremum local et donner la nature de celui-ci.

Solution

1. Recherche des points critiques :

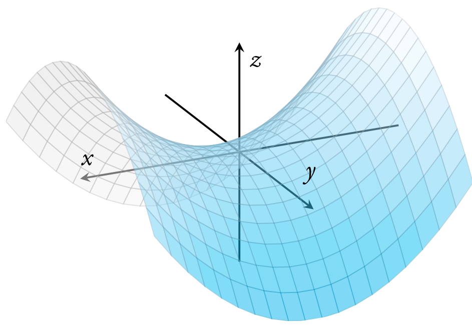
$$\begin{cases} f_x = 2x = 0 & \rightarrow \quad x = 0 \\ f_y = -2y = 0 & \rightarrow \quad y = 0 \end{cases}$$

   Unique point critique : $(0,0)$

2. $f_{xx}(0,0) = 2$, $f_{yy}(0,0) = -2$ et $f_{xy}(0,0) = 0$. Ainsi :

$$M = 2 \cdot (-2) - 0^2 = -4$$

3. M étant négatif, le point critique est un point selle ou col :



18.2.4 Maximisation sous contrainte

En économie, on est souvent amené à maximiser une fonction compte tenu de certaines contraintes : maximiser un profit compte tenu d'un budget donné, minimiser une dépense compte tenu d'un besoin à satisfaire, etc. Selon la nature du problème à résoudre, deux méthodes de résolution sont possibles.

Méthode de substitution

Quand il est possible de substituer la contrainte dans la fonction a optimiser cette méthode est préférable car elle réduit le nombre de variables en jeu.

Exemple 18.12

Trouver 2 nombres dont la somme est 28 et dont le produit est le plus grand possible.

Solution

Soit x le premier nombre et soit y le second. Formalisation du problème :

$$\text{Maximiser } P(x, y) = x \cdot y \text{ sous contrainte : } x + y = 28$$

Comme $y = 28 - x$, on peut exprimer P à l'aide d'une seule variable c'est-à-dire :

$$P(x) = x(28 - x) = -x^2 + 28x$$

L'extremum de P est donné par : $P'(x) = -2x + 28 = 0$, c'est-à-dire pour $x = 14$.

Pour connaître la nature de cet extremum, on calcule la dérivée seconde $P''(x) = -2$. La concavité étant négative en ce point, on en conclu que le maximum de la fonction est atteint pour les valeurs de $x = 14$ et $y = 28 - 14 = 14$ et vaut :

$$P(14, 14) = 14 \times 14 = 196$$

Méthode du lagrangien

Soit une fonction $f(x, y)$ dont les dérivées partielles f_{xx}, f_{yy} et f_{xy} existent. Pour trouver l'optimum de $f(x, y)$ compte tenu d'une contrainte donnée sous la forme $g(x, y) = 0$, on applique la méthode suivante :

1. Former le **lagrangien** $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \cdot g(x, y)$
2. Rechercher les valeurs (a, b, l) en résolvant le système :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x(x, y, \lambda) = 0 \\ \mathcal{L}_y(x, y, \lambda) = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda(x, y, \lambda) = 0 \end{cases}$$

3. Calculer la valeur de $M = \det \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{\lambda\lambda} & \mathcal{L}_{x\lambda} & \mathcal{L}_{y\lambda} \\ \mathcal{L}_{x\lambda} & \mathcal{L}_{xx} & \mathcal{L}_{xy} \\ \mathcal{L}_{y\lambda} & \mathcal{L}_{xy} & \mathcal{L}_{yy} \end{pmatrix}$ avec les valeurs (a, b, l)
4. Conclure sur la nature de l'extremum :
   - Si $M > 0$, $f(a, b)$ est un maximum sous contrainte de f.
   - Si $M < 0$, $f(a, b)$ est un minimum sous contrainte de f.
   - Si $M = 0$, on ne peut rien dire.

Exemple 18.13

Trouver les extrema de la fonction $f(x, y) = 3x+2y$ sous contrainte $x^2-xy+2y^2 = 4$.

Solution

La contrainte s'écrit : $g(x, y) = x^2 - xy + 2y^2 - 4 = 0$

1. Formation du lagrangien :

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(x, y, \lambda) &= 3x + 2y + \lambda(x^2 - xy + 2y^2 - 4)\\ &= 3x + 2y + \lambda x^2 - \lambda xy + 2\lambda y^2 - 4\lambda\end{aligned}$$

2. Résolution du système :

$$\begin{cases}\mathscr{L}_x = 3 + 2\lambda x - \lambda y = 0\\ \mathscr{L}_y = 2 - \lambda x + 4\lambda y = 0\\ \mathscr{L}_\lambda = x^2 - xy + 2y^2 - 4 = 0\end{cases}$$

On commence par isoler λ dans les deux premières équations, puis par substitutions successives, on obtient :

$$(a, b, l) = (-2, 1, 1) \quad \text{ou} \quad (2, 1, -1)$$

3. Les dérivées partielles d'ordre 2 donnent :

$$\begin{array}{lll}\mathscr{L}_{\lambda\lambda} = 0 & \mathscr{L}_{x\lambda} = \mathscr{L}_{\lambda x} = 2x - y & \mathscr{L}_{y\lambda} = \mathscr{L}_{\lambda y} = -x + 4y\\ \mathscr{L}_{xx} = 2\lambda & \mathscr{L}_{xy} = \mathscr{L}_{yx} = -\lambda & \mathscr{L}_{yy} = 4\lambda\end{array}$$

$$M = \det\begin{pmatrix}0 & 2x - y & -x + 4y\\ 2x - y & 2\lambda & -\lambda\\ -x + 4y & -\lambda & 4\lambda\end{pmatrix}$$

4. Nature de l'extremum :
   - Pour $(a, b, l) = (-2, 1, 1)$:

$$M = \det\begin{pmatrix}0 & -1 & -2\\ -1 & 2 & -1\\ -2 & -1 & 4\end{pmatrix} = -16 \quad (< 0)$$

     Donc $f(-2, 1) = 3(-2) + 2(-1) = -8$ est un minimum sous contrainte de f.
   - Pour $(a, b, l) = (2, 1, -1)$:

$$M = \det\begin{pmatrix}0 & 3 & 2\\ 3 & -2 & 1\\ 2 & 1 & -4\end{pmatrix} = 56 \quad (> 0)$$

     Donc $f(2, 1) = 3 \times 2 + 2 \times 1 = 8$ est un maximum sous contrainte de f.

Exercices d'application de la section 18.2

13 [Fonction de 2 variables] On donne $f(x,y) = x^2 - 3xy + y^3$. Calculer :

(a) $f(2,-3)$ **(b)** $f(-3,2)$ **(c)** $f(4,1)$

14 [Fonction de 2 variables] On donne $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{5x+9y}}{\log(y)}$. Calculer, sans calculatrice :

(a) $f(2,10)$ **(b)** $f(0,100)$ **(c)** $f(100,1)$

15 [Fonction de 2 variables] Écrire la valeur actuelle d'une rente unitaire certaine postnumerando comme une fonction de deux variables.

16 [Fonction de 3 variables] Écrire la valeur finale d'une rente certaine praenumerando comme une fonction de trois variables.

17 [Plan] Tracer, dans le premier **octant**[7], le plan correspondant à l'équation :

$$3x + 2y + 3z = 18$$

18 [Graphe] Décrire chaque graphe et donner les points d'intersection avec les axes.

(a) $3x + 2y - z = 6$ **(b)** $x + y = 5$ **(c)** $z = 9$

19 [Dérivées partielles] Calculer f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yx} et f_{yy} des fonctions suivantes :

(a) $f(x,y) = 4y^3 - 5xy + 6$ **(b)** $f(x,y) = e^{3x+4y}$

20 [Dérivées partielles] Calculer f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yx} et f_{yy} des fonctions suivantes :

(a) $f(x,y) = (3x+y)^2 - 5x^2y^2$

(b) $f(x,y) = x^2 \cdot e^{3xy}$

(c) $f(x_1,x_2) = x_1 \cdot \ln(x_1x_2)$

(d) $f(x,y) = \dfrac{3y}{x+y}$

21 [Coût marginal] Une entreprise produit 2 composants électroniques A et B. Ses coûts pour produire conjointement x unités du composant A et y unités du composant B sont donnés par :

$$C(x,y) = 400x + 150y + 3000$$

(a) Que signifie les 3000 dans cette formule ?

(b) Calculer et interpréter $\partial C/\partial x$ et $\partial C/\partial y$

7. Partie de l'espace dont les coordonnées (x,y,z) sont positives.

22 [Productivité marginale] Une entreprise estime son niveau de production P en fonction des unités de travail x et des unités de capital y par :

$$P(x, y) = 2000\sqrt{x^2 + y^2}$$

Si $x = 4$ et $y = 3$, calculer :

(a) la productivité marginale du travail **(b)** la productivité marginale du capital

23 [Extrema locaux] Trouver les extrema locaux des fonctions suivantes et identifier la nature de ceux-ci.

(a) $f(x, y) = y - y^2 - 6x^2 - 3x$
(b) $f(x, y) = (e^x - 1)(y^2 - 4)$
(c) $f(x, y) = x^2 - y^2 - 2x + 4y - 7$

24 [Extrema locaux] Trouver les extrema locaux des fonctions suivantes et identifier la nature de ceux-ci.

(a) $f(x, y) = y^2 + 3xy + x^2 + x + 3$
(b) $P(x_1, x_2) = x_1 x_2 - \dfrac{1}{x_1} - \dfrac{1}{x_2}$
(c) $g(x, y) = 2x^2 + \ln(xy) - xy - 4x$
(d) $z = x^3 - 4x + 2y$
(e) $f(x, y) = 6x^2 + 2xy + 2y$

25 [Extrema sous contrainte] Trouver les extrema sous contrainte des fonctions suivantes et identifier la nature de ceux-ci.

(a) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4y + 4$ sous contrainte $x + y = 4$ [par substitution]
(b) $z = 8x + 2y$ sous contrainte $y = 3x^3 + 3$ [par substitution]
(c) $z = y^3 + 4x^2y - 4y$ sous contrainte $x^2 + y^2 = 1$ [avec le lagrangien]
(d) $f(x, y) = \dfrac{y}{x}$ sous contrainte $x^2 + y^2 = 36$ [avec le lagrangien]

26 [Extrema sous contrainte] Trouver les extrema sous contrainte des fonctions suivantes et identifier la nature de ceux-ci.

(a) $f(x, y) = x^2 - y^2$ sous contrainte $2x + 3y = 5$ [par substitution]
(b) $f(x, y) = 3x - y$ sous contrainte $y = x^2 - 5x + 6$ [par substitution]
(c) $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 4x + 4$ sous contrainte $2x - y = 1$ [avec le lagrangien]
(d) $f(x, y) = e^{-xy}$ sous contrainte $x + y = 2$ [avec le lagrangien]
(e) $z = e^{2x^2 - 3y^2}$ sous contrainte $x - y = 1$ [avec le lagrangien]

18.3 Problèmes et exercices de synthèse

27 [Logements] Vous êtes administrateur d'un immeuble de 80 logements pour étudiants. Si vous fixez le prix à 500 frs par mois, tous les logements sont occupés. Un petite analyse de marché montre que pour chaque tranche de 10 frs d'augmentation du prix de location vous perdrez un locataire et ainsi un logement sera vide.

(a) Quel prix de location devez vous fixer pour obtenir un revenu de location maximal ?

(b) Quel sera dans ces conditions le revenu maximal ?

28 [Salle de concert] Une salle de concert peut contenir 2000 personnes. Les organisateurs d'un concert savent qu'en fixant le prix du billet à 25 frs pour le spectacle des Pieds Nickelés, il y aura salle comble. Par contre, ils estiment que, pour toute augmentation de 1 fr du prix du billet, il y aura une diminution des ventes de 50 billets.

(a) À quel prix les organisateurs doivent vendre les billets pour que le revenu de leur vente soit maximal ?

(b) Quel sera dans ce cas le revenu maximal ?

29 [Clients] Un magasin de sport a observé que le nombre de clients N au cours de la $t^{\text{ième}}$ journée de la saison d'été, c'est-à-dire entre le premier juillet et le 30 septembre est donné par la fonction :

$$N(t) = \frac{25000t}{t^2 + 1000}$$

À quelle date ce magasin aura-t-il le plus de clients et combien de clients aura-t-il ?

30 [Modèle de Gompertz] La formule suivante établie par Gompertz (mathématicien britannique 1779-1865) peut être utilisée pour modéliser la croissance d'une population :

$$N(t) = \beta \cdot e^{-\alpha \cdot e^{-kt}}$$

Déterminer le point de ralentissement de la croissance de cette fonction.

31 [Désherbant] Une entreprise détient le brevet de fabrication d'un nouveau désherbant industriel. Le coût total de fabrication d'une quantité q de ce désherbant (exprimé en tonnes) est donné par :

$$C(q) = q^3 - 5q^2 + 400q + 50000 \qquad \text{avec } q \in [10, 120]$$

La fonction de demande de ce produit est donnée par $q = 320 - 0,05p$, où p est le prix en francs d'une tonne de ce désherbant.

(a) Exprimer la recette $R(q)$ réalisée par cette entreprise lorsqu'elle fabrique et vend q tonnes de ce désherbant.

(b) Exprimer la fonction de bénéfice réalisé sur la vente de ce désherbant.

(c) Quelle quantité faut-il produire et vendre pour que le bénéfice soit maximal.

32 [Articles de luxe] Une entreprise fabrique des articles de luxe. Une étude a montré que le coût total de la production, noté $C(q)$, exprimé en frs, varie en fonction du nombre q d'articles fabriqués selon la relation :

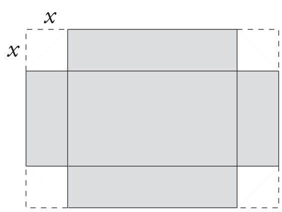
$$C(q) = 0,002q^3 - 90 \cdot q \cdot \ln(0,01q) + 100q \qquad \text{avec } q \geq 1$$

(a) Calculer le coût moyen de 100 articles.

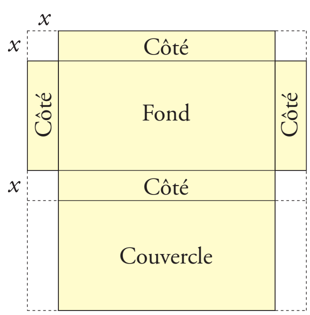
(b) Calculer le coût marginal du 151ème article de deux manières

(c) Déterminer la valeur de q pour laquelle le coût moyen est minimal.

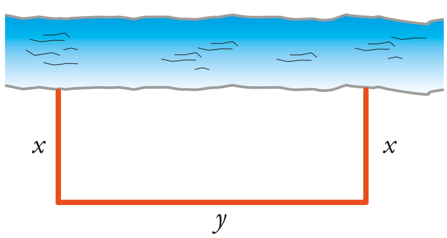
33 [Volume maximum] On construit une boîte rectangulaire en découpant quatre carrés aux coins d'une feuille $A4$. Déterminer la hauteur de x pour que le volume de la boîte soit maximal.



34 [Volume maximum] On souhaite construire une boîte rectangulaire fermée en utilisant une feuille de carton carrée de 20 cm de côté en découpant les parties en traitillés. Trouver les dimensions de la boîte de volume maximal que l'on peut ainsi construire.

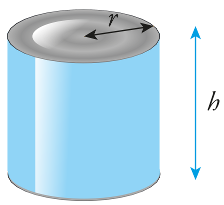


35 [Aire maximale] On souhaite délimiter une plage privée au bord d'une rivière par une cloture rectangulaire coûtant 30 frs le mètre. Ayant un budget de 64 200 frs pour ce projet, trouver les dimensions du champ d'aire maximale que l'on peut construire avec cette somme.

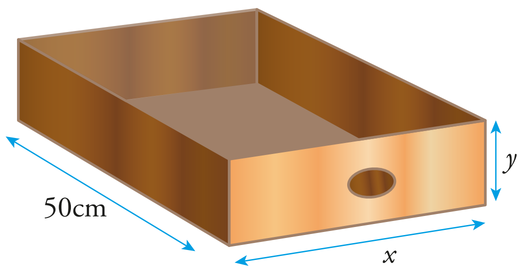


36 [Volume maximum] Une cabine de douche a la forme d'un parallélépipède rectangle avec un sol à base carrée. Les 4 parois coûtent 100 frs le mètre carré et le sol 400 frs le mètre carré. Sachant que le coût total des matériaux est de 1200 frs, quelles sont les dimensions de la cabine permettant de maximiser le volume ?

37 [Surface minimale] Déterminer les dimensions optimales (rayon et hauteur) d'une boite de conserve cylindrique dont le volume est de 1000 cm^3, afin d'utiliser le moins de matière possible.



38 [Coût minimal] Un ébéniste souhaite fabriquer le tiroir ci-après, de 50 cm de long et d'un volume interne de 10 dm^3. Si le devant du tiroir, construit en bois noble coûte 20 cts par cm^2 et que le reste du tiroir coûte 10 cts par cm^2, quelles doivent être les dimensions du tiroir pour que le coût de fabrication soit minimal ?



39 [Modèles de croissance] On donne deux modèles économiques qui dépendent du temps (t). Déterminer la valeur de t qui maximise chacun de ces modèles, pour $\alpha > 0$ et $\beta > 0$.

(a) $f(t) = \alpha \cdot \ln(t) - \beta \cdot t$ **(b)** $f(t) = \alpha \cdot t \cdot e^{-\beta t}$

40 [Modèles de croissance] On donne deux modèles économiques qui dépendent du temps (t). Déterminer la valeur de t qui maximise chacun de ces modèles, pour $\alpha > 0$ et $\beta > 0$.

(a) $f(t) = \alpha^{\sqrt{t}} \cdot e^{-\beta t}$ **(b)** $f(t) = \dfrac{\alpha t}{\beta^2 t^2 + 1}$

41 [Cobb-Douglas] En investissant x unités de travail et y unités de capital, une fabrique horlogère produit $P(x, y) = 50x^{0,4}y^{0,6}$ montres. Trouver le maximum de montres pouvant être produites avec un budget de 20 000 frs, si le travail coûte 100 frs l'unité et le capital 200 frs l'unité.

42 [Utilité maximale] Un consommateur disposant d'un budget de 120 frs souhaite investir tout son revenu dans deux biens X et Y :

Bien	X	Y
Prix	$P_x = 3$	$P_y = 2$
Quantité	x	y

(a) Quel panier, c'est-à-dire quelle quantité de chaque bien, va-t-il choisir s'il souhaite maximiser son utilité $U(x, y) = x^{0,2}y^{0,8}$ tout en respectant sa contrainte de revenu.

(b) Montrer que le **taux marginal de substitution** (TMS) à l'optimum est égal au rapport des prix :

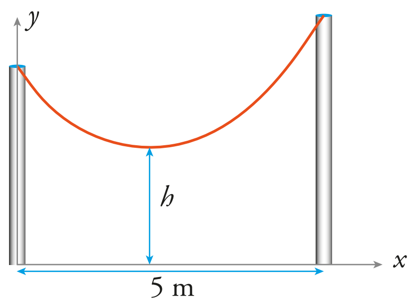
$$\text{TMS} = \frac{U_x(x, y)}{U_y(x, y)} = \frac{P_x}{P_y}$$

43 [Hauteur maximale] Une corde est suspendue aux extrémités de deux poteaux distants de 5 m. La fonction décrite par la corde est donnée par :

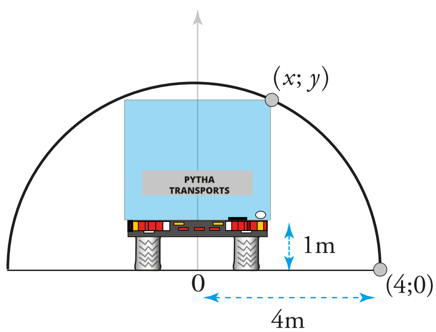
$$f(x) = 2 \cdot \cosh\left(\frac{x-2}{2}\right) + 2 \qquad \text{avec} \qquad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

(a) À quelle hauteur la corde est-elle attachée au sommet du premier, respectivement du second poteau ?

(b) À quelle hauteur minimale h la corde pend-elle au-dessus du sol ?



44 [Dimensions maximales] Un camion de chantier doit transporter de la terre dans un tunnel dont l'arche a une forme semi-circulaire de 4 m de rayon. Quelles sont les dimensions idéales de la benne de ce camion afin qu'il puisse transporter le plus de terre possible ?

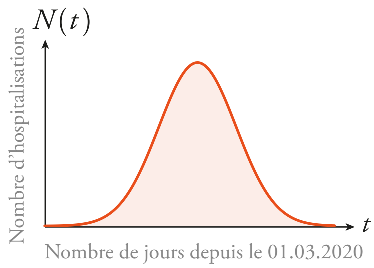


45 [Coronavirus] Dans un pays, le nombre d'hospitalisations journalières N dues au coronavirus a été modélisé par la fonction :

$$N(t) = 1\,500 \times e^{-0{,}005(t-60)^2}$$

(a) À quelle date a eu lieu le pic de l'épidémie ?

(b) À quelle date, le taux de croissance du nombre d'hospitalisations a été le plus élevé ?



46 [Médicament] Un laboratoire pharmaceutique a élaboré un nouveau médicament destiné à améliorer l'effort sportif. Une étude pharmacocinétique auprès d'une centaine de patients a montré que l'effet E du médicament (mesuré sur une échelle de 1 à 6) pouvait être représenté par un modèle du type :

$$E(t) = a^{(t^b)} \cdot e^{c \cdot t}$$

où t représente le temps écoulé en minutes depuis la prise du médicament. Sur la base de cette étude, les paramètres suivants ont été calculés :

$$a = 1{,}4062341223 \qquad b = 0{,}675680923 \qquad c = -0{,}0610658192$$

Compléter la notice d'utilisation : «*Prise du médicament : … minutes avant l'effort.*»

47 [Tendance linéaire] On dispose de n observations $(x_1; y_1); (x_2; y_2); \cdots; (x_n; y_n)$. On souhaite déterminer la droite $y = mx$ passant le plus près possible de ces observations au sens des moindres carrés. On cherche donc la valeur de m qui minimise l'expression :

$$S(m) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - m \cdot x_i)^2$$

(a) Déterminer m en calculant $S'(m) = 0$

(b) Déterminer l'équation de la droite $y = mx$ pour représenter la tendance du résultat d'une société au cours des 6 dernières années (en milliers de francs).

Année (x)	1	2	3	4	5	6
Résultat ($R(x)$)	200	200	400	600	800	1000

(c) Représenter graphiquement les différents résultats ainsi que la courbe de tendance.

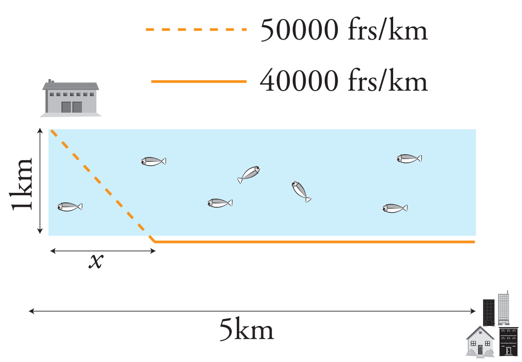
48 [Indice d'aversion absolue] En économie, l'**indice d'aversion absolue** au risque se définit comme suit :

$$I = -\frac{U''(R)}{U'(R)}$$

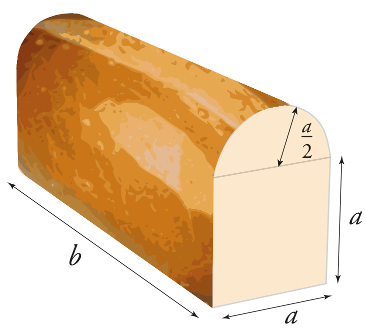
où R représente la richesse et U la fonction d'utilité espérée de la richesse. Déterminer l'indice d'aversion absolue au risque pour une valeur de $\beta > 0$ si :

(a) $U(R) = -e^{-\beta \cdot R}$ **(b)** $U(R) = \beta \cdot R^{\beta}$

49 [Minimiser les coûts] Une ligne électrique doit passer en partie à travers une rivière et le long de la berge pour relier l'usine à la ville. Trouver la distance x sur le schéma afin de minimiser la dépense globale, si l'on sait que la ligne coûte 50 000 frs/km pour traverser la rivière et 40 000 frs/km pour longer la berge. Quelle est alors la dépense globale ?



50 [Pains] Un artisan souhaite proposer des pains d'un volume de 4 dm^3. Comme ses clients aiment la mie moelleuse, il souhaite fabriquer des pains avec un minimum de croûte. Déterminer dans ce cas les dimensions qu'il faut donner au pain.



51 [Bière] Nicolas, grand amateur de bière fraîche boit toujours dans des verres dont le volume total est exactement d'un litre et dont la forme est parfaitement cylindrique. Déterminer les dimensions (hauteur et rayon) du verre qui permettent à la bière de garder sa fraîcheur le plus longtemps possible. On supposera pour cela que la perte de fraîcheur est proportionnelle à la surface totale de la bière, c'est-à-dire la somme de la surface en contact avec le verre et de la surface exposée à l'air. On négligera ici l'épaisseur du verre.

52 [Maximisation du profit] Soit une entreprise dont la fonction de coût total d'un produit est la suivante et dont on suppose que le prix du produit sur le marché est de 22 frs.

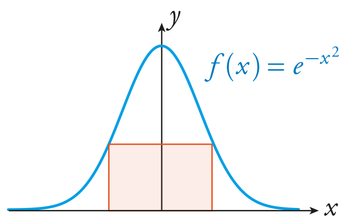
Quantité	1	2	3	4	5	6	7
Coût total de production	14	20	30	44	62	84	110
Coût moyen							
Coût marginal							
Recette totale							
Recette marginale							
Profit							

(a) Compléter le tableau ci-dessus.

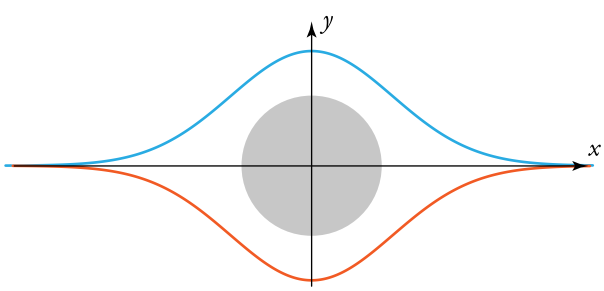
(b) Quel est le prix minimum auquel l'entreprise peut vendre son produit ?

(c) Quelle quantité va offrir l'entreprise si elle cherche à maximiser son profit ?

53 [Aire maximale] Déterminer les dimensions du rectangle orange que l'on peut inscrire sous la fonction suivante :



54 [Défi] Quelle est l'aire maximale du disque centré à l'origine que l'on peut inscrire entre les fonctions $f(x) = e^{-x^2}$ et $g(x) = -e^{-x^2}$?



Chapitre 19

Primitives et intégrales

Objectifs du chapitre

- savoir calculer une primitive élémentaire
- savoir intégrer une fonction par changement de variable et par partie
- savoir calculer une intégrale définie
- savoir résoudre des problèmes économiques faisant appel aux intégrales

19.1 Primitives

19.1.1 Notions et définitions

La **primitive** peut être considérée comme l'opération inverse de la dérivée. La recherche d'une primitive, appelée aussi **intégration** n'est pas toujours facile, ni toujours possible. Si ce calcul est possible, on notera alors $F(x)$ la primitive de $f(x)$.

Exemple 19.1

Chercher la primitive de la fonction $f(x) = 2x$

Solution

On se pose la question : «Quelle fonction faut-il dériver pour trouver $2x$?» Bien évidemment cette fonction est $F(x) = x^2$. Mais ce n'est pas la seule! En effet, $F(x) = x^2 + 8$ est, par exemple, également une primitive de $f(x)$.

On note $F(x) = \int f(x)\,dx$ le calcul d'une primitive de $f(x)$,

Primitive ou **intégrale indéfinie** de $f(x)$:

$$\text{Si } F'(x) = f(x) \quad \text{alors} \quad \int f(x)\,dx = F(x) + C$$

Cette écriture met en évidence :

- le symbole $\int$ introduit par Leibniz (mathématicien allemand 1646 - 1717).
- la fonction $f(x)$ à intégrer, appelée aussi l'**intégrande**.
- dx indiquant par rapport à quelle variable calculer la primitive.

Exemple 19.2

Calculer la primitive de $\int 2x\,da$

Solution

$\int 2x\,da$ doit être intégré par rapport à la variable a. Dans ce cas, $2x$ est considéré comme une constante. Ainsi :

$$\int 2x\,da = 2xa + c \qquad \text{En effet : } \frac{df}{da} = (2xa + c)' = 2x$$

19.1.2 Primitives élémentaires et propriétés

Les primitives élémentaires suivantes s'obtiennent de façon similaire aux résultats établis pour les dérivées :

1. $\int 0\,dx = c$
2. $\int a\,dx = ax + c$
3. $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad \text{si} \quad n \neq -1$
4. $\int x^{-1}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$
5. $\int e^x\,dx = e^x + c$
6. $\int e^{kx}\,dx = \frac{e^{kx}}{k} + c \quad \text{avec} \quad k \neq 0$
7. $\int a^{kx}\,dx = \frac{a^{kx}}{k\ln(a)} + c \quad \text{avec} \quad k \neq 0$
8. $\int \ln(x)\,dx = x \cdot \ln(x) - x + c$

Les propriétés des dérivées sont applicables ici :

$$\int [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$$ Splitter en 2 intégrales

$$\int k f(x)\, dx = k \int f(x)\, dx \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}$$ Mise en évidence d'une constante

Exemple 19.3

Calculer la primitive de $\int \sqrt{x}\, dx$

Solution

Comme $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, on peut écrire en utilisant la formule numéro 3 :

$$\int \sqrt{x}\, dx = \int x^{\frac{1}{2}}\, dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + c$$

Exemple 19.4

Calculer la primitive de $\int \frac{1}{t^2}\, dt$

Solution

Comme $\frac{1}{t^2} = t^{-2}$, on obtient en utilisant la formule numéro 3 :

$$\int t^{-2}\, dt = \frac{t^{-2+1}}{-2+1} = \frac{t^{-1}}{-1} = -t^{-1} = -\frac{1}{t} + c$$

Exemple 19.5

Calculer la primitive de $\int 2v^3\, dv$

Solution

En utilisant la seconde propriété puis la formule 3, on obtient :

$$\int 2v^3\, dv = 2 \int v^3\, dv = 2\left(\frac{v^4}{4}\right) = \frac{v^4}{2} + c$$

Exemple 19.6

Calculer la primitive de $\int (3x^2 - 4x + 5)\, dx$

Solution

En utilisant conjointement les deux propriétés, on obtient :

$$\begin{aligned} \int (3x^2 - 4x + 5)\, dx &= 3\int x^2 dx - 4\int x\, dx + 5\int dx && \text{Split+mise en évidence} \\ &= 3\left(\frac{x^3}{3}\right) - 4\left(\frac{x^2}{2}\right) + 5x && \text{Formule 3} \\ &= x^3 - 2x^2 + 5x + c \end{aligned}$$

Exemple 19.7

Calculer la primitive de $\int \left(-\frac{10}{x} + x^2\right) dx$

Solution

En utilisant conjointement les deux propriétés, on obtient :

$$\begin{aligned} \int \left(-\frac{10}{x} + x^2\right) dx &= \int \frac{-10}{x}\, dx + \int x^2\, dx && \text{Splitter l'intégrale} \\ &= -10\int \frac{1}{x}\, dx + \int x^2\, dx && \text{Mise en évidence} \\ &= -10 \ln|x| + \frac{x^3}{3} + c && \text{Primitives élémentaires} \end{aligned}$$

Exemple 19.8

Calculer la primitive de $\int 2^{-5x}\, dx$

Solution

En utilisant la formule 6, on obtient :

$$\int 2^{-5x}\, dx = \frac{2^{-5x}}{-5\ln(2)} = -\frac{2^{-5x}}{5\ln(2)} + c$$

19.1.3 Méthodes d'intégration

Pour des expressions plus complexes, il n'est pas toujours possible de calculer directement la primitive. Il faut alors essayer avec l'une ou l'autre des méthodes décrites ci-après :

Intégration par parties

La méthode d'**intégration par parties** permet de transformer l'intégrale d'un produit de fonctions en d'autres intégrales, dans un but de simplification du calcul. Dans l'intégrale à calculer on considère une des deux fonctions comme étant une dérivée v' et l'autre comme une primitive u. Le choix des fonctions u et v' est arbitraire, mais requiert cependant de la pratique et de l'intuition. La formule de l'intégration par partie repose sur le calcul suivant :

$$(uv)' = u'v + uv' \qquad \text{Dérivée d'un produit de fonctions}$$

$$uv' = (uv)' - u'v \qquad \text{Isoler uv'}$$

$$\int uv' = \int (uv)' - \int u'v \qquad \text{Intégrer chaque membre}$$

La méthode de calcul s'établit alors comme suit :

$$\int uv' = uv - \int u'v$$

Exemple 19.9

Calculer la primitive de $\int x\, e^x\, dx$

Solution

Dans cette méthode, il y a toujours un calcul de dérivée ainsi que deux primitives à calculer. Le choix de u et v' est donc primordial afin de ne pas rendre le problème encore plus complexe. On définit ici $u = x$ et $v' = e^x$, puis on pose les éléments du calcul de la façon pratique suivante :

$$u = x \quad \rightarrow \quad u' = 1 \qquad \text{On dérive } u$$

$$v' = e^x \quad \rightarrow \quad v = e^x \qquad \text{On intègre } v'$$

Ainsi :

$$\int x\, e^x\, dx = x \cdot e^x - \int 1 \cdot e^x\, dx$$

Comme $\int 1 \cdot e^x\, dx = e^x$, on peut écrire finalement :

$$\int x\, e^x\, dx = x \cdot e^x - e^x = e^x(x-1) + c$$

Exemple 19.10

Calculer la primitive de $\int \ln(x)\,dx$

Solution

Ici, l'intégration par parties est assez subtile. Il faut remarquer que $\int \ln(x)\,dx$ peut s'écrire :

$$\int \ln(x) \cdot 1\,dx$$

Il faut alors poser :

$$\begin{array}{rcl} u = \ln(x) & \rightarrow & u' = \dfrac{1}{x} \\ v' = 1 & \rightarrow & v = x \end{array}$$

Ainsi :

$$\int \ln(x) \cdot 1\,dx = \ln(x) \cdot x - \int \frac{1}{x} x\,dx$$

Or $\int \frac{1}{x} x\,dx = \int 1 \cdot dx = x$. Donc finalement :

$$\int \ln(x)\,dx = x\ln(x) - x + c$$

Intégration par changement de variable ou substitution

La méthode d'**intégration par changement de variable** ou **substitution** consiste à :

1. remplacer une expression dans l'intégrande par une nouvelle variable, par exemple $g(x) = u$
2. «dériver des deux côtés» $g'(x)\,dx = du$ (en utilisant la notation $\frac{du}{dx}$ pour u') et substituer. L'intégrande ne doit alors être composée que de valeurs en «u».
3. trouver la primitive de l'expression en «u».
4. retourner à la variable initiale en remplaçant cette fois u par $g(x)$.

Exemple 19.11

Calculer la primitive de $\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx$

Solution

1. On pose $1 + x^2 = u$

2. On dérive des deux côtés : $2x\,dx = du$
3. On substitue et on calcule la primitive :

$$\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c$$

4. On retourne à la variable initiale ainsi $\ln|u| + c$ devient $\ln(1+x^2) + c$.

Exemple 19.12

Calculer la primitive de $\int e^{3x}\,dx$

Solution

1. On peut poser par exemple $e^{3x} = u$
2. On dérive des deux côtés : $3 \cdot e^{3x}\,dx = du$

Pour pouvoir parfaitement substituer, on écrit l'intégrale sous la forme :

$$\begin{aligned}
\int e^{3x}\,dx &= \frac{1}{3}\int \overbrace{3 \cdot e^{3x}\,dx}^{du} && \text{Faire apparaitre } du \\
&= \frac{1}{3}\int du && \text{Substituer} \\
&= \frac{1}{3} \cdot u && \text{Primitive de 1} \\
&= \frac{1}{3} \cdot e^{3x} + c && \text{Retour à la variable initiale}
\end{aligned}$$

✎ On retrouve la primitive élémentaire 6 vue précédemment.

Exemple 19.13

Calculer la primitive de $\int x^2 \cdot e^{x^3}\,dx$

Solution

On pose $u = x^3$. Donc $du = 3x^2\,dx$.

$$\begin{aligned}
\int x^2 \cdot e^{x^3}\,dx &= \frac{1}{3}\int e^{x^3} \cdot 3x^2\,dx && \text{Réarranger l'intégrale} \\
&= \frac{1}{3}\int e^u\,du = \frac{1}{3}e^u = \frac{1}{3}e^{x^3} + c && \text{Substituer et résoudre}
\end{aligned}$$

Exercices d'application de la section 19.1

1 [Primitives élémentaires] Calculer les primitives élémentaires suivantes :

(a) $\int 3x^3 + 2x^2 - 5\,dx$ (c) $\int \frac{2}{3x^3}\,dx$ (e) $\int e^{8x}\,dx$

(b) $\int x^{3/2}\,dx$ (d) $\int |x|\,dx$ (f) $\int \frac{2^x}{3^x}\,dx$

2 [Primitives élémentaires] Calculer les primitives élémentaires suivantes :

(a) $\int x^{-0,2}\,dx$ (d) $\int \ln(4u)\,dx$ (g) $\int \frac{x^2-4}{x+2}\,dx$

(b) $\int \frac{2\sqrt{x}}{x}\,dx$ (e) $\int (x+h)^2\,dh$ (h) $\int \frac{(t-1)(t-2)}{t}\,dt$

(c) $\int \frac{2}{3x^3}\,dx$ (f) $\int |x^2-1|\,dx$ (i) $\int 5\cdot 5^x\,dx$

3 [Intégration par partie] Calculer les primitives suivantes par partie :

(a) $\int x\cdot e^{-x}\,dx$ (c) $\int \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx$ (e) $\int (x-5)e^{3x}\,dx$

(b) $\int \ln(4x)\,dx$ (d) $\int \frac{x+2}{e^x}\,dx$ (f) $\int x^2\cdot e^{-2x}\,dx$

4 [Intégration par partie] Calculer les primitives suivantes par partie :

(a) $\int x\cdot\ln(x)\,dx$ (c) $\int 2te^{2t}\,dt$ (e) $\int \ln^2(x)\,dx$

(b) $\int \frac{x}{(2x+1)^3}\,dx$ (d) $\int \frac{\ln(x+1)}{2(x+1)}\,dx$ (f) $\int t^2\cdot e^{2t}\,dt$

5 [Changement de variable] Calculer les primitives suivantes par changement de variable :

(a) $\int x^3\cdot 3x^2\,dx$ (c) $\int e^{x^2}\cdot 2x\,dx$ (e) $\int \frac{15x^2+30x}{x^3+3x^2}\,dx$

(b) $\int \frac{6x+1}{3x^2+x}\,dx$ (d) $\int 2x\sqrt{x^2-5}\,dx$ (f) $\int e^{-x}\,dx$

6 [Changement de variable] Calculer les primitives suivantes par changement de variable :

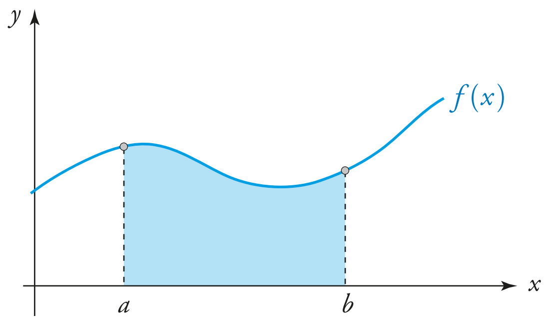
(a) $\int 4\cdot 10^{4x}\,dx$ (c) $\int t\sqrt{1+t^2}\,dt$ (e) $\int \frac{1+e^{\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\,dt$

(b) $\int \frac{3x^2-6x}{(x^3-3x^2)^2}\,dx$ (d) $\int t\cdot e^{t^2}\,dt$ (f) $\int \frac{x}{\sqrt[3]{1+x}}\,dx$

19.2 Intégrale définie

19.2.1 Notions

L'**intégrale définie** d'une fonction est la valeur de l'aire du domaine délimité par l'axe des x et la courbe représentative de la fonction.

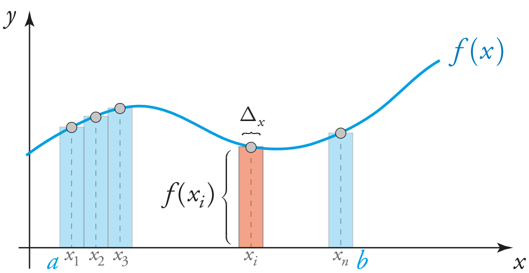


Ainsi, l'aire de la surface bleue sous la courbe $f(x)$ entre a et b est donnée par :

$$\text{Aire} = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Cette formule, appelée aussi **théorème fondamental du calcul intégral**, repose notamment sur l'idée suivante : Pour calculer l'aire de la surface sous la fonction $f(x)$, on divise l'intervalle $[a; b]$ en n parties égales de grandeur Δx. Puis, on calcule la surface des n rectangles ainsi formés : $f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x$

Théorème fondamental du calcul intégral
Démonstration du théorème



Il est évident que si l'on divise l'intervalle $[a; b]$ en 2, 3 ou 4 parties uniquement, le calcul de l'aire n'est pas très précis, mais en choisissant un nombre d'intervalles très grands ($n \to \infty$), on aura une infinité de rectangles ayant chacun une base Δx très petite et dont la hauteur sera de $f(x)$.

Plus formellement, si une fonction f est définie sur un intervalle $[a; b]$, on appelle intégrale définie entre a et b l'expression :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

avec $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ et x_i la valeur centrale de l'intervalle i.

Exemple 19.14

Calculer $\displaystyle\int_2^6 x^2\,dx$

(a) De manière exacte

(b) En utilisant une approximation avec deux intervalles (ou rectangles).

Solution

(a) On commence par calculer la primitive de $f(x)$:

$$F(x) = \int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}$$

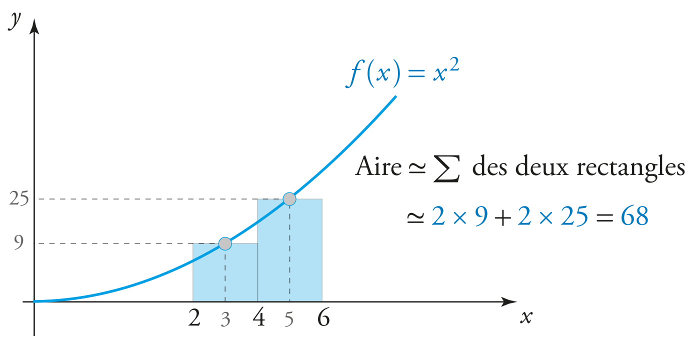
On évalue ensuite cette fonction pour les deux bornes d'intégration, 2 et 6 :

$$F(6) = \frac{6^3}{3} = 72 \qquad \text{et} \qquad F(2) = \frac{2^3}{3} = \frac{8}{3}$$

Donc l'aire est définie par :

$$F(6) - F(2) = 72 - \frac{8}{3} = \frac{208}{3} \simeq 69{,}33$$

(b) Avec deux intervalles ($n = 2$) on a : $\Delta x = \frac{6-2}{2} = 2$ et le graphique suivant :

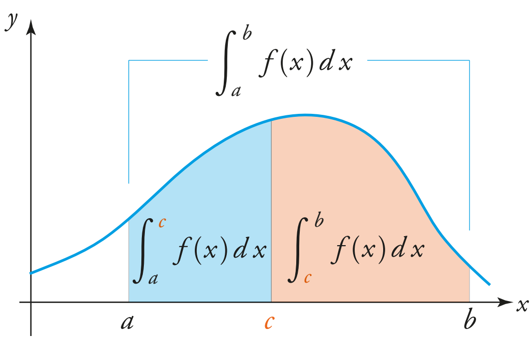


19.2.2 Propriétés

L'intégrale définie dispose, en plus des propriétés sur les intégrales indéfinies, des propriétés suivantes :

- $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$ Inversion des bornes d'intégration
- $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \quad \text{si } c \in [a;b]$ Intégrales partielles

Cette dernière propriété permet de calculer l'aire totale sous la courbe entre a et b de façon partielle :



Utilisation de la calculatrice

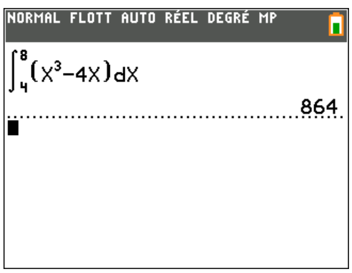
Avec la calculatrice, on peut calculer facilement la surface sous une courbe $f(x)$ donnée.

Exemple 19.15

Calculer l'intégrale suivante : $\displaystyle\int_4^8 (x^3 - 4x)\,dx$.

Solution

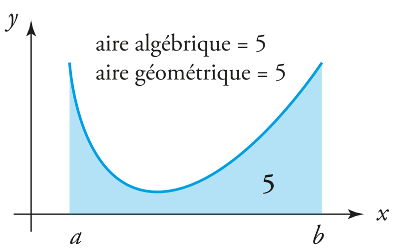
1. On appuie sur la touche MATH / intégrFonct
2. On saisit l'intégrale telle quelle :

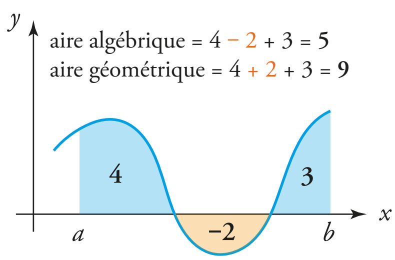


19.2.3 Calculs d'aires

Aire algébrique et géométrique

L'aire que l'on obtient avec la calculatrice est toujours l'**aire algébrique** et correspond au calcul $\int_a^b f(x)\,dx$. Pour calculer l'**aire géométrique**, il faut au préalable tracer la fonction pour déterminer la ou les intersections avec l'axe des x puis rendre positif chaque aire partielle négative.





Exemple 19.16

Calculer l'aire algébrique et géométrique sous la fonction $f(x) = x^2 - 4x + 3$ et entre les bornes 1 et 4.

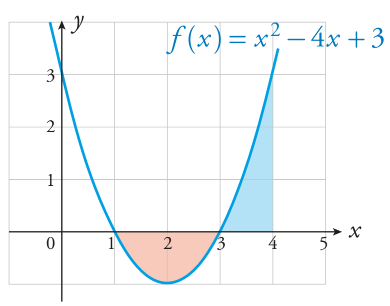
Solution

- Aire algébrique :

$$\mathscr{A} = \int_1^4 x^2 - 4x + 3\,dx = 0$$

- Aire géométrique : les racines de $f(x)$ étant 1 et 3, on calcule successivement (en inversant les bornes d'intégration entre 1 et 3) :

$$\mathscr{A} = \int_3^1 f(x)\,dx + \int_3^4 f(x)\,dx = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$

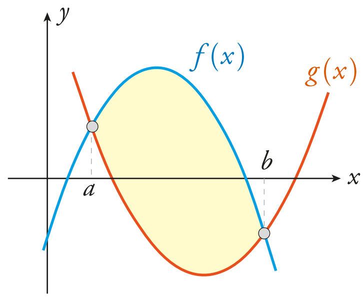


Aire entre deux courbes

L'aire algébrique ou géométrique délimitée par deux fonctions est égale à :

Aire algébrique ou géométrique : $\mathscr{A} = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$

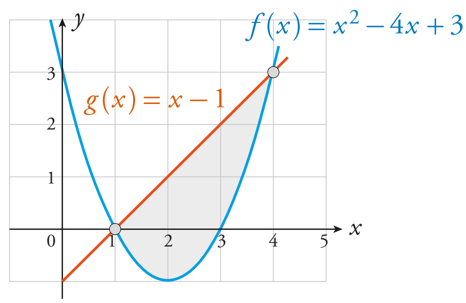
avec $f(x) \geq g(x)$ dans l'intervalle $[a; b]$



Exemple 19.17

Trouver l'aire délimitée par les fonctions $g(x) = x - 1$ et $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

Solution



On détermine les points d'intersection des deux fonctions $(1; 0)$ et $(4; 3)$ en résolvant $f(x) = g(x)$ puis on calcule :

$$\begin{aligned}
\mathscr{A} &= \int_1^4 [g(x) - f(x)]\,dx \\
&= \int_1^4 [x - 1 - (x^2 - 4x + 3)]\,dx \\
&= \int_1^4 [-x^2 + 5x - 4]\,dx = 4,5
\end{aligned}$$

Aire finie et infinie

Lorsque les bornes d'intégration sont infinies ou lorsque la fonction comporte des discontinuités dans l'intervalle d'intégration, on fait usage du calcul des limites. On parle alors d'**intégrale impropre**. Dans certains cas, l'aire peut être infinie. On dit alors que l'intégrale **diverge**. Ce type d'intégrale est fréquemment utilisée en probabilités.

Exemple 19.18

Calculer les intégrales $\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx$ et $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$

Solution

- $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|$. Donc : $\ln|\infty| - \ln|1| = \infty - 0 = \infty$ L'intégrale diverge
- $\int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}$. Donc : $-\frac{1}{\infty} - \left[-\frac{1}{1}\right] = 0 + 1 = 1$

Exemple 19.19

Une variable aléatoire X a une fonction de densité définie comme suit :

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(a) Montrer que f est une fonction de densité de probabilité.

(b) Calculer $P(X > 1)$

Solution

(a) La fonction f est une fonction de densité de probabilité si $\int_0^{\infty} f(x)\,dx = 1$.

$$F(x) = \int 2e^{-2x}\,dx = -e^{-2x}$$

$$\begin{aligned} F(\infty) - F(0) &= -e^{-2\cdot\infty} - [-e^{-2\cdot 0}] \\ &= 0 - (-1) = 1 \end{aligned}$$

f est une fonction de densité

(b) $P(X > 1) = \int_1^{\infty} f(x)\,dx$

$$\begin{aligned} F(\infty) - F(1) &= -e^{-2\cdot\infty} - [-e^{-2\cdot 1}] \\ &= 0 - (-e^{-2}) \\ &= 1/e^2 \simeq 0,135 \end{aligned}$$

Exercices d'application de la section 19.2

7 [Méthode des rectangles] Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^3 (7-2x)\frac{4x^2-4x+5}{8}\,dx$

(a) en utilisant une approximation avec 3 rectangles (ou intervalles)

(b) de manière exacte

8 [Méthode des rectangles] Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^3 -x^3+2x^2+2x+3\,dx$

(a) en utilisant une approximation avec 3 intervalles (ou rectangles) avec x_i la borne *inférieure* de l'intervalle i

(b) en utilisant une approximation avec 3 intervalles (ou rectangles) avec x_i la borne *supérieure* de l'intervalle i

(c) de manière exacte

9 [Intégrales définies] Calculer les intégrales suivantes sans calculatrice :

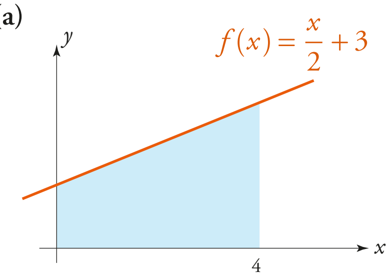
(a) $\displaystyle\int_1^3 x^2+x\,dx$ **(b)** $\displaystyle\int_4^9 2x+3\sqrt{x}\,dx$ **(c)** $\displaystyle\int_2^e x+\ln(x)\,dx$

10 [Intégrales définies] Calculer les intégrales suivantes sans calculatrice :

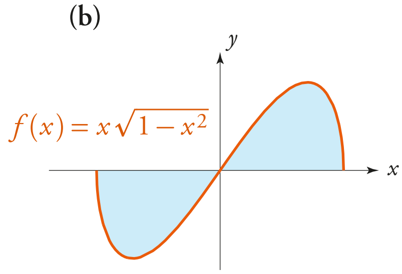
(a) $\displaystyle\int_0^2 (x^2-1)^3\,dx$ **(b)** $\displaystyle\int_{-1}^2 \frac{t^3}{t^4+1}\,dx$ **(c)** $\displaystyle\int_1^e \ln(x)-\ln^2(x)\,dx$

11 [Aire algébrique] Calculer l'aire algébrique des surfaces bleues :

(a)

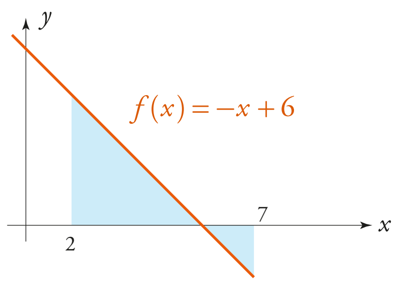


(b)

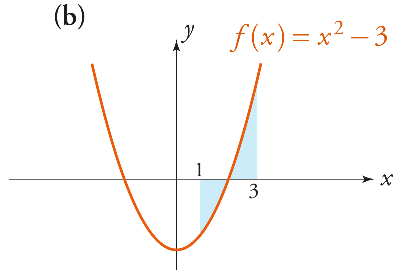


12 [Aire algébrique] Calculer l'aire algébrique des surfaces bleues (sans calculatrice) :

(a)

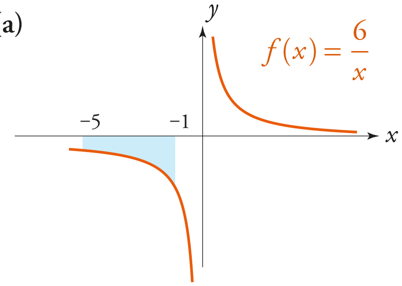


(b)

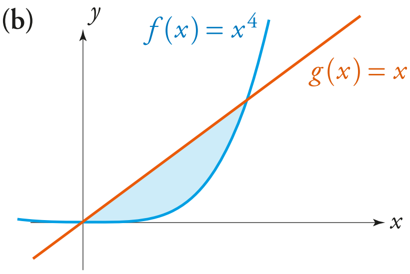


13 [Aire géométrique] Calculer l'aire géométrique des surfaces bleues :

(a)

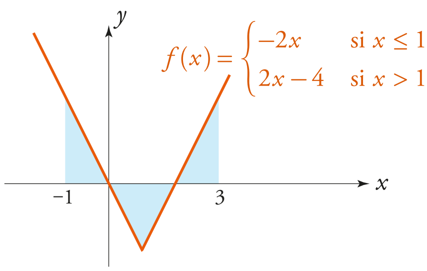


(b)

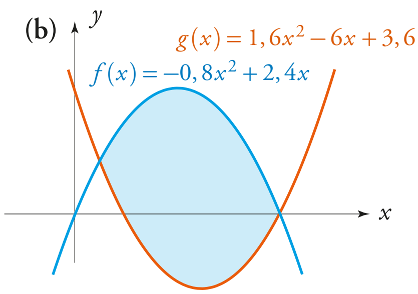


14 [Aire géométrique] Calculer l'aire géométrique des surfaces bleues (sans calculatrice) :

(a)



(b)



15 [Intégrale impropre] Calculer les intégrales impropres suivantes :

(a) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^x \, dx$ **(b)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{(1+x^2)^2} \, dx$ **(c)** $\displaystyle\int_0^{9} \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx$

16 [Intégrale impropre] Calculer les intégrales impropres suivantes :

(a) $\displaystyle\int_{-2}^{3} \frac{1}{x^3} \, dx$ **(b)** $\displaystyle\int_0^{\infty} x \cdot e^{-3x} \, dx$ **(c)** $\displaystyle\int_0^{4} \frac{3}{(x-1)^2} \, dx$

17 [Probabilités] On donne $f(x) = \begin{cases} 0,5 \cdot e^{-0,5x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

(a) Vérifier que f soit une fonction de densité de probabilité.

(b) Calculer $P(X > 1)$

18 [Probabilités] Une ampoule a une durée de vie donnée par : $f(t) = \begin{cases} k \cdot e^{-0,25t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

(a) Déterminer la constante k pour que $f(t)$ soit une fonction de densité de probabilité.

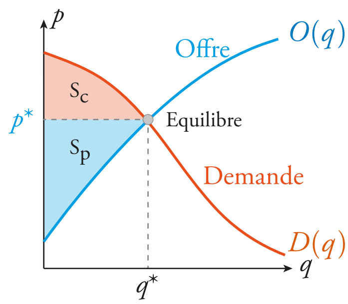
(b) Quelle est la probabilité que l'ampoule meure durant les deux premières années ?

19.3 Applications économiques

19.3.1 Surplus du producteur et du consommateur

En économie, le **surplus du producteur** représente la différence entre le prix auquel le producteur est prêt à vendre un bien et le prix obtenu (le prix d'équilibre p^*). Il est représenté par la zone en bleue sur le graphique ci-dessous.

Le **surplus du consommateur** est la différence entre ce qu'un consommateur est prêt à payer pour un bien et le montant effectivement payé (le prix d'équilibre p^*). Il est représenté par la zone en orange sur le graphique ci-dessous.



Compte tenu du calcul des aires de la section précédente on peut établir :

$$S_c = \int_0^{q^*} D(q)\,dq - p^* \cdot q^* \qquad \text{Surplus ou rente du consommateur}$$

$$S_p = p^* \cdot q^* - \int_0^{q^*} O(q)\,dq \qquad \text{Surplus ou rente du producteur}$$

Exemple 19.20

On donne la fonction d'offre $O(q) = 0,2q^2$ et de demande $D(q) = -q + 10$. Déterminer le surplus du consommateur et du producteur.

Solution

Le point d'équilibre $q^* = 5$ et $p^* = 5$ est atteint quand $D(q) = O(q)$. Ainsi :

$$S_c = \int_0^5 -q + 10\,dq \quad - 5 \cdot 5 = 12,5 \qquad \text{Surplus du consommateur}$$

$$S_p = 5 \cdot 5 \quad - \int_0^5 0,2q^2\,dq = \frac{50}{3} \qquad \text{Surplus du producteur}$$

19.3.2 Indice de Gini

L'**indice de Gini** est une mesure statistique permettant de rendre compte de l'inégalité de la répartition d'une variable dans la population comme les salaires par exemple. Le calcul de cet indice repose sur la courbe de **Lorenz** $L(x)$ ainsi que la courbe d'**équirépartition** $f(x) = x$ qui mettent en relation le pourcentage cumulé des individus x et la part cumulée des richesses y. L'indice de Gini est présenté en détail au chapitre 24.

Pour rappel, la courbe de Lorenz est une fonction croissante située sous la fonction $f(x) = x$ et dont le domaine et l'image appartiennent à l'intervalle $[0; 1]$.

L'indice de Gini se calcule en divisant l'aire comprise entre les fonctions $f(x)$ et $L(x)$ par 0,5, ce qui peut aussi s'écrire par :

$$\text{Indice de Gini} = 2 \times \int_0^1 [x - L(x)]\, dx$$

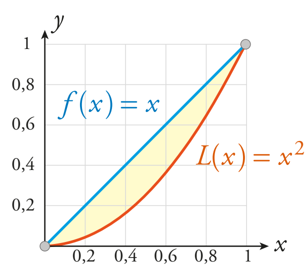
Exemple 19.21

Montrer que $L(x) = x^2$ remplit les conditions d'une courbe de Lorenz puis calculer l'indice de Gini.

Solution

La fonction $L(x)$ remplit les conditions pour une courbe de Lorenz :

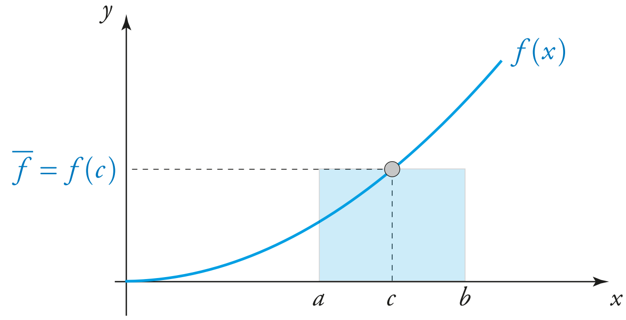
- le domaine de $L(x) \in [0; 1]$
- l'image de $L(x) \in [0; 1]$
- elle est croissante, car $L'(x) = 2x$ est positif sur $[0; 1]$
- elle est située sous $f(x)$ car sa concavité est positive sur $[0; 1]$



$$\begin{aligned}\text{Indice de Gini} &= 2 \times \int_0^1 [x - L(x)]\, dx \\ &= 2 \times \int_0^1 [x - x^2]\, dx \\ &= 1/3\end{aligned}$$

19.3.3 Valeur moyenne d'une fonction

En analyse, le **théorème de la moyenne** dit qu'il est possible de trouver un point c entre a et b de telle sorte que l'on puisse construire un rectangle de base $b-a$ et de hauteur $f(c)$ ayant la même surface que l'aire sous la courbe entre a et b.



Ainsi, l'aire sous la courbe peut s'écrire par : Aire $= \int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(c)$

En ce sens, $f(c)$ peut être considéré comme la **moyenne de la fonction** f entre a et b.

$$\overline{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Moyenne de la fonction f entre $[a;b]$

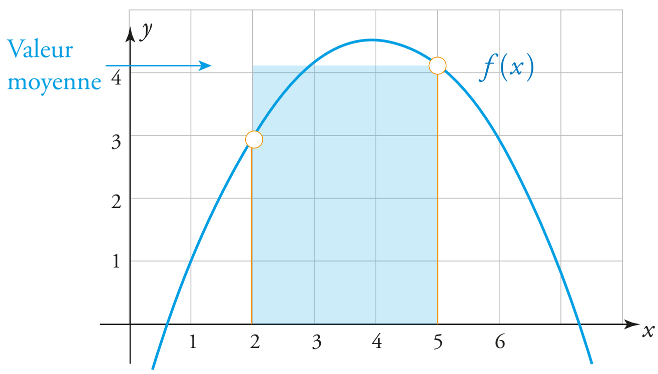
Exemple 19.22

Calculer la valeur moyenne de la fonction $f(x) = -0,4x^2 + 3,2x - 1,8$ entre 2 et 5.

Solution

La valeur moyenne est donnée par :

$$\overline{f} = \frac{1}{5-2}\int_2^5 (-0,4x^2 + 3,2x - 1,8)\,dx = \frac{12,6}{3} = 4,2$$



Exercices d'application de la section 19.3

19 [Surplus] La fonction d'offre d'un bien est donnée par $O(q) = q^2 + 90q$ et la fonction de demande par $D(q) = 3000 - 80q - q^2$

(a) Calculer le surplus du producteur

(b) Calculer le surplus du consommateur

20 [Surplus] La fonction d'offre d'un bien est donnée par $O(q) = \dfrac{12,5q^2}{1000}$.

(a) Quel est le prix d'équilibre de ce bien si le prix est atteint lorsqu'on en vend 1200 unités ?

(b) Calculer le surplus du producteur

21 [Surplus] L'offre sur le marché d'un certain produit est donné par :

$$O(q) = 3q^{5/2} + 9q^{3/2} + 50$$

L'offre et la demande sont en équilibre sur le marché pour des quantités de 4. Calculer le surplus du producteur.

22 [Surplus] Trouver le surplus du consommateur, si la fonction de demande d'un bien particulier est donnée par :

$$D(q) = \frac{24\,500}{(q+3)^3}$$

et si l'offre est la demande sont en équilibre au point $q = 2$.

23 [Surplus] Le tableau ci-après indique des quantités demandées et offertes pour différents prix. Utiliser une équation quadratique pour l'offre et pour la demande afin de déterminer le surplus du consommateur.

Offre		Demande	
Quantités	Prix	Quantités	Prix
0	0	2	170
4	120	4	120
6	150	12	40

24 [Surplus] Quelle quantité et quel prix un monopoleur doit-il fixer s'il désire que sa **recette** soit égale au quadruple du surplus du consommateur ?

(a) Si la demande est donnée par : $p(q) = 144 - 12q$

(b) Si la demande est donnée par : $p(q) = 100 - q - 1,5q^2$

25 [Courbe de Lorenz] Les fonctions suivantes sont-elles associées à une courbe de Lorenz ? (sinon pourquoi ?)

(a) $f(x) = x^2$ **(b)** $f(x) = \sqrt{x}$

26 [Courbe de Lorenz] Les fonctions suivantes sont-elles associées à une courbe de Lorenz ? (sinon pourquoi ?)

(a) $f(x) = x^3$ **(b)** $f(x) = 1,2x^2 - 0,2x$

27 [Indice de Gini] Calculer l'indice de Gini si la courbe de Lorenz est donnée par la fonction

$$f(x) = x \cdot e^{x-1}$$

28 [Indice de Gini] Les revenus de deux professions A et B se répartissent selon les courbes de Lorenz dont les fonctions sont respectivement :

$$f_A(x) = x^3 \qquad \text{et} \qquad f_B(x) = e^x + (2-e)x - 1$$

(a) Calculer l'indice de Gini pour les deux professions

(b) Laquelle des deux professions présente la répartition des revenus la plus équitable ?

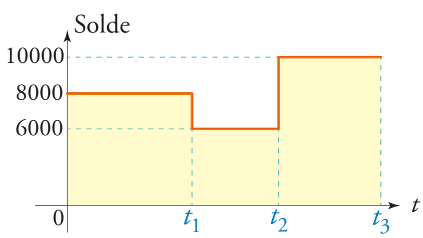
29 [Indice de Gini] Trouver la constante k pour laquelle la courbe de Lorenz $f(x) = x^k$ admette un indice de Gini valant $1/3$.

30 [Indice de Gini] Trouver la constante k pour laquelle la courbe de Lorenz $f(x) = x^k$ admette un indice de Gini valant $1/2$.

31 [Valeur moyenne] Dans un modèle de croissance, on connait la valeur moyenne $\mu = 2$ de la fonction f sur l'intervalle $[1;4]$. Calculer

$$\int_1^4 f(x)\,dx$$

32 [Valeur moyenne] Le graphique ci-après représente l'évolution dans le temps du solde d'un compte courant.



Calculer le solde moyen du compte durant l'intervalle de temps $[0; t_3]$

33 [Valeur moyenne] Une machine d'une valeur de 30 000 frs est amortie linéairement avec le temps (t en années) au moyen de la formule suivante :

$$V_t = 30\,000(1 - 0,1t)$$

Calculer la valeur moyenne de cette machine au cours des 10 première années d'exploitation $[0; 10]$

34 [Valeur moyenne] Une machine d'une valeur V_0 est amortie avec le temps (t en années) au taux i au moyen de la formule suivante :

$$V_t = V_0(1 - i)^t$$

Calculer la valeur moyenne de cette machine au cours des années $[0; t_1]$ d'exploitation.

35 [Valeur moyenne] Un capital de 15 000 est placé au taux continu de 4% durant t années selon le modèle de capitalisation :

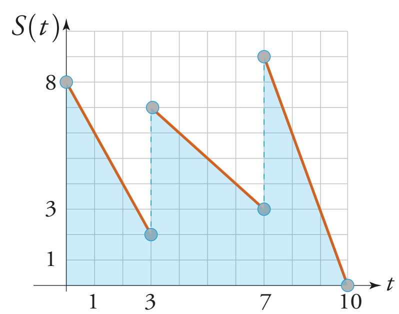
$$C_t = C_0 \cdot e^{\delta t}$$

(a) Quel sera le capital acquis au bout de 5 ans ?

(b) Combien d'années sont nécessaires pour que le capital double ?

(c) Quel est le capital moyen entre la 17ème et 18ème année ?

36 [Valeur moyenne] On donne l'évolution du stock (en milliers de pièces) dans une entreprise en fonction des mois écoulés (t) depuis le début de l'année.



(a) Déterminer le stock moyen durant la période $[0; 10]$ en faisant usage de la géométrie élémentaire.

(b) Déterminer le stock moyen durant la période $[0; 10]$ en faisant usage du calcul intégral.

19.4 Problèmes et exercices de synthèse

37 [Méthode des trapèzes] La **méthode de trapèzes** est une méthode d'intégration numérique donnant une meilleure précision que la méthode des rectangles présentée à la section 2. Dans cette méthode, on divise l'intervalle $[a; b]$ en n intervalles de même longueur $\frac{b-a}{n}$ dont les abscisses valent $a, x_1, \cdots, x_{n-1}, b$. Le calcul de l'intégrale est alors le suivant :

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{b-a}{2n}\left[f(a)+2\left(f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_{n-1})\right)+f(b)\right]$$

(a) Calculer au moyen de cette méthode : $\displaystyle\int_1^5 -0,5x^2+3,5x\,dx$ avec $n=4$

(b) Calculer cette intégrale au moyen de la méthode exacte.

38 [Méthode de Simpson] La **méthode de Simpson** est une méthode d'intégration numérique donnant une très bonne précision. Elle est la plus utilisée par les calculatrices pour tous calculs approchés d'intégrales. Dans cette méthode, on divise l'intervalle $[a; b]$ en n intervalles **pairs** de même longueur $\frac{b-a}{n}$ dont les abscisses valent $a, x_1, \cdots, x_{n-1}, b$. Le calcul de l'intégrale est alors le suivant :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{b-a}{3n}\Big[f(a) &+ 4\left(f(x_1)+f(x_3)+\cdots+f(x_{n-1})\right)\\ &+ 2\left(f(x_2)+f(x_4)+\cdots+f(x_{n-2})\right)+f(b)\Big]\end{aligned}$$

(a) Calculer au moyen de cette méthode : $\displaystyle\int_1^5 -0,5x^2+3,5x\,dx$ avec $n=4$

(b) Calculer cette intégrale au moyen de la méthode exacte.

39 [Rente continue] La valeur actuelle d'une rente continue d'un montant annuel $R(t)$, versée durant n années et calculée au taux d'intérêt δ composé continuellement est égale à :

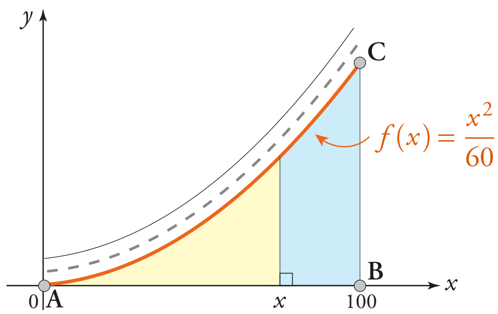
$$\text{VA} = \int_0^n R(t)\cdot e^{-\delta t}\,dt$$

(a) Trouver la formule permettant de calculer la valeur actuelle (notée $\overline{a}_{\overline{n}|}$) dans le cas de paiements annuels constants, c'est-à-dire quand $R(t)=1$.

(b) Calculer $1000\cdot\overline{a}_{\overline{\infty}|}$ au taux d'intérêt annuel $\delta = 4\%$ composé continuellement.

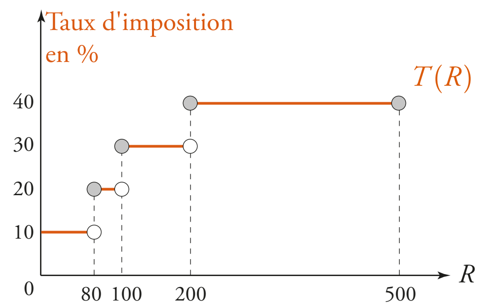
40 [Rente continue] Calculer la valeur actuelle d'une rente continue durant 10 ans au taux d'intérêt annuel de 3% composé continuellement. Le montant de la rente en fonction de la durée t est de $R(t)=10t$.

41 [Partage] Un notaire doit partager la parcelle **ABC** équitablement entre deux membres d'une même famille. Ce partage doit se faire de manière parallèle au côté **BC**, selon le modèle ci-après.



Déterminer à quelle distance x du point **A** devra se faire ce partage, étant donné que le bord de la route, jouxtant ce terrain peut être représentée par la fonction f.

42 [Taxation] Un état européen a décidé de taxer ses contribuables selon le modèle suivant : (le revenu R est exprimé en milliers d'euros)



(a) Calculer l'expression $\dfrac{1}{500}\displaystyle\int_0^{500} T(R)\,dR$

(b) Quelle est la signification du calcul précédent ?

43 [Coûts] Une usine fabrique des pièces métalliques. Le coût marginal hebdomadaire (en milliers de frs) est donné par : $C'(q) = 3q^2 - 12q + 40$, où q est le nombre de pièces, exprimé en milliers, avec $q \in [0; 10]$. Par ailleurs ses coûts fixes (exprimés en milliers de frs) se montent à 32 par semaine.

(a) Quel est le coût marginal pour 5 000 pièces fabriquées ?

(b) Exprimer le coût moyen, pour $q \in]0; 10]$

(c) Pour quelle quantité q le coût moyen de fabrication est-il minimum ?

44 [Coûts] On donne la fonction de revenu marginal suivante :

$$R'(q) = \frac{15}{(5q+3)^2}$$

(a) Déterminer la fonction de revenu total, sachant que ce revenu est nul si aucune pièce n'est vendue.

(b) Déterminer la fonction de demande correspondante.

45 [Éléments simples] Soit une fonction rationnelle $\frac{f(x)}{g(x)}$ avec $f(x)$ un polynôme de degré 1 ou 0 et $g(x)$ un polynôme de degré 2 ayant 2 racines distinctes réelles x_1 et x_2 ou une racine double x_1. Dans ce cas, la fraction rationnelle peut être **décomposée en éléments simples** comme suit :

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} \dfrac{A}{x-x_1} + \dfrac{B}{x-x_2} & \text{si } x_1 \neq x_2 \\ \dfrac{A}{x-x_1} + \dfrac{B}{(x-x_1)^2} & \text{si } x_1 = \text{racine double} \end{cases}$$

A et B s'obtiennent ensuite par identification des coefficients.

Utiliser cette méthode pour calculer la primitive suivante : $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^2+5x+6}\,dx$

46 [Éléments simples] Utiliser la méthode définie à l'exercice précédent pour calculer la primitive suivante :

$$\int \frac{2x-3}{x^2-4x+4}\,dx$$

47 [Espérance mathématique] Une variable aléatoire a une fonction de densité donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Calculer l'espérance mathématique (notée $E(x)$) de cette variable aléatoire. $E(x)$ est définie comme suit :

$$E(x) = \int_{\text{tous les } x} x \cdot f(x)\,dx$$

48 [Troisième quartile] Une variable aléatoire a une fonction de densité donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 - 0,5x & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Calculer le quartile 3 (noté Q_3), c'est-à-dire la valeur de Q_3 telle que $F(Q_3) = 0,75$.

49 [Assurance] En assurance-vie, le nombre probable de personnes vivantes entre les âges x et $x+m$ est donné par :

$$\int_x^{x+m} l(t)\,dt$$

Estimer le nombre probable d'hommes vivants entre 20 et 35 ans selon la méthode des trapèzes avec $n=3$ à partir de l'extrait de la table de mortalité suisse 2008-2013 ci-après : [1].

Age x	Probabilité de décès q_x	Probabilité de survie p_x	Ordre de survie l_x
0	0,004 128	0,995 872	100 000
5	0,000 094	0,999 906	99 536
10	0,000 079	0,999 921	99 495
15	0,000 188	0,999 812	99 443
20	0,000 560	0,999 440	99 272
25	0,000 490	0,999 510	99 005
30	0,000 531	0,999 469	98 760
35	0,000 699	0,999 301	98 470

50 [Assurance] Le nombre d'habitants l_x dans une certaine population évolue en fonction de l'âge x selon le modèle :

$$l_x = 100\sqrt{100-x}$$

En supposant que toutes les personnes en vie à 65 ans et plus reçoivent une prestation de l'État de 1 000 frs, quelle cotisation faudra-t-il faire payer aux actifs :

(a) en faisant usage du calcul intégral (actifs= $[20;65]$) ?

(b) en faisant usage d'Excel (actifs= $[20;64]$) ?

51 [Longueur d'un arc] La formule suivante permet de mesurer la **longueur d'un arc** d'une courbe plane dans l'intervalle $[a;b]$:

$$L = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$

Calculer la longueur L de l'arc de la fonction $f(x) = \frac{2}{3}x^{3/2}$ dans l'intervalle $[3;24]$.

52 [Longueur d'un arc] Calculer la longueur L de l'arc de la fonction $f(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln(x)}{2}$ dans l'intervalle $[1;e]$.

1. Source : Office fédéral de la statistique

53 [Loi de Benford] Selon la **Loi de Benford**, si on regarde les nombres qui nous entourent (poids divers, nombre de calories, etc...), ils commencent bien plus souvent par 1 que par tout autre chiffre. Selon cette loi étonnante, la probabilité qu'un nombre commence par le chiffre i (pour $i \in [1;9]$) est donnée par :

$$p_i = \int_i^{i+1} \frac{dx}{x \cdot \ln(10)}$$

(a) Résoudre cette intégrale

(b) Calculer la probabilité d'apparition du chiffre 1 au début d'un nombre issu d'une liste de prix par exemple.

54 [Défi] On appelle **puissance fonctionnelle** d'ordre n et notée $f^n(x)$, une fonction composée n fois avec elle-même, c'est-à-dire :

$$f^n(x) = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}} \qquad \text{avec } f^1(x) = f(x)$$

Si $f(x) = e^x$, que vaut l'intégrale suivante : $\int \prod_{i=1}^{n} f^i(x)\, dx$?

Chapitre 20

Équations différentielles et de récurrence

Objectifs du chapitre

- savoir calculer une équation différentielle à variables séparables
- savoir calculer une équation différentielle à linéaire du premier ordre
- savoir calculer une équation différentielle homogène de second ordre
- savoir calculer une équation de récurrence homogène du premier ordre
- savoir calculer une équation de récurrence linéaire du premier ordre
- savoir calculer une équation de récurrence homogène du second ordre
- savoir appliquer les équations différentielles et de récurrence dans des situations économiques

Les équations différentielles et de récurrence ont des applications importantes en économie. Elles permettent de résoudre des problèmes liés à la croissance de populations et aux taux d'intérêts. Les équations de récurrence et différentielles sont très semblables. Les premières se basent sur une approche à temps discret et les secondes à temps continu.

20.1 Équations différentielles

20.1.1 Introduction

Une **équation différentielle** est une équation comportant au moins une dérivée. L'**ordre** d'une équation différentielle est celui de la dérivée d'ordre le plus élevé qui y figure. Ainsi,

$$y'' + 2y' = 18$$

est une équation différentielle d'ordre 2. Résoudre une équation différentielle, c'est rechercher la ou les fonctions qui la satisfont.

La solution d'une équation différentielle est **générale** si aucune des constantes d'intégration n'est déterminée. Une équation différentielle admet une **solution particulière** si toutes les constantes d'intégration ont été déterminées, généralement à partir de **conditions initiales** ou aux **limites**.

Exemple 20.1

Résoudre l'équation différentielle $y' = 5$ avec comme condition initiale $y = 3$ quand $x = 0$. (On note généralement cette condition $y(0) = 3$)

Solution

La solution générale de cette équation différentielle est immédiate :

$$y = 5x + c$$

On détermine la constante c au moyen de la condition initiale, soit

$$3 = 5 \times 0 + c \qquad \rightarrow \qquad c = 3$$

Ainsi, la solution particulière de cette équation différentielle est :

$$y = 5x + 3$$

20.1.2 Équations à variables séparables

Une équation différentielle est dite à **variables séparables** (ou variables séparées) si on peut l'écrire sous la forme :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)}$$

Pour résoudre une telle équation, on procède comme suit :

1. On écrit cette équation sous la forme de variables séparées :

$$g(y)\,dy = f(x)\,dx$$

2. On intègre chaque membre de l'équation par rapport à sa variable respective :

$$\int g(y)\,dy = \int f(x)\,dx$$

Exemple 20.2

Résoudre, avec preuve a l'appui, l'équation différentielle $y' = x\,y$ avec $y(0) = 10$

Solution

1. On écrit cette équation sous la forme :

$$\frac{dy}{dx} = x\,y \qquad \text{Ecrire } y' = \tfrac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{y} = x\,dx \qquad \text{Séparer les variables}$$

2. On intègre les deux membres :

$$\int \frac{dy}{y} = \int x\,dx$$

$$\ln|y| = \frac{x^2}{2} + c \qquad \text{Ajout d'une seule constante}$$

$$|y| = e^{\frac{x^2}{2}+c} = e^{\frac{x^2}{2}} \cdot e^{c} \qquad \text{Mise de la constante en coefficient}$$

$$y = \pm e^{c} \cdot e^{\frac{x^2}{2}} \qquad \text{Enlever la valeur absolue}$$

$$y = c \cdot e^{\frac{x^2}{2}} \qquad \text{Simplifier : } \pm e^{c} = c$$

La solution générale est donc :

$$y = c \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$$

On détermine c au moyen de la condition initiale $y(0) = 10$:

$$10 = c \cdot e^{\frac{0^2}{2}} \quad \rightarrow \quad c = 10$$

La solution particulière est donc :

$$y = 10 \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$$

Preuve :

$$\frac{dy}{dx} = 10 \cdot x \cdot e^{x^2/2} \qquad \text{Membre de gauche}$$

$$x \cdot y = x \cdot 10 \cdot e^{x^2/2} = 10 \cdot x \cdot e^{x^2/2} \qquad = \text{Membre de droite}$$

20.1.3 Équations linéaires du premier ordre

Une **équation différentielle linéaire** du premier ordre s'écrit :

$$y' + f(x) \cdot y = g(x)$$

La solution générale de cette équation peut être établie au moyen de la méthode du **facteur intégrant** :

$$\mu(x) = e^{\int f(x)\,dx}$$

La solution est la suivante :

$$y = e^{-\int f(x)\,dx}\left(c + \int g(x) \cdot \mu(x)\,dx\right)$$

Cette formule peut être mise en application facilement comme suit :

① $\int f(x)\,dx$

② $\mu(x) = e^{①}$

③ $\int g(x) \cdot \mu(x)\,dx$

④ $y = e^{-①}\,(\;③\; + c)$

Exemple 20.3

Résoudre l'équation différentielle $y' + \dfrac{2y}{x} = 6x^3$

Solution

$f(x) = \dfrac{2}{x}$ et $g(x) = 6x^3$. On calcule alors successivement :

1. $\displaystyle\int f(x)\,dx = \int \frac{2}{x}\,dx = 2\ln|x| = \ln(x^2)$
2. $\mu(x) = e^{\ln(x^2)} = x^2$ Facteur intégrant
3. $\displaystyle\int g(x) \cdot \mu(x)\,dx = \int 6x^3 \cdot x^2\,dx = \int 6x^5\,dx = x^6$
4. $y = e^{-\ln(x^2)}(x^6 + c)$

$$= e^{\ln(x^{-2})}(x^6 + c) = \frac{1}{x^2}(x^6 + c)$$

20.1.4 Équations homogènes du second ordre

Dans cette section on abordera uniquement l'équation différentielle linéaire à coefficients constants a, b, c du type :

$$ay'' + by' + cy = 0$$

Pour trouver la solution de cette équation linéaire particulière, appelée aussi **équation homogène**, on procède d'une façon similaire à la résolution d'une équation du second degré. Au moyen des coefficients a, b et c, on détermine l'**équation caractéristique** suivante :

$$ar^2 + br + c = 0$$

- Si cette équation possède deux racines réelles r_1 et r_2, alors la solution de l'équation différentielle est donnée par :

$$y = c_1 \cdot e^{r_1 x} + c_2 \cdot e^{r_2 x}$$

  où c_1 et c_2 sont deux constantes arbitraires.
- Si l'équation caractéristique possède une seule racine réelle r, alors la solution de l'équation différentielle est donnée par :

$$y = (c_1 x + c_2) \cdot e^{rx}$$

- Si l'équation caractéristique n'a pas de racines réelles ($\Delta < 0$), la solution de l'équation différentielle est complexe. Ce cas n'est pas étudié ici.

Exemple 20.4

Résoudre l'équation différentielle suivante $y'' + 5y' + 6y = 0$

Solution

$r^2 + 5r + 6 = 0$ — Equation caractéristique

$r_1 = -2$ et $r_2 = -3$ — Racines de l'équation caractéristique

$y = c_1 \cdot e^{-2x} + c_2 \cdot e^{-3x}$ — Soltion générale

Exercices d'application de la section 20.1

1 [Ordre] Donner l'ordre des équations différentielles suivantes :

(a) $y' = 3x^{-2}$ **(b)** $x^2 + 2y'' = x$ **(c)** $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$

2 [Ordre] Donner l'ordre des équations différentielles suivantes :

(a) $\dfrac{dy}{dx} = e^{0,5x} + t$ **(b)** $x^2 + y^2 = 6$ **(c)** $y^3 + y''' = 2x$

3 [Vérification] Vérifier si les fonctions en vert sont une solution des équations différentielles données :

(a) $y = 2e^{2x}$ si $y' + y = 5e^{2x}$ **(b)** $y = 2x^2 - 3x + 1$ si $y' = 4x - 3$

4 [Vérification] Vérifier si les fonctions en vert sont une solution des équations différentielles données :

(a) $y = 3x$ si $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x}$ **(b)** $y = x + \ln(x)$ si $y'x = x + 1$

5 [Variables séparables ?] Dire si les équations différentielles suivantes sont à variables séparables :

(a) $y' = 5y - 2x$ **(b)** $xy' = x - 2y$ **(c)** $y' = 2e^{x-y}$

6 [Variables séparables ?] Dire si les équations différentielles suivantes sont à variables séparables :

(a) $y' = (2x+3)y$ **(b)** $\dfrac{y'}{x} = y^2 + 2$ **(c)** $y'(1+x^2) = y^2$

7 [Variables séparables] Trouver la solution générale des équations différentielles suivantes :

(a) $2xy' = y$ **(b)** $yy' = 3x^2 + 2$ **(c)** $dy/dx = 3 - y$

8 [Variables séparables] Trouver la solution générale des équations différentielles suivantes :

(a) $y' = (2x-1)y$ **(b)** $dy/dx = k \cdot y$ **(c)** $y' = y^2 \cdot e^x$

9 [Variables séparables] Trouver la solution particulière des équations différentielles :

(a) $y' = \dfrac{x^2}{y}$ si $y(0) = 3$ **(b)** $y' = \dfrac{y^2}{x}$ si $y(e) = 5$

10 [Variables séparables] Trouver la solution particulière des équations différentielles :

(a) $(2x+3)y = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ si $y(0) = 1$ **(b)** $x \cdot y^2 = y'$ si $y(1) = 1$

11 [Éq. linéaire] Trouver la solution générale des équations différentielles suivantes :

(a) $y' + 4y = 1$ **(b)** $y' + 2x^2 y = x^2$ **(c)** $y' + y = e^{-x}$

12 [Éq. linéaire] Trouver la solution générale des équations différentielles suivantes :

(a) $y' + 3y - x = 0$ **(b)** $y' - 2x = y$ **(c)** $xy' + y = x$

13 [Éq. linéaire] Trouver la solution particulière de l'équation différentielle suivante $y' + x^2 + y = 0$ ayant un maximum quand $x = 1$.

14 [Éq. linéaire] Trouver la solution particulière de l'équation différentielle $xy' - y = x^2$ ayant un minimum quand $x = -4$.

15 [Second ordre] Trouver la solution des équations différentielles :

(a) $y'' - 5y' = 0$ **(c)** $y'' - \pi y = 0$

(b) $y'' + 5y' - 6y = 0$ **(d)** $y'' = 6$; $y(0) = -3$ et $y(1) = 3$

16 [Second ordre] Trouver la solution des équations différentielles :

(a) $y'' + 6y = 0$ **(c)** $y'' - y' = 0$; $y(0) = 2$ et $y'(0) = -1$

(b) $6y'' + y' = 2y$ **(d)** $y'' \cdot e^x = x + 1$

17 [Second ordre] Que vaut λ, si $y = e^{\lambda x}$ est la solution de l'équation différentielle $7y'' + 6y' - y = 0$?

18 [Second ordre] Que vaut a et b dans l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$, si $y = 3e^{2x} + 2xe^{2x}$ est la solution particulière de cette équation différentielle ?

20.2 Équations de récurrence

Une **équation de récurrence** exprime une relation entre une variable dépendante y_t et une ou plusieurs variables indépendantes décalées dans le temps y_{t-1}, y_{t-2} qui changent à des intervalles de temps discrets dans le temps. L'**ordre** d'une équation de récurrence est mesuré par le plus grand nombre de périodes de retard qu'elle contient. Ainsi :

$$y_t = 2y_{t-1} + 18 \quad \text{est une équation de récurrence d'ordre 1}$$
$$y_t = y_{t-1} + 3y_{t-2} \quad \text{est une équation de récurrence d'ordre 2}$$

Résoudre une équation de récurrence c'est rechercher une expression pour y_t ne contenant aucun terme décalé. On parle alors de **solution générale**. En définissant des **conditions initiales** (y_0 dans le cas d'une équation d'ordre 1 et y_0, y_1 dans le cas d'une équation d'ordre 2), on obtient une **solution particulière**.

Exemple 20.5

Déterminer les termes y_2, y_3 et y_4 à partir des conditions initiales $y_0 = 2$ et $y_1 = 5$ de l'équation de récurrence suivante :

$$y_t = y_{t-1} + y_{t-2}$$

Solution

On calcule récursivement :

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 + y_0 = 5 + 2 = 7 \\ y_3 &= y_2 + y_1 = 7 + 5 = 12 \\ y_4 &= y_3 + y_2 = 12 + 7 = 19 \end{aligned}$$

Remarques

- Dans une équation de récurrence, les indices peuvent être décalés. Ainsi, les deux expressions suivantes sont identiques :

$$y_{t+2} = 2y_{t+1} - y_t \qquad \text{et}$$
$$y_t = 2y_{t-1} - y_{t-2}$$

- En règle générale la valeur initiale se situe en $t = 0$, mais il est possible que la première valeur soit définie pour t=1.
- Les équations de récurrence s'écrivent comme les suites soit avec des indices, comme par exemple y_t, t_n, u_n ou entre parenthèses $y(t)$, $t(n)$ ou $u(n)$, etc..

20.2.1 Équations linéaires du premier ordre

Une **équation de récurrence linéaire** du premier ordre est de la forme :

$$y_t = a \cdot y_{t-1} + b$$

dont la solution générale s'écrit :

$$y_t = \begin{cases} y_0 + b \cdot t & \text{si } a = 1 \quad \text{Progression arithmétique} \\ y_0 \cdot a^t & \text{si } b = 0 \quad \text{Progression géométrique} \\ y_0 \cdot a^t + b\left(\dfrac{a^t - 1}{a - 1}\right) & \quad \text{Progression arithmético-géométrique} \end{cases}$$

Équation linéaire du premier ordre
Comment établir la formule générale ?

Exemple 20.6

Résoudre l'équation de récurrence suivante $y_{t+3} + y_{t+2} = 8$ avec $y_0 = -5$ et vérifier les valeurs y_0, y_1 et y_2 au moyen de la formule générale et par récurrence.

Solution

Cette équation peut s'écrire sous la forme :

$$y_t + y_{t-1} = 8 \qquad \text{ou encore}$$
$$y_t = -y_{t-1} + 8$$

Avec $a = -1$, $b = 8$ et $y_0 = -5$, on obtient :

$$\begin{aligned} y_t &= (-1)^t(-5) + 8\left(\frac{(-1)^t - 1}{(-1) - 1}\right) && \text{Formule} \\ &= (-1)^t(-5) - 4\left((-1)^t - 1\right) && \text{Simplification dénominateur} \\ &= 4 - 9(-1)^t && \text{Mise en évidence et simplification} \end{aligned}$$

Vérification par la formule générale :

$$\begin{aligned} &\text{Si } t = 0 \quad \to \quad y_0 = 4 - 9(-1)^0 = -5 \\ &\text{Si } t = 1 \quad \to \quad y_1 = 4 - 9(-1)^1 = 13 \\ &\text{Si } t = 2 \quad \to \quad y_2 = 4 - 9(-1)^2 = -5 \end{aligned}$$

Vérification par récurrence :

$$y_0 = -5$$
$$y_1 = -y_0 + 8 = -(-5) + 8 = 13$$
$$y_2 = -y_1 + 8 = -13 + 8 = -5$$

20.2.2 Equations homogènes du deuxième ordre

Une équation de récurrence homogène du deuxième ordre est de la forme :

$$a y_t + b y_{t-1} + c y_{t-2} = 0 \quad \text{avec } a \neq 0$$

Pour résoudre cette équation de récurrence, on forme l'**équation caractéristique**

$$a r^2 + b r + c = 0$$

- Si l'équation possède 2 racines réelles r_1 et r_2, alors :

$$y_t = c_1 \cdot r_1{}^t + c_2 \cdot r_2{}^t$$

- Si l'équation possède une racine double r, alors :

$$y_t = (c_1 \cdot t + c_2) \cdot r^t$$

- Si l'équation possède deux racines complexes ($\Delta < 0$), la solution de l'équation de récurrence est de forme complexe. Ce cas n'est pas étudié ici.

Exemple 20.7

Trouver la solution particulière de l'équation de récurrence suivante :

$$y_t = 5y_{t-1} - 6y_{t-2} \quad \text{avec} \quad y_0 = -3\,;\ y_1 = 4$$

Solution

On écrit cette équation sous la forme :

$$y_t - 5y_{t-1} + 6y_{t-2} = 0$$

On forme et on résout ensuite l'équation caractéristique :

$$r^2 - 5r + 6 = 0$$

À partir des deux racines réelles $r_1 = 2$ et $r_2 = 3$ on obtient la solution générale de l'équation de récurrence :

$$y_t = c_1 \cdot 2^t + c_2 \cdot 3^t$$

Pour déterminer c_1 et c_2, on utilise les conditions initiales y_0 et y_1 :

$$\begin{cases} -3 = c_1 \cdot 2^0 + c_2 \cdot 3^0 \\ 4 = c_1 \cdot 2^1 + c_2 \cdot 3^1 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} -3 = c_1 + c_2 \\ 4 = 2c_1 + 3c_2 \end{cases}$$

En résolvant ce système, on détermine ainsi les constantes $c_1 = -13$ et $c_2 = 10$. La solution particulière s'écrit donc :

$$y_t = -13 \cdot 2^t + 10 \cdot 3^t$$

Exercices d'application de la section 20.2

19 [Terme d'une suite] Trouver le 5ème terme des suites suivantes :

(a) si $y_1 = 3$ et $y_t = y_{t-1} + 2$

(b) si $y_1 = 5$ et $y_{t+1} = 2y_t - 5$

(c) si $y_3 = -4$ et $y_t - y_{t-1} = n + 2$

20 [Terme d'une suite] Trouver le 5ème terme des suites suivantes :

(a) si $y_1 = 4$ et $y_t = y_{t-1} - 3$

(b) si $y_1 = -4$ et $y_t = 3y_{t-1} + 3t$

(c) si $y_1 = 0$ et $y_t - y_{t-1} = t^2 - 1$

21 [Équation de récurrence] Écrire une équation de récurrence représentant les suites décrites ci-après :

(a) 5 , 10 , 15 , 20 , 25 **(b)** 2 , 5 , 11 , 23 , 47 **(c)** 6 , 14 , 30 , 62 , 126

22 [Équation de récurrence] Écrire une équation de récurrence représentant les suites décrites ci-après :

(a) 1 , 2 , 5 , 14 , 41 **(b)** 5 , 8 , 14 , 26 , 50 **(c)** 2 , 4 , 16 , 256 , 65 536

23 [Équation de récurrence] Écrire l'équation de récurrence ainsi que les 4 premiers termes de la suite définie par $y_t = \sum_{i=1}^{t}(3i - 1)$

24 [Valeur d'une cellule] Déterminer la valeur de la cellule L1

(a) si A1=4 et si $y_t = 2y_{t-1} - 3$

(b) si A1=4, B1=3 et si $y_t = 3y_{t-1} - 2y_{t-2}$

(c) si A1=2, B1=13 et si $f(t) = 3 \cdot f(t-1) - 2 \cdot f(t-2) - (t-1)^2$

25 [En fonction de y_0] Exprimer la solution des équations suivantes en fonction de y_0 :

(a) $y_t = y_1 - 5(t-1)$ **(b)** $y_t = \frac{1}{2}(5 \times 3^t - y_1)$ **(c)** $y_t = t^2 - (y_1 - t)$

26 [En fonction de y_0] Exprimer la solution des équations suivantes en fonction de y_0 :

(a) $y_t = 5^{t-1} \cdot y_1$ **(b)** $y_t = y_1 + y_2(-2)^t$ **(c)** $y_t = y_1 \cdot 2^t - t^2 - 2t$

27 [Solution générale] Trouver la solution générale des équations de récurrence suivantes en fonction du terme initial donné.

(a) $y_t = 3y_{t-1} + 2 \quad [y_1]$ **(b)** $4a_{n-1} + 2a_{n-2} = -6 \quad [a_1]$

28 [Solution générale] Trouver la solution générale des équations de récurrence suivantes en fonction du terme initial donné.

(a) $y_t = y_{t-1} + 5 \quad [y_1]$

(b) $u_{n+1} + 3u_n - 2 = 0 \quad [u_0]$

(c) $F(n+1) = 4F(n) - 6 \quad [F(1)]$

(d) $2u_{n+2} = 6u_{n+1} + 5 \quad [u_0]$

29 [Solution particulière] Trouver la solution particulière des équations de récurrence suivantes en fonction du terme initial donné.

(a) $y_t = 4y_{t-1} + 3 \quad [y_0 = 1]$ **(b)** $F_t = F_{t-1} - 3 \quad [F_0 = 4]$

30 [Solution particulière] Trouver la solution particulière des équations de récurrence suivantes en fonction du terme initial donné.

(a) $2u_n = u_{n-1} \quad [u_1 = 5]$ **(b)** $P(n) - P(n-1) = 100 \quad [P(1) = 0]$

31 [Ordre 2] Trouver la solution générale des équations de récurrence suivantes :

(a) $y_t = y_{t-1} + 6y_{t-2}$ **(b)** $a_n = \dfrac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2}$ **(c)** $u_n - 4u_{n-2} = 0$

32 [Ordre 2] Déterminer les solutions particulières des équations de récurrence suivantes :

(a) $y_t - 2y_{t-1} + y_{t-2} = 0 \quad y_0 = 1\,;\ y_1 = 3$

(b) $\dfrac{y_{t+2} - y_{t+1}}{y_{t+1} - y_t} = 1,1 \quad y_0 = 20\,;\ y_1 = 25$

(c) $y_t - \alpha^2 y_{t-2} = 0$ avec $y_0 = 1\,;\ y_1 = 0\,;\ \alpha > 1$

33 [Série] Trouver le prochain terme de la série : $-8\,,\ 10\,,\ -10\,,\ 20\,,\ 10\,,$?

34 [Série] Trouver l'équation de récurrence permettant d'obtenir les valeurs suivantes sous Excel et compléter la cellule manquante :

	A	B	C	D	E	F
1		2	4	14	20	122

20.3 Problèmes et exercices de synthèse

35 [Traduire en équation] Formuler les équations différentielles décrivant les situations suivantes :

(a) En tout point de la courbe $y = f(x)$, la pente de la tangente est proportionnelle au produit de l'abscisse et de l'ordonnée.

(b) Dans une ville comptant H habitants, le taux de croissance instantané du nombre N de personnes connaissant la rumeur par rapport au temps est proportionnel au nombre de personnes non informées de la rumeur.

36 [Traduire en équation] Formuler les équations différentielles décrivant les situations suivantes :

(a) Le taux de croissance instantané du volume V des ventes est proportionnel au temps t écoulé et inversement proportionnel au volume des ventes.

(b) Le taux de variation instantané de la température T d'un objet par rapport au temps est proportionnel à l'écart de la température entre cet objet et celle du milieu ambiant A.

37 [Modèle de Malthus] On suppose que l'effectif P des employés d'une entreprise évolue selon le modèle de Malthus (économiste britannique 1766 - 1834), selon lequel le taux de croissance dans le temps d'une population est proportionnel à la taille de cette population.

(a) Décrire cette situation sous forme d'équation différentielle.

(b) Déterminer la solution générale de cette équation différentielle.

(c) Le nombre d'employés dans une entreprise en 2018 ($t = 0$) était de 200 et de 240 en 2020. Prévoir l'effectif de l'entreprise en 2022 si la tendance devait se poursuivre selon ce modèle.

38 [Croissance du capital] Un capital de 8 000 frs est placé sur un compte dont l'intérêt annuel est de 3% composé continuellement. Le taux de croissance du capital au temps t est proportionnel au capital présent dans ce compte à ce moment.

(a) Déterminer l'expression du capital $C(t)$ en fonction du temps, si la constante de proportionnalité (k) correspond au taux d'intérêt.

(b) Déterminer le capital acquis au bout de 5 ans selon ce modèle.

39 [Élasticité] Déterminer la fonction de demande y si $e_{y/x} = x \cdot \ln(a)$.

40 [Élasticité] Déterminer la fonction de demande q si $e_{q/p} = \dfrac{3p}{5-p}$ quand la demande est de 16 pour un prix de 10.

41 [Cauchy] Montrer que la fonction exponentielle est l'unique fonction solution du problème de Cauchy (mathématicien français 1789-1857) suivant :

$$f' = f \qquad \text{avec } f(0) = 1$$

42 [Meurtre] Un meurtre a été commis dans la soirée. La police qui arrive sur la scène du crime à minuit constate que la température du corps est de 31°C et celle de la pièce ambiante de 22°C. En faisant référence à la loi de refroidissent de Newton (problème 36) estimer l'heure du crime.

43 [Point stable] Un **point stable** ou **point d'équilibre** y_e est une valeur de y_t qui, à long terme, n'a plus d'influence sur la valeur suivante y_{t+1}. Pour une équation de récurrence linéaire du premier ordre, ce point d'équilibre se produit quand $y_e = a y_e + b$ ou

$$y_e = \frac{b}{1-a}$$

Déterminer le point d'équilibre de l'équation de récurrence $y_t = 0,8\, y_{t-1} + 2$ avec $y_0 = 5$ et représenter graphiquement cette situation.

44 [Point stable] Une entreprise compte 1 000 employés l'année 0. Tous les ans, 10% des employés quittent l'entreprise, laquelle recrute dans l'intervalle 80 nouveaux employés. Quel sera le nombre d'employés à long terme ?

45 [Probabilités] Un processus probabiliste est défini en fonction de la probabilité de son état antérieur selon le modèle suivant :

$$P_{n+1} = P_n \times \frac{1}{4} + (1 - P_n) \times \frac{3}{4} \qquad \text{avec } P_0 = 1$$

Déterminer l'état du processus à long terme, c'est-à-dire quand $\lim_{n \to \infty} P_n$.

46 [Production] L'étude de la production intérieure brute d'un pays montre que les rapports

$$\frac{P(n+1) - P(n)}{P(n)}$$

($P(n)$ désignant la production intérieure de l'année n en milliards d'euros) sont pratiquement constants et que leur valeur commune est de $k = 0,1$.

(a) Calculer $P(n+1)$ en fonction de $P(n)$

(b) Calculer $P(n)$ en fonction de $P(0)$ et n, sachant que $P(0) = 140$

(c) Calculer à partir de quelle année entière la production a-t-elle été au moins le double de $P(1)$.

47 [Abonnés] Un journal a constaté, au cours des années, un taux de réabonnement annuel voisin de 75% ainsi que l'adhésion d'environ 4000 nouveaux abonnés.

(a) Écrire cette situation sous forme d'équation de récurrence

(b) Trouver la solution particulière de cette équation si actuellement (en $t = 0$) le journal compte 10 000 abonnés.

(c) Déterminer à partir de quelle année le nombre d'abonnés dépassera 15 000.

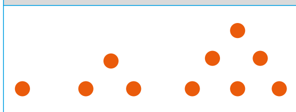
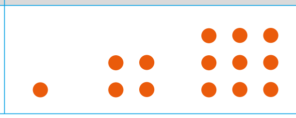
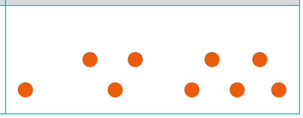
48 [Emprunt] On emprunte (en $t = 0$) 12 000 frs sur 10 ans à 5% d'intérêt annuel. On souhaite déterminer le montant de l'annuité A, payable à la fin de chaque année. L'état de la dette à la date t peut être représenté par l'équation de récurrence :

$$C_t = C_{t-1} \cdot 1,05 - A$$

Déterminer le montant de l'annuité A à payer.

49 [Réservoir] Quand Monsieur Dupond utilise sa tondeuse à gazon, il consomme environ $5/18$ de ce qui reste dans le réservoir. Une fois terminé, il rajoute systématiquement 1 litre d'essence afin de remplir son réservoir. Quelle est la capacité de son réservoir ?

50 [Récurrence] Trouver les équations de récurrence :

(a)	(b)	(c)
		

51 [Un nombre valant cher] On donne les premiers termes de la suite suivante :

F_0	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7
0	1	1	2	3	5	8	13

(a) Exprimer cette suite sous forme d'une équation de récurrence

(b) Trouver la solution particulière de cette équation en utilisant les conditions initiales $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$

(c) Calculer la limite suivante :

$$\varphi = \lim_{t\to\infty} \frac{F_{t+1}}{F_t}$$

(d) Comment s'appelle cette suite et cette limite ?

52 [Défi] Que vaut la somme des n premiers termes de la série suivante :

$$2 + 22 + 222 + 2222 + \cdots \quad ?$$

Quatrième partie

Statistiques descriptives

Chapitre 21

Présentation des données statistiques

Objectifs du chapitre

- expliquer les concepts de base de l'analyse de données (population, échantillon, données brutes, variable, modalités, etc.)
- utiliser un tableur pour effectuer l'analyse descriptive et l'exploitation de données.
- caractériser des données univariées (par catégories, discrètes, continues), les ordonner et les classer.
- savoir construire des diagrammes en barres, des diagrammes en secteur et des histogrammes.
- savoir construire d'autres types de graphiques classiques.

21.1 Introduction et analyse préliminaire

La statistique est l'ensemble des instruments permettant de déterminer les caractéristiques d'un ensemble de données généralement vaste. Cette activité regroupe deux principales branches :

- la collecte des données et le traitement des données collectées, aussi appelé la **statistique descriptive**. Cela se fait visuellement à l'aide de tableaux et graphiques mais aussi à l'aide d'indicateurs (moyenne, écart type, indices, taux, etc...)
- l'interprétation des données, aussi appelée **inférence statistique**, qui s'appuie sur la théorie des probabilités et des données d'un échantillon afin de tirer des conclusions sur une population.

Les méthodes statistiques sont utilisées dans de nombreux domaines, comme par exemple :

- la démographie (étude des populations)
- l'économie (tendance des marchés)
- la médecine (état sanitaire, efficacité d'un médicament)
- la sociologie (sondage d'opinion)

21.1.1 Définitions

Population : L'ensemble de référence sur lequel vont porter les observations (par exemple la population des étudiants d'une école). On note N la taille de cette population.

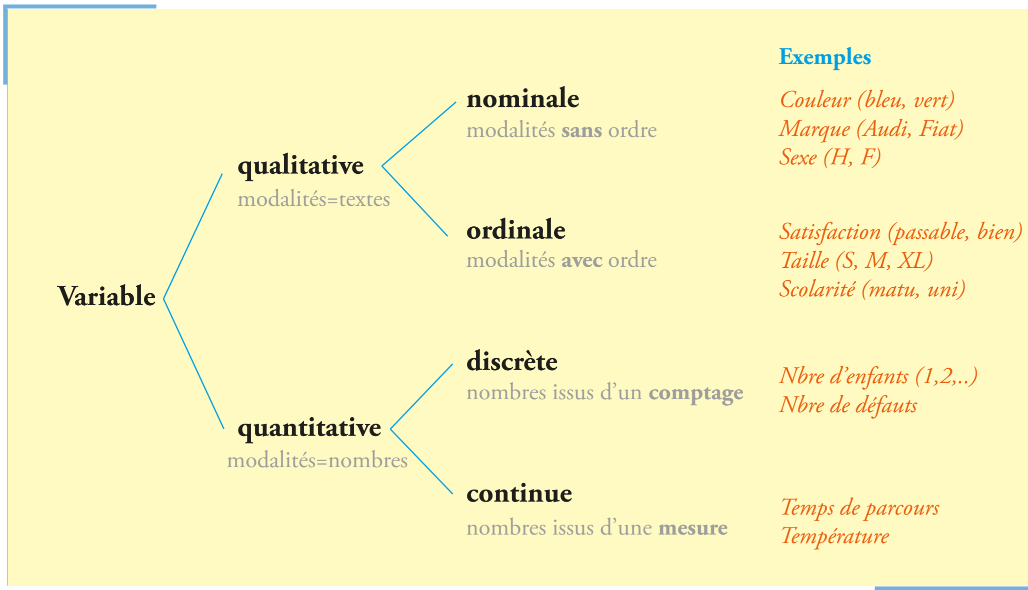
Échantillon : Partie de la population que l'on détermine par **sondage**, lorsque la population à étudier est trop nombreuse ou impossible à observer dans sa totalité.

Individu ou unité statistique : Élément de base de la population. L'ensemble des individus forme la population (par exemple l'élève Martine).

Variable statistique ou caractère : Caractéristique étudiée et commune à chaque individu (sexe, âge, taille, poids, etc.). Mathématiquement, une variable statistique se note par des lettres majuscules, généralement X et Y.

Modalités : Différentes valeurs que peut prendre la variable statistique (masculin, féminin, 18 ans, 80 kg, etc.). On note les modalités associées aux variables X, Y par $x_1, x_2, \ldots$ ou $y_1, y_2, \ldots$. On note par k le nombre de modalités.

Selon que les modalités d'une variable statistique peuvent être mesurées ou comptées, on parle d'une **variable quantitative** (taille, poids, âge). Dans le cas contraire, on parle d'une **variable qualitative** (sexe, situation matrimoniale). Cette distinction peut être affinée comme suit :



21.1.2 Collecte des données brutes

La première étape d'une étude statistique consiste à rassembler les données brutes issues d'un sondage dans un tableau.

Exemple 21.1

On a posé la question suivante à un échantillon de 10 personnes : «Quel est votre état civil et quelle est votre taille en cm ?» On a obtenu alors les réponses brutes suivantes :

Personne n	État civil	Taille (en cm)
1	Marié	177
2	Divorcé	172
3	Célibataire	175
4	Divorcé	172
5	Marié	174
6	Divorcé	166
7	Divorcé	179
8	Célibataire	173
9	Divorcé	167
10	Marié	167

21.1.3 Traitement des données brutes

Après avoir fait la collecte des données, on dispose de données brutes. Cette présentation n'est pas très pertinente car elle ne donne pas une bonne vue d'ensemble.

En regroupant les valeurs par modalités, on sera en mesure de les présenter sous forme de tableaux et de graphiques faisant apparaître les **effectifs** $[n_i]$, les **fréquences** $[f_i]$ ainsi que les **fréquences cumulées** $[F_i]$. [1]

D'une manière générale, et pour une variable comportant k modalités on obtient :

- L'effectif total (N) est la somme de tous les effectifs pour les k modalités :

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_k = \sum_{i=1}^{k} n_i = N$$

- La colonne «Fréquence» représente le rapport de chaque effectif à l'ensemble :

1. Certains auteurs nomment fréquences les n_i et fréquences relatives les f_i.

$$f_i = \frac{n_i}{N} \qquad \text{avec} \quad f_1 + f_2 + \cdots + f_k = \sum_{i=1}^{k} f_i = 1$$

- Les fréquences cumulées (F_i) s'obtiennent comme suit :

$$\begin{aligned} F_1 &= f_1 \\ F_2 &= f_1 + f_2 \\ F_3 &= f_1 + f_2 + f_3 \\ &\vdots \\ F_k &= f_1 + f_2 + f_3 + \cdots + f_k = 1 \end{aligned}$$

F_i représente la proportion de l'effectif dont le caractère $X \leq x_i$, ce que l'on peut écrire :

$$F_i = F(x_i) = \Pr(X \leq x_i)$$

La proportion de l'effectif compris entre $]\,a\,;\,b\,]$ se calcule comme suit :

$$\Pr(a < X \leq b) = F(b) - F(a) \qquad a \text{ non compris}$$

Cas d'une variable qualitative ou quantitative discrète

Si on s'intéresse à la variable «État civil» de l'exemple précédent, on commence par repérer les 3 modalités (marié, divorcé et célibataire) puis on établit le tableau des effectifs ou des fréquences comme suit : [2]

État civil (modalités)	Effectifs n_i	Fréquences f_i
Marié	3	0,3
Divorcé	5	0,5
Célibataire	2	0,2
Total	**10**	**1**

Avec Excel :

- la liste des modalités peut être obtenue avec la commande Données/Filtrer ou Données/Filtrer/Avancé
- le regroupement peut être fait au moyen de la fonction NB.SI(plage,critère), comme par exemple NB.SI(A1:A10;"Marié")

2. La colonne des fréquences cumulées n'a pas de sens dans le cadre d'une variable qualitative.

Cas d'une variable continue

Dans le cas d'une variable continue, les données sont organisées en **intervalles** ou **classes**. Les bornes des intervalles doivent être définies de telle sorte qu'un individu ne puisse être classé que dans un seul intervalle. Par convention, on considère souvent l'intervalle comme fermé à gauche et ouvert à droite.

Si on s'intéresse à la variable «Taille» de l'exemple précédent, on commence par regrouper les valeurs des tailles dans des **classes** (choix arbitraire de 3 classes ici) puis on établit le tableau des effectifs ou des fréquences comme pour une variable discrète :

Taille (classes)	Effectifs n_i	Fréquences f_i	Fréquences cumulées F_i
$[\,165\,;\,170\,[$	3	0,3	0,3
$[\,170\,;\,175\,[$	4	0,4	0,7
$[\,175\,;\,180\,[$	3	0,3	1
Total	**10**	**1**	

Avec Excel, le regroupement dans la classe $[\,a\,;\,b\,[$ peut être fait au moyen de la fonction `NB.SI.ENS(plage;">=a";plage;"<b")`, comme par exemple :
`NB.SI.ENS(A1:A10;">=165";A1:A10;"<170")`

Fréquences cumulées et bornes des classes
Quelques mises au point.

Remarques importantes concernant les classes

- On représente habituellement une classe quelconque i au moyen de sa borne inférieure b_{i-1} et sa borne supérieure b_i c'est-à-dire par l'intervalle $[\,b_{i-1}\,;\,b_i\,[$
- Certains calculs nécessitent les **centres** et **amplitudes** des classes :

$$x_i = \frac{b_{i-1} + b_i}{2} \qquad \textbf{centre} \text{ de la classe } i$$

$$L_i = b_i - b_{i-1} \qquad \textbf{amplitude} \text{ de la classe } i$$

- Trop ou trop peu de classes nuisent à la qualité de l'information. Idéalement, le nombre de classes devrait se situer entre 4 et 15 [3].
- Les classes devraient être de même amplitude en évitant les classes ouvertes. [4]

3. La règle de Sturges propose un bon découpage en utilisant $k \simeq 1 + 3,3 \times \log(N)$
4. Pratiquement cette amplitude s'estime comme suit : $(X_{\max} - X_{\min})/k$

Exemple 21.2

On dispose de 617 observations s'étalant de $X_{\text{min}} = 7,23$ à $X_{\text{max}} = 81,52$.
Proposer un découpage en classes faisant apparaitre également les centres de classes.

Solution

- Selon Sturges : $k = 1 + 3,3 \times \log(617) \simeq 10$
- Pour des bornes «plus lisibles», on peut arrondir X_{min} à l'entier inférieur et X_{max} à l'entier supérieur.
- Amplitude $\simeq \dfrac{82-7}{10} = 7,5$

Ainsi les 10 classes seront réparties comme suit :

Classes X	Notation des classes	Centre de classes x_i
$[7;7,5[$	$[\,b_0\,;\,b_1\,[$	7,25
$[7,5;15[$	$[\,b_1\,;\,b_2\,[$	11,25
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$[74,5;82[$	$[\,b_{k-1}\,;\,b_k\,[$	78,25

Exercices d'application de la section 21.1

1 [Type de variable] Dans les situations suivantes, définir s'il s'agit d'une variable qualitative (nominale ou ordinale) ou quantitative (discrète ou continue) :

(a) Couleur des yeux : bleus, bruns, noirs, autres.

(b) Taille de l'entreprise : petite, moyenne, grande.

(c) Nombre d'années de pratique : moins de 2 ans, de 2 à 4 ans, plus de 4 ans.

(d) Satisfaction au cours de maths : insatisfait, satisfait, très satisfait, ne préfère pas répondre.

(e) Langue parlée : français, allemand, italien.

(f) Nombre de langues parlées : 1,2,3,4, 5 et plus.

2 [Type de variable] Pour sa gamme «Q», le groupe Audi a vendu en Suisse le nombre de voitures neuves suivant en 2017 :

Modèle	Nombre de voitures
Q2	2489
Q3	1866
Q5	3091
Q7	1115

(a) Quelle est la population étudiée ?
(b) Quelle est la variable étudiée ?
(c) Cette variable est-elle qualitative ou quantitative ?

3 [Vocabulaire] Compléter les parties de texte manquant avec les mots suivants :

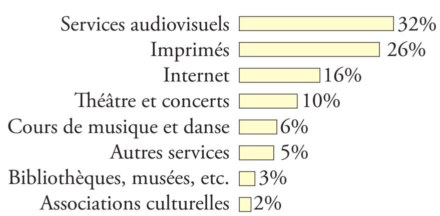
- *Sondage*
- *Classement*
- *Quantitatif*
- *Unité statistique*
- *Classes*
- *Enquête*
- *Qualitatif*
- *Population*
- *Effectif*
- *Dépouillement*

En 2018, l'entreprise Trucchouette a lancé un nouveau produit appelé Bidule. Après une année d'expérience, Monsieur Martin décide d'analyser les résultats commerciaux obtenus par ce produit. Monsieur Martin doit alors effectuer une .... Les données dont il dispose sont les factures correspondantes à la vente de Bidule, tout au long de l'année. Ces factures constituent la ...... sur laquelle va porter l'étude. Une facture représente une .... Monsieur Martin va étudier le montant de ces factures. Le montant est un caractère ....
Il possède 800 factures. Il va en faire le .... Pour simplifier sa tâche, il les range par ordre croissant. Il effectue ainsi un .... Il regroupe les factures comprises entre 0 et 250 frs, puis entre 250 et 500 frs, etc. Monsieur Martin forme donc des .... Il compte enfin le nombre de factures dans chaque groupe. Ce nombre est appelé ....

4 [Type de variables] Classer chacune des variables suivantes selon qu'elles sont qualitatives, quantitatives discrètes ou quantitatives continues :

(a) Profession
(b) Pointure des chaussures
(c) Revenu annuel
(d) Couleur des yeux
(e) Lieu de résidence
(f) Coordonnées GPS
(g) Nationalité
(h) Nombre de langues parlées
(i) Âge
(j) Langues parlées
(k) Vitesse du vent
(l) Propriétaire ou locataire d'une maison

5 [Vrai/Faux] De 2009 à 2011, les dépenses culturelles ont représenté 5% de la dépense de consommation des ménages suisses. Leur répartition est donnée par le graphique ci-après :



Dire si les propositions ci-après sont vraies ou fausses et pourquoi.

(a) La population étudiée est : «les ménages suisses».

(b) Le caractère étudié est : «les catégories de dépenses culturelles».

(c) La nature du caractère est qualitatif discret.

(d) Cette série peut être représentée par un diagramme circulaire.

(e) Ce diagramme est faux car la somme des pourcentages devrait être de 5%.

6 [Classes] On dispose d'une distribution statistique sur la taille des 175 employés d'une entreprise. Les différentes tailles de ces employés sont comprises entre $b_0 = 150$ cm et $b_k = 198$ cm.

(a) Organiser cette série statistique en 7 classes d'amplitude égale.

(b) Utiliser la règle de Sturges pour déterminer le nombre «idéal» de classes et organiser les classes en conséquence.

(c) Organiser cette série en classes d'amplitude 5.

7 [Université] Sachant que dans une université il y a deux fois plus d'étudiants inscrits en Lettres qu'en Chimie, reconstituer les fréquences manquantes.

Lettres	Maths	Économie	Informatique	Physique	Chimie	Biologie
?	0,22	0,16	0,04	0,2	?	0,14

8 [Résidence] On a relevé dans une résidence le nombre de pièces pour chacun des appartements :

2	3	5	3	4	4	3	4	1	2	6	2
2	2	1	1	5	2	2	6	3	1	2	2
4	1	2	6	4	5	2	1	2	3	2	3

(a) La variable est-elle du type qualitatif ou quantitatif ?

(b) La variable est-elle discrète ou continue ?

(c) Composer un tableau faisant apparaître le nombre de pièces ainsi que les effectifs.

9 [Vente de produits] La semaine dernière une entreprise a vendu les produits suivants :

lundi : 3 unités du produit A, 2 du produit B et 2 du produit C.

mardi : 2 unités du produit A, 3 du produit C et 5 du produit D.

mercredi : 3 unités du produit A, 2 du produit B et 3 du produit E.

jeudi : 4 unités du produit B, 2 du produit D et 1 du produit E.

vendredi : 3 unités du produit A, 1 du produit C et 2 du produit E.

samedi : 4 unités du produit A, 2 du produit B et 3 de chaque produit D et E.

(a) De quel type de variable statistique s'agit-il ?

(b) Faire un tableau indiquant le nombre total et la fréquence d'unités vendues durant la semaine pour chaque type de produit.

10 [Exploitations viticoles] On donne dans le tableau suivant, la répartition des exploitations viticoles d'un canton suisse en fonction de leur superficie (en ha).

Superficie en ha	Effectif
De 0 à moins de 5	14
De 5 à moins de 10	19
De 10 à moins de 15	18
De 15 à moins de 20	29
De 20 à moins de 25	27
De 25 à moins de 30	20
De 30 et plus	23

(a) De quel type de variable statistique s'agit-il ?

(b) Quelle est la population ?

(c) Indiquer une modalité.

(d) Évaluer le pourcentage d'exploitations de moins de 10 ha.

(e) Indiquer le nombre d'exploitations ayant entre 12 et 24 ha.

11 [Absentéisme] On a mesuré le nombre de jours d'absence de 20 employés au cours d'une année. Les observations brutes figurent dans le tableau ci-dessous :

2	0	0	3	2	6	4	10	1	5
0	4	2	0	4	0	3	1	1	2

(a) De quel type de variable statistique s'agit-il ?

(b) Construire le tableau des **effectifs** cumulés $N(x)$ [5]

(c) Indiquer le nombre d'employés ayant eu moins de 5 jours d'absence.

(d) Indiquer le nombre d'employés ayant eu entre 3 et 5 jours d'absence $[3-5]$.

(e) Indiquer le nombre d'employés ayant eu entre 3 et 5 jours d'absence $[3-5[$.

12 [Notes] Un professeur relève les notes (sur un total de 6 points) obtenues par les 30 étudiants dont il a corrigé les copies. Les résultats sont les suivants :

5,5	3,5	4	5	5,5	2,5	3	5	5	4
4,5	5	4,5	3,5	5	3	3,5	4,5	5	4
3,5	4	4	4,5	5	4	3	3,5	4,5	2

Au moyen de la fonction NB.SI.ENS, déterminer les effectifs des classes $[2-2,5[$, $[2,5-3[$, etc... jusqu'à la dernière classe $[5-5,5]$

5. Les effectifs cumulés se calculent selon le même principe que les fréquences cumulées. Ils se notent soit N_i ou $N(x)$.

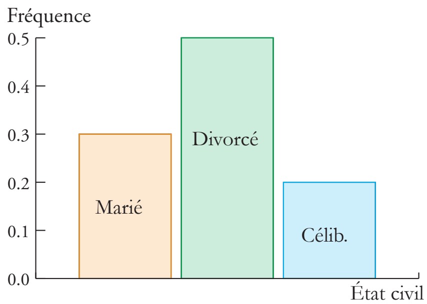
21.2 Représentation graphique des données

Selon le type de la variable statistique, il existe plusieurs manières de représenter graphiquement les données d'une série statistique :

21.2.1 Graphiques liés à une variable qualitative ou quantitative discrète

Diagrammes en colonnes

On place sur l'axe horizontal les différentes modalités, selon un classement quelconque si la variable est nominale ou ordonnée si elle est ordinale. Les effectifs ou les fréquences sont placés sur l'axe vertical. La **hauteur des colonnes est alors proportionnelle à l'effectif** associé à chaque modalité.

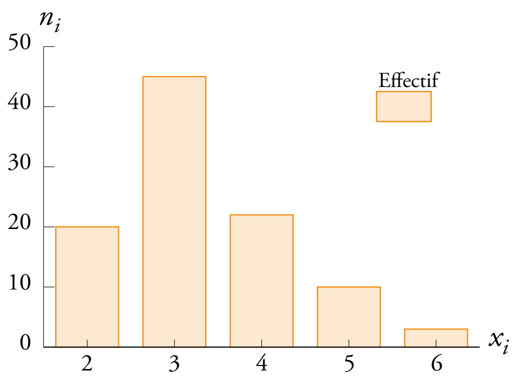


Dans le cas d'une variable discrète la représentation graphique est la même que pour une variable qualitative. La variable est cependant représentée dans un **ordre croissant**.

Exemple 21.3

Un centre commercial a interrogé un panel de 100 visiteurs pour connaitre le nombre de fois qu'ils se rendaient dans le centre commercial par semaine :

Nombre de visites	(x_i)	2	3	4	5	6	Total
Effectif	(n_i)	20	45	22	10	3	100



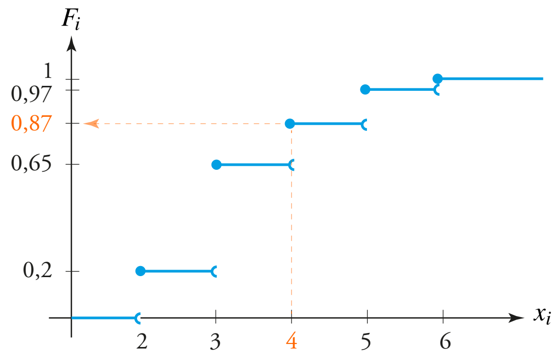
Courbe des fréquences cumulées

Appelée aussi **fonction de répartition**, cette courbe est directement liée à la courbe des fréquences d'une **variable quantitative**. Les fréquences cumulées F_i peuvent être représentées par une fonction en escalier dont les marches sont fermées à gauche et ouvertes à droite.

Exemple 21.4

Suite de l'exemple précédent..

Nombre de visites	(x_i)	2	3	4	5	6
Fréquences cumulées	(F_i)	0,2	0,65	0,87	0,97	1

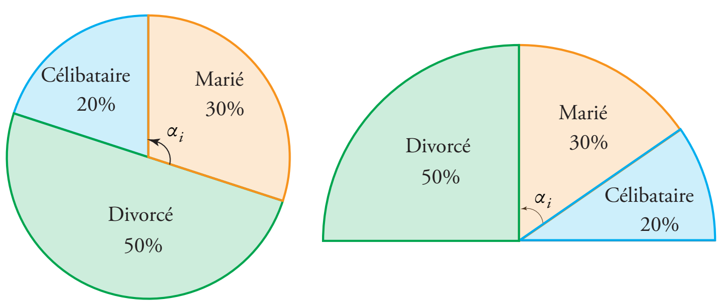


Ce graphique nous renseigne notamment que 87% des clients interrogés se rendent jusqu'à 4 fois par semaine au centre commercial.

Diagrammes en secteurs ou semi-circulaires

Souvent appelé «camembert», la part correspondant à chaque modalité est tracée avec un angle α_i au centre égale (en degrés) à :

- Diagramme circulaire : $\alpha_i = f_i \cdot 360°$
- Diagramme semi-circulaire : $\alpha_i = f_i \cdot 180°$



Diagrammes figuratifs

Appelés aussi **pictogrammes**, ces diagrammes sont très souvent utilisés pour leur aspect esthétique, bien qu'ils manquent souvent de précision.

21.2.2 Graphiques liés à une variable quantitative continue

Histogramme et polygone des fréquences

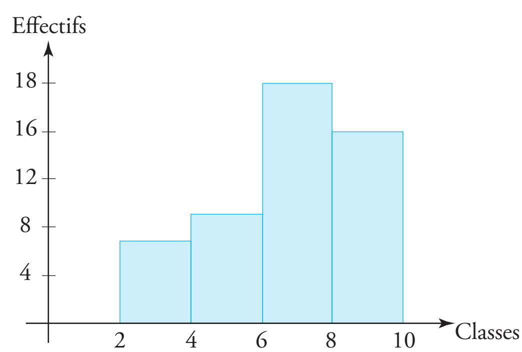
Dans le cas d'une variable continue, où les observations sont regroupées en classes, le diagramme des fréquences se nomme un **histogramme**. L'histogramme est un diagramme où les rectangles sont juxtaposés. La base de chaque rectangle étant constitué des différentes classes successives.

L'histogramme peut se construire soit à partir des n_i soit à partir des f_i. Mais dans tous les cas, l'**aire de chaque rectangle est proportionnelle aux effectifs** n_i **ou aux fréquences** f_i.

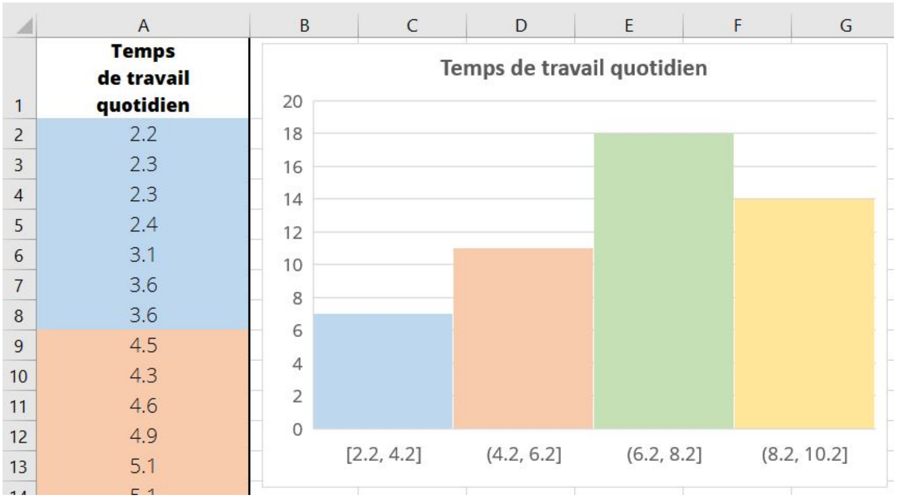
Exemple 21.5

On a enregistré dans une entreprise le temps de travail quotidien en heures de 50 employés et on a regroupé les données dans le tableau ci-après :

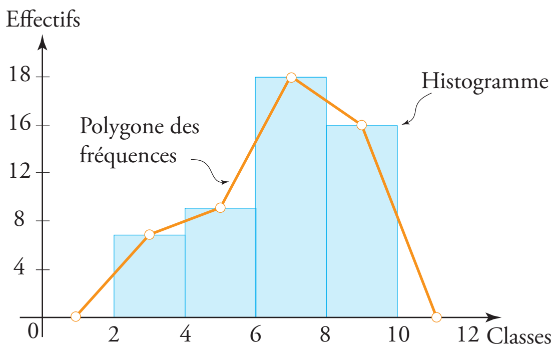
Temps de travail $[b_{i-1}; b_i[$	Effectif n_i
$[2; 4[$	7
$[4; 6[$	9
$[6; 8[$	18
$[8; 10[$	16
Total	**50**



Dans Excel, il suffit de sélectionner les valeurs brutes puis d'insérer un Graphique statistique type Histogramme. Sélectionner Option d'axe afin de faire varier soit la largeur des emplacements (L_i) soit le nombre d'emplacements (k). Les valeurs des bornes sont fixées par Excel lui-même :



Le **polygone** des fréquences permet de donner une image plus «lisse» du phénomène à étudier. On le construit en joignant les points milieux consécutifs des sommets des rectangles de l'histogramme et en y ajoutant deux fausses classes aux extrémités. Ainsi, l'aire sous l'histogramme ou le polygone des fréquences est identique.



Classes de largeurs inégales

Si les classes sont de largeur inégales, il faut corriger les effectifs n_i ou les fréquences f_i afin que les aires restent toujours proportionnelles aux effectifs.

La solution la plus simple consiste à exprimer en ordonnée des **hauteurs** de rectangle et non plus des effectifs ou des fréquences. Ces hauteurs h_i se calculent comme suit : [6]

$$h_i = \text{Hauteur du rectangle} = \frac{n_i}{L_i} \qquad \text{ou} \qquad h_i = \frac{f_i}{L_i}$$

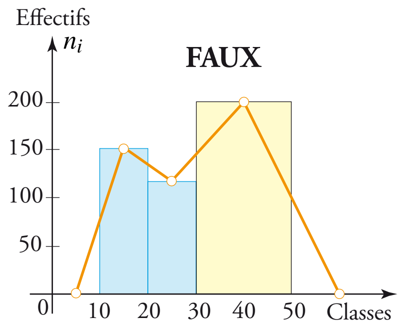
6. Si l'on souhaite avoir en ordonnée des effectifs corrigés n_i^c, on modifie alors les hauteurs h_i comme suit : $n_i^c = h_i \cdot \dfrac{N}{H}$, avec $H = \sum_{i=1}^{k} h_i$

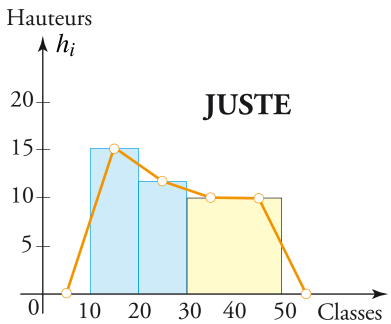
Exemple 21.6

La distribution dans le tableau de gauche ci-après comporte une dernière classe de longueur deux fois plus grande que les autres. Les effectifs dans le tableau de droite sont donc modifiés comme suit :

Classes	n_i
$[10;20[$	150
$[20;30[$	120
$[30;50[$	200

Classes	n_i	L_i	h_i
$[10;20[$	150	10	15
$[20;30[$	120	10	12
$[30;50[$	200	20	10





Courbe des fréquences cumulées

La courbe des fréquences cumulées s'obtient en plaçant un premier point de coordonnées $(b_0;0)$ puis tous les points de coordonnées $(b_i;F_i)$ jusqu'au dernier $(b_k;1)$.

Exemple 21.7

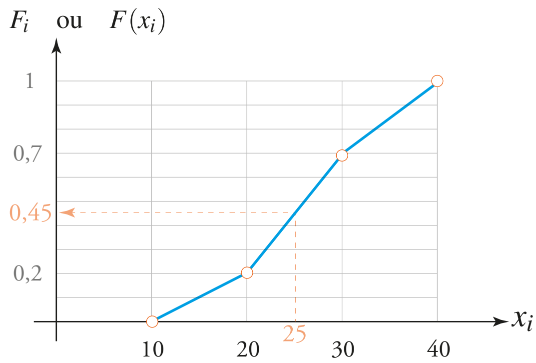
Construire la courbe des fréquences cumulées à partir des données du tableau suivant :

b_i	n_i	f_i	F_i
$[10;20[$	20	0,2	0,2
$[20;30[$	50	0,5	0,7
$[30;40[$	30	0,3	1
Total	**100**	**1**	

Solution

On construit un petit tableau annexe avec toutes les bornes et les valeurs de F_i [que l'on peut aussi écrire $F(x_i)$] :

x_i	$F(x_i)$
10	**0**
20	**0,2**
30	**0,7**
40	**1**



On peut ainsi calculer par exemple :

- la proportion d'individus dont $X < 30$: $F(30) = 0,7$, soit 70%.
- la proportion d'individus compris dans l'intervalle $[\,30\,;\,40\,[$:
  $F(40) - F(30) = 1 - 0,7 = 0,3$
  Ce résultat est identique à la fréquence de la classe $[\,30\,;\,40\,[= 0,3$
- le nombre d'individus dont $X < 25$
  $\Pr(X < 25) = F(25) \times 100 = 0,45 \times 100 = 45$
  [par interpolation linéaire entre 20 et 30].

Interpolation linéaire
Procédé et méthode

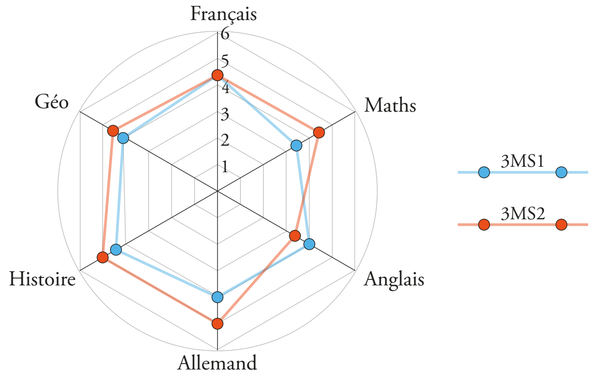
21.2.3 Autres types de graphiques classiques

Diagrammes polaires

Souvent utilisé pour représenter des résultats de performance ou d'évaluation, ce type de diagramme, appelé radar dans Excel, est bien représentatif lorsqu'il y a entre 5 et 15 modalités. Dans ce type de graphique les modalités sont indiquées tout autour du graphique.

Exemple 21.8

Dans une école, on a représenté les moyennes des élèves de deux classes : la 3MS1 et la 3MS2 obtenues dans les principales branches au moyen du diagramme polaire suivant :



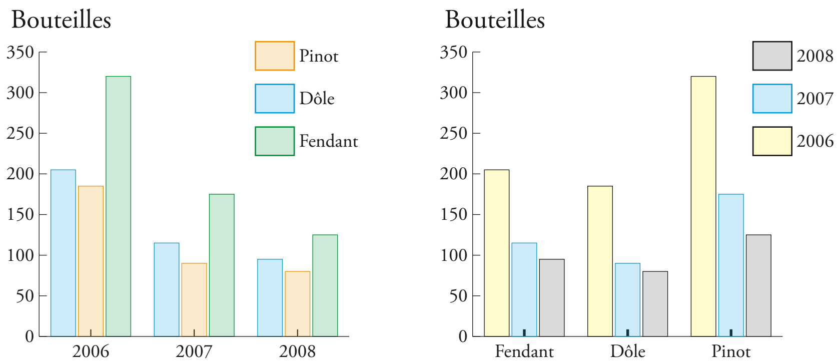
On voit directement que la classe 3MS2 a obtenu globalement de meilleurs résultats que la classe 3MS1 sauf en anglais ; que la moyenne en français est identique dans les deux classes, etc..

Graphiques à plusieurs variables

Il est possible de représenter plusieurs variables sur un même graphique.

Exemple 21.9

Évolution de la consommation annuelle de vins suisses dans un grand restaurant parisien.

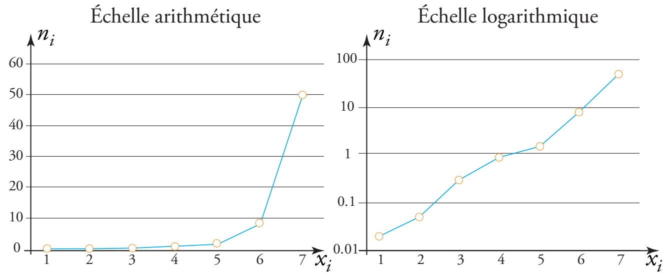


Graphiques semi-logarithmiques

Les graphiques semi-logarithmiques sont utiles lorsque il y a en même temps un certain nombre de données très petites et très grandes à représenter. Par exemple, dans le tableau suivant, les variations importantes de n_i passent inaperçues dans un graphique normal. Par contre dans un graphique semi-logarithmique, l'axe des n_i est gradué selon une échelle logarithmique qui atténue de ce fait les variations.

Exemple 21.10

x_i	1	2	3	4	5	6	7
n_i	0,02	0,05	0,3	0,9	1,5	8	50

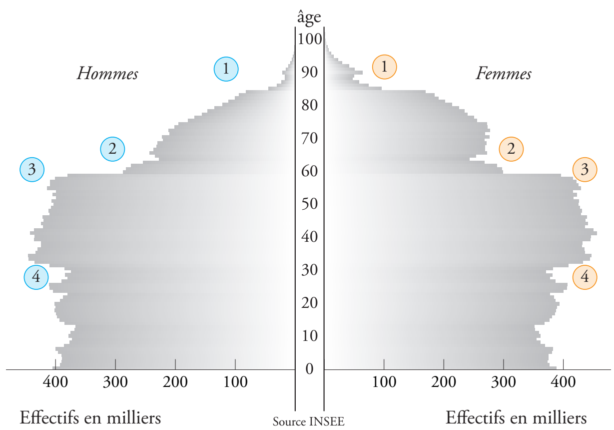


Pyramide des âges

La pyramide des âges est un outil statistique d'étude démographique. Il représente la répartition d'une population par tranche d'âge et par sexe à un instant donné, sous la forme d'un double histogramme. Par convention, les hommes sont placés à gauche et les femmes à droite. L'axe horizontal représente les effectifs et l'axe vertical les âges.

Exemple 21.11

Répartition par âge et par sexe de la population française au premier janvier 2007.



On distingue 4 principales ruptures dans l'histogramme :

① Déficit des naissances dû à la guerre de 1914-1918

② Déficit des naissances dû à la guerre de 1939-1945

③ Baby-boom d'après guerre

④ Fin du baby boom

Graphiques type nuage de points

Un **nuage de points** est une représentation de données dépendant de deux variables. On parle de représentation ou de **statistique bivariée**. Il permet de mettre en évidence le degré de **corrélation**[7] entre ces deux variables.

Les différentes observations des nuages de points permettent de déterminer :

- des tendances
- des dépendances
- des relations positives ou négatives

Corrélation et causalité

Une erreur de raisonnement courante consiste à dire : Si « X et Y sont corrélés, donc X cause Y ». On confond alors corrélation et causalité car en réalité, il se pourrait aussi que Y cause X, ou bien que X et Y aient une cause commune Z, ou encore que X et Y soient accidentellement liés mais n'aient aucun lien de causalité. L'exemple suivant parle de lui-même :

Le nombre de morts par noyade augmente avec l'augmentation des ventes de glaces. Peut-on en conclure qu'il faudrait agir rapidement contre tout les vendeurs de glaces ?

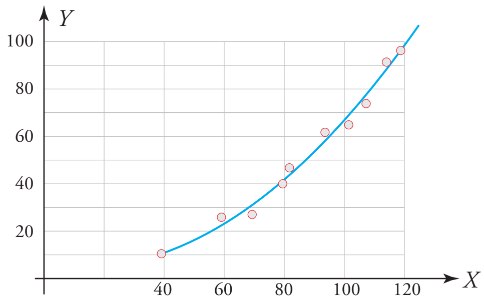
Exemple 21.12

On mesure la distance de freinage en mètres (variable Y) en fonction de la vitesse d'un véhicule en km/h (variable X). Dix observations sont effectuées et consignées ci-après :

X	40	80	120	60	70	83	94	102	108	116
Y	10	40	95	25	27	46	60	64	73	90

Le graphique nuage de points se présente dès lors comme suit, complété d'une courbe de tendance quadratique.[a]

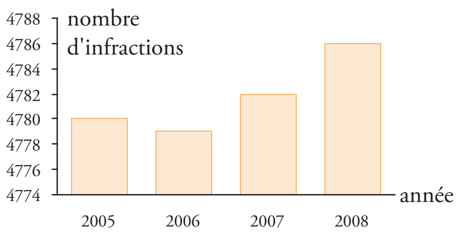
7. La corrélation mesure l'intensité du lien entre deux variables.



a. La physique nous apprend qu'il y a en effet une relation quadratique entre la vitesse et la distance de freinage.

Exercices d'application de la section 21.2

13 [Infractions] Le graphique suivant représente le nombre d'infractions déclarées à Joliville entre 2005 et 2008.



Lesquelles de ces propositions sont correctes ?

(a) 2006 est l'année qui a connu le moins d'infractions

(b) Les infractions ont explosé entre 2006 et 2008

(c) Le nombre d'infractions a été relativement stable entre 2005 et 2008

14 [Pointures] Un magasin de chaussures a enregistré les tailles de souliers qui ont été vendus au cours d'une journée :

40	38	36	43	39	41	39	40	39	39
39	41	41	39	38	39	39	41	43	40
41	37	42	40	42	40	39	42	39	42
42	37	39	39	39	42	43	39	42	38
44	39	38	42	42	43	42	40	43	40

(a) Quel est le type de cette variable statistique ?

(b) Construire un tableau contenant les modalités et les effectifs.

(c) Représenter cette série au moyen d'un diagramme en barres.

(d) Quel commentaire peut-on faire sur la forme de cette distribution ?

15 [Céréales] Dans le canton de Vaud, on a regardé sur 8 parcelles de terrain quelle variété de céréales a été cultivée. Les données sont les suivantes :

Parcelle i	1	2	3	4	5	6	7	8
Culture x_i	froment	maïs	maïs	orge	maïs	avoine	maïs	avoine

Représenter graphiquement les effectifs de cette série statistique par un diagramme en colonne puis un diagramme circulaire.

16 [Salaires] On a représenté les salaires mensuels (en frs.) de 100 ouvriers dans le tableau suivant :

Salaires mensuels	Nombre de salariés
$[1000 - 1500[$	15
$[1500 - 2000[$	60
$[2000 - 2500[$	25

(a) Représenter l'histogramme de cette distribution

(b) Représenter la courbe des fréquences cumulées

(c) Estimer alors le nombre de salariés dont le salaire mensuel se situe entre 1200 et 2000 frs.

17 [Histogramme] Construire l'histogramme ainsi que le polygone des fréquences à partir du tableau statistique suivant :

x_i	$[6;10[$	$[10;12[$	$[12;14[$	$[14;16[$	$[16;20[$
n_i	60	18	10	6	6

18 [Histogramme] Construire correctement l'histogramme des fréquences à partir des classes et effectifs suivants :

Classes	Effectifs
$[50;100[$	300
$[100;125[$	500
$[125;150[$	400
$[150;175[$	600
$[175;200[$	500
$[200;300[$	200

19 [Histogramme] On a établi la statistique représentant le nombre d'années de service de 50 employés d'une entreprise de nettoyage. Construire l'histogramme correspondant.

Années de service	$[2;4[$	$[4;10[$	$[10;11[$	$[11;16[$
Effectifs	6	12	22	10

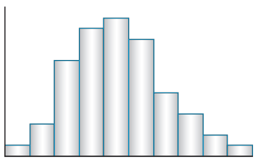
20 [Fréquences cumulées] Une courbe de fréquences cumulées est définie par la formule suivante :

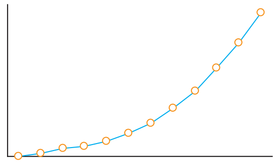
$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1 \\ 0,075x - 0,075 & \text{si } x \in [1;5[\\ 0,25x - 0,95 & \text{si } x \in [5;7[\\ \frac{2}{30}x + \frac{1}{3} & \text{si } x \in [7;10[\\ 1 & \text{si } x \geq 10 \end{cases}$$

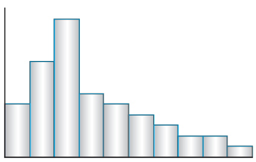
(a) Représenter graphiquement cette courbe des fréquences cumulées.

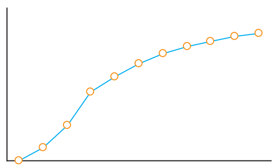
(b) Estimer la proportion de la population comprise entre 3 et 9 ([3; 9[).

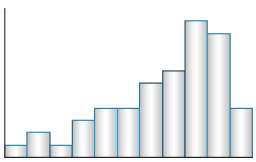
21 [Histogrammes] Associer les histogrammes suivants à leur courbe des fréquences cumulées.

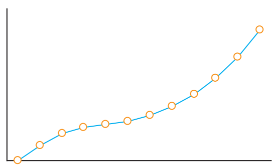
a)


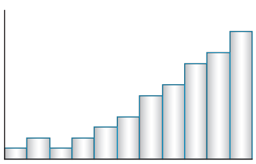
1)


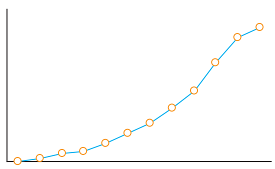
b)


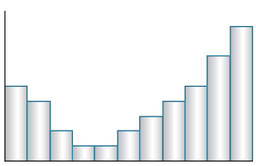
2)


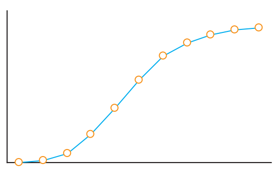
c)


3)


d)


4)


e)


5)


22 [Pointures particulières] Une statistique concernant les pointures de chaussures demandées dans un magasin est représentée par le tableau ci-après :

Pointure	Nombre de clients
$[a\ ;a+2[$	a
$[a+2;a+4[$	$6a$
$[a+4;a+6]$	$3a$

(a) Établir la courbe des fréquences cumulées.

(b) Quelle est la pointure maximum prise en compte sachant que 380 clients ont été concernés par cette statistique ?

23 [Probabilités de décès] Le tableau ci-après représente les probabilités annuelles de décès en milliers ($1000q_x$) pour différents âges x. Ces probabilités sont issues de la table de mortalité suisse SM 88-93 :

x	20	30	40	50	60	70	80	90
$1000q_x$	1,604	1,955	4,312	11,86	31,562	82,501	212,948	426,054

(a) Représenter cette distribution par un diagramme en colonnes.

(b) Représenter cette même distribution en utilisant la transformation $y = \log(1000q_x)$

24 [Loi de Moore] En 1975, Gordon Earle Moore cofondateur d'Intel prédit que le nombre de transistors des microprocesseurs sur une puce de silicium doublerai tous les deux ans. Bien qu'il ne s'agisse pas d'une loi au sens strict mais seulement d'une extrapolation empirique, cette prédiction appelée **loi de Moore** s'est révélée étonnamment correcte.

Le tableau ci-après indique le nombre de transistors moyen sur les puces des ordinateurs entre 1970 et 2005. Représenter ces valeurs sur un graphique semi-logarithmique.

Année	Nombre de transistors
1970	2 000
1975	5 000
1980	30 000
1985	275 000
1990	1 180 000
1995	4 600 000
2000	24 000 000
2005	125 000 000

25 [Tendance linéaire] Pour un produit donné, la demande en milliers d'unités (Y) a été mesurée en fonction de plusieurs prix proposés (X) en frs :

X	1	3	10	5	8	6	9	2	4	7
Y	8	8	7	7	6	6	6	7	8	7

(a) Comment s'appelle cette série statistique ?

(b) Représenter cette série par un nuage de points.

(c) Trouver le moyen d'afficher sur le graphique la courbe de tendance linéaire.

(d) Selon la tendance linéaire affichée, quelle pourrait être la demande en milliers d'unités si le prix proposé était de 11 frs ?

26 [Radar] Le tableau suivant indique les températures moyennes mensuelles observées à Paris en 1917 et en 2017. Utiliser un diagramme de type Radar pour illustrer ces deux séries statistiques.

Mois	1917	2017
Janvier	0,5	2,7
Février	−0, 1	7,7
Mars	4,4	11,1
Avril	6,9	11,6
Mai	17,2	16,5
Juin	19,6	21,1

Mois	1917	2017
Juillet	18,9	21,1
Août	17,4	20
Septembre	16,7	15,5
Octobre	9,2	14,4
Novembre	8,2	8,5
Décembre	0,4	5,8

27 [Pyramide des âges] Réaliser une pyramide des âges à partir des données suivantes issues d'une population fictive :

Âge	Hommes	Femmes
0	430	490
5	280	306
10	178	212
15	140	174
20	115	122
25	47	30
30	12	8

28 [Demi camembert] Réaliser un diagramme semi-circulaire permettant de représenter la répartition des groupes politiques dans un hémicycle de députés.

Libéraux	80
Socialistes	64
Centristes	60
Aucun	36

29 [Camembert] On souhaite réaliser un diagramme circulaire à partir d'un sondage effectué sur 1400 adolescentes ayant assisté au concert du groupe *One Direction*. La question posée était : «Quel est votre chanteur préféré du groupe ?»

Les réponses ont été consignées dans le tableau ci-après :

Chanteur	Effectifs	Fréquences	Angle en degrés
Liam Payne	350		
Niall Horan	210		
Zayn Malik	140		
Harry Styles	560		
Louis Tomlinson	140		
Total			

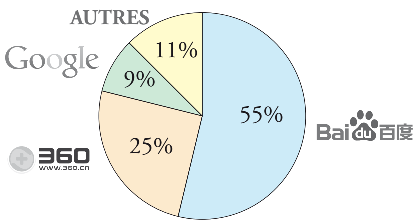
(a) Compléter ce tableau.

(b) Construire ce diagramme circulaire à la main.

30 [Niveau des étudiants] Le tableau suivant indique le niveau obtenu par 200 étudiants dans les filières d'économie, de mathématique et d'informatique. Représenter ces valeurs au moyen d'Excel faisant apparaître le niveau des étudiants par filière.

Filière	Passable	Bon	Très bon
Économie	12	24	4
Mathématiques	30	18	12
Informatique	78	18	4

31 [Part de marché] Le diagramme ci-dessous représente les parts de marché des différents moteurs de recherche en Chine en 2015.



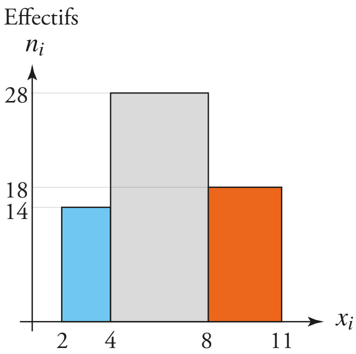
(a) Quel est le nom de ce diagramme ?

(b) Quelle est la variable étudiée ?

(c) Le caractère est-il qualitatif ou quantitatif ?

32 [Effectifs corrigés] On donne ci-après une distribution quelconque d'effectifs ainsi qu'un histogramme correspondant :

Classes	Effectifs (n_i)
$[2\,;4[$	14
$[4\,;8[$	28
$[8\,;11[$	18
Total	60



(a) Pourquoi cet histogramme est-il incorrect ?

(b) Proposer un histogramme faisant apparaitre des **effectifs corrigés** (n_i^c)

21.3 Problèmes et exercices de synthèse

33 [Hot-line] La hot-line d'une entreprise informatique a relevé jour après jour, au cours des derniers mois, le nombre de plaintes reçues. Les résultats bruts sont les suivants :

2	1	1	0	1	3	2	1	0	1	0	2	1	1	2	1	0	3	2	0
1	0	2	3	3	2	1	0	0	2	2	1	0	1	0	1	2	2	0	0
2	0	1	2	1	3	2	2	2	0	1	2	3	0	0	0	0	0	1	0
2	2	3	1	1	0	2	2	2	0	0	0	3	0	3	2	1	2	0	0
3	1	1	2	1	0	0	1	0	3	1	3	2	3	1	2	0	1	1	0

(a) Quelle est la nature de cette variable statistique ?

(b) Calculer les effectifs, les fréquences, ainsi que les fréquences cumulées correspondantes.

(c) Représenter ces données sous la forme d'un diagramme en colonnes et représenter la courbe des fréquences cumulées correspondante.

(d) Dans quelle proportion observe-t-on au moins 2 plaintes par jour ?

(e) Dans quelle proportion observe-t-on au plus 2 plaintes par jour ?

34 [Agriculture] Un recensement agricole en 2015 a permis de classer les exploitations agricoles selon la surface agricole utilisée. Les résultats sont présentés ci-après :

Taille exploitation en ha	Effectifs
$[0; 20[$	125 000
$[20; 50[$	44 000
$[50; 100[$	62 000
$[100; 200[$	35 000
$[200; 1000[$	12 000
Total	**278 000**

(a) Déterminer la population ainsi que le caractère étudié.

(b) Comment appelle-t-on les intervalles de la première colonne ?

(c) Pourquoi a-t-on fait ce regroupement ?

(d) Quel est le type de cette variable statistique ?

(e) Par quel type de diagramme peut-on représenter ce tableau ?

35 [Club de sport] La série suivante représente l'âge de 50 joueurs d'un club de tennis :

33	30	19	29	17	31	33	29	30	28
32	22	27	27	23	31	28	26	20	34
30	35	27	32	26	29	27	22	28	18
23	31	36	24	27	30	35	31	40	31
41	25	30	38	25	29	36	28	39	28

(a) Organiser cette série statistique en 5 classes d'amplitude égale en prenant $b_0 = 16,5$.

(b) Construire le tableau des effectifs et des fréquences.

(c) Représenter l'histogramme correspondant ainsi que le polygone des fréquences.

(d) Construire la courbe des fréquences cumulées.

(e) Quelle est la proportion de personnes dont l'âge est compris entre 25 et 35 ans ?

36 [Fratrie] On a relevé le nombre de frères et soeurs des 24 élèves d'une classe :

3	0	1	2	3	0	2	1
2	1	0	0	2	3	0	1
2	0	3	0	0	2	1	1

(a) Quel est le type de cette variable statistique ?

(b) Organiser ces données dans un tableau faisant intervenir le nombre de frères et soeurs (x_i) ainsi que les effectifs correspondants (n_i).

(c) Représenter ces données à l'aide d'un diagramme en barres.

(d) Quelle est la valeur de la variable ayant le plus grand effectif ?

37 [Vitesses] La gendarmerie de Fribourg a relevé sur l'autoroute les vitesses suivantes un samedi soir.

Vitesses (km/h)	Effectifs
[80 ; 100 [	4
[100 ; 120 [	34
[120 ; 140 [	84
[140 ; 160 [	58
[160 ; 180 [	20
Total	**200**

(a) Quel est le type de cette variable statistique ?

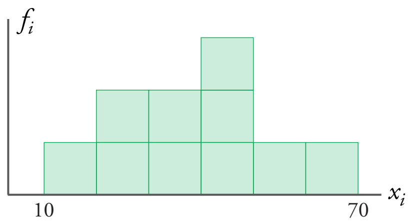
(b) Construire l'histogramme des fréquences ainsi que le polygone des fréquences.

(c) Construire la courbe des fréquences cumulées.

(d) Combien d'automobilistes roulaient trop vite ?

(e) Combien d'automobilistes seront amendés, sachant qu'une marge de 4% est déduite de la vitesse réelle observée ?

38 [Histogramme] Cet histogramme représente la distribution d'une variable statistique continue X. On a regroupé les valeurs en 6 classes de longueur égale.



Sachant que l'étude a porté sur un population de 200 individus :

(a) établir le tableau des x_i, n_i, f_i et F_i

(b) tracer la courbe des fréquences cumulées.

(c) évaluer les proportions suivantes :

$$P(X \geq 30) \qquad P(20 < X \leq 45) \qquad P(X < 28)$$

39 [Gazette] Dans un secteur économique on a mesuré les salaires mensuels moyens entre les ouvriers et les cadres :

Années	Cadres	Ouvriers
2007	9600	4100
2008	9800	4400

À partir de ces données, établir 3 graphiques différents permettant :

(a) de montrer un écart important de salaire entre les cadres et les ouvriers, afin d'illustrer la gazette des ouvriers.

(b) de montrer que l'augmentation salariale est plus marquée chez les ouvriers que chez les cadres, afin d'illustrer la gazette des cadres.

(c) de montrer que les disparités de salaire entre les cadres et les employés ont tendance à s'atténuer, afin d'illustrer une revue économique du secteur en question.

40 [Garderies] La Confédération suisse demande à toutes les nouvelles structures d'accueil extra-familiales pour enfants d'effectuer une statistique de fréquentation des enfants accueillis. Les données doivent concerner le dernier mois d'exploitation. Pour une garderie donnée, on dispose des informations suivantes. Pour chaque jour, il y a deux cases, matin ou après midi.

Nom	**Âge**	**Lundi**		**Mardi**		**Mercredi**		**Jeudi**		**Vendredi**	
Michel	3,5	☒	☒	☐	☐	☒	☐	☒	☒	☒	☒
Sylvie	1,5	☒	☒	☒	☒	☒	☒	☒	☒	☐	☐
Marc	5	☐	☐	☒	☐	☒	☐	☒	☐	☐	☐
Célia	6	☒	☒	☒	☒	☒	☒	☒	☒	☒	☒
Georges	1,5	☒	☒	☒	☒	☒	☒	☐	☐	☐	☐
Rémi	4	☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐	☒	☐	☒
Lina	3,5	☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐	☒	☐	☒
Colette	2	☒	☒	☐	☐	☒	☒	☒	☒	☐	☐
Albert	3	☐	☐	☒	☒	☒	☒	☐	☐	☐	☐
Chloé	7,5	☒	☒	☒	☒	☒	☒	☒	☒	☒	☒

Répondre au questionnaire suivant :

Combien d'enfants ont été accueillis au total ?

selon l'âge

- enfants < 2 ans
- enfants de 2 à 4 ans
- enfants de 5 à 7 ans
- enfants > 7 ans

par semaine

- 1 jour par semaine
- 2 jours par semaine
- 3 jours par semaine
- 4 jours par semaine
- 5 jours et plus par semaine

*par jour**

- journée complète
- demi-journée

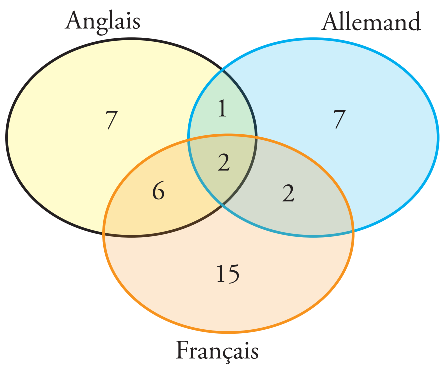
∗ *Plusieurs choix possibles. Par exemple, un enfant fréquente la crèche le lundi toute la journée ainsi qu'une demi journée le mercredi et le jeudi, inscrire : 1 croix dans journée complète et 1 croix dans demi journée.*

41 [Simulation] On souhaite simuler une série de 1000 lancers de dés. Pour cela, on entre dans la première cellule du tableur la formule suivante :

```
=ENT(ALEA()*6)+1
```

On recopie ensuite cette fonction vers les 1000 lignes inférieures. En utilisant la fonction NB.SI, établir le tableau statistique de ces 1000 lancers. Sur la même feuille, établir ensuite le diagramme en colonne de cette distribution statistique.
En appuyant plusieurs fois sur la touche F9, on simule chaque fois 1000 lancers de dés et le graphique se modifie également. Que constate-t-on en répétant plusieurs fois cette opération ? Justifier la réponse.

42 [Diagramme de Venn] Le diagramme de Venn ci-après représente le nombre de langues parlées par l'ensemble du personnel d'une petite PME. Représenter ces mêmes données par un diagramme en barre faisant ressortir le nombre de personnes parlant une, deux ou trois langues.



43 [Échelle logarithmique] Construire un quadrillage semi-log comportant en abscisses et en ordonnées les valeurs suivantes :

Abscisses	1960	1970	1980	1990	2000	2010
Ordonnées	5	10	50	100	500	1000

44 [Classements] Une enquête a été menée auprès de 13 592 joueurs de Swisstennis. Le classement de chaque joueur a été noté, du moins bon R9 au meilleur N1. Les résultats sont donnés dans le fichier Excel swisstennis.xlsx [Ressources Promath : swisstennis]

(a) Établir un tableau d'effectif pour chaque modalité

(b) Établir un graphique en barres

(c) Quels sont les 3 classements regroupant le plus de joueurs ?

45 [Défauts de fabrication] Une usine fabrique des bardeaux en bois qui ont en principe une largeur de 10 cm. Pour qu'ils soient conformes par le distributeur, il faut que leur largeur ne varie pas plus qu'un centimètre. Le distributeur accepte des lots s'il y a moins de 5% de pièces inacceptables.

Un lot de 12 000 bardeaux a été mesuré. Les résultats sont donnés dans le fichier Excel usinage.xlsx [Ressources Promath : usinage]

On demande :

(a) de construire un histogramme avec des classes d'amplitude 0,2

(b) de calculer le nombre de pièces acceptables

(c) de calculer la proportion de pièces inacceptables

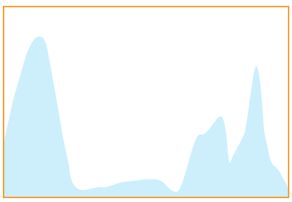
(d) Le lot devrait-il être accepté par le distributeur ?

46 [Histogramme] On rencontre l'histogramme sur de nombreux types d'appareils photos ainsi que dans les logiciels de retouche comme Photoshop ou Gimp par exemple. Cette courbe offre une visualisation de l'exposition d'une photo. À gauche se trouvent les tons foncés et à droite les tons clairs (de 0 à 255, 0 correspondant au noir et 255 au blanc). Plus la courbe est haute plus il y a de valeurs dans tel ou tel ton. Associer la photo à son histogramme correspondant :

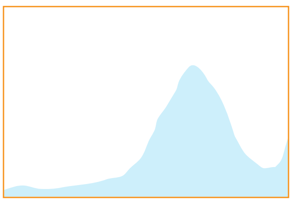
a)

b)

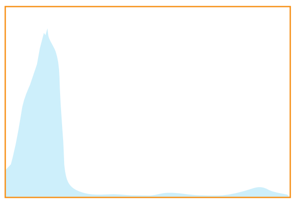
c)



1)



2)



3)

47 ☺ [Défi] Voici un extrait du roman lipogrammatique, La Disparition (1969), de Georges Perec qui compte quelques 300 pages : «*Un marin nantuckais immortalisait un combat colossal qui, par trois fois, opposait Achab au grand Cachalot blanc, à Moby Dick.*»

(a) Établir une statistique des voyelles rencontrées dans cette phrase

(b) Pourquoi le titre de ce livre ?

Chapitre 22

Mesures de tendance centrale et de position

Objectifs du chapitre

- savoir calculer et interpréter les mesures de tendance centrale (mode, médiane, moyenne).
- choisir la mesure appropriée en fonction de la situation.
- savoir calculer les différents quartiles d'une distribution discrète et continue.
- savoir calculer d'autres quantiles d'une distribution discrète et continue.

Les variables quantitatives, individuelles ou groupées par valeurs ou par classes, peuvent être résumées par des caractéristiques dites de **tendance centrale** ou de **position**. Ces caractéristiques mettent de côté le caractère individuel de chacune des données pour mettre l'accent sur leur caractère collectif. Les valeurs centrales usuelles sont le **mode**, la **médiane** et la **moyenne**. Les valeurs de position usuelles sont les **quartiles Q1** et **Q2**. Mais il en existe d'autres...

22.1 Les mesures de tendance centrale

22.1.1 Le mode

Le **mode** d'une série statistique est la valeur de la variable la plus fréquemment observée. On le note M_o ou encore $M_o(X)$ si l'on veut préciser qu'il concerne la variable statistique X.

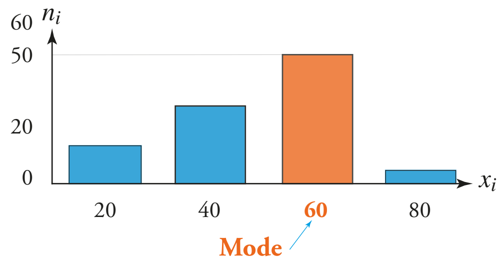
Variable discrète

Le mode est la valeur de la variable possédant le plus grand effectif ou la plus grande fréquence. Le mode se détermine immédiatement à partir du tableau des effectifs ou des fréquences ou sur le diagramme correspondant.

Exemple 22.1

Calculer le mode à partir du tableau statistique ou du diagramme suivant :

Âge x_i	Effectifs n_i	Fréquences f_i
20	15	0,15
40	30	0,3
60	50	0,5
80	5	0,05
Total	**100**	**1**

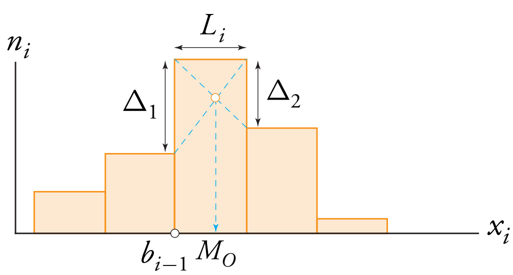


Solution

Dans le tableau, ou sur le diagramme, on lit immédiatement que la variable ayant le plus grand effectif ou la plus grande fréquence est $x_i = 60$.

Variable continue

Pour déterminer le mode dans une distribution continue, on commence par repérer la classe ayant le plus grand effectif ou la plus grande fréquence (**classe modale**). On détermine ensuite le mode de façon plus précise à l'intérieur de cette classe modale au moyen de la construction géométrique et mathématique suivante :



$$M_o = b_{i-1} + \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} L_i$$

avec :

b_{i-1} Borne inférieure de la classe modale ;

Δ_1 Différence d'effectif (ou de fréquence) entre la classe modale et la classe précédente ;

Δ_2 Différence d'effectif (ou de fréquence) entre la classe modale et la classe suivante ;

L_i Largeur de la classe modale.

Exemple 22.2

Calculer le mode à partir du tableau statistique suivant :

Âge x_i	Effectifs n_i	Fréquences f_i
$[10;30[$	15	0.15
$[30;50[$	30	0.3
$[50;70[$	40	0.4
$[70;90[$	15	0.15
Total	**100**	**1**

Solution

1. On repère la classe modale (classe ayant le plus grand effectif) : $[50;70[$
2. On détermine les différentes valeurs :
   $b_{i-1} = 50$ $\quad \Delta_1 = 40-30 = 10$ $\quad \Delta_2 = 40-15 = 25$ et $L_i = 70-50 = 20$
3. On calcule :

$$M_o = b_{i-1} + \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} L_i = 50 + \frac{10}{10+25} \times 20 \simeq 55,71$$

Formule du mode
Démonstration dans le cas d'une variable continue.

Classes d'amplitude inégales

Si les amplitudes sont inégales, il faut au préalable corriger les hauteurs. On retient alors comme classe modale celle qui présente la hauteur (ou l'effectif corrigé) la plus élevée. Le calcul du mode se fait ensuite de manière identique.

Exemple 22.3

Calculer le mode à partir du tableau statistique suivant :

Âge x_i	Effectifs n_i
$[20;30[$	35
$[30;50[$	50
$[50;60[$	15
Total	**100**

Solution

À première vue, on pourrait penser que la classe modale se situe entre 30 et 50. Mais cette classe étant deux fois plus grande que les autres, il faut donc corriger les hauteurs :

Âge x_i	Effectifs n_i	Longueurs L_i	Hauteurs h_i
$[20\,;30[$	35	10	3,5
$[30\,;50[$	25	20	2,5
$[50\,;60[$	15	10	1,5
Total	**100**		

La classe modale est maintenant la classe $[20\,;30[$ avec :
$b_{i-1} = 20 \quad \Delta_1 = 3,5 - 0 = 3,5 \quad \Delta_2 = 3,5 - 2,5 = 1$ et $L_i = 30 - 20 = 10$.

$$M_o = 20 + \frac{3,5}{3,5+1} \times 10 \simeq 27,78$$

Remarques

- Si la distribution est donnée sous la forme d'une série de valeurs individuelles, toutes différentes, il n'y a bien sûr pas de mode. Une telle distribution porte alors le nom de distribution **uniforme**.
- Il peut exister des distributions présentant deux ou plusieurs modes. On parle alors de distribution **bimodale** ou **plurimodale**.

22.1.2 La médiane

La **médiane** d'une série statistique est la valeur M_e de la variable telle qu'il y ait autant d'observations plus petites que d'observations plus grandes que M_e, ou encore, telle que la moitié des observations soient inférieures à M_e. Que l'on soit en présence d'une distribution discrète ou continue, la détermination de la médiane se fait en deux temps :

1. Mise en ordre des observations par valeurs croissantes [statistique d'ordre].
2. Recherche d'une valeur centrale dans la série ainsi ordonnée.

Valeurs individuelles

- Si l'on est en présence d'un nombre impair d'observations, la médiane correspond à la valeur de l'observation du milieu.
- Si l'on est en présence d'un nombre pair d'observations, la médiane correspond à la valeur moyenne des deux observations centrales.

Exemple 22.4

Calculer la médiane des 5 nombres suivants :

$$15 \quad 17 \quad 6 \quad 9 \quad 3$$

Solution

On classe les observations par ordre croissant pour obtenir la valeur centrale $M_e = \mathbf{9}$.

$$3 \quad 6 \quad \mathbf{9} \quad 15 \quad 17$$

Il y a autant d'observations plus petites que 9 que d'observations plus grandes que 9.

Exemple 22.5

Calculer la médiane des 6 nombres suivants :

$$15 \quad 17 \quad 6 \quad 9 \quad 3 \quad 34$$

Solution

On classe les observations par ordre croissant. La médiane correspond à la moyenne des deux valeurs centrales 9 et 15. Donc $M_e = \mathbf{12}$.

$$3 \quad 6 \quad \underbrace{\mathbf{9} \mid \mathbf{15}}_{\mathbf{12}} \quad 17 \quad 34$$

Il y a autant d'observations plus petites que 12, (les valeurs 3, 6 et 9) que d'observations supérieures à 12, (les valeurs 15, 17 et 34)

✎ Le calcul de la médiane peut être défini plus formellement si on fait usage d'une **statistique d'ordre** c'est-à-dire en numérotant de manière croissante les valeurs individuelles x_i comme suit : $x_{[1]}, x_{[2]}, x_{[3]}, \cdots, x_{[N]}$ ou encore $x_{(1)}, x_{(2)}, x_{(3)}, \cdots, x_{(N)}$

$$M_e = \begin{cases} x_{\left[\frac{N+1}{2}\right]} & \text{Si N est impair} \\ \dfrac{x_{\left[\frac{N}{2}\right]} + x_{\left[\frac{N}{2}+1\right]}}{2} & \text{Si N est pair} \end{cases}$$

Valeurs groupées

Dans le cas de valeurs groupées, la médiane se calcule à partir des fréquences cumulées (F_i) ou des effectifs cumulés (N_i).

M_e = première valeur de x_i tel que $F_i \geq 0,5$ ou $N_i \geq N/2$

✎ Si x_i est tel que $F_i = 0,5$, ou $N_i = N/2$, alors $M_e = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$

Exemple 22.6

Calcul de la médiane dans différentes situations.

Situation 1

Modalités x_i	Effectifs n_i	Effectifs cumulés N_i	Fréquences f_i	Fréquences cumulées F_i
2	20	20	0,4	0,4
4	15	35	0,3	0,7
6	10	45	0,2	0,9
8	5	50	0,1	1
Total	**50**		**1**	

La première valeur de x_i dont les effectifs cumulés N_i dépassent 50% (ou dont les fréquences cumulées F_i dépassent 0,5) est $x_i = 4$. Donc $M_e = 4$.

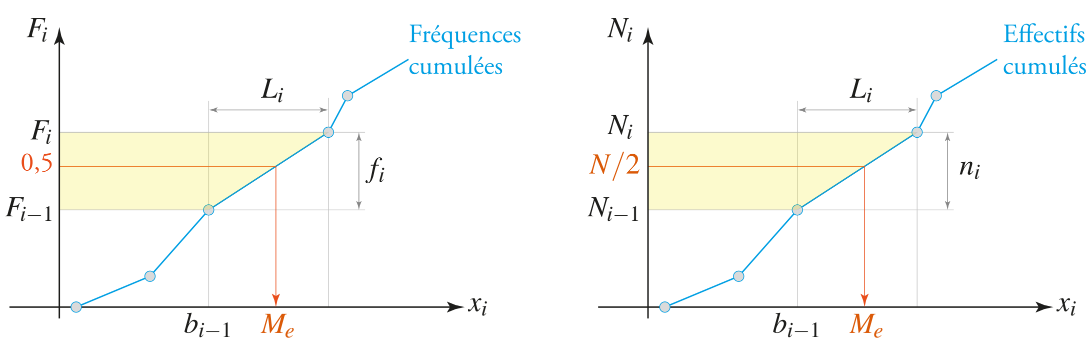
Situation 2

Modalités x_i	Effectifs n_i	Effectifs cumulés N_i	Fréquences f_i	Fréquences cumulées F_i
2	5	5	0,1	0,1
4	20	25	0,4	0,5
6	15	40	0,3	0,8
8	10	50	0,2	1
Total	**50**		**1**	

La première valeur de x_i dont les effectifs cumulés N_i dépassent 50% (ou dont les fréquences cumulées F_i dépassent 0,5) est $x_i = 4$. Cependant, comme F_i est précisément égal à 0,5, la médiane est donc $(4 + 6)/2 = 5$.

Variable continue

Dans le cas d'une variable continue, le calcul de la médiane se base sur la courbe des fréquences cumulées ou des effectifs cumulés :



Le calcul de la médiane s'effectue comme suit :

1. Déterminer la **classe médiane**, c'est-à-dire la classe comprenant le 50% des fréquences cumulées (F_i) ou des effectifs cumulés (N_i).
2. Utiliser l'une des deux formules :

$$\begin{aligned} M_e &= b_{i-1} + \frac{0,5 - F_{i-1}}{f_i} L_i \\ &= b_{i-1} + \frac{N/2 - N_{i-1}}{n_i} L_i \end{aligned}$$

avec :

b_{i-1} Borne inférieure de la classe médiane ;
F_{i-1} Fréquence cumulée de la classe qui précède la classe médiane ;
N_{i-1} Effectif cumulé de la classe qui précède la classe médiane ;
f_i Fréquence de la classe médiane ;
n_i Effectif de la classe médiane ;
L_i Largeur de la classe médiane.

Formule de la médiane
Démonstration dans le cas d'une variable continue.

Exemple 22.7

Calculer la médiane de la série statistique suivante :

x_i	n_i	f_i	F_i
$[2-4[$	2	0,2	0,2
$[4-6[$	4	0,4	0,6
$[6-8[$	4	0,4	1
Total	**10**	**1**	

Solution

1. La classe médiane est la classe $[4-6[$, car elle comprend le 50% des F_i
2. On détermine : $b_{i-1} = 4$, $F_{i-1} = 0,2$, $f_i = 0,4$ et $L_i = 6 - 4 = 2$
3. On calcule :

$$M_e = b_{i-1} + \frac{0,5 - F_{i-1}}{f_i} L_i = 4 + \frac{0,5 - 0,2}{0,4} \times 2 = 5,5$$

22.1.3 La moyenne arithmétique

De tous les indicateurs destinés à définir une valeur centrale, la moyenne arithmétique notée $\overline{x}$ est certainement la plus connue et la plus utilisée.

Valeurs individuelles

Dans le cas de valeurs individuelles, on détermine la moyenne arithmétique en additionnant toutes les valeurs puis en divisant le résultat par le nombre de valeurs. Ainsi, si l'effectif est composé de N valeurs $x_1, x_2, \cdots, x_N$ on a :

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_N}{N} \quad \text{ou encore} \quad \overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$$

Exemple 22.8

Calculer la moyenne de 6 résultats : 4, 6, 6, 6, 10 et 10

Solution

$$\overline{x} = \frac{4+6+6+6+10+10}{6} = 7$$

Valeurs groupées

Lorsque les valeurs sont groupées en k modalités, on calcule une moyenne dite **pondérée**. Cette moyenne s'obtient au moyen de la formule :

$$\overline{x} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \cdots + n_k x_k}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{k} n_i x_i$$

ou, en utilisant les fréquences :

$$\overline{x} = f_1 x_1 + f_2 x_2 + \cdots + f_k x_k = \sum_{i=1}^{k} f_i x_i$$

Exemple 22.9

Calculer la moyenne de 6 résultats : 4, 6, 6, 6, 10 et 10 en groupant les valeurs.

Solution

- En utilisant les effectifs on obtient :

$$\overline{x} = \frac{1 \times 4 + 3 \times 6 + 2 \times 10}{6} = \frac{4 + 18 + 20}{6} = \frac{42}{6} = 7$$

- En utilisant les fréquences on obtient :

$$\overline{x} = \frac{1}{6} \times 4 + \frac{3}{6} \times 6 + \frac{2}{6} \times 10 = \frac{4}{6} + \frac{18}{6} + \frac{20}{6} = \frac{42}{6} = 7$$

- Ou de façon plus synthétique :

x_i	n_i	f_i	$n_i x_i$	$f_i x_i$
4	1	1/6	4	4/6
6	3	3/6	18	18/6
10	2	2/6	20	20/6
Total	$N = \mathbf{6}$	1	**42**	$42/6 = 7$

Variable continue

Dans le cadre d'une variable continue on calcule la moyenne de la même manière, mais en utilisant les centres de classes x_i.

Exemple 22.10

Calculer la moyenne arithmétique de cette série statistique répartie en 3 classes :

Classes	x_i	n_i	f_i	$n_i x_i$	$f_i x_i$
$[2-4[$	3	2	0,2	6	0,6
$[4-6[$	5	4	0,4	20	2
$[6-8[$	7	4	0,4	28	2,8
Total		10	1	54	5,4

Solution

- Avec les effectifs :

$$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{3} n_i x_i = \frac{54}{10} = 5,4$$

- Avec les fréquences :

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{3} f_i x_i = 5,4$$

22.1.4 Comparatif des mesures de tendance centrale

	Mode	**Médiane**	**Moyenne**
S'applique aux variables qualitatives	OUI	NON	NON
Linéarité $y = ax + b$	$M_o(y) = aM_o(x) + b$	$M_e(y) = aM_e(x) + b$	$\bar{y} = a\bar{x} + b$
Résiste (robustesse) aux valeurs extrêmes	NON	OUI	NON
Information	FAIBLE	BONNE	BONNE
Utilisation	RARE	FRÉQUENT	FRÉQUENT

Linéarité de la transformation affine y=ax+b
Démonstration pour le mode , la médiane et la moyenne.

Exercices d'application de la section 22.1

1 [Tendance centrale] Calculer de tête le mode, la médiane et la moyenne des valeurs suivantes :

$$2 \quad 3 \quad 3 \quad 5 \quad 7 \quad 10$$

2 [Tendance centrale] On donne les 20 valeurs individuelles suivantes :

$$4 \quad 2 \quad 4 \quad 4 \quad 2 \quad 6 \quad 5 \quad 2 \quad 5 \quad 4 \quad 2 \quad 4 \quad 5 \quad 4 \quad 2 \quad 5 \quad 4 \quad 4 \quad 5 \quad 5$$

(a) Organiser ces valeurs au sein d'un tableau faisant intervenir les effectifs et les fréquences

(b) Calculer le mode, la médiane et la moyenne

3 [Requête Google] Le tableau suivant indique le classement du nombre de mots tapés par les internautes lors d'une requête sur Google.

Nombre de mots	Pourcentage
un	17,3 %
deux	30,4 %
trois	25,3 %
quatre	13,7 %
cinq	7,1 %
six	3,2 %
sept	1,5 %
huit et plus	1,5 %

(a) Calculer le nombre moyen de mots tapés.

(b) Combien de mots tapent plus de la moitié des internautes ?

(c) Quel est le nombre de mots le plus tapé ?

4 [Médiane] On donne les 10 valeurs individuelles suivantes :

10 5 9 9 10 5 4 5 9 5

Calculer la médiane en utilisant :

(a) la formule relative aux valeurs individuelles.

(b) la formule relative aux valeurs groupées.

5 [Mode] On a demandé aux employés d'une entreprise le moyen de transport utilisé pour venir au travail. Les réponses ont été les suivantes :

en train :	17
en voiture :	42
à pied :	41
en vélo :	34
en bus :	42
autres :	9

Laquelle de ces propositions est correcte (0, 1 ou plusieurs réponses possibles) ?

(a) La série possède un mode qui est 42.

(b) La série possède deux modes qui sont 42 et 42.

(c) La série possède deux modes qui sont en voiture et en bus.

(d) La série ne possède aucun mode car c'est une série qualitative.

6 [Constructeurs automobiles] Le tableau suivant décrit la production de voitures dans le monde en 2007 des principaux constructeurs :

Groupe	Daimler Chrysler	Fiat	Ford	General Motors	Honda	Hyundai
Production (en millions)	1,8	1,6	3,3	4,6	2,9	2,2

Groupe	Nissan	PSA	Renault	Suzuki	Toyota	Volkswagen
Production (en millions)	2,4	2,9	2,1	1,5	5,4	4,8

(a) Quelle est la population, la variable, le type du caractère de la variable ?

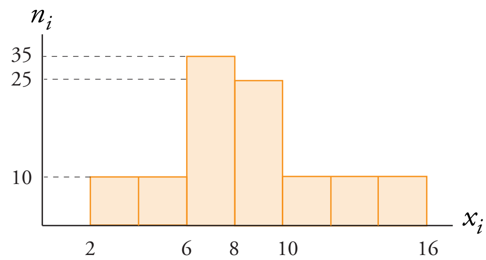
(b) Quel est le mode ?

(c) Quelle est la moyenne ?

7 [Mode] À partir de l'histogramme ci-après, déterminer :

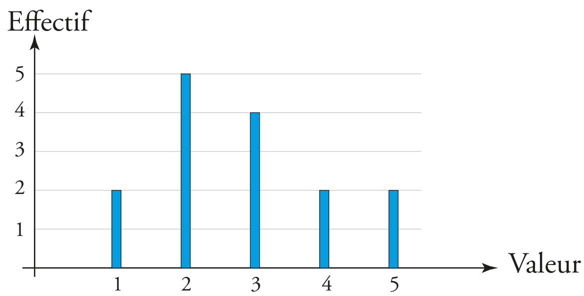
(a) Le mode d'une manière graphique (approximative).

(b) Le mode avec une formule.

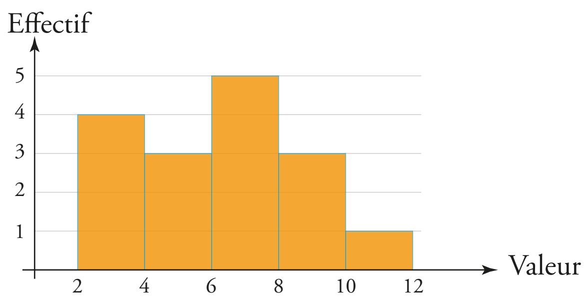


8 [Salaire médian] Que signifie cette affirmation trouvée dans une revue économique : « En France, pour les cadres, le salaire médian proposé à l'embauche se situe aux alentours de 38 K euros» ?

9 [Tendance centrale] Calculer le mode, la moyenne et la médiane d'une série statistique décrite par le diagramme suivant :



10 [Tendance centrale] Calculer le mode, la moyenne et la médiane d'une série statistique décrite par le diagramme suivant :



11 [Poste] On a enregistré au guichet d'une poste le poids (arrondi au kg) de 20 colis envoyés en une heure.

3	3	2	3	1	2	1	2	3	4
4	1	1	1	3	1	4	2	4	1

(a) Regrouper ces données dans un tableau.

(b) Calculer le poids moyen.

(c) Calculer le mode.

(d) Calculer le poids médian.

(e) Calculer le poids médian en utilisant les valeurs individuelles.

12 [Exploitations viticoles] On donne dans le tableau suivant, la fréquence (en %) des exploitations viticoles d'une région en fonction de leur superficie (en ha).

Superficie (en ha)	Fréquences (en %)
De 0 à moins de 5	8
De 5 à moins de 10	14
De 10 à moins de 15	12
De 15 à moins de 20	20
De 20 à moins de 25	18
De 25 à moins de 30	14
De 30 et plus	14

(a) Déterminer graphiquement la médiane de cette distribution ?

(b) Interpréter le résultat obtenu.

13 [Âge d'enfants] Dans une nouvelle entreprise, on a relevé l'âge des enfants du personnel :

Âge	Nombre d'enfants
moins de 2 ans	6
de 2 à 4 ans	8
de 4 à 6 ans	4
de 6 à 8 ans	3
de 8 à 10 ans	2
de 10 à 12 ans	2

(a) Calculer l'âge moyen.

(b) Calculer l'âge modal.

(c) Calculer l'âge médian.

14 [Appels téléphoniques] Le tableau ci-après représente la fréquence quotidienne d'appels téléphonique auprès d'un standard. Calculer le nombre médian d'appels en utilisant une approche graphique.

Nombre d'appels	Fréquence en %
moins de 100	25
entre 100 et 200	50
entre 200 et 500	15
plus de 500	10

15 [Âge d'individus] On a mesuré l'âge de 42 individus pris au hasard dans une population. Déterminer l'âge médian de cet échantillon.

Âge	Effectifs
$0-20$	5
$20-40$	12
$40-60$	18
60–	7

16 [Plusieurs modes] Calculer les différents modes de la distribution statistique suivante :

Classes	Effectifs
$[18;20[$	107
$[20;22[$	110
$[22;24[$	91
$[24;28[$	220

17 [Mode] Le tableau statistique suivant indique le nombre d'heures d'utilisation d'un certain appareil ménager. La statistique a été faite auprès d'un échantillon de 235 consommatrices.

Nbre d'heures	<30	$[30-60[$	$[60-90[$	$[90-120[$	$[120-200[$	≥ 200
Effectif	12	42	75	60	27	21

Calculer le mode de cette distribution.

18 [Médiane] Après avoir trié par ordre croissant une série statistique comportant 166 observations $x_1, x_2, \cdots, x_{166}$ et dont on a constaté que ces observations étaient liées par la relation $x_i = i + 7$, calculer la médiane de cette série statistique.

19 [Transformation affine] On donne les 10 valeurs individuelles suivantes d'une variable statistique X :

$$7 \quad 5 \quad 5 \quad 4 \quad 5 \quad 7 \quad 10 \quad 5 \quad 5 \quad 7$$

(a) Calculer $\overline{x}$, M_e et M_o.

(b) Calculer les valeurs individuelles de la variable Y donnée par : $Y = 3X + 1$.

(c) Calculer pour cette variable $\overline{y}$, M_e et M_o.

20 [Transformation affine] Dans une entreprise, la distribution des salaires est donnée comme suit :

Salaires en frs	Effectifs
[3000 ; 5000 [	24
[5000 ; 7000 [	16
[7000 ; 9000 [	10
TOTAL	50

(a) Calculer le salaire modal, moyen et médian.

(b) Que devient le salaire modal, moyen et médian, si, à la suite d'une négociation, il est prévu d'augmenter les salaires de 5% et d'accorder une prime mensuelle de déplacement de 80 frs à chaque collaborateur.

22.2 Les mesures de position

22.2.1 Les quartiles

Les **quartiles** sont des valeurs qui séparent un ensemble de données placées en ordre croissant en quatre parties égales, c'est-à-dire comprenant le même nombre de données.

Une série statistique possède trois quartiles, comme l'illustre l'exemple suivant :

		Q_1			$Q_2 = M_e$			Q_3		
3	4	$\downarrow$	4	6	$\downarrow$	7	8	$\downarrow$	8	9
		4			6,5			8		

- Le premier quartile (Q_1) sépare le premier quart (25% inférieurs) des données du reste des données (75% supérieurs) ;
- La médiane (ou second quartile Q_2) sépare les données en deux parties égales ;
- Le troisième quartile (Q_3) sépare les trois premiers quarts (75% inférieurs) des données du reste des données (25% supérieurs).

Remarque

Dans l'exemple précédent, les 3 quartiles sont facilement identifiables. Mais comment calculer Q_1 dans la situation suivante ?

		Q_1			$Q_2 = M_e$			Q_3		
3	**4**	$\downarrow$	**5**	6	$\downarrow$	7	8	$\downarrow$	8	9
		?			6,5			8		

Les méthodes de calcul peuvent diverger :

- La solution classique, et utilisée dans cet ouvrage, consiste à calculer $r = N/4$ pour le premier quartile et $r = 3N/4$ pour le troisième. Puis à prendre la valeur de rang supérieur si r n'est pas entier.[1]
  Ici : $r = 8/4 = 2$. Donc Q_1 est la valeur de rang 2 c'est-à-dire $Q_1 = 4$.
- La TI-84 fait le choix de prendre pour Q_1 la médiane des valeurs inférieures à la médiane et pour Q_3 la médiane des valeurs supérieures. Ici, la médiane des valeurs inférieures 3;4;5;6 est 4,5. Donc $Q_1 = 4,5$ [obtenu par la séquence STAT/-CALC/1VARSTAT]
- Excel calcule $r = \frac{1}{4}(N+1)$ pour le premier quartile et $r = \frac{3}{4}(N+1)$ pour le troisième. Excel interpole ensuite linéairement entre les rangs voisins. Ici : $r = 9/4 = 2,25$. Donc $Q_1 = 4 \times 0,75 + 5 \times 0,25 = 4,25$ [fonction CENTILE.EXCLURE(plage ;0.25)]

Les quartiles
Différentes méthodes de calcul

Valeurs groupées

Pour une série groupée par modalités, la solution classique consiste à calculer Q_1 et Q_3 comme suit :

- $Q1$: Première valeur de x_i dont $F_i \geq 0,25$ ou $N_i \geq N/4$
- $Q3$: Première valeur de x_i dont $F_i \geq 0,75$ ou $N_i \geq 3N/4$

Exemple 22.11

Calculer Q_1, Q_2 et Q_3 de la série statistique suivante :

x_i	n_i	f_i	F_i
7	4	0,08	0,08
10	9	0,18	0,26
15	24	0,48	0,74
20	11	0,22	0,96
33	2	0,04	1
Total	**50**	**1**	

Solution

On a immédiatement : $Q_1 = 10$, $Q_2 = M_e = 15$ et $Q_3 = 20$.

1. Cette méthode est préconisée par l'Éducation nationale en France.

Variable continue

Par analogie au calcul de la médiane on effectue les étapes suivantes pour déterminer les quartiles 1 et 3 :

1. On détermine la classe i contenant le 25% respectivement 75% des fréquences cumulées.
2. On calcule Q_1 et Q_3 au moyen des formules suivantes :

$$Q_1 = b_{i-1} + \frac{0,25 - F_{i-1}}{f_i} L_i \qquad Q_3 = b_{i-1} + \frac{0,75 - F_{i-1}}{f_i} L_i$$

avec :

b_{i-1} Borne inférieure de la classe i ;
F_{i-1} Fréquence cumulée de la classe $i-1$;
f_i Fréquence de la classe i ;
L_i Largeur de la classe i ;

Exemple 22.12

Calculer Q_1, Q_2 et Q_3 de la série statistique suivante :

Classes	n_i	f_i	F_i
$[5-10[$	2	0,04	0,04
$[10-15[$	7	0,14	0,18
$[15-20[$	8	0,16	0,34
$[20-25[$	17	0,34	0,68
$[25-30[$	11	0,22	0,9
$[30-35[$	4	0,08	0,98
$[35-40[$	1	0,02	1
Total	**50**	**1**	

Solution

- $Q_1 = 15 + \dfrac{0,25 - 0,18}{0,16} \times 5 \simeq 17,19$
- $Q_2 = M_e = 20 + \dfrac{0,5 - 0,34}{0,34} \times 5 \simeq 22,35$
- $Q_3 = 25 + \dfrac{0,75 - 0,68}{0,22} \times 5 \simeq 26,59$

22.2.2 Les quantiles

Les quantiles sont une généralisation des quartiles et cherchent à décrire une position particulière. Parmi les principaux quantiles, on distingue :

- les **quartiles**, qui divisent un ensemble d'observations en 4 parties Q_1, Q_2 et Q_3
- les **déciles**, qui divisent un ensemble d'observations en 10 parties $D_1, D_2, \cdots, D_9$
- les **centiles**, qui divisent un ensemble d'observations en 100 parties $C_1, C_2, \cdots, C_{99}$

Par exemple, le centile d'ordre 35 noté C_{35} est une valeur telle que 35% des données lui sont inférieures et 65% supérieures. Sur l'histogramme ou le polygone des fréquences, 35% de la surface totale se trouve à gauche de C_{35} et 65% à droite.

La médiane, les quartiles, et les déciles ne sont que des cas particuliers des centiles, ainsi :

$$M_e = Q_2 = D_5 = C_{50}$$

Variable discrète

Par analogie au calcul des quartiles, le centile d'ordre α d'une variable statistique discrète, noté C_α se calcule comme suit :

$$C_\alpha = \text{première valeur de } x_i \text{ telle que } F_i \geq \frac{\alpha}{100}$$

Exemple 22.13

Calculer C_{22}, Q_3 (ou C_{75}) et D_7 (ou C_{70}) de la série statistique suivante :

x_i	n_i	f_i	F_i
7	4	0.08	0.08
10	9	0.18	0.26
15	24	0.48	0.74
20	11	0.22	0.96
33	2	0.04	1
$\sum$	50	1	

Solution

On a immédiatement : $C_{22} = 10$, $Q_3 = C_{75} = 20$ et $D_7 = C_{70} = 15$

Variable continue

Par analogie au calcul des quartiles, on effectue les étapes suivantes pour déterminer le centile d'ordre α :

1. On détermine la classe contenant $\frac{\alpha}{100}$
2. Puis on calcule C_α avec :

$$C_\alpha = b_{i-1} + \frac{\frac{\alpha}{100} - F_{i-1}}{f_i} L_i$$

avec :

b_{i-1} Borne inférieure de la classe contenant C_α ;
F_{i-1} Fréquence cumulée de la classe qui précède la classe contenant C_α ;
f_i Fréquence de la classe contenant C_α ;
L_i Largeur de la classe contenant C_α

Exemple 22.14

Calculer D_1, C_{15}, Q_1 et Q_3 de la série statistique suivante :

Classes	n_i	f_i	F_i
$[5-10[$	2	0.04	0.04
$[10-15[$	7	0.14	0.18
$[15-20[$	8	0.16	0.34
$[20-25[$	17	0.34	0.68
$[25-30[$	11	0.22	0.9
$[30-35[$	4	0.08	0.98
$[35-40[$	1	0.02	1
Total	50	1	

Solution

- $D_1 = 10 + \frac{0{,}1-0{,}04}{0{,}14} \times 5 \simeq 12,14$
- $C_{15} = 10 + \frac{0{,}15-0{,}04}{0{,}14} \times 5 \simeq 13,93$
- $Q_1 = 15 + \frac{0{,}25-0{,}18}{0{,}16} \times 5 \simeq 17,19$
- $Q_3 = 25 + \frac{0{,}75-0{,}68}{0{,}22} \times 5 \simeq 26,59$

Excel calcule un centile d'ordre α par la fonction CENTILE.EXCLURE(plage ;α/100).

Exercices d'application de la section 22.2

21 [Quartiles] Déterminer Q_1, M_e et Q_3 dans les cas suivants :

(a) Valeurs individuelles

x_i	3	8	10	12	17

(b) Valeurs groupées

x_i	3	8	10	12	17
n_i	4	5	3	5	8

22 [Quartiles] Déterminer Q_1, M_e et Q_3 dans les cas suivants :

(a) Valeurs individuelles

x_i	4	6	10	20	30	32

(b) Valeurs groupées

x_i	4	6	10	20	30	32
f_i	0,3	0,2	0,2	0,1	0,1	0,1

23 [Quartiles] Les valeurs ci-après indiquent le nombre de langues parlées par chaque individu sur la base d'un échantillon de 30 salariés d'une compagnie d'assurance.

3	5	2	4	3	4	5	4	3	4
2	1	2	1	3	4	1	2	5	4
1	1	1	1	1	2	4	4	2	2

Calculer Q_1, M_e et Q_3 de cette distribution.

24 [Quartiles] Calculer les 3 quartiles Q_1, Q_2 et Q_3 de cette série d'observations :

1	1	4	8	8	10	10	10	15	20
1	1	4	8	8	10	10	10	15	20
1	4	8	8	8	10	10	10	15	20
1	4	8	8	8	10	10	10	15	20
1	4	8	8	8	10	10	10	20	20

25 [Quartiles] On donne le tableau suivant :

Classes	f_i
$[2;4[$	0,25
$[4;6[$	0,75

Déterminer Q_1, Q_2 et Q_3.

26 [Quartiles] Calculer M_e, Q_1 et Q_3 de la fonction de répartition définie par la formule suivante :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 10 \\ 0,03x - 0,3 & \text{si } x \in [10;20] \\ 0,05x - 0,7 & \text{si } x \in [20;30] \\ 0,01x + 0,5 & \text{si } x \in [30;50] \\ 1 & \text{si } x \geq 50 \end{cases}$$

27 [Construction d'un tableau] On donne le tableau ci-après :

Classes	n_i	f_i	F_i
$[140;150[$			0,025
$[150;160[$	3		
$[160;170[$			0,2
$[170;180[$	10		
$[180;190[$			0,65
$[190;200[$	8		
$[200;210[$			0,95
$[210;220]$	2		
Total	**40**		

(a) Compléter ce tableau.

(b) Calculer le mode, la moyenne et les quartiles.

(c) Calculer les proportions suivantes :

$$P(X \leq 180) \qquad P(X \geq 200) \qquad P(X \leq 165) \qquad P(172 < X \leq 195)$$

28 [Sportifs] Un échantillon de 200 sportifs est à la base du tableau statistique suivant :

Taille (cm)	n_i	F_i
$[150;160[$		0,2
$[160;170[$	60	
$[170;180[$		0,6
$[180;190[$	30	
$[190;200[$		

(a) Compléter le tableau.

(b) Déterminer le mode, la médiane ainsi que le premier et troisième quartile.

29 [Classes inégales] En utilisant les effectifs cumulés N_i, déterminer Q_1, Q_2 et Q_3 de la distribution statistique suivante contenant des classes d'amplitudes inégales.

Classes	$[0;4[$	$[4;6[$	$[6;8[$	$[8;10[$	$[10;12[$	$[12;14[$	$[14;16[$	$[16;20[$
Effectifs	5	4	6	9	16	8	6	6

30 [Méthode classique] Calculer Q_1, M_e et Q_3 selon la méthode classique.

(a) 8 4 1 7

(b) 3 8 1 9 4

(c) 7 2 2 1 4 8

31 [Méthode TI] Calculer Q_1, M_e et Q_3 selon la méthode de la TI-84.

(a) 8 2 3 5

(b) 7 1 1 4 6

(c) 8 2 3 3 9 5

32 [Méthode Excel] Calculer Q_1, M_e et Q_3 selon la méthode Excel [`CENTILE.EXCURE`].

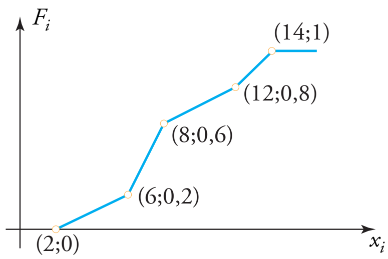
(a) 3 8 9 9

(b) 2 5 5 5 9

(c) 1 5 6 6 6 8

22.3 Problèmes et exercices de synthèse

33 [Processus inverse] La fonction ci-après représente la courbe cumulée croissante d'une variable statistique X.



(a) Recomposer ci-après le tableau ayant permis de tracer cette fonction :

Classes	x_i	f_i	F_i
[; [			
[; [			
[; [			
[; [			

(b) Déterminer la médiane de cette distribution.

(c) Déterminer la moyenne de cette distribution.

34 [Contrôle radar] Un contrôle radar a permis de mesurer la vitesse de 10 automobilistes sur une route limitée à 60 km/h.

70 60 80 60 60 60 90 200 70 60

Quel indicateur choisiriez-vous pour représenter la tendance centrale de cette distribution ?

35 [Masse de fromages] Lors de la fabrication d'un lot de fromages, on a relevé la masse des fromages fabriqués. Calculer le mode.

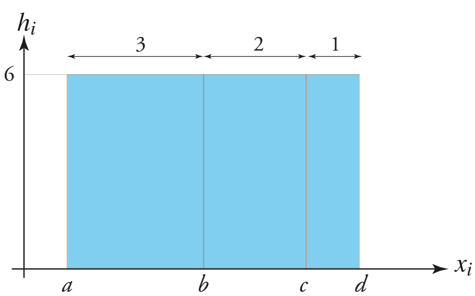
Masse (en g)	$[80;85[$	$[85;90[$	$[90;100[$	$[100;105[$	$[105;110[$	$[110;115[$
Effectifs	5	9	32	25	16	13

36 [Service de livraison] Dans une entreprise, on a accès aux informations suivantes concernant le service de livraison pour l'année N.

Distance (km)	Nombre de livraisons
$[0;10[$	245
$[10;20[$	360
$[20;30[$	215
$[30;40[$	130
$[40;50[$	25

On sait que chaque livraison est facturée 30 frs au client et que le coût du km de transport est de 1,70 frs pour l'entreprise. Sur la base des données fournies, estimer pour l'année N si le service de livraison est déficitaire ou excédentaire.

37 [Un peu d'algèbre] Si la moyenne d'une distribution statistique est de 18 et que son histogramme est le suivant, que valent alors les bornes a, b, c et d ?



38 [Concours de gym] Au concours de gymnastique du village, 10 candidats ont été notés sur une échelle de 1 à 6. Les notes saisies sont les suivantes :

$$4 \quad 2 \quad 3 \quad -2 \quad 5 \quad 6 \quad 4 \quad 5 \quad 8 \quad 3$$

(a) Calculer la moyenne et la médiane des notes saisies.

(b) Visiblement, deux notes ont mal été saisies. Calculer la **moyenne tronquée** ainsi que la **médiane tronquée** en retirant les notes «extrêmes» de la distribution.

(c) Lequel de ces deux indicateurs est plus robuste aux valeurs extrêmes ?

39 [Trouver les nombres] La moyenne de 3 nombres vaut 8 ; celle des deux premiers vaut 3 et celle des deux derniers vaut 11. Quels sont ces nombres ?

40 [Trouver les valeurs] Une série statistique comprend 6 valeurs entières dont :

$$x_{\text{min}} = 2 \qquad x_{\text{max}} = 10 \qquad M_o = 3 \qquad M_e = 4 \qquad \overline{x} = 5$$

Retrouver toutes les valeurs de cette série statistique.

41 [Joueurs de tennis] Estimer, sur la base des données contenues dans le fichier Excel swisstennis.xlsx [Ressources Promath : swisstennis]

(a) entre quels classements se situe la moyenne des joueurs de tennis en Suisse.

(b) le classement médian des joueurs de tennis en Suisse.

42 [Médiane littérale] On donne 6 valeurs individuelles a, b, c, d, e et z telles que :

$$a < b < c < d < e \qquad \text{et} \qquad z < a$$

Calculer la médiane.

43 [Salaires] On dispose des informations suivantes concernant les salaires dans deux entreprises A et B, comportant le même nombre N de collaborateurs.

Entreprise A	Employés	Cadres
Salaire	4000 frs	8000 frs
Effectif	αN	$(1-\alpha)N$

Entreprise B	Employés	Cadres
Salaire	6000 frs	9000 frs
Effectif	βN	$(1-\beta)N$

À partir de quelle valeur β le salaire moyen de l'entreprise A est-il supérieur à l'entreprise B ?

44 [Trouver une série] Donner une série statistique dont l'effectif total est 3, la médiane 8, la moyenne 7 et dont l'une des valeurs est 4.

45 [Proportion d'individus] La moyenne d'âge d'un groupe de personnes est de 40 ans. La moyenne d'âge des hommes seuls est de 35 ans et celle des femmes de 50 ans. Quelle est la proportion d'hommes et de femmes dans ce groupe?

46 [Âge de l'aîné] Une famille comporte 7 enfants dont l'âge modal est de 4 ans. Célia a précisément l'âge médian : 6 ans. Les deux jumeaux ont l'âge moyen : 7 ans. Quel est l'âge de Stéphane, l'aîné des enfants?

47 [Faire passer la pilule] Dans notre classe, nous sommes 10 étudiants, au cours de 3 examens différents je n'ai obtenu que 8 points sur 20, ce qui est assez lamentable. À l'aide des indicateurs de tendance centrale, comment vais-je arriver à présenter ces résultats à mon patron pour que mes résultats ne paraissent pas si mauvais que ça?

Examen	**Moi**	Marc	Lili	Jojo	Bob	Fred	Karl	Léa	Luc	Jo
1$^{\text{er}}$	**8**	2	2	2	9	9	9	9	10	19
2$^{\text{ème}}$	**8**	2	3	4	5	7	9	9	18	19
3$^{\text{ème}}$	**8**	2	7	7	7	10	11	12	18	19

48 [Défi] Au terme d'une saison, une équipe de football a obtenu une moyenne de 2 points par match. Sur les 12 matchs joués, cette équipe a connu des victoires [3 points] des matchs nuls [1 point] et des défaites [0 point]. Quels sont les résultats de cette équipe durant la saison?

Chapitre 23

Mesures de dispersion et de forme

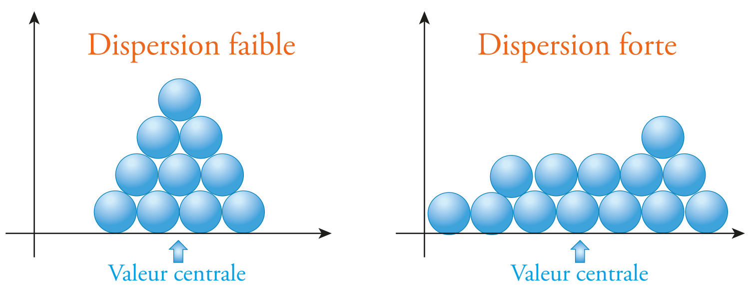
Objectifs du chapitre

- calculer et interpréter les mesures de dispersion (écart type, écart interquartile).
- choisir la mesure appropriée en fonction de la situation.
- mesurer l'asymétrie et l'aplatissement d'une distribution.
- construire et interpréter une boîte à moustache (*boxplot*).

Les mesures de dispersion permettent de quantifier la variabilité des données autour d'une valeur centrale. Les mesures de forme permettent, elles, de déterminer l'allure générale de la distribution (**biais** à droite ou à gauche, forme pointue ou étalée).

23.1 Mesures de dispersion

Les mesures de dispersion permettent de mesurer la dispersion des données autour d'une valeur centrale.



23.1.1 L'étendue

L'**étendue** est la différence entre la plus grande et la plus petite valeur de la série. Selon que la distribution est discrète ou continue on aura :

$$\text{Étendue} = \begin{cases} \text{différence entre le plus grand et le plus petit } x_i & \text{(discret)} \\ \text{amplitude totale } b_k - b_0 & \text{(continu)} \end{cases}$$

L'étendue permet d'avoir une idée de grandeur de l'étendue de la distribution, mais en présence de valeurs aberrantes elle ne rend compte que de manière très imparfaite cette étendue. Si par exemple, un individu a travaillé en interim pendant deux jours et donc obtenu un salaire très petit en fin de mois au regard des autres salaires, l'étendue $\text{Salaire}_{Max} - \text{Salaire}_{Min}$ donne une très forte dispersion apparente. On devrait alors ici exclure cet individu du reste de la série pour calculer une étendue plus représentative de la série.

23.1.2 L'écart absolu moyen

Lorsque l'on cherche à mesurer la moyenne des écarts à la moyenne, on constate que cette moyenne est toujours de 0. [1] L'idée de la formule ci-après est de considérer les écarts en valeur absolue et d'en faire la moyenne, d'où le nom d'**écart absolu moyen** (EM).

Dans le cas d'une série de N observations, $x_1, x_2, \cdots, x_N$ on a :

$$\text{EM} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} | x_i - \overline{x} |$$

Si les valeurs sont groupées en k classes, on a :

$$\text{EM} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i \, | x_i - \overline{x} | = \sum_{i=1}^{k} f_i \, | x_i - \overline{x} |$$

Exemple 23.1

Calculer l'écart absolu moyen de chaque candidat dans les branches linguistiques suivantes :

Branche	Stéphane	Mélina
Français	4	2
Allemand	5	9
Italien	6	4

1. En effet, $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x}) = 0$.

Solution

Moyenne de Stéphane :

$$\overline{x} = \frac{4+5+6}{3} = 5$$

Moyenne de Mélina :

$$\overline{x} = \frac{2+9+4}{3} = 5$$

Écart absolu moyen de Stéphane :

$$\text{EM} = \frac{|4-5|+|5-5|+|6-5|}{3} = \frac{1+0+1}{3} = \frac{2}{3} \simeq 0,66$$

Écart absolu moyen de Mélina :

$$\text{EM} = \frac{|2-5|+|9-5|+|4-5|}{3} = \frac{3+4+1}{3} = \frac{8}{3} \simeq 2,66$$

Stéphane et Mélina ont une même moyenne. Cependant, les notes de Mélina sont beaucoup plus dispersées que celles de Stéphane.

Sous Excel, l'écart absolu moyen d'une série de valeurs individuelles s'obtient par la fonction `ECART.MOYEN`.

23.1.3 L'écart semi-interquartile

Lorsque la médiane est préférée à la moyenne comme mesure de tendance centrale, ce qui est le cas par exemple des distributions contenant des valeurs extrêmes ou des classes ouvertes, on utilise de préférence l'**écart semi-interquartile** (Q) comme mesure de dispersion. Celui-ci se définit ainsi :

$$Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

Exemple 23.2

Calculer l'écart semi-interquartile à partir des informations statistiques suivantes :

x_i	f_i	F_i
7	0,3	0,3
8	0,2	0,5
9	0,4	0,9
10	0,1	1

Solution

Comme il s'agit d'une distribution discrète, on a immédiatement : $Q_1 = 7$ et $Q_3 = 9$ donc :

$$Q = \frac{9-7}{2} = 1$$

23.1.4 La variance et l'écart type

L'écart semi-interquartile est de conception simple et présente l'inconvénient de ne pas tenir compte de toutes les observations. Pour pallier ce problème on utilise généralement la variance et l'écart type comme mesure principale de la dispersion.

- La **variance** d'une série statistique (σ^2 ou σ_x^2) est définie comme la moyenne des carrés des écarts.
- L'**écart type** (σ ou σ_x) est la racine carrée de la variance.

Ces définitions conduisent naturellement aux formules suivantes :

Dans le cas d'une série de N observations, $x_1, x_2, \cdots, x_N$ on a :

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2$$

Si les valeurs sont groupées en k classes, on a :

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i(x_i - \overline{x})^2 = \sum_{i=1}^{k} f_i(x_i - \overline{x})^2$$

Quelle que soit la formule utilisée, l'écart type (σ) est donné par :

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

Exemple 23.3

Calculer l'écart type des 4 valeurs individuelles suivantes :

1	3	9	19

Solution

- La moyenne est donnée par :

$$\overline{x} = \frac{1+3+9+19}{4} = 8$$

- La variance est donnée par :

$$\sigma^2 = \frac{(1-8)^2+(3-8)^2+(9-8)^2+(19-8)^2}{4} = \frac{49+25+1+121}{4} = 49$$

- L'écart type est donnée par :

$$\sigma = \sqrt{49} = 7$$

Exemple 23.4

Calculer l'écart type de la distribution statistique suivante relative aux résultats obtenus par 10 candidats à un test d'admission.

x_i	n_i	f_i
4	3	0,3
6	4	0,4
8	2	0,2
10	1	0,1
Total	**10**	**1**

Solution

On commence par calculer la moyenne $\overline{x}$ de cette distribution en complétant le tableau. On y ajoutera les deux colonnes nécessaires permettant d'utiliser l'une ou l'autre des formules présentées plus haut :

x_i	n_i	f_i	$f_i x_i$	$n_i(x_i-\overline{x})^2$	$f_i(x_i-\overline{x})^2$
4	3	0,3	1,2	14,52	1,452
6	4	0,4	2,4	0,16	0,016
8	2	0,2	1,6	6,48	0,648
10	1	0,1	1	14,44	1,444
Total	**10**	**1**	$6,2=\overline{x}$	35,6	3,56

Ainsi :

- Variance : $\sigma^2 = \frac{35,6}{10} = 3,56$. (ou total de la dernière colonne)
- Écart type : $\sigma = \sqrt{3,56} \simeq 1,89$.

Le calcul de la variance peut être plus rapide par la **formule de König** :

$$\sigma^2 = \overline{x^2} - \overline{x}^2 \quad \text{avec} \quad \overline{x^2} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2 = \sum_{i=1}^{k} f_i x_i^2$$

Que l'on peut exprimer comme : *«la moyenne des carrés moins le carré de la moyenne»*.

Formule de König
Démonstration de la formule

Exemple 23.5

Calculer l'écart type de la distribution statistique suivante :

x_i	7	10	13
f_i	0,4	0,5	0,1

Solution

En travaillant par exemple à partir des fréquences, on construit le tableau suivant :

x_i	f_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
7	0,4	2,8	19,6
10	0,5	5	50
13	0,1	1,3	16,9
Total		9,1	86,5

Ainsi :

- La moyenne : $\overline{x} = 9,1$
- La moyenne des carrés : $\overline{x^2} = 86,5$

La variance et l'écart type sont donnés par :

$$\sigma^2 = \overline{x^2} - \overline{x}^2 = 86,5 - 9,1^2 = 3,69$$

et

$$\sigma = \sqrt{3,69} \simeq 1,92$$

Sous Excel, l'écart type d'une série de valeurs individuelles s'obtient par la fonction ECARTYPE.PEARSON. Si les valeurs dont on calcule l'écart type sont issues d'un échantillon et servent à estimer l'écart type de la population, il faut utiliser de préférence l'**écart type échantillonnal** ECARTYPE.STANDARD.

Les calculatrices TI distinguent l'écart type d'un échantillon S_x et d'une population σ_x.

23.1.5 Coefficient de variation

Le **coefficient de variation** est une mesure relative de la dispersion des données autour de la moyenne. Le coefficient de variation se calcule comme le rapport de l'écart type à la moyenne. Il permet de comparer le degré de variation de deux échantillons ou populations, même si leurs moyennes sont différentes.

Le coefficient de variation noté CV se calcule comme suit :

$$\mathrm{CV} = \frac{\sigma}{\overline{x}}$$

En pratique, il est d'usage d'exprimer le coefficient de variation en %.

Le coefficient de variation est un indicateur d'**homogénéité** de la population. On considère qu'un coefficient de variation inférieur à 15% est indicateur d'une population homogène, tandis qu'un coefficient supérieur à 25% indique une population très dispersée.

Exemple 23.6

Dans un centre sportif on a mesuré le poids moyen et l'écart type des danseuses et des sumos. Au vu des résultats, peut-on conclure à une variabilité de poids plus grande chez les sumos ?

	Danseuses	Sumos
Moyenne	51,2 kg	188,5 kg
écart type	5,3 kg	10,4 kg

Solution

En calculant les coefficients de variation respectifs, on trouve :

$$\mathrm{CV_D} = \frac{5,3}{51,2} \simeq 10,35\% \qquad \text{et} \qquad \mathrm{CV_S} = \frac{10,4}{188,5} \simeq 5,52\%$$

On en conclu que le poids des sumos varie moins que celui des danseuses. Le poids est beaucoup plus homogène dans la population des sumos que dans celle des danseuses.

23.1.6 Utilisation des mesures de dispersion

Un résumé statistique devrait comporter au moins deux paramètres : une valeur centrale et un paramètre de dispersion. En règle générale, on privilégie d'associer :

- [moyenne + écart type] ou encore [moyenne + écart absolu moyen], puisque ces paramètres sont calculés par rapport à la moyenne.
- [médiane + écart semi interquartile], lorsqu'il y a des classes ouvertes ou encore des valeurs extrêmes importantes.

Dans le cas d'une transformation affine $Y = aX + b$, les mesures de dispersion se comportent comme suit :

- Etendue$(y) = |a| \cdot$ Etendue(x)
- EM$(y) = |a| \cdot$ EM(x)
- $\sigma_y^2 = a^2 \cdot \sigma_x^2$
- $\sigma_y = \sqrt{a^2 \cdot \sigma_x^2} = |a| \cdot \sigma_x$

Transformation affine
Démonstration pour l'étendue, l'écart absolu moyen et l'écart type.

Exemple 23.7

Une distribution statistique X donne l'indicateur suivant : $\sigma_x = 3$.
Calculer σ_y si $y = -2x + 7$

Solution

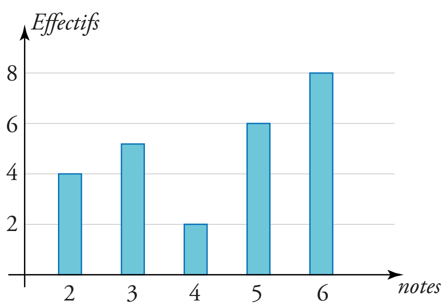
$$\sigma_y = |a| \cdot \sigma_x = |-2| \times 3 = 2 \times 3 = 6$$

Exercices d'application de la section 23.1

1 [Étendue] Calculer l'étendue de cette série :

58 kg 63 kg 76 kg 56 kg 67 kg 60 kg

2 [Étendue] Calculer l'étendue de la série donnée par son diagramme en barre :



3 [Étendue] Calculer l'étendue de la série suivante :

Classes	[0 ; 10 [	[10 ; 20 [	[20 ; 30 [	[30 et plus
Effectifs	20	60	8	2

4 [Étendue] Quelle est l'étendue d'une série statistique connaissant :

$$\overline{x} = \frac{2 \times 2 + 4 \times 4 + 8 \times 9}{15}$$

5 [Écart interquatile] On donne la distribution de notes suivante :

Notes	2	4	6	8	10
Effectifs	12	17	24	13	6

(a) Déterminer l'écart interquartile

(b) Déterminer l'écart semi-interquartile

6 [Taille d'individus] La série suivante représente la taille en cm d'une population d'adolescents :

Classe	$[150\,;155[$	$[155\,;160[$	$[160\,;165[$	$[165\,;170[$
Fréquence	0,1	0,5	0,3	0,1

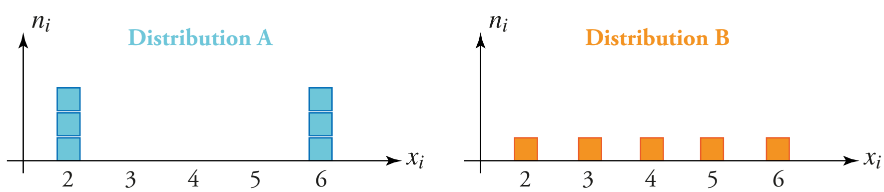
(a) Calculer l'étendue.

(b) Calculer l'écart semi-interquartile.

7 [Écart absolu moyen] Calculer de tête l'écart absolu moyen de cette série :

$$60 \quad 50 \quad 60 \quad 50 \quad 60 \quad 50$$

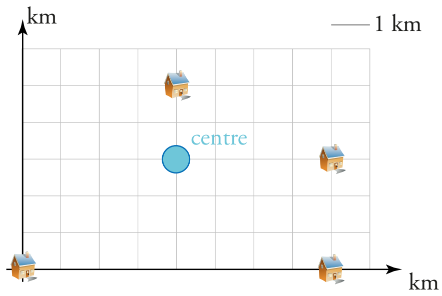
8 [Écart absolu moyen] On donne les distributions A et B suivantes :



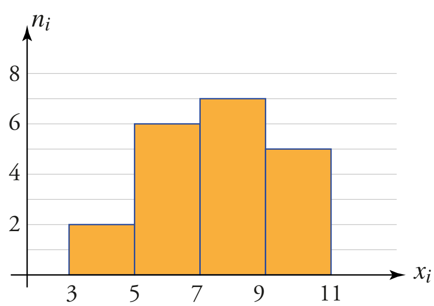
(a) Quelle distribution présente visuellement une dispersion plus grande ?

(b) Justifier le résultat obtenu sous **(a)** en calculant l'écart absolu moyen.

9 [Distances] Calculer l'écart absolu moyen des distances des 4 habitations au centre du village.



10 [Écart absolu moyen] Calculer l'écart absolu moyen à partir de l'histogramme suivant :



11 [Écart type] Calculer de tête l'écart type de cette série :

1 1 3 3

12 [Mesures de dispersion] Calculer l'étendue, la moyenne, la variance et l'écart type de cette série statistique donnée sous la forme de valeurs individuelles :

5 2 3 5 3

13 [Variance] Calculer la variance de cette série statistique en utilisant la formule : $\sigma^2 = \overline{x^2} - \overline{x}^2$

5 2 3 5 3

14 [Variance] Calculer la variance de cette série statistique en utilisant la formule : $\sigma^2 = \overline{x^2} - \overline{x}^2$ sur la base des valeurs groupées $n_i x_i$.

5 2 3 5 3

15 [Variance] Calculer la variance de la série statistique suivante en utilisant la calculatrice :

(a) sur la base des seules valeurs individuelles x_i.

(b) sur la base des valeurs groupées $n_i x_i$.

$$5 \quad 2 \quad 3 \quad 5 \quad 3$$

16 [Texte à trous] Compléter les mots manquants entre crochet dans ce texte :

L'écart type est une mesure de [...] liée à la [...]. L'écart type est la racine carrée de la [...]. Il donne du poids aux valeurs [...]. Si l'écart type est égal à [...] alors toutes les valeurs de la série sont égales. L'écart type ne peut être calculé si la distribution présente des classes [...].

17 [Écart type] On donne les 4 valeurs suivantes : 4 4 5 17

(a) Calculer l'écart type à partir de ces valeurs individuelles.

(b) Calculer l'écart type en groupant ces valeurs dans un tableau faisant intervenir les x_i et les f_i.

18 [Écart type] Calculer l'écart type :

(a) entre la valeur 15 et 9.

(b) entre la valeur a et b.

19 [Moyenne et écart type] Calculer la moyenne et l'écart type de cette distribution :

Classes	0 à 4	4 à 10	10 à 20	20 à 60
Effectifs	8	12	20	10

20 [Valeur entière] Calculer la valeur entière de x telle que la distribution discrète suivante présente un écart type de 4.

x_i	1	3	x
n_i	2	5	3

21 [Écart type] Calculer l'écart type d'une série statistique dont on connaît les informations suivantes :

$$\sum n_i x_i^2 = 9000 \quad , \quad \sum n_i x_i = 600 \quad \text{et} \quad \sum n_i = 50$$

22 [Écart type] Calculer l'écart type de la distribution représentée par la fonction de répartition suivante :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 4 \\ 0,15x - 0,6 & \text{si } x \in [4;6] \\ 0,175x - 0,75 & \text{si } x \in [6;10] \\ 1 & \text{si } x \geq 10 \end{cases}$$

23 [Coefficient de variation] Une entreprise fabrique des pièces métalliques sur deux sites, l'un en Angleterre et l'autre en Suisse. Lors d'un contrôle de qualité portant sur 10 pièces de fabrication identique, on a mesuré le diamètre de toutes ces pièces :

Angleterre (inches)	15,7	16,8	16,3	16,4	15,8	16,1	16,5	16,6	16,9	17,2
Suisse (cm)	41,2	41	41,7	41	40,4	41,5	41,4	41,1	40,8	41,2

Mesurer la dispersion relative entre ces deux échantillons au moyen du coefficient de variation.

24 [Dispersion] Une statistique sur un ensemble de salariés a fourni les renseignements ci-après. Quelle variable vous semble la plus dispersée ?

Variable	Moyenne	Écart type
Âge	45,2	8,1
Ancienneté	18,8	9,3
Performance	1025,3	412,8

25 [Transformation affine] Si l'étendue de la variable X vaut 2, que vaut l'étendue de $-3X+5$?

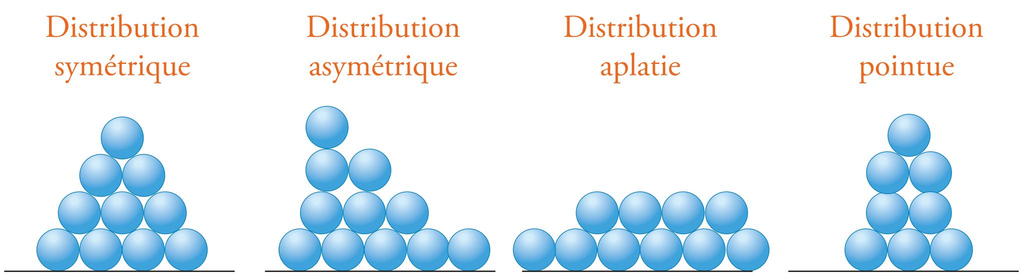
26 [Transformation affine] On donne $\sigma_x = 3$. Que vaut σ_y^2 si $Y = 5-2X$?

27 [Transformation affine] On note E_x et E_y l'étendue de X respectivement Y, où X et Y sont liés par la relation $3X+2Y+5=0$. Exprimer E_x en fonction de E_y.

28 [Transformation affine] On donne $\overline{x} = a$ et $\sigma_x = b$. Que vaut σ_y si $Y = \dfrac{X-a}{b}$?

23.2 Mesures de forme

Les mesures de forme que permettent de juger de l'**asymétrie** et l'**aplatissement** d'une distribution statistique.



Les calculs font intervenir les quartiles ainsi que des valeurs intermédiaires appelées moments centrés.

Les moments centrés

On appelle **moment centré** d'ordre r ($r \in \mathbb{N}$) d'une variable statistique X le nombre μ_r défini comme suit :

- Dans le cas d'une série de N observations, $x_1, x_2, \cdots, x_N$:

$$\mu_r = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^r$$

- Si les valeurs sont groupées en k classes avec effectifs :

$$\mu_r = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}n_i(x_i - \overline{x})^r$$

- Si les valeurs sont groupées en k classes avec fréquences :

$$\mu_r = \sum_{i=1}^{k}f_i(x_i - \overline{x})^r$$

Exemple 23.8

Calculer les moments centrés d'ordre 1, 2 et 3 de la distribution statistique suivante :

x_i	1	5	10
f_i	0,5	0,3	0,2

Solution
On dresse un tableau contenant les colonnes $f_i(x_i - \overline{x})$, $f_i(x_i - \overline{x})^2$ et $f_i(x_i - \overline{x})^3$:

x_i	f_i	$f_i x_i$	$f_i(x_i - 4)$	$f_i(x_i - 4)^2$	$f_i(x_i - 4)^3$
1	0,5	0,5	−1,5	4,5	−13,5
5	0,3	1,5	0,3	0,3	0,3
10	0,2	2	1,2	7,2	43,2
Total	1	$\overline{x} = 4$	0	12	30

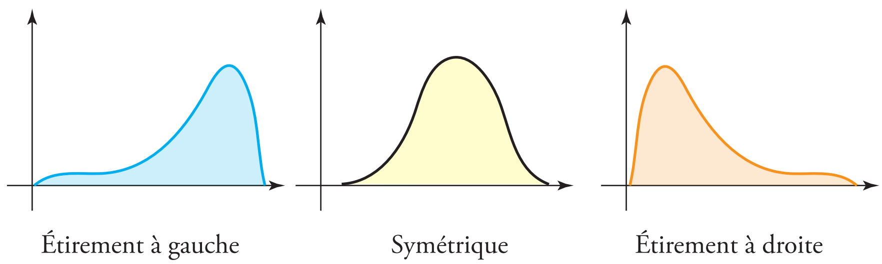
Ainsi :

$$\mu_1 = 0 \qquad \mu_2 = 12 \qquad \text{et} \qquad \mu_3 = 30$$

23.2.1 Mesure de l'asymétrie

Notion d'asymétrie

L'asymétrie cherche à évaluer si la distribution est, par rapport à une valeur centrale, plus étalée à gauche ou à droite, ou si, au contraire, les observations sont également réparties de part et d'autre de cette valeur centrale. Si une distribution est asymétrique, les valeurs centrales, telles que le mode, la médiane et la moyenne ne sont plus confondues au centre de la distribution comme c'est le cas lors d'une distribution symétrique.



Il s'en suit :

$$\begin{aligned} \text{distribution symétrique} &\Rightarrow M_o = M_e = \overline{x} \\ \text{distribution étirée à gauche} &\Rightarrow M_o > M_e > \overline{x} \\ \text{distribution étirée à droite} &\Rightarrow M_o < M_e < \overline{x} \end{aligned}$$

Principales mesures

Plusieurs mesures ont été proposées pour déterminer l'asymétrie d'une distribution. On retiendra les 2 principales mesures suivantes :

- le **coefficient de Yule** (C_Y) :

$$C_Y = \frac{Q_3 + Q_1 - 2\,M_e}{Q_3 - Q_1} \qquad \begin{cases} C_Y > 0 & \text{étirement à droite} \\ C_Y = 0 & \text{symétrique} \\ C_Y < 0 & \text{étirement à gauche} \end{cases}$$

- le **coefficient de Fisher** (γ)

$$\gamma = \frac{\mu_3}{\sigma^3} \qquad \begin{cases} \gamma > 0 & \text{étirement à droite} \\ \gamma = 0 & \text{symétrique} \\ \gamma < 0 & \text{étirement à gauche} \end{cases}$$

Exemple 23.9

Déterminer les coefficients de Yule et de Fisher de cette distribution :

x_i	1	2	3	4
n_i	1	2	4	3

Solution

On dresse le tableau suivant permettant de déterminer tous les coefficients nécessaires :

x_i	n_i	$n_i x_i$	$n_i(x_i-2,9)^2$	$n_i(x_i-2,9)^3$
1	1	1	3,61	$-6,86$
2	2	4	1,62	$-1,46$
3	4	12	0,04	0,00
4	3	12	3,63	3,99
Total	10	29	8,90	$-4,32$

Les quartiles sont les suivants : $Q_1 = 2$ $M_e = 3$ et $Q_3 = 4$

La moyenne : $\overline{x} = \frac{\sum n_i x_i}{N} = \frac{29}{10} = 2,9$

Le moment centré d'ordre 2 : $\mu_2 = \sigma^2 = \frac{\sum n_i(x_i-2,9)^2}{10} = \frac{8,9}{10} = 0,89$

Le moment centré d'ordre 3 : $\mu_3 = \frac{\sum n_i(x_i-2,9)^3}{10} = \frac{-4,32}{10} = -0,432$

L'écart type : $\sigma = \sqrt{0,89} \simeq 0,943$

Ainsi :

- Coefficient de Yule :

$$C_Y = \frac{Q_3 + Q_1 - 2\,M_e}{Q_3 - Q_1} = \frac{4+2-2\times 3}{4-2} = 0$$

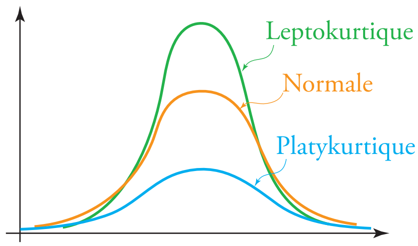
- Coefficient de Fisher :

$$\gamma = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{-0,432}{0,943^3} \simeq -0,515$$

23.2.2 Mesure de l'aplatissement

Une distribution peut être plus ou moins aplatie selon qu'une proportion plus ou moins grande des observations est proche de son mode. Lorsqu'une forte proportion des observations prend une valeur proche de celle du mode de la distribution, l'aplatissement est faible. L'aplatissement d'une distribution s'évalue par référence à la courbe des fréquences de la Loi Normale (ou loi de Laplace-Gauss).

On parle de distribution **platykurtique** si cette distribution est de forme aplatie et **leptokurtique** si elle est en forme de pointe.



Le degré d'aplatissement se mesure par le coefficient de Pearson β, appelé aussi **kurtosis**.[2]

$$\beta = \frac{\mu_4}{\sigma^4} \qquad \begin{cases} \beta > 3 \Rightarrow \text{distribution leptokurtique} \\ \beta = 3 \Rightarrow \text{distribution normale} \\ \beta < 3 \Rightarrow \text{distribution platykurtique} \end{cases}$$

Exemple 23.10

Déterminer le coefficient β de Pearson sur la base des informations statistiques suivantes :

x_i	f_i	$f_i x_i$	$f_i(x_i - \overline{x})^2$	$f_i(x_i - \overline{x})^4$
3	0,4	1,2	1,6	6,4
5	0,3	1,5	0	0
7	0,2	1,4	0,8	3,2
9	0,1	0,9	1,6	25,6
Total		$\overline{x} = 5$	$\sigma^2 = \mu_2 = 4$	$\mu_4 = 35,2$

Donc : $\frac{\mu_4}{\sigma^4} = \frac{35,2}{4^2} = 2,2$

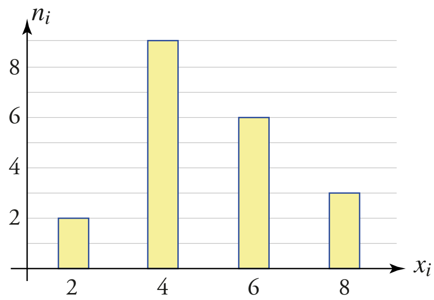
2. On peut aussi calculer le kurtosis normalisé : $\gamma = \beta - 3$. Si $\gamma > 0$ alors la distribution est leptokurtique, si $\gamma = 0$ la distribution est normale, et si $\gamma < 0$ elle est platykurtique.

Exercices d'application de la section 23.2

29 [Moments centrés] Calculer μ_1, μ_2, μ_3 et μ_4 à partir des données individuelles suivantes :

$$1 \quad 3 \quad 4 \quad 8$$

30 [Moments centrés] Calculer μ_1, μ_2, μ_3 et μ_4 à partir du diagramme en barre suivant :



31 [Facture] Une facture porte sur 50 articles de prix différents :

Prix en frs	Nombre d'articles
de 15 à 20	12
de 20 à 40	20
de 40 à 60	10
de 60 à 100	8

(a) Calculer les moments centrés d'ordre 1, 2, 3 et 4.

(b) Déterminer l'asymétrie et l'aplatissement à partir de ces informations.

32 [Asymétrie] On considère la distribution statistique suivante :

Classes	n_i
$[\,0\,;2\,[$	9
$[\,2\,;4\,[$	11
$[\,4\,;6\,[$	9
$[\,6\,;8\,[$	8
$[\,8\,;10\,[$	8
$[\,10$ et plus $[$	5

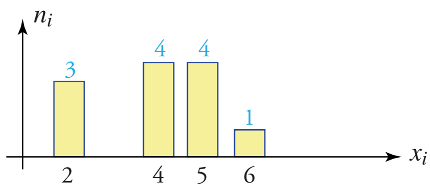
Calculer la mesure d'asymétrie appropriée pour cette distribution.

33 [Notes d'étudiants] Utiliser le fichier : notes étudiants.xls dans les ressources de Promath.

(a) Calculer les coefficients C_Y, γ et β et juger de l'asymétrie et de l'aplatissement.

(b) Représenter le diagramme en barre de cette distribution

34 [Kurtosis estimé] Le graphique ci-après représente une distribution de 12 valeurs issues d'une population.



(a) En effectuant tous les calculs, estimer l'aplatissement de la population ($\widehat{\beta}$) au moyen de la formule suivante :

$$\widehat{\beta} = \frac{n(n+1)}{(n-1)(n-2)(n-3)} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^4}{S_x^4} - \frac{3(n-1)^2}{(n-2)(n-3)}$$

(b) Montrer que la fonction Excel : Kurtosis effectue précisément ce calcul.

35 [Paramètres de forme] On donne la distribution suivante :

1 2 3 4 5

(a) Représenter graphiquement cette distribution.

(b) Confirmer les paramètres de forme de cette distribution au moyen des coefficients de Fisher et de Pearson.

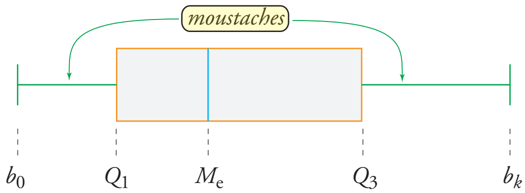
23.3 Boite à moustaches ou Box plot

La boîte à moustache ou box plot est un moyen de représenter graphiquement les 5 valeurs suivantes : La *médiane* M_e, les *quartiles* Q_1, Q_3 et les *valeurs extrêmes* b_0 et b_k de la distribution.

Le box plot est donc un diagramme qui donne des indications sur :

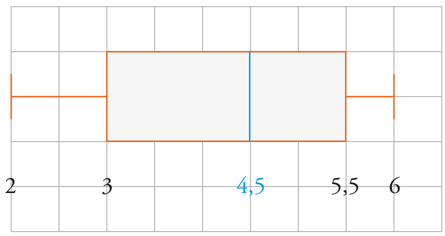
- l'étendue de la distribution entre la valeur maximale b_k et la valeur minimale b_0.
- les quartiles et la médiane.
- l'intervalle interquartile : $I_Q = Q_3 - Q_1$ (50% de l'effectif se tient dans un écart de I_Q).
- l'asymétrie et l'aplatissement.

Une boîte à moustache peut se représenter horizontalement ou verticalement. Elle se compose de la boîte elle-même (dont la hauteur est sans importance) ainsi que des «moustaches» de part et d'autre de la boîte :



Exemple 23.11

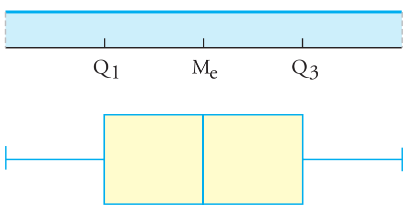
Les notes d'une classe ont été représentées avec la boîte à moustache suivante :



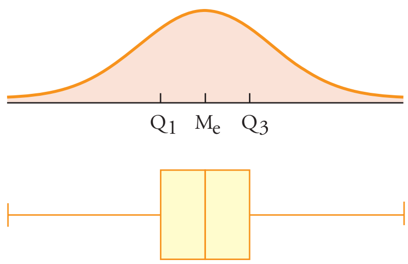
Cette boîte à moustaches fournit les informations suivantes :

- La moins bonne note : 2. La meilleure note : 6.
- 25% des élèves ont fait une note égale ou inférieure à 3.
- La moitié des élèves ont fait 4,5 ou moins.
- 75% des élèves ont une note inférieure ou égale à 5,5.
- 50% se tiennent dans un écart de 2,5.

Plus la boîte à moustache est rétrécie, plus la distribution est pointue. Plus elle est étendue, plus la distribution est aplatie (les effectifs ayant tendance à être uniformes). [3]



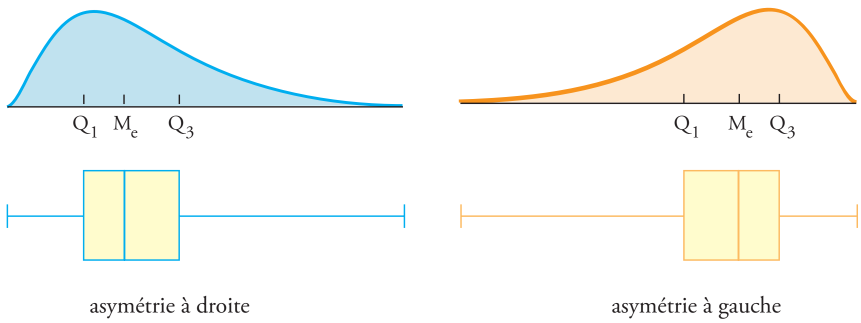
uniforme



en forme de cloche

3. Une simulation GeoGebra «*boxplot*» se trouve dans les ressources sur promath.ch permettant de visualiser l'impact de l'histogramme sur la boite à moustaches.

Plus la boîte à moustache est située vers b_0 plus la distribution est asymétrique à droite. Plus elle s'approche de b_k plus elle est asymétrique à gauche.



Remarque

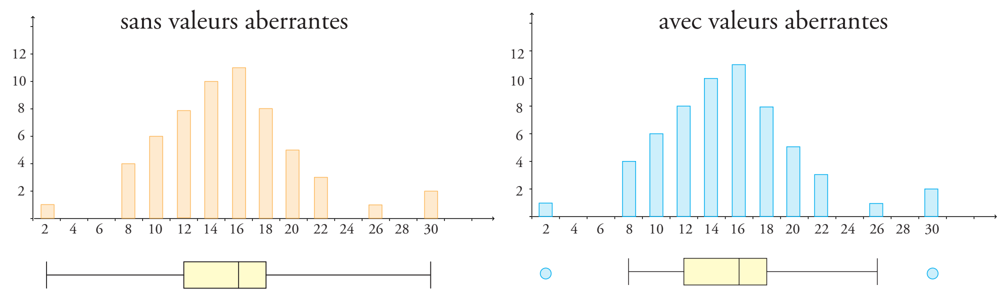
Les statisticiens ont montré que la plupart des observations statistiques sont comprises dans l'intervalle suivant :

$$\text{observations} \in [\, Q_1 - 1,5 \cdot I_Q \,;\, Q_3 + 1,5 \cdot I_Q \,]$$

On peut alors aussi construire une boîte à moustache qui utilise non plus les limites inférieures et supérieures de la distributions mais de nouvelles bornes b_0' et b_k' définies comme suit :

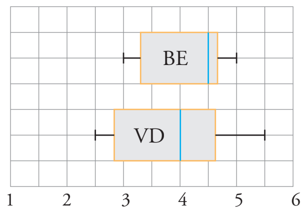
$$b_0' = max\{b_0; Q_1 - 1,5(Q_3 - Q_1)\} \qquad \text{et} \qquad b_k' = min\{b_k; Q_3 + 1,5(Q_3 - Q_1)\}$$

Les valeurs observées qui sortent de cet intervalle sont alors considérées comme **aberrantes** ou **atypiques**. Ces dernières sont mentionnées sur le graphique à l'aide de petits signes distinctifs (ronds, croix, etc.). Les moustaches sont alors ajustées aux limites des valeurs non aberrantes :

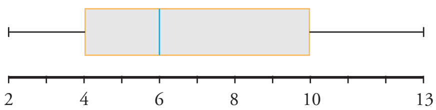


Exercices d'application de la section 23.3

36 [Contrôle de math] Faire quelques commentaires sur la boîte à moustache ci-après, concernant les notes d'un même contrôle mathématique mesuré dans 2 cantons différents : Vaud (VD) et Berne (BE).



37 [Mails] Dans une entreprise, on interroge un certain nombre d'employés pour savoir combien de mails ils ont envoyés dans une journée. Les résultats sont synthétisés par la boite à moustaches ci-après :



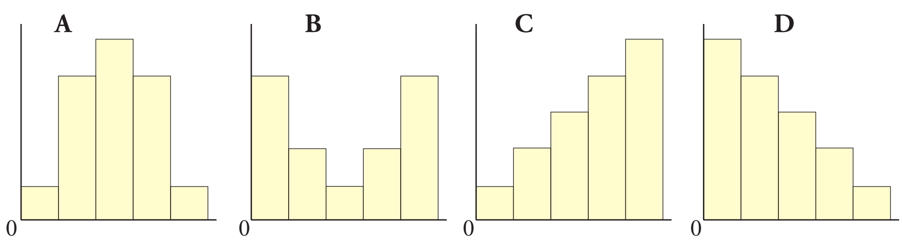
(a) Calculer : l'étendue, les 3 quartiles et l'écart interquartile I_Q.

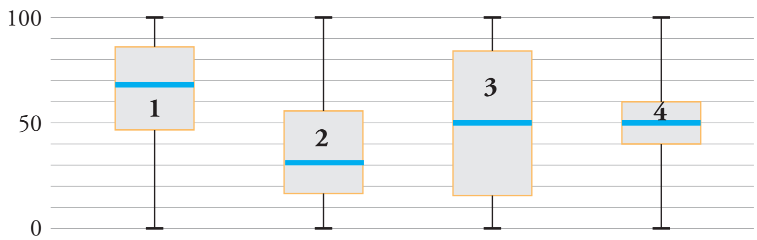
(b) Les employés interrogés ont envoyé entre [...] et [...] mails.

(c) La moitié des employés interrogés ont envoyé plus de [...] mails.

(d) [...] % des employés interrogés ont envoyé entre 4 et 10 mails.

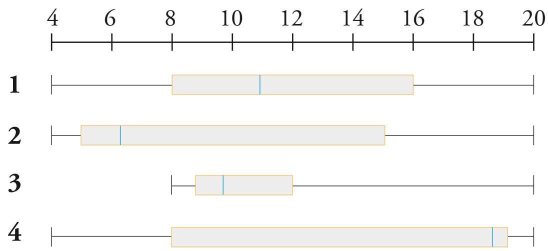
38 [Correspondances] Associer ces quatre histogrammes aux quatre boîtes à moustaches ci-après :



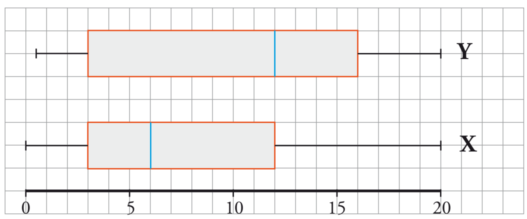


39 [Correspondances] Associer les 4 distributions statistiques suivantes aux boîtes à moustaches ci-après :

X	4	5	8	9	18	19	19	19	19	20
Y	8	9	9	9	9	10	11	12	18	20
Z	4	4	5	5	6	7	10	15	18	20
U	4	6	8	8	10	12	16	16	16	20



40 [Consommation] Dans deux villes X et Y, on a sélectionné un échantillon de 1000 personnes à qui on a demandé combien de cigarettes ils fumaient par jour. Les résultats ont été présentés sous la forme d'une boîte à moustaches ci-après :



(a) Quelle est la valeur de Q_1, Q_2 et Q_3 pour les deux villes.

(b) Quelle est la ville la plus consommatrice de cigarettes ?

(c) Peut-on affirmer qu'un quart de la population de la ville X fume plus de 3 cigarettes par jour ?

(d) Peut-on affirmer que la moitié des habitants de la ville Y fume moins de 11 cigarettes par jour ?

41 [Valeurs aberrantes] On a mesuré dans une classe la masse (en kg) des filles (Y) et des garçons (X). Les valeurs observées sont les suivantes :

Y	52	56	60	52	80	54	56	56	50	58	58	48	60	52
X	70	62	64	72	64	68	84	61	72	68	74	64		

Représenter sur un même graphique les deux boîtes à moustaches afin de pouvoir faire une rapide comparaison. Les boîtes à moustaches devront également faire apparaître d'éventuelles valeurs aberrantes.

42 [Sans valeurs aberrantes] On a donné le même problème de mathématiques à 100 candidats. Le temps (en minutes) pour résoudre ce problème a été mesuré pour chaque candidat :

4	6	7	8	8	9	10	10	14	15
4	6	7	8	8	9	10	10	14	15
5	6	7	8	9	9	10	10	14	15
5	6	7	8	9	9	10	10	14	15
5	6	8	8	9	9	10	10	14	15
5	6	8	8	9	10	10	10	14	20
5	6	8	8	9	10	10	10	15	20
5	7	8	8	9	10	10	14	15	20
6	7	8	8	9	10	10	14	15	20
6	7	8	8	9	10	10	14	15	20

À partir de ces données, construire un diagramme en barre et en dessous une boîte à moustaches ne faisant pas apparaître de valeurs aberrantes.

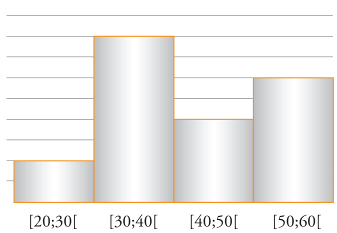
43 [Dépenses] Une étude statistique concernant les dépenses hebdomadaires pour l'habillement (en frs) a fourni les résultats suivants :

Classes	$[0;100[$	$[100;200[$	$[200;300[$	$[300;400[$	$[400;500[$
Effectifs	16	10	8	8	6

Construire la boîte à moustache à partir de cette série statistique.

23.4 Problèmes et exercices de synthèse

44 [Écart type] Calculer l'écart type de la distribution à partir de l'histogramme suivant :



45 [Écart absolu moyen] On donne la mini distribution statistique suivante :

$$2 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 5$$

(a) Calculer manuellement l'écart absolu moyen de cette distribution.

(b) Utiliser la fonction ECART.MOYEN pour vérifier la valeur obtenue.

46 [Différents indicateurs] On donne la série suivante : 2 3 5 5 4 4 5 2 2 4

Calculer les indicateurs suivants : b_0, b_k, Q_1, M_e, Q_3, $\overline{x}$, $\overline{x^2}$, σ_x^2 et σ_x.

47 [Explication] Montrer pourquoi, il n'est pas possible d'avoir pour une variable statistique

$$\sum_{i=1}^{k} f_i x_i^2 = 10 \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{k} f_i x_i = 5$$

48 [Exercice complet] On donne les informations suivantes :

Classes	x_i	n_i	f_i	F_i
[2 ; 4 [		2		
[4 ; 6 [		2		
[6 ; 8 [		4		
[8 ; 10 [		10		
[10 ; 12 [		2		
Total				

(a) Compléter le tableau ci-dessus.

(b) Calculer $\overline{x}$ et σ_x.

(c) Calculer Q_1, Q_2 et Q_3.

(d) Calculer μ_3, et μ_4.

(e) Juger de l'asymétrie et de l'aplatissement au moyen de C_Y, γ et β.

(f) Représenter rapidement la courbe des fréquences cumulées.

49 [Exercice complet] Une étude sur le nombre de minutes quotidiennes passées devant la télévision a donné, sur 100 employés d'une entreprise, les résultats suivants :

$[b_{i-1} ; b_i[$	x_i	n_i	f_i	F_i
[75 ; 80 [		8		
[80 ; 85 [		13		
[85 ; 90 [		15		
[90 ; 95 [		30		
[95 ; 100 [		16		
[100 ; 105 [		9		
[105 ; 110 [		5		
[110 ; 115 [		4		
Total		**100**		

(a) Compléter le tableau ci-dessus.

(b) Calculer les 3 mesures de tendance centrale.

(c) Calculer les quartiles.

(d) Calculer l'étendue, la variance et l'écart type.

(e) Calculer le coefficient d'asymétrie de Fisher. Interpréter.

(f) Calculer le coefficient d'aplatissement de Pearson. Interpréter.

(g) Quel est le pourcentage d'employés passant entre 87 et 106 minutes quotidiennes devant la télévision ?

50 [Moments particuliers] Montrer que dans toute distribution statistique les relations suivantes peuvent être établies : $\mu_0 = 1$ et $\mu_1 = 0$.

51 [Alpha de Cronbach] L'alpha de Cronbach [α] est un indicateur permettant de mesurer si les questions (items) d'une enquête sont cohérentes entre elles. Sa valeur s'établit en principe entre 0 et 1. Si $\alpha > 0,7$ on parle de cohérence acceptable. Le calcul du α est le suivant :

$$\alpha = \frac{k}{k-1}\left(1 - \frac{\sum_{i=1}^{k} \sigma_{Y_i}^2}{\sigma_X^2}\right)$$

où k = nombre de questions, σ_X^2 = la variance échantillonale[4] du nombre total de points par personne et $\sigma_{Y_i}^2$ = la variance échantillonale des points à la question i.

Un magasin souhaite évaluer la satisfaction de sa clientèle. Il demande aux clients d'indiquer, sur une échelle de 1 à 5, dans quelle mesure ils sont d'accord avec les trois affirmations suivantes :

- Je suis très satisfait du service.
- Il est possible que je revienne dans votre magasin.
- Il est possible que je recommande votre magasin à mes amis.

Calculer α, et commenter cette valeur à partir des résultats obtenus sur un échantillon de 10 clients :

Client ->	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Question 1	2	3	4	5	5	2	1	3	2	3
Question 2	2	4	4	4	5	2	1	4	2	3
Question 3	3	5	5	4	5	3	1	3	4	4

52 [Médicament] Un chercheur travaille dans un laboratoire qui vient de mettre au point un médicament dans le traitement du cholestérol. Cinquante personnes ayant un taux de cholestérol trop élevé sont réparties en deux groupes :

- le groupe 1 est traité avec le médicament sensé abaisser le taux de cholestérol dans le sang ;
- le groupe 2 est traité avec un produit placebo.

4. Utiliser sous Excel la fonction VAR.S

Avant le traitement, on a pris soin de mesurer le taux de cholestérol des 50 malades (taux de LDL[5] cholestérol exprimé en gramme par litre de sang) :

Résultats du taux de LDL Cholestérol avant tout traitement (en g/L)									
2,79	2,97	2,88	2,97	3,06	3,06	2,61	2,88	2,70	2,61
2,79	2,88	2,70	3,06	2,61	2,97	2,61	2,70	2,70	2,70
2,61	2,88	2,88	2,88	2,61	2,79	2,88	3,06	2,97	2,79
2,88	2,79	2,88	2,61	2,88	2,97	2,70	3,06	2,88	2,61
2,61	2,61	2,97	3,06	2,88	3,06	2,70	2,61	2,88	2,97

À la fin du traitement, le taux de LDL Cholestérol des 50 malades est mesuré. Les résultats (en g/L) obtenus sont les suivants :

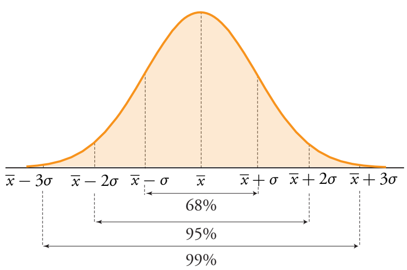
Groupe 1 : traité avec le médicament				
2,07	2,88	2,70	2,79	1,98
1,98	2,52	2,52	2,52	2,52
1,98	2,52	2,25	2,34	2,34
2,70	2,25	2,52	2,88	1,98
2,25	2,34	2,07	3,06	2,43

Groupe 2 : traité avec le placebo				
2,88	2,97	2,70	2,88	1,98
2,61	2,70	2,88	2,52	2,61
2,79	2,88	2,70	2,97	2,34
2,43	2,88	2,88	2,16	2,88
2,16	2,79	2,70	2,34	3,06

Juger de l'efficacité du médicament au moyen de boîtes à moustaches. Commenter les résultats obtenus.

53 [Loi normale] De nombreuses séries statistiques dont l'effectif est important ont une population distribuée suivant une loi dite normale avec une courbe des effectifs appelée courbe de Gauss. Dans une loi normale, la moyenne, la médiane et le mode, sont égaux. Pour une série statistique «normalement» distribuée, il y a environ :

- 68% de la population dans l'intervalle $[\overline{x}-\sigma;\overline{x}+\sigma]$
- 95% de la population dans l'intervalle $[\overline{x}-2\sigma;\overline{x}+2\sigma]$
- 99% de la population dans l'intervalle $[\overline{x}-3\sigma;\overline{x}+3\sigma]$



Une entreprise produit des tubes métalliques. L'analyse d'un échantillon de 100 pièces produites donne le tableau suivant :

5. LDL= low density lipoprotein en anglais. Il s'agit en fait du mauvais cholestérol contrairement au HDL.

Longueur (cm)	Effectif
150,4 à 150,5	7
150,5 à 150,6	18
150,6 à 150,7	41
150,7 à 150,8	28
150,8 à 150,9	6
Total	**100**

(a) Calculer la moyenne et l'écart type de cette distribution.

(b) Calculer sur la base de ces données statistiques le pourcentage de pièces dont la longueur appartient à l'intervalle $[\overline{x}-\sigma;\overline{x}+\sigma]$.

(c) En supposant que cette distribution suive une loi normale, calculer le pourcentage de pièces dont la longueur appartient à l'intervalle $[\overline{x}-\sigma;\overline{x}+\sigma]$.

54 [Écart type échantillonnal] Pour estimer l'écart type σ d'une population sur la base d'un échantillon de cette population, on utilise la formule suivante :

$$S=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}$$

On dit alors que S est un estimateur de l'écart type σ de la population.

(a) Estimer l'écart type d'une population à partir de l'échantillon suivant :

1 5 2 6 9 10

(b) Utiliser la fonction ECARTYPE.STANDARD d'Excel pour contrôler ce résultat.

55 [Transformation affine] Dans une entreprise anglaise, une étude statistique sur la température dans ses locaux de production a fourni les indicateurs suivants : $\overline{x}=77°\text{F}$ et $\sigma_x^2=81°\text{F}$. Exprimer ces mêmes résultats en degrés Celsius, en utilisant la formule permettant de convertir des degrés Celsius en Fahrenheit :

$$F=\frac{9}{5}C+32$$

56 [Coefficient de variation] Une série statistique est définie par $x_i=2i$ pour i allant de 1 à 7. Que vaut dans ce cas le coefficient de variation (CV) ?

57 [Erreur de saisie] La moyenne et l'écart type de 100 observations sont respectivement de 40 et 5,1. Après contrôle il s'avère que durant la saisie informatique une valeur de 50 a été entrée au lieu de 40. Quels sont alors la moyenne et l'écart type corrects ?

58 [Âge moyen] L'âge moyen du personnel d'une petite entreprise est de 50 ans avec un écart type de $\sqrt{250}$. Cette année, 3 personnes (60 ans, 65 ans et 65 ans) parmi les 6 que compte le personnel, quittent leur service pour une retraite bien méritée. Elles sont remplacées par deux nouveaux employés tous deux âgés de 20 ans. Calculer le nouvel âge moyen du personnel ainsi que le nouvel écart type.

59 [Un peu d'algèbre] On donne 3 nombres : a ; b et 2. On sait que $\sigma_x^2 = 7$ et que $\overline{x} = 3$. Que vaut alors le produit $a \times b$?

60 [Transformation affine] Pour cinq candidats, les notes d'un jury sont les suivantes : 3 ; 4 ; 3 ; 1 ; 1. On désire transformer linéairement ces notes de telle sorte que la moyenne soit de 3,8 avec un écart type de 1,8. Quelles seront alors les nouvelles notes revues du jury ?

61 [Prime d'assurance] En 2020, il y a eu dans une région 20 incendies sur 8400 immeubles similaires assurés. Le montant des sinistres s'est réparti selon le tableau suivant :

Montant du sinistre	Nombre de sinistres
moins de 10 000	3
de 10 000 à 50 000	4
de 50 000 à 100 000	5
de 100 000 à 200 000	7
de 200 000 à 600 000	1
Total	**20**

La compagnie d'assurance applique la formule suivante pour déterminer la prime commerciale P_C payable par immeuble assuré :

$$P_C = \frac{(\text{Coût total des sinistres} + \alpha \cdot \sigma) \cdot (1+\beta)}{\text{Nombre d'immeubles assurés}}$$

Calculer la prime commerciale compte tenu d'un chargement de sécurité α de 2,8 ainsi qu'un chargement pour frais de gestion β de 15%.

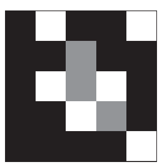
62 [Recherche de n] Si l'écart type des n premiers nombres naturels est 2, que vaut n ?

63 [Moyenne et écart type globaux] On donne les informations suivantes au sujet de deux populations :

Population 1	$N_1 = 5$	$\overline{x} = 3,6$	$\sigma = 2,8$
Population 2	$N_1 = 5$	$\overline{x} = 7,8$	$\sigma = 1,6$

Que vaut la moyenne et l'écart type des deux populations réunies ?

64 [Défi] L'image ci-dessous représente quelques pixels d'une photo numérique en 256 niveaux de gris. (0 correspond au noir, 128 au gris et 255 au blanc).



(a) Déterminer la couleur moyenne de cette image.

(b) Déterminer son écart type.

Chapitre 24

Moyennes et indices

Objectifs du chapitre

- calculer des taux de croissance annuels ou moyens.
- choisir et calculer la moyenne appropriée en fonction de la situation.
- calculer des indices simples et synthétiques de prix.
- calculer l'indice de concentration de Gini.

24.1 Taux de croissance et moyennes

24.1.1 Taux de croissance global

Un **taux de croissance global** (noté i) est un indicateur utilisé pour mesurer la croissance d'une grandeur d'une période sur une autre. Il est défini par la formule suivante :

$$i = \frac{V_t - V_0}{V_0} \qquad \text{ou exprimé en \%} \qquad i = \frac{V_t - V_0}{V_0} \times 100$$

avec :

V_0 Valeur initiale d'une grandeur V

V_t Valeur à la date t d'une grandeur V

Exemple 24.1

Mesurer la croissance absolue ainsi que le taux de croissance du cours de l'action suivante entre mars et juillet :

Date	Mars	Avril	Mai	Juin	Juillet
i	0	1	2	3	4
V_i (en frs)	8,34	9,01	9,35	8,70	7,43

Solution

- Croissance absolue : $7,43 - 8,34 = -0,91$
- Taux de croissance : $i = \frac{7,43-8,34}{8,34} \simeq -0,10911$ (baisse d'environ 10,91%)

24.1.2 Coefficient multiplicateur

Le **coefficient multiplicateur** (noté r) permet de calculer par quelle valeur il faut multiplier V_0 pour obtenir V_t. Ce coefficient est calculé comme suit :

$$r = \frac{V_t}{V_0}$$

Taux de croissance et coefficient multiplicateurs sont donc liés par :

$$i = r - 1 \qquad \text{exprimable souvent en \%}$$

Exemple 24.2

Mesurer l'évolution du prix des articles A et B suivants entre les deux dates d'observation :

Article	Date_0	Date_1
A	200	250
B	200	160

Solution

- [Article A] $r = \frac{250}{200} = 1,25$ donc $i = 1,25 - 1 = 0,25$ (+25%)
- [Article B] $r = \frac{160}{200} = 0,8$ donc $i = 0,8 - 1 = -0,2$ (–20%)

Astuces de calcul :

- Augmenter une valeur de 20% $\Rightarrow$ on multiplie cette valeur par 1,2
- Augmenter une valeur de 7,7% $\Rightarrow$ on multiplie cette valeur par 1,077
- Diminuer une valeur de 20% $\Rightarrow$ on multiplie cette valeur par 0,8

24.1.3 Taux de croissance moyen

Lorsqu'une grandeur subit plusieurs évolutions successives, on peut multiplier les coefficients multiplicateurs $r_1 ; r_2 ; \cdots ; r_n$ pour former le coefficient multiplicateur global r.

Le **taux de croissance moyen** (noté t_m) relatif à n évolutions successives s'obtient alors par l'une ou l'autre des formules suivantes :

$$t_m = \sqrt[n]{r} - 1 \qquad \text{ou} \qquad t_m = \sqrt[n]{\frac{V_t}{V_0}} - 1$$

Taux de croissance moyen
Pour comprendre cette formule.

Exemple 24.3

Calculer le taux de croissance global et moyen à partir du tableu suivant :

Date	0	1	2
Valeur	100	80	144

Solution

Méthode 1 : Sur la base des valeurs initiales et finales

- Taux de croissance global : $i = \frac{144}{100} - 1 = 44\%$
- Taux de croissance moyen : $t_m = \sqrt{\frac{144}{100}} - 1 = 20\%$

Méthode 2 : Sur la base des coefficients multiplicateurs

$$r_1 = \frac{80}{100} \qquad \text{et} \qquad r_2 = \frac{144}{80}$$

$$r = \frac{80}{100} \times \frac{144}{80} = 1,44$$

- Taux de croissance global : $i = r - 1 = 1,44 - 1 = 44\%$
- Taux de croissance moyen : $t_m = \sqrt{1,44} - 1 = 20\%$

24.1.4 Grandeurs liées

Lorsqu'une grandeur représente le produit de deux autres grandeurs qui varient, son coefficient multiplicateur est égal au produit des coefficients multiplicateurs des deux grandeurs liées.

Exemple 24.4

Calculer le taux de croissance de la recette (i_R) d'un magasin sachant que la demande a augmenté de 20% alors que les prix ont diminué de 5%.

Solution

La recette (R) est donnée par : $R = \text{Prix} \times \text{Quantités}$. Ainsi :

$$\begin{aligned}(1 + i_R) &= (1 - 0,05)(1 + 0,2) \\ i_R &= (1 - 0,05)(1 + 0,2) - 1 \\ &= 0,14 \quad \text{augmentation de } 14\%\end{aligned}$$

Exemple 24.5

Si au cours d'une période donnée, les salaires ont augmenté de 60% et que les prix ont augmenté de 20%, de combien s'est accru le pouvoir d'achat.

Solution

Le pouvoir d'achat (P) s'exprime par le rapport suivant :

$$P = \frac{\text{Revenu}}{\text{Prix}}$$

Le taux de croissance du pouvoir d'achat i_p est donc :

$$\begin{aligned}(1 + i_p) &= \frac{1 + 0,6}{1 + 0,2} \simeq 1,33 \\ i_p &= 1,33 - 1 \simeq 0,33 \quad \text{augmentation d'environ } 33\%\end{aligned}$$

24.1.5 Moyennes

La moyenne arithmétique classique étudiée précédemment n'est pas toujours représentative en présence de phénomènes qualifiés de «variables». L'objectif de cette section est de définir les outils permettant de mesurer ces variations ainsi que le type de moyenne à utiliser en fonction du phénomène étudié.

Moyenne géométrique

La **moyenne géométrique** (G) est utilisée pour les calculs de taux moyens de croissance.

Pour N valeurs individuelles ou regroupées en k classes, la moyenne géométrique peut se calculer par l'une ou l'autre des formules suivantes :

$$G = \sqrt[N]{\prod_{i=1}^{N} x_i} = \sqrt[N]{\prod_{i=1}^{k} x_i^{n_i}} = \prod_{i=1}^{k} x_i^{f_i}$$

Exemple 24.6

Calculer la moyenne géométrique des valeurs individuelles : 3 6 8 9

Solution

$$G = \sqrt[4]{3 \times 6 \times 8 \times 9}$$
$$= \sqrt[4]{1296} = 6$$

Exemple 24.7

Calculer la moyenne arithmétique et géométrique de la distribution suivante :

Points	x_i	2	5	10
Fréquence	f_i	0,8	0,15	0,05

Solution

- $\overline{x} = \sum_{i=1}^{3} x_i f_i = 2 \times 0,8 + 5 \times 0,15 + 10 \times 0,05 = 2,85$
- $G = \prod_{i=1}^{3} x_i^{f_i} = 2^{0,8} \times 5^{0,15} \times 10^{0,05} \simeq 2,48$

On constate que la moyenne géométrique est plus basse que la moyenne arithmétique.

Exemple 24.8

Une marchandise de 200 frs a augmenté de 60% la première année et a diminué de 10% l'année suivante. Quelle a été l'augmentation annuelle moyenne ?

Solution

On applique la **moyenne géométrique des coefficients multiplicateurs** :

$$G = \sqrt{1,6 \cdot 0,9} = 1,2$$

Ce qui correspond à une augmentation annuelle moyenne de 20%.

Moyenne harmonique

La **moyenne harmonique** (H) est utilisée pour les calculs de vitesse moyenne, de taux de change moyens, c'est-à-dire dans les situations où les valeurs observées sont elles-mêmes obtenues en calculant un rapport.

Pour N valeurs individuelles ou regroupées en k classes, la moyenne harmonique peut se calculer par l'une ou l'autre des formules suivantes :

$$H = \frac{N}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{x_i}} = \frac{N}{\sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{x_i}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{k} \frac{f_i}{x_i}}$$

Exemple 24.9

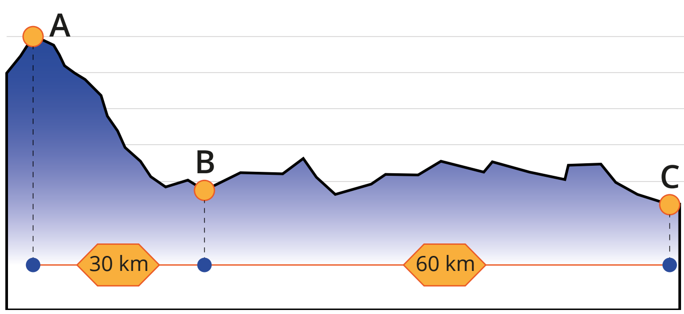
Calculer la moyenne harmonique des valeurs individuelles 1 2 3 6 :

Solution

$$H = \frac{4}{\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}} = \frac{4}{2} = 2$$

Exemple 24.10

Un cycliste a parcouru le tronçon AB de la course à la vitesse de 50 km/h et le tronçon BC à 20 km/h. Quelle a été sa vitesse moyenne sur tout le parcours ?



Solution

Les informations peuvent être résumées comme suit :

Vitesse (x_i)	50	20	**Total**
Km parcourus (n_i)	30	60	**90**

Vitesse moyenne : $H = \dfrac{90}{\frac{30}{50}+\frac{60}{20}} = \dfrac{90}{3,6} = 25$ km/h.

Exercices d'application de la section 24.1

1 [Taux de croissance] Calculer de tête le taux de croissance des valeurs suivantes :

(a) $V_0 = 100$ et $V_1 = 120$

(b) $V_0 = 120$ et $V_1 = 132$

(c) $V_0 = 50$ et $V_1 = 65$

(d) $V_0 = 100$ et $V_1 = 80$

(e) $V_0 = 80$ et $V_1 = 40$

(f) $V_0 = 80$ et $V_1 = 72$

2 [Taux de croissance] Calculer le taux de croissance des valeurs suivantes :

(a) $V_0 = 90$ et $V_1 = 120$

(b) $V_0 = 120$ et $V_1 = 90$

(c) $V_0 = 65$ et $V_1 = 60$

(d) $V_0 = 60$ et $V_1 = 65$

(e) V_0 et $V_1 = 2V_0$

(f) V_0 et $V_1 = \frac{2}{3}V_0$

3 [Taux de croissance] On donne le tableau suivant :

Date	0	1	2	3	4
Prix	96		90		120

(a) Calculer le coefficient multiplicateur global.

(b) Calculer le taux de croissance global

(c) Calculer le taux de croissance moyen sur la période considérée.

4 [Taux de croissance] À quel taux de croissance annuel moyen correspond :

(a) le doublement d'une grandeur en 20 ans

(b) le triplement d'une grandeur en 10 ans.

5 [Grandeurs liées] Durant une période a, les prix de vente des produits d'une firme ont augmenté de 5% tandis que les quantités vendues ont augmenté de 8%.

(a) Quelle a été la croissance du chiffre d'affaires de la firme pendant cette période ?

(b) Sachant que durant la période b le chiffre d'affaires de cette même firme s'est accru de 15% et que les quantités vendues ont augmenté de 20%, en déduire le taux d'évolution des prix correspondant.

6 [Retrouver les notes] Sachant que la moyenne arithmétique de 2 notes égale 13 et que la moyenne géométrique de ces mêmes notes égale 12, trouver ces deux notes.

7 [Temps moyen] Dans une entreprise de fabrication 3 ouvriers produisent des pièces. L'ouvrier A met 10 min par pièce, l'ouvrier B met 15 min et l'apprenti C met 20 min. Calculer le temps moyen de fabrication d'une pièce.

8 [Moyenne harmonique] Quelle est la moyenne harmonique des valeurs a et b ?

9 [Vitesse de production] 3000 documents sont confiés à deux sociétés de GED pour être scannés. La première a scanné 1000 documents à la vitesse de 800 documents à l'heure et l'autre société 2000 documents à la vitesse de 700 documents à l'heure. À quelle vitesse moyenne l'ensemble des documents ont-ils été scannés ?

10 [Croissance du CA] Le chiffre d'affaires d'une société a évolué de 5% la première année et a été stable les trois années suivantes. Il a ensuite régressé de 2% la dernière année. Quel a été le taux de croissance annuel moyen au cours de cette période d'observation ?

11 [Grandeurs liées] Si au cours d'une période donnée, les revenus augmentent de 60% et que les prix baissent de 20%, qu'en est-il du pouvoir d'achat ?

12 [Production] En deux ans, une production a augmenté de 68%. La première année, elle a augmenté de a% et la seconde année l'augmentation en pourcentage a doublé. Déterminer l'augmentation en % au cours de la première année.

13 [Cours d'une action] Si le cours d'une action baisse de 3% une année, puis augmente de 3% l'an suivant, a-t-il subit une variation ?

14 [Valeur d'une action] La valeur d'une action est passée du début janvier au début mai de 760 frs à 608 frs.

(a) Quel est le taux de fluctuation mensuel moyen ?

(b) Si cette tendance devait se poursuivre, quelle serait la valeur de l'action à fin décembre ?

15 [Inflation] Si l'inflation d'un pays est de 5% la première année et de 15% la suivante, calculer l'augmentation annuelle moyenne des prix.

16 [Vitesse moyenne] Eric fait un aller - retour entre une ville A à une ville B à vélo. À l'aller, sa vitesse moyenne est de 20 km/h et au retour, elle est de 26 km/h. Quelle est sa vitesse moyenne ?

17 [Vitesse de production] Une petite usine abrite 2 machines. La première machine a produit 500 pièces à la vitesse de 100 pièces par heure. Une seconde machine a produit 300 pièces à la vitesse de 60 pièces par heure. Calculez la vitesse moyenne de production dans l'usine.

18 [Affiches publicitaires] Une entreprise consacre chaque année un budget fixe de 12 000 frs pour des affiches publicitaires.

- La première année, le prix de l'affiche était de 2,50 frs.
- La deuxième année, le prix de l'affiche était de 3 frs.
- La troisième année, le prix de l'affiche était de 4 frs.

Calculer le prix annuel moyen de l'affiche.

24.2 Indices

24.2.1 Indices de prix

Indice simple des prix

L'**indice simple** permet de mesurer l'évolution du prix d'un seul produit ou service dans le temps ou l'espace. L'indice simple des prix (P) entre les dates 0 et t est défini par :

$$I^P_{t/0} = \frac{P_t}{P_0} = \frac{\text{Prix du bien en } t}{\text{Prix du bien en } 0} \qquad \text{ou} \qquad I^P_{t/0} = \frac{P_t}{P_0} \times 100$$

Les indices simples jouissent des propriétés suivantes :

- La **réversibilité**. Un indice est réversible si :

$$I^P_{t/0} = \frac{1}{I^P_{0/t}} \qquad \text{ou en \%} \qquad I^P_{t/0} = \frac{100^2}{I^P_{0/t}}$$

Exemple 24.11

Calculer $I^P_{10/12}$ si $I^P_{12/10}$=125.

Solution

$$I^P_{10/12} = \frac{100^2}{I^P_{12/10}} = \frac{100^2}{125} = 80$$

- La **circularité** ou **transférabilité**. Un indice I est circulaire si, pour deux dates t et n, on a :

$$I_{t/0} = I_{t/n} \times I_{n/0} \qquad \text{ou en \%} \qquad I_{t/0} = I_{t/n} \times I_{n/0} \times \frac{1}{100}$$

Exemple 24.12

Le prix d'une marchandise a subi une baisse de 20% entre 2019 et 2020 puis une hausse de 25% entre 2020 et 2021. Quel a été l'accroissement du prix entre 2019 et 2021 ?

Solution

$$I_{21/19} = I_{21/20} \times I_{20/19} \times \frac{1}{100} = \frac{80 \times 125}{100} = 100$$

Le prix de la marchandise est resté globalement stable entre 2019 et 2021.

Indice synthétique des prix

En économie, il existe 3 principaux indices synthétiques des prix : celui de Laspeyres, Paasche et Fisher. [1]

- L'indice des prix de **Laspeyres** (économiste allemand 1834-1913) permet de mesurer l'évolution des prix d'un panier composé des quantités de l'époque.
- L'indice des prix de **Paasche** (statisticien et un économiste allemand 1851-1925) permet de mesurer l'évolution des prix d'un panier composé des quantités d'aujourd'hui.
- L'indice des prix de **Fisher** (économiste américain 1867-1947) est la moyenne géométrique des indices des prix de Paasche et de Laspeyres.

Ces différents indices, mesurent l'évolution entre deux dates 0 et t du prix d'un panier de n biens (appelé aussi panier de la ménagère). Ils se calculent donc comme suit :

- Laspeyres : $\mathscr{L}^P_{t/0} = \dfrac{\sum_{i=1}^n P_t^i {Q_0}^i}{\sum_{i=1}^n P_0^i {Q_0}^i}$
- Paasche : $\mathscr{P}^P_{t/0} = \dfrac{\sum_{i=1}^n P_t^i {Q_t}^i}{\sum_{i=1}^n P_0^i {Q_t}^i}$
- Fisher : $\mathscr{F}^P_{t/0} = \sqrt{\mathscr{L}^P_{t/0} \cdot \mathscr{P}^P_{t/0}}$

Exemple 24.13

Calculer l'indice synthétique des prix de Laspeyres, du panier composé des deux biens suivants :

Biens	Quantités achetées	Prix en 2000 ($t=0$)	Prix en 2010 (t)
Bananes	2 kg	3 frs / kg	4 frs / kg
Fraises	0,5 kg	6 frs / kg	8 frs / kg

Solution

$$\mathscr{L}^P_{t/0} = \frac{\sum_{i=1}^2 P_t^i {Q_0}^i}{\sum_{i=1}^2 P_0^i {Q_0}^i} = \frac{2\times 4 + 0,5\times 8}{2\times 3 + 0,5\times 6} \simeq 1.33 \quad \text{ou } 133$$

Le prix du panier a donc augmenté d'environ 33% entre 2000 et 2010.

Remarque

- Les indices de Paasche et de Laspeyres possèdent la propriété suivante :

$$\mathscr{L}^P_{t/0} \times \mathscr{P}^P_{0/t} = \mathscr{L}^P_{0/t} \times \mathscr{P}^P_{t/0} = 1$$

- Les indices de Paasche et Laspeyres ne sont ni circulaires ni réversibles.

1. Les indices de Laspeyres et de Paasche des quantités se calculent de façon analogue : Rapport des quantités pondérées par des prix de l'époque pour Laspeyres et par des prix d'aujourd'hui pour Paasche.

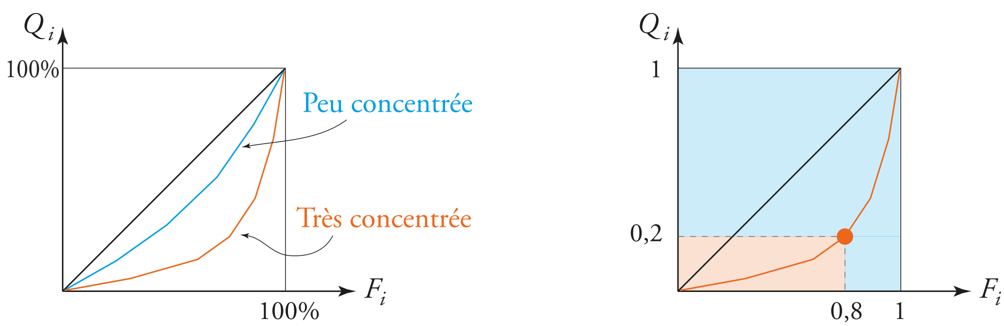
24.2.2 Indice de Gini de répartition des revenus

Courbe de Lorenz

La courbe de Lorenz est la représentation graphique de la fonction qui permet de représenter combien la part X d'une population détient de part Y d'une variable donnée. Elle a été développée par Max Otto Lorenz (économiste américain 1880-1962) en vue d'une représentation graphique des inégalités de revenu.

Par exemple, pour la répartition des revenus Y, on porte sur l'axe des y les **pourcentages cumulés** du revenu (Q_i) et sur l'axe des x les **pourcentages cumulés** des personnes percevant ce revenu (F_i). Dans ces conditions, une égalité complète en matière de revenus est représentée par la bissectrice, ou ligne d'**équirépartition**.

Plus l'inégalité est importante, plus la courbe représentant la répartition des revenus s'éloigne de cette bissectrice. Cela signifie alors que les richesses sont **concentrées** et détenues par une petite partie de la population. Ce que l'on peut voir sur le graphique ci-après à droite où 80% de la population se répartit seulement 20% des revenus ou des richesses. Ce qui revient à dire que les 20% des personnes les plus riches se répartissent 80% des richesses.



La courbe de Lorenz s'applique aussi bien aux variables statistiques discrètes que continues. On trouve de nombreuses applications de la courbe de Lorenz en économie ou en gestion d'entreprise.

Pour calculer la colonne des Q_i, on commence par calculer :

$$q_i = \frac{n_i x_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i} = \frac{f_i x_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i x_i}$$

puis Q_i est obtenu en calculant le cumul des q_i, ou, plus formellement par :

$$Q_i = \sum_{t=1}^{i} q_t$$

Exemple 24.14

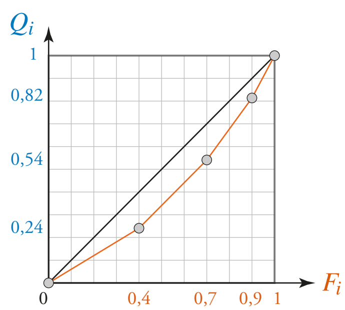
Dans une entreprise, on a mesuré le salaire en milliers d'euros de 100 employés. Représenter au moyen d'une courbe de Lorenz les informations résumées ci-après :

Salaires	Nombre d'employés
[20 ; 40 [	40
[40 ; 60 [	30
[60 ; 80 [	20
[80 ; 100 [	10

Solution

On construit un tableau contenant la colonne des F_i et Q_i servant à représenter les différentes valeurs du graphique.

Salaires	x_i	n_i	f_i	F_i	$f_i x_i$	q_i	Q_i
[20 ; 40 [	30	40	0,4	0,4	12	0,24	0,24
[40 ; 60 [	50	30	0,3	0,7	15	0,3	0,54
[60 ; 80 [	70	20	0,2	0,9	14	0,28	0,82
[80 ; 100 [	90	10	0,1	1	9	0,18	1
Total		100	1		50	1	



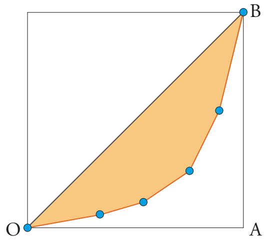
Ainsi, par exemple, on peut affirmer que 24% de la masse salariale est détenue par 40% des salariés.

Indice de Gini

La courbe de Lorenz permet d'obtenir une information visuelle de la concentration. Pour quantifier, évaluer la concentration, on utilise l'**indice de Gini** du nom du statisticien italien Corrado Gini (1884-1965).

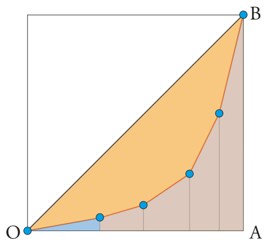
L'indice de Gini est une valeur comprise entre 0 [répartition parfaitement égalitaire] et 1 [répartition totalement inégalitaire].

L'indice de Gini (G) est obtenu en divisant l'aire de concentration [en orange] par l'aire du triangle OAB.[2]



$$G = \frac{\text{aire de concentration}}{\text{aire } OAB} = \frac{\text{aire orange}}{0,5}$$

L'aire de concentration peut être obtenue géométriquement en calculant l'aire du triangle OAB moins l'aire du triangle et des trapèzes sous la courbe de concentration.



Le calcul de l'indice de Gini peut aussi être obtenu directement à partir des valeurs F_i et Q_i par :

$$G = \sum_{i=1}^{k-1} (F_i\, Q_{i+1} - F_{i+1} Q_i) \qquad (0 \leq G \leq 1)$$

Formule de Gini
Démonstration de la formule

2. Cela permet d'obtenir un indice compris entre 0 et 1 et non entre 0 et 0,5.

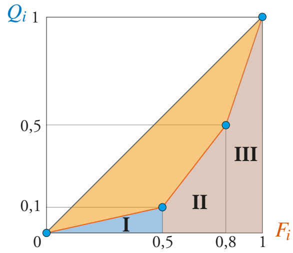
Exemple 24.15

Calculer l'indice de Gini à partir des valeurs suivantes selon la méthode géométrique et directe :

F_i	Q_i
0,5	0,1
0,8	0,5
1	1

Solution

Méthode géométrique



- $\mathbf{I} = (0,5 \times 0,1)/2 = 0,025$ (aire d'un triangle)
- $\mathbf{II} = \dfrac{0,5 + 0,1}{2} \times (0,8 - 0,5) = 0,09$ (aire d'un trapèze rectangle)
- $\mathbf{III} = \dfrac{1 + 0,5}{2} \times (1 - 0,8) = 0,15$ (aire d'un trapèze rectangle)
- $\mathbf{I} + \mathbf{II} + \mathbf{III} = 0,265$
- Aire de concentration $= 0,5 - 0,265 = 0,235$
- Indice de Gini : $G = \dfrac{0,235}{0,5} = 0,47$

Méthode directe

$$G = 0,5 \times 0,5 - 0,8 \times 0,1 + 0,8 \times 1 - 1 \times 0,5 = 0,47$$

Exercices d'application de la section 24.2

Indices de prix - Laspeyres - Paasche

19 [Indice simple] Une perceuse électrique valait 350 frs en 2017. En 2019, elle vaut 420 frs.

(a) Calculer l'indice du prix de vente de cette perceuse en 2019 en prenant pour base 100 l'année 2017.

(b) Quel est le pourcentage d'augmentation du prix de cette perceuse en 2019 par rapport au prix de 2017 ?

20 [Différents indices] Une entreprise produit une année 8 000 paires de ski qu'elle vend 355 frs pièce. L'année suivante, elle produit 8 600 paires de ski qu'elle vend 380 frs pièce.

(a) Déterminer l'indice du prix d'une paire de ski.

(b) Déterminer l'indice de quantité de la production de l'entreprise.

(c) Déterminer l'indice de valeur de la production de l'entreprise.

21 [Paasche et Laspeyres] Soit le tableau ci-après représentant les prix et quantités de 3 biens à 4 époques différentes :

Période (t)	Q_t^1	Q_t^2	Q_t^3	P_t^1	P_t^2	P_t^3
1	8	9	7	1	2	3
2	2	6	4	9	8	2
3	5	1	4	6	5	7
4	8	8	1	3	5	8

(a) Calculer l'indice de Laspeyres des prix $\mathscr{L}_{4/1}^{P}$

(b) Calculer l'indice de Paasche des quantités $\mathscr{P}_{3/2}^{Q}$

22 [Indice de Fisher] Montrer que l'indice de Fisher est réversible.

23 [Indice de Paasche] Calculer l'indice de Paasche des prix sur la base des informations suivantes :

Biens	Année de base		Année actuelle	
	Prix	Quantité	Prix	Quantité
A	4	10	6	16
B	6	15	4	20
C	8	5	10	4

24 [Recherche d'un prix] Le rapport entre l'indice de Laspeyres et de Paasche des prix est de 29/24. Quelle est la valeur de P dans le tableau ci-après ?

Biens	Année de base		Année actuelle	
	Prix	Quantité	Prix	Quantité
A	M	8	2	5
B	M	6	P	2

25 [Indice de Paasche] On donne : $\sum P_n Q_n = 2000$, $\sum P_0 Q_0 = 1250$, $\sum P_0 Q_n = 1850$ et $\sum P_n Q_0 = 1500$. Calculer l'indice des quantités de Paasche.

26 [Pouvoir d'achat] Dans un pays, le taux d'inflation est de 3,2% par an, mais les salaires augmentent de 4,1% par an. Au bout de combien d'années pourra-t-on affirmer que le pouvoir d'achat aura doublé ?

27 [Prix de l'essence] Dans une station service, l'indice du prix de l'essence sans plomb a évolué de la façon suivante :

Année	2010	2015	2019
Indice (Base 100=2010)	100	124,5	142,4
Prix du litre en frs		1,50	

Déterminer le prix de l'essence sans plomb en 2010 et 2019 à l'aide du tableau ci-dessus.

28 [Indice de Fisher] Calculer l'indice de Fisher des prix à partir des informations suivantes :

Produit	Quantités en 2013	Quantités en 2019	Prix en 2013	Prix en 2019
Bien 1	50	65	15	20
Bien 2	100	110	20	25
Bien 3	10	12	25	25

29 [Cours d'une action] Le cours d'une action observé à 3 dates différentes a été le suivant :

- Cours au 3 janvier N : 24,35 €
- Cours au 1 juin N : 23,55 €
- Cours au 2 décembre N : 21,77 €

(a) Calculer les indices $I_{\text{juin/jan}}$, $I_{\text{déc/juin}}$ et $I_{\text{déc/jan}}$

(b) Montrer pourquoi ces indices sont transférables.

30 [Différents indices] On dispose des informations générales suivantes à propos de 2 biens A et B :

Bien	Quantités en $t = 1$	Prix en $t = 1$	Quantités en $t = 2$	Prix en $t = 2$
A	a	c	e	g
B	b	d	f	h

(a) Calculer l'indice des prix de Laspeyres $\mathscr{L}^P_{2/1}$

(b) Calculer l'indice des prix de Paasche $\mathscr{P}^P_{1/2}$

(c) Calculer $\mathscr{L}^P_{2/1} \times \mathscr{P}^P_{1/2}$

31 [Construction] Le tableau suivant montre un extrait de l'évolution de l'indice suisse des prix de la construction entre 2008 et 2016 :

Année	2008	2014	2015	2016
Indice des prix	100	110,5	112,6	116,8

Monsieur Martin a acheté une villa 400 000 frs en 2008. Des travaux de restauration ont été réalisés en 2014 pour un coût de 70 000 frs.

Déterminer à l'aide de l'indice des prix de la construction à quel prix minimum aurait-il dû revendre sa villa en 2015 pour ne pas réaliser de moins value.

32 [Chiffre d'affaires] Un magasin de sport a augmenté son chiffre d'affaires sur des chaussures de tennis de 5% entre janvier 2019 et janvier 2020. L'indice des prix de ce produit $I_{2020/2019} = 112$. Durant cette période, les quantités de chaussures de tennis vendues ont-elles augmenté ou diminué ? de combien ?

33 [Prix d'un abonnement] L'abonnement à un journal coûtait 105 frs en 1980 et 272 frs en 2009. L'indice des prix à la consommation était de 100 en 1980 et de 190,2 en 2009.

(a) Quel est le taux annuel moyen de hausse nominale du prix de l'abonnement entre 1980 et 2009 ?

(b) Quel est le taux annuel moyen de l'inflation entre 1980 et 2009 ?

(c) Quel est taux annuel moyen de hausse réelle du prix de l'abonnement entre 1980 et 2009 ?

34 [Indice des dépenses] Le tableau suivant représente l'indice des dépenses intérieures d'éducation par habitant en France sur plusieurs années :

Année	1980	1990	2000	2005	2006
Indice (base 100 en 1980)	100	123,8	159,8	157,4	158,1

(a) Représenter ce même tableau en procédant au changement de base suivant : Base 100 en 2000.

(b) Quelle propriété des indices a-t-elle été utilisée ?

(c) Cette propriété est-elle correcte dans ce contexte ? Justifier.

35 [Billet de cinéma] À Doppelland, on a constaté, entre 2018 et 2019, une diminution de 20% de la fréquentation dans les salles de cinéma. Durant cette période, les recettes aux guichets ont augmenté de 60%. Quelle est l'augmentation du prix du billet d'entrée durant cette même période ?

Courbe de Lorenz et indice de Gini

36 [Indice de Gini] Calculer l'indice de Gini à partir des informations suivantes :

x_i	10	30	60	80	100
n_i	1	5	7	4	1

37 [Concentration des salaires] Dans une petite PME, la distribution des salaires est la suivante :

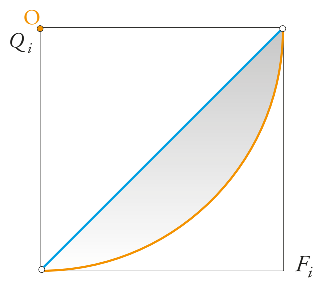
- Le patron avec 10 000 frs par mois
- 2 employés avec 4 000 frs par mois
- 2 stagiaires avec 1 000 frs par mois

Mesurer la concentration des salaires au sein de cette entreprise :

(a) Au moyen d'un calcul géométrique

(b) Au moyen d'une formule analytique

38 [Approche géométrique] Calculer l'indice de Gini en supposant que la distribution observée est proche d'un arc de cercle de centre O



39 [Répartition inégalitaire] Quelle est la répartition la plus inégalitaire ?

A :

x_i	2	7	12
n_i	1	2	7

B :

x_i	2	7	12
n_i	7	2	1

40 [Salaire du patron] Une petite PME comporte 3 personnes : 1 stagiaire avec un salaire de 1 000 frs par mois, un commercial avec un salaire de 5 000 frs par mois et le big boss dont le salaire mensuel n'est pas divulgué. Dans une étude de l'entreprise, on peut lire que l'indice de concentration des salaires de Gini est de 0,5. Quel est dans ce cas le salaire mensuel du big boss ?

41 [Calcul de la médiale] Dans une entreprise on a mesuré les salaires suivants :

Classes de salaire (euros)	Nombre d'employés	Somme des salaires
800 à moins de 900	18	15 000
900 à moins de 1000	30	29 000
1000 à moins de 1100	28	30 000
1100 à moins de 1500	16	21 000
1500 et plus	8	55 000
Total	100	150 000

(a) Calculer l'indice de Gini.

(b) Calculer la **médiale**, c'est-à-dire le niveau de salaire qui divise en deux la masse salariale.

24.3 Problèmes et exercices de synthèse

42 [Exportations] Les exportations d'une entreprise s'élevaient à 120 millions de francs en 2000. Leur évolution moyenne annuelle a été la suivante : +5% pendant 2 ans, +4% pendant 1 an, +6% pendant 3 ans, −5% pendant 1 an, et +5% pendant 1 an. Déterminer :

(a) la valeur finale des exportations

(b) la variation absolue et relative des exportations entre la valeur initiale et finale des exportations

(c) le taux de croissance global sur la période considérée

(d) le taux de croissance annuel moyen sur l'ensemble de la période.

43 [Placement financier] Un capital de 5 000 frs a été placé auprès d'une banque, à un taux révisable selon le marché financier. Pendant les 3 premières années, le taux a été de 6% ; il a été de 8% durant les 2 années suivantes et de 10% les 2 dernières années.

(a) déterminer la période d'observation

(b) déterminer le capital final

(c) à quel taux annuel moyen le capital a-t-il été placé sur l'ensemble de la période considérée ?

44 [Appareils électro-ménagers] Un stock d'appareils électro-ménagers est évalué à 300 000 frs : 100 000 frs d'appareils au prix unitaire de 800 frs et 200 000 frs d'appareils au prix unitaire de 1250 frs. Quelle est la valeur moyenne d'un appareil en stock ?

45 [Répartition hommes-femmes] Dans une entreprise, on a mesuré les moyennes suivantes :

- Salaire moyen de l'entreprise : 5125 frs
- Salaire moyen des hommes : 7000 frs
- Salaire moyen des femmes : 4500 frs

Quelle est la répartition hommes-femmes dans cette entreprise ?

46 [Croissance du CAC 40] «Le 30 décembre 2005, le CAC 40 clôture à 4715 points. Courant janvier 2006, il a franchi la barre des 4800 points et, ensuite, poursuivi sa hausse pour atteindre 5329,16 le 11 mai. Il est alors emporté dans un brusque repli mondial de 14,50% à 4564,69. Depuis ce recul de près de 800 points, le CAC 40 s'est relevé le 30 juin de presque 500 points, près de la barre symbolique des 5000. Depuis ce rebond, le CAC 40 continue son ascension. Le 1er janvier 2007, il franchit la barre des 5600 points.» Quelle a été la croissance annuelle du CAC 40 en 2006 ?

47 [Plaque moyenne] On considère 4 plaques métalliques carrées, dont les côtés mesurent respectivement : 1 cm, 5 cm, 7 cm et 11 cm. Quelle est la longueur du côté permettant d'obtenir une plaque moyenne ?

48 [Cours moyen] Au début des vacances, Marc et Sophie achètent des euros dans deux banques différentes. Dans la première, Marc paie 560 frs pour 500 € et dans la seconde Sophie paie 570 frs pour 500 €. À la fin des vacances, Marc change dans sa banque les euros qui lui reste au cours de 1,2 et reçoit en échange 156 frs. Sophie, dans sa banque, reçoit la même somme mais avec un cours à 1,3.

(a) Quel est le cours moyen entre les deux banques au début des vacances ?

(b) Quel est le cours moyen entre les deux banques à la fin des vacances ?

49 [Vitesse de production] Une entreprise dispose de machines de type A et de machines de type B permettant d'usiner des pièces mécaniques. Le nombre de pièces fabriquées à l'heure par chacune de ces machines est donné par :

- Machines de type A

Numéro de machine	1	2	3	4
Nombre de pièces produites	10	20	40	20

- Machines de type B

Numéro de machine	1	2	3	4	5	6
Nombre de pièces produites	20	20	20	60	40	30

(a) Quelle est la vitesse de production des machines de type A et de type B ?

(b) Quelle est la vitesse de production globale toute machine confondue ?

50 [Comparaison de moyennes] «Qui sont les meilleurs ? Les filles ou les garçons ?» Ci-après les résultats à une même épreuve passée dans deux sections : économistes et ingénieurs.

Chez les économistes on dispose des informations suivantes :

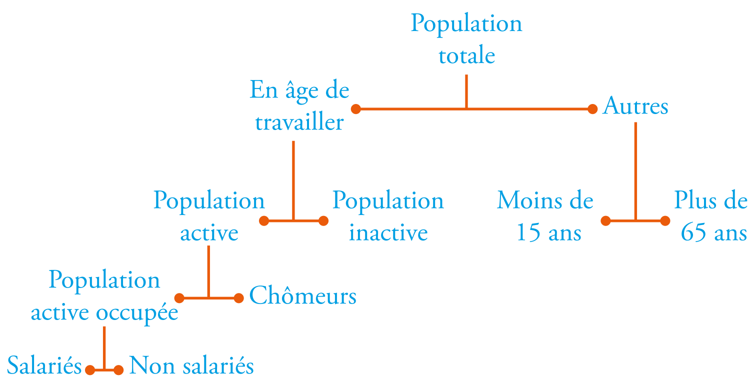
Sexe	Nombre	Moyenne
Garçon	30	4,2
Fille	10	4,1

Chez les ingénieurs on dispose des informations suivantes :

Sexe	Nombre	Moyenne
Garçon	10	4,5
Fille	30	4,4

Alors... Qui sont les meilleurs ?

51 [Taux de chômage] Le taux de chômage est le pourcentage des personnes faisant partie de la population active qui sont au chômage. Une ville de 100 000 habitants compte 5% d'inactifs, 5% de moins de 15 ans et 15% de retraités. Quel est le taux de chômage dans cette ville si 3 000 chômeurs sont enregistrés auprès du service de l'emploi ?



52 [Coût de l'alimentation] Une étude statistique a montré une hausse de 52% du coût de l'alimentation. Quel indice a été utilisé pour rendre compte de ce résultat ?

Bien	Q_0	P_0	Q_t	P_t
Chocolat	0,3	3	0,25	4
Pomme de terre	0,5	4,5	0,4	5
Fruits	0,15	5	0,2	7
Viande	0,2	33	0,2	60
Boissons	0,4	12	0,3	15

53 [Pouvoir d'achat]

(a) Si les prix augmentent de 10%, comment varie le pouvoir d'achat ?

(b) Si les prix baissent de 20%, comment varie le pouvoir d'achat ?

(c) Le salaire d'un individu augmente de 5% tandis que les prix croissent de 12%. Quelle est l'évolution du pouvoir d'achat de ce salarié ?

54 [Club de fitness] Un club de fitness a enregistré les informations suivantes entre deux périodes d'observation :

Produit	Année de base		Année actuelle	
	Prix	Quantité	Prix	Quantité
Entrée individuelle	20	100	30	70
Abonnement pour 10 entrées	150	40	200	60
Abonnement annuel	1200	20	1500	30

(a) Calculer l'augmentation des recettes entre l'année de base et actuelle.

(b) Au moyen de l'indice de Laspeyres, dire si cette augmentation est plus causée par une augmentation de prix ou de quantités.

55 [Part budgétaire] On appelle «**part budgétaire**» la dépense relative d'un bien i à la dépense totale mesurée à la période t. La part budgétaire s'exprime mathématiquement par :

$$W_t^i = \frac{Q_t^i \cdot P_t^i}{\sum_{i=1}^n Q_t^i \cdot P_t^i}$$

Calculer la part budgétaire du sucre en 2019 à partir du tableau ci-après, représentant les quantités de denrées alimentaires consommées par un ménage en 2019 :

Denrée alimentaire	Prix par kg	Quantité consommée en kg
Sucre	2,5 frs	7
Farine	6,0 frs	5
Riz	5,0 frs	4

56 [Prix des travaux] Le tableau ci-dessous représente l'indice des prix de la construction dans une certaine région de mars 2018 à mars 2019. (avril 2013 = 100)

Poste de dépenses	Mars 2018	Janvier 2019	Mars 2019
Construction d'immeubles administratifs	114,4	116,9	117,1
Construction d'immeubles d'habitation	111,0	113,1	114,4
Construction d'immeubles d'habitation en bois	112,7	115,2	116,3
Rénovation d'immeubles d'habitation	113,9	117,4	117,8

Une entreprise de cette région propose en mars 2018 un devis de rénovation pour l'isolation de façade d'une villa mitoyenne pour un montant de 56 000 frs. Le délai entre l'établissement du devis et le début des travaux étant supérieur à six mois, l'entreprise révise son devis en janvier 2019, sur la base d'une clause contractuelle, au moyen du coefficient multiplicateur α suivant :

$$\alpha = 0,2 + 0,8\frac{I_t}{I_0}$$

Sachant que I_t représente l'indice à la date de révision du devis et I_0 l'indice à la date d'établissement du devis, calculer le prix des travaux révisés en janvier 2019.

57 [Part budgétaire] Une entreprise à été sollicitée en 2019 pour 3 services principaux : comptable, financier et externe. Calculer la part budgétaire de chaque service dans la dépense totale en 2019.

Service	Prix en 2019	Quantités consommées en 2019
Comptable	40	50
Financier	100	40
Externe	80	50

58 [Déflater] **Déflater** une valeur nominale c'est l'exprimer en pouvoir d'achat. C'est passer d'une mesure en valeur nominale à une mesure en valeur réelle. Pour déflater une valeur nominale et l'exprimer au prix d'une année de base, on divise cette valeur par l'indice des prix actuel. À l'aide de ces informations, compléter le tableau ci-après et répondre aux questions qui suivent :

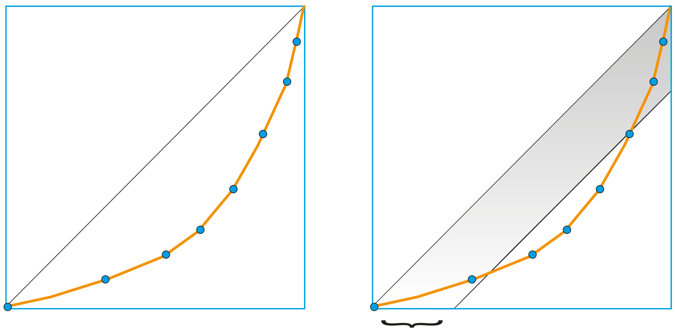
	2018	2019	2020
Salaire nominal moyen	1500	1530	1560
Indice du salaire nominal moyen, base 100 en 2018	100		
Indice des prix, base 100 en 2018	100	100,8	101,5
Indice du salaire réel, base 100 en 2018	100		

(a) Quelle est l'augmentation en % du salaire moyen nominal entre 2018 et 2020 ?

(b) Quelle est l'augmentation en % des prix entre 2019 et 2020 ?

(c) Une fois déflaté, quelle est l'augmentation en % du salaire réel moyen entre 2018 et 2019 ?

59 [Indice de Gini] Pour une étude statistique sur la concentration on souhaite calculer l'indice de Gini. Pour simplifier les calculs, le responsable chargé de ce travail décide de prendre une surface de concentration similaire (zone en gris). Pour cela, il tire une parallèle à la diagonale. À partir de ces informations et du graphique ci-après, calculez l'indice de Gini.



60 [Indice de Gini] Dans votre entreprise, vous calculez régulièrement l'indice de Gini sur la base de 2 classes de salaires. Afin de simplifier vos calculs, vous décidez de modéliser cette situation par le tableau statistique suivant :

Salaire	Effectif
a	c
b	d

(a) Représenter graphiquement la courbe de Lorenz

(b) Calculer l'indice de Gini

(c) Supposons que l'entreprise compte 30 salariés gagnant moins de 4000 frs et 70 gagnant entre 4000 et 8000 frs. Que vaut alors l'indice de Gini ?

61 [Défi] Trois amis se retrouvent autour d'une bière. Durant la discussion ils se demandent à combien se monte la moyenne de leurs salaires. Mais comme personne n'est prêt à dévoiler son salaire aux autres, comment peuvent-ils s'y prendre ?

Chapitre 25

La régression

Objectifs du chapitre

- savoir calculer un coefficient de corrélation linéaire
- savoir calculer un coefficient de détermination
- savoir calculer une corrélation des rangs de Spearman
- savoir effectuer une régression linéaire au moyen de la méthode des moindres carrés
- savoir effectuer d'autres types de régressions (logistique, puissance, logarithmique, exponentielle)
- savoir effectuer une régression linéaire multiple

Dans ce chapitre, nous étudierons les liens qui peuvent exister entre les variables statistiques au sein d'une même population. La relation entre la taille et le poids d'un groupe de personnes, entre les revenus et les dépenses d'une famille sont quelques exemples de situations qui nous amènent à nous poser les questions suivantes : Existe-t-il une relation, une corrélation entre ces variables statistiques ? Si oui, est-elle forte ? Est-elle linéaire ? Dans ce cas, comment traduire mathématiquement cette dépendance ?

25.1 Données bivariées et corrélation

25.1.1 Représentation des données

Considérons une population de taille n, sur laquelle on étudie simultanément deux variables statistiques quantitatives X et Y. Pour chaque individu i, on mesure la valeur x_i de la variable X et la valeur y_i de la variable Y. La suite des couples $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)$ est appelée **série statistique double** des deux variables X et Y.

Généralement, on présente cette série sous la forme d'un tableau :

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
y_i	y_1	y_2	$\cdots$	x_n

Exemple 25.1

Relevé de la taille (X) et du poids (Y) de 10 élèves :

X en m	1,50	1,45	1,43	1,28	1,32	1,44	1,42	1,43	1,39	1,28
Y en kg	47	45	51	38	34	35	42	47	55	33

Avant de représenter graphiquement une série statistique double X et Y, il convient de définir quelle est la variable **dépendante** Y (ou **variable expliquée**) et la variable **indépendante** X (ou **variable explicative**). On représente ensuite cette série statistique double au moyen d'un nuage de points $(x_i ; y_i)$.

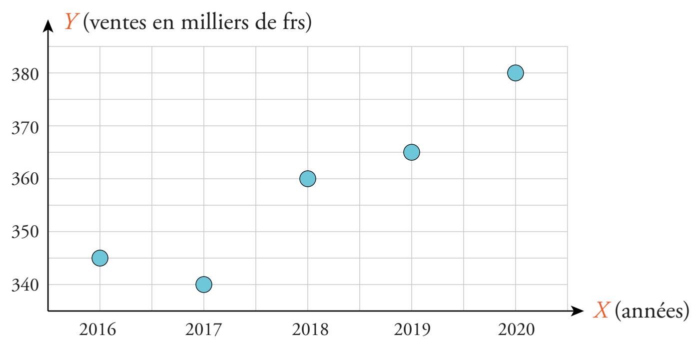
Exemple 25.2

On a mesuré au cours des 5 dernières années les ventes annuelles d'un magasin de sport en milliers de francs. Déterminer la variable explicative X et expliquée Y et représenter graphiquement cette série statistique.

Année	2016	2017	2018	2019	2020
Ventes	345	340	360	365	380

Solution

Dans ce cas, il est évident que le chiffre d'affaires dépend des années et non l'inverse. La variable «Année» sera donc la variable explicative ou indépendante X et la variable «Ventes» la variable expliquée ou dépendante Y. La représentation graphique est alors la suivante :

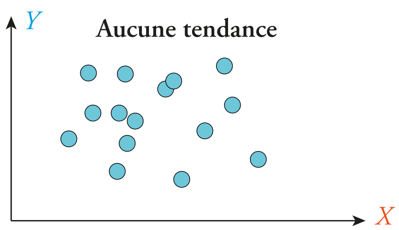


Ces nuages de points dégagent bien souvent une tendance facilement observable. Le but est alors d'**ajuster** ce nuage de points par une courbe qui modélise au mieux la relation de dépendance entre X et Y. Il faudra donc :

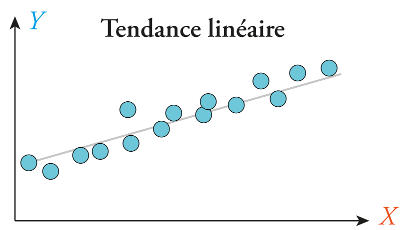
- Choisir une courbe de tendance appelée **courbe de régression**, c'est-à-dire une fonction qui représente au mieux cette tendance.
- Évaluer le **degré de corrélation** entre ces deux variables afin de juger de la pertinence de la fonction choisie.

25.1.2 Types de tendance

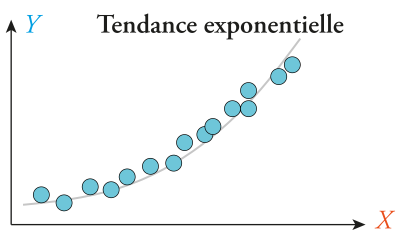
Les principaux types de tendance classiques sont les suivants :



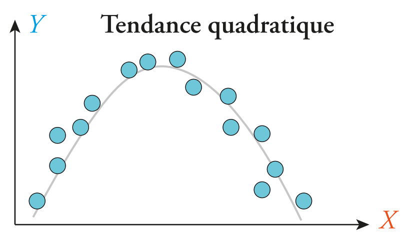
X : Couleur des cheveux
Y : QI de la personne



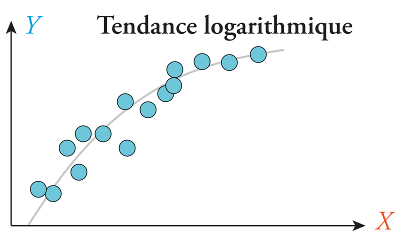
X : Âge d'une personne
Y : Poids de la personne



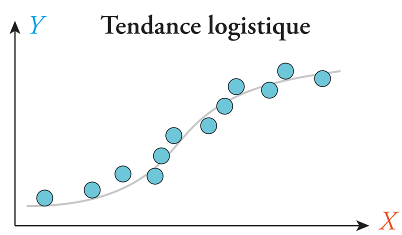
X : Temps
Y : Vitesse des processeurs



X : Prix d'un article
Y : Bénéfice réalisé



X : Temps
Y : Chiffre d'affaire



X : Temps
Y : Part de marché

25.1.3 Mesure de la corrélation

Pour mesurer le degré de corrélation entre les valeurs observées et la courbe de régression retenue on utilise le **coefficient de détermination** noté R^2. Ce dernier se calcule comme suit :

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \overline{y})^2}$$

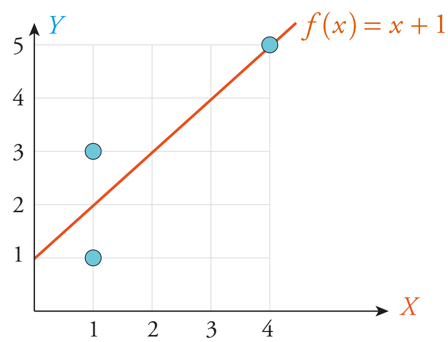
où n est le nombre de mesures, y_i la valeur de la mesure n°i, $\hat{y}_i = f(y_i)$ la valeur ajustée ou prédite par la fonction de régression et $\overline{y}$ la moyenne des mesures.

Plus la valeur de R^2 se rapproche de 1, meilleur est l'ajustement.

Exemple 25.3

Trois valeurs ont été ajustées par la fonction affine $f(x) = x + 1$.
Déterminer le coefficient de détermination.

Solution



$$\overline{y} = \frac{1+3+5}{3} = 3$$

On forme le tableau de valeurs suivant :

x_i	y_i	$\hat{y}_i = f(x_i)$	$(y_i - \hat{y}_i)^2$	$(y_i - 3)^2$
1	1	2	1	4
1	3	2	1	0
4	5	5	0	4
		Total	2	8

Ainsi : $R^2 = 1 - \frac{2}{8} = 0,75$

25.1.4 Corrélation des rangs de Spearman

La **corrélation des rangs de Spearman** (Charles Spearman, psychologue anglais (1863-1945)) est une méthode de calcul permettant de mesurer la relation qui existe entre deux séries de données. L'intérêt de cette méthode est de pouvoir travailler sur des variables qualitatives ordinales (comme par exemple «Faible», «Moyen» et «Bon»). Dans cette méthode, on ne s'intéresse pas aux valeurs de la variable mais au **rang** de cette dernière.

Une fois les n observations classées selon leur rang, de 1 à n, on calcule pour chaque modalité la différence de rang d_i. La formule suivante permet ensuite de calculer le coefficient de Spearman r_s :

$$r_s = 1 - \frac{6\sum_{i=1}^{n} d_i^2}{n(n^2-1)} \qquad (-1 \leq r_s \leq 1)$$

Interprétation de r_s :

- Si $r_s = -1$, il y a corrélation négative parfaite.
- Si $r_s = 1$, il y a corrélation positive parfaite.
- On admet une forte corrélation si $|r_s| > 0,5$.
- Lorsqu'il y a des ex-aequo on affecte comme rang, la moyenne des rangs qui auraient été affectés à chaque sujet s'ils n'avaient pas été ex-aequo. Si par exemple au rang 3 et 4 on trouve 2 ex-aequo, le rang pour ces deux observations sera 3,5. [1]

Exemple 25.4

5 élèves doivent passer un examen oral devant leur professeur qui est accompagné d'un expert. Le professeur ainsi que l'expert jugent les candidats, dont les notes sont reportées dans le tableau ci-après. Calculer le coefficient de corrélation des rangs de Spearman r_s.

N°	Candidat	Note du professeur	Note de l'expert
1	Patrick	5,5	5,3
2	Joséphine	4,8	5,1
3	Martine	4,5	4,5
4	Jack	3,8	3,2
5	Marc	5,3	5,5

À partir de ce tableau on établit le classement des candidats selon chaque examinateur et l'on note la différence de classement obtenue d_i ainsi que d_i^2 :

1. Cette méthode est valable pour un nombre d'ex-equo peu important.

N°	Candidat	Classement selon le professeur	Classement selon l'expert	Différence de classement d_i	d_i^2
1	Patrick	1	2	-1	1
2	Joséphine	3	3	0	0
3	Martine	4	4	0	0
4	Jack	5	5	0	0
5	Marc	2	1	1	1

On calcule finalement :

$$r_s = 1 - \frac{6\sum_{i=1}^{n} d_i^2}{n(n^2-1)} = 1 - \frac{6 \times 2}{5(5^2-1)} = 0,9$$

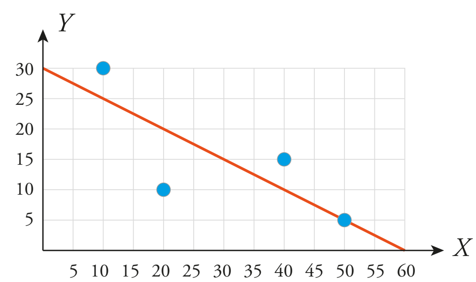
Il y a une forte corrélation, ce qui tend à montrer qu'il y a peu de divergence de notation entre le professeur et l'expert.

Exercices d'application de la section 25.1

1 [Coefficient de détermination] Déterminer le coefficient de détermination et juger de la corrélation à partir des informations suivantes :

x_i	3	6	10	12
y_i	12	14	17	20
$\hat{y}_i$	11	14	16	21

2 [Coefficient de détermination] Les observations suivantes ont été ajustées au moyen d'une droite de tendance. Déterminer l'équation de cette droite de tendance ainsi que le coefficient de détermination R^2.



3 [Coefficient de détermination] Réaliser sous Excel un graphique nuage de points avec les données ci-après. Ajouter sur le graphique une courbe de tendance exponentielle ainsi que le R^2. Vérifier la valeur du R^2 affichée.

X	2	5	9	11	13	7
Y	1	4	6	8	10	4

4 [Coefficient de détermination] Réaliser sous Excel un graphique nuage de points avec les données du fichier Excel vieillesse.xlsx. Ajouter sur le graphique une courbe de tendance linéaire ainsi que le R^2. Vérifier la valeur du R^2 affichée en effectuant tous les calculs et aussi en utilisant la fonction `COEFFICIENT.DETERMINATION(yi observés ;yi ajustés)`.

5 [Spearman] Au concours de beauté Miss Multivers, la Suisse et la France ont voté pour les 5 candidates ci-après. Pour chaque pays, le vote est composé d'un collège d'experts ainsi que le vote du public. Calculer les coefficients de corrélation des rangs de Spearman pour la Suisse et pour la France et commenter les résultats obtenus :

Suisse	**Experts**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
	Public	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
France	**Experts**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
	Public	**4**	**1**	**3**	**5**	**2**

6 [Spearman] Calculer le coefficient de corrélation des rangs de Spearman à partir des valeurs suivantes :

X	2	2,5	6	7	4,5	3	6,5
Y	0,5	2	3,5	6,5	3	2,5	5,5

7 [Spearman] Le tableau suivant représente les notes obtenues par 8 élèves en statistiques et en mathématiques. Calculer le coefficient de corrélation des rangs de Spearman.

Statistiques	4,5	4,2	2,8	5,4	3,7	4,2	4,3	4,8
Mathématiques	3,8	4,1	3,3	4,7	3,3	5,1	3,9	4,4

8 [Spearman] Les 7 merveilles du monde moderne sont **(a)** la Grande Muraille de Chine, **(b)** Pétra, en Jordanie, **(c)** la Statue du Christ rédempteur à Rio de Janeiro, **(d)** le Machu Picchu, **(e)** le site archéologique de Chichén Itzá au Mexique, **(f)** le Colisée de Rome et **(g)** le Taj Mahal. Selon un classement réalisé par 10 hommes et 10 femmes, on a obtenu :

Classement	1er	2ème	3ème	4ème	5ème	6ème	7ème
Femmes	**g**	**f**	**a**	**d**	**b**	**c**	**e**
Hommes	**d**	**f**	**e**	**b**	**g**	**c**	**a**

Calculer le coefficient de corrélation des rangs de Spearman entre ces deux classements et commenter brièvement les résultats.

25.2 Régression linéaire

25.2.1 Méthode de Mayer

La **droite de régression de Mayer** (Johann Tobias Mayer, astronome allemand (1723-1762)) consiste à partager un nuage de points rangés dans l'ordre croissant de leurs abscisses en deux sous-ensembles, si possible de même effectif. Pour chacun des deux sous-ensembles, on calcule un point moyen, puis on relie les deux points ainsi trouvés ce qui permet de déterminer l'équation de la droite.

Exemple 25.5

Ajuster les 6 observations suivantes au moyen de la droite de Mayer et représenter sur un même graphique le nuage de points ainsi que la droite de régression.

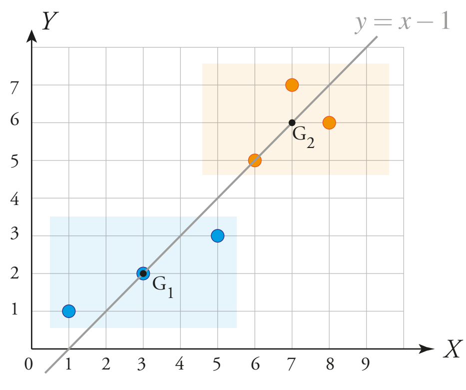
x_i	1	3	5	6	7	8
y_i	1	2	3	5	7	6

Solution

On détermine les deux points G_1 et G_2 de coordonnées moyennes, puis la droite passant par ces deux points :

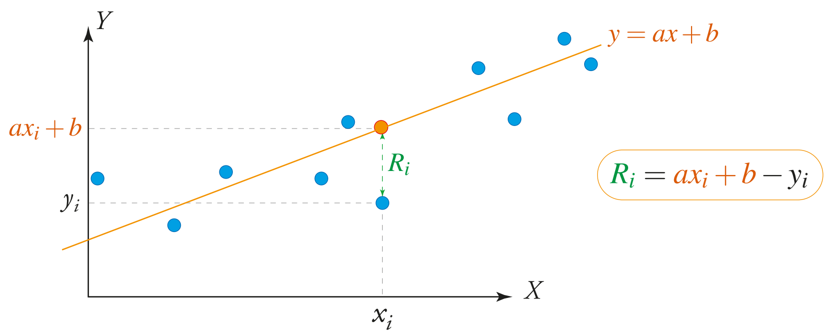
$$G_1\left(\frac{1+3+5}{3};\frac{1+2+3}{3}\right)=G_1(3;2)$$
$$G_2\left(\frac{6+7+8}{3};\frac{5+7+6}{3}\right)=G_2(7;6)$$

Droite passant par $G_1(3;2)$ et $G_2(7;6)$: $y=x-1$



25.2.2 Méthode des moindres carrés

La méthode des moindres carrés consiste à trouver les paramètres a et b de la droite de régression $y = ax + b$ de telle sorte que la somme des carrés des **résidus** R_i (ou écarts) entre les valeurs ajustées $ax_i + b$ et les valeurs observées y_i soit minimale.



En se référant à ce graphique, la méthode des moindres carrés consiste à minimiser :

$$S = \sum_{i=1}^{n} R_i^{\,2} = \sum_{i=1}^{n} [ax_i + b - y_i]^2$$

Les valeurs de a et de b s'obtiennent au moyen de la variance de X et de la **covariance** de XY :

$$a = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X^2} = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2} \qquad \text{et} \qquad b = \overline{y} - a\overline{x}$$

Régression linéaire
Démonstration de la formule des moindres carrés

Exemple 25.6

Le tableau ci-après représente le nombre d'employés occupés par une petite PME au cours de ses cinq premières années d'existence. Calculer la droite des moindres carrés et représenter graphiquement cette droite.

Année (x_i)	1	2	3	4	5
Employés (y_i)	3	2	5	6	8

Solution
On commence par dresser un tableau complet permettant de déterminer l'ensemble des valeurs nécessaires au calcul de a et b.

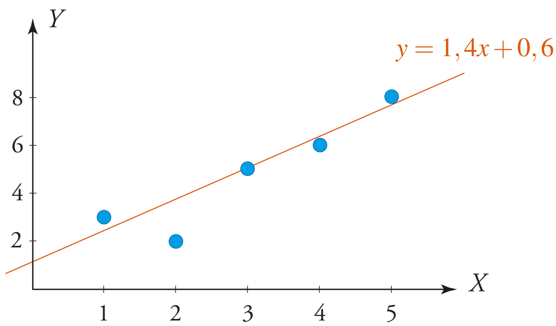
i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	1	3	1	3
2	2	2	4	4
3	3	5	9	15
4	4	6	16	24
5	5	8	25	40
$\sum$	15	24	55	86
Moyenne	3	4,8	11	17,2

Ainsi :

$$a = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2} = \frac{17,2 - 3 \times 4,8}{11 - 3^2} = 1,4$$

et

$$b = \overline{y} - a\overline{x} = 4,8 - 1,4 \times 3 = 0,6$$



Coefficient de corrélation linéaire

Lorsque l'ajustement est linéaire, on utilise de préférence un autre indicateur que le R^2 pour juger de l'intensité du lien entre la variable X et Y. Cet indicateur s'appelle le **coefficient de corrélation linéaire** ou **coefficient de Bravais-Pearson**. Il est noté r. Contrairement au R^2, celui-ci indique en plus si la liaison est positive ou négative. Ce coefficient se définit par :

$$r = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\sqrt{\overline{x^2} - \overline{x}^2} \cdot \sqrt{\overline{y^2} - \overline{y}^2}}$$

- r varie toujours entre -1 et 1
- Si $r = 0$, la corrélation linéaire est nulle, il y a indépendance entre X et Y
- Si $r > 0$, la corrélation est positive et si $r < 0$, elle est négative
- Si $r = \pm 1$, la corrélation linéaire est parfaite (dépendance fonctionnelle)

Remarques

- On qualifie de bon ajustement si $|r| > 0,8$
- Dans le cas de la régression linéaire par la méthode des moindres carrés : $r^2 = R^2$
- La somme des résidus quadratiques[2] vaut : $S = n(1-r^2)\cdot\sigma_Y^2$

Somme des carrés des résidus
Démonstration de la formule $S = n(1-r^2)\cdot\sigma_Y^2$

Exemple 25.7

Déterminer la droite des moindres carrés à partir des données ci-après, puis calculer r et R^2 de deux manières.

X	1	3	3	5
Y	2	2	4	4

Solution

L'ensemble des données nécessaires à la détermination des différentes valeurs est résumé dans le tableau suivant :

i	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$	$[f(x_i)-y_i]^2$	$(\overline{y}-y_i)^2$
1	1	2	1	4	2	0	1
2	3	2	9	4	6	1	1
3	3	4	9	16	12	1	1
4	5	4	25	16	20	0	1
$\sum$	12	12	44	40	40	2	4
Moyenne	3	3	11	10	10		

Ainsi :

$$a = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\cdot\overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2} = \frac{10 - 3\times 3}{11 - 3^2} = \frac{1}{2} = 0,5$$

et

$$b = \overline{y} - a\overline{x} = 3 - 0,5\times 3 = 1,5$$

La droite de régression s'écrit alors :

$$y = 0,5x + 1,5$$

Le coefficient de corrélation linéaire donne :

$$r = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X\cdot\sigma_Y} = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\cdot\overline{y}}{\sqrt{\overline{x^2} - \overline{x}^2}\cdot\sqrt{\overline{y^2} - \overline{y}^2}} = \frac{10 - 3\times 3}{\sqrt{11 - 3^2}\cdot\sqrt{10 - 3^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \simeq 0,707$$

2. appelée aussi **erreur de prédiction totale**.

Le coefficient de détermination R^2 est donné par : $R^2 = 1 - \frac{2}{4} = 0,5$

On a bien :

$$r^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2} = R^2$$

Moyens informatiques

- Pour la TI-84 : Stocker les valeurs de la variable X et Y dans les listes L_1 et L_2 puis STAT + CALC RégLin(ax+b) L_1, L_2.
- Pour la TI-30 XIIS (voir sur Promath vidéo explicative : régression linéaire)
- DROITEREG(Y;X) : Renvoie les coefficients a et b du modèle de régression linéaire à partir d'une plage de cellules Y et X.[3] Une autre possibilité consiste à afficher le graphique avec le nuage de points puis d'ajouter sur le graphique la courbe de tendance souhaitée avec aussi le R^2 si l'on souhaite.

Exercices d'application de la section 25.2

9 [Droite de Mayer] On donne la série statistique suivante :

X	1	2	4	3	5	6	7	9	11	12
Y	2	4	2	6	6	6	5	8	7	9

(a) Déterminer la droite de régression de Mayer

(b) À quelle valeur x_i correspond la valeur prédite $\hat{y}_i = 10$?

10 [Droite de Mayer] On donne la série statistique suivante :

X	11	16	5	3	15	6	8	2	9	13
Y	6	2	10	10	5	7	9	9	6	6

(a) Déterminer la droite de régression de Mayer

(b) Calculer R^2

11 [Droite des moindres carrés] On donne la série statistique suivante :

X	2	6	9	15
Y	8	6	7	5

(a) Déterminer la droite de régression des moindres carrés en effectuant tous les calculs.

(b) Montrer que $r^2 = R^2$

3. Cette formule doit être rentrée de façon matricielle (Ctrl + Maj + Enter) en prévoyant 2 cellules en ligne.

12 [Droite des moindres carrés] On donne la série statistique suivante :

X	8	8	10	12	12
Y	2	4	4	4	6

(a) Déterminer la droite de régression des moindres carrés en effectuant tous les calculs.

(b) Montrer que $r^2 = R^2$

(c) Calculer S de deux manières différentes

13 [Droite des moindres carrés] On dispose de 50 observations dont on a déjà calculé les éléments suivants :

$$\sum x_i = 2\,500 \qquad \sum y_i = 5\,500 \qquad \sum x_i y_i = 360\,500$$
$$\sum x_i^2 = 170\,000 \qquad \sum y_i^2 = 756\,250$$

(a) Déterminer la droite de régression des moindres carrés.

(b) Est-ce que l'ajustement linéaire semble être un bon ajustement ?

14 [Droite des moindres carrés] On dispose de 40 observations dont on a déjà calculé les éléments suivants :

$$\sum x_i = 960 \qquad \sum y_i = 1\,800 \qquad \sum x_i y_i = 50\,800$$
$$\sum x_i^2 = 27\,040 \qquad \sum y_i^2 = 97\,000$$

(a) Déterminer la droite de régression des moindres carrés.

(b) Est-ce que l'ajustement linéaire semble être un bon ajustement ?

(c) Calculer l'erreur de prédiction totale selon ce modèle.

15 [Accidents] On dispose des informations suivantes concernant l'âge (X) et le pourcentage d'accidents mortels (Y) causés par un excès de vitesse. En faisant usage d'un ajustement linéaire basé sur la méthode des moindres carrés, estimer le pourcentage d'accidents mortels causés par un excès de vitesse pour des conducteurs de 26 ans.

X	18	28	38	48	58	68	78
Y	36	26	20	20	16	10	6

16 [Coûts] Une entreprise a mesuré ses coûts de fabrication Y en milliers de frs en fonction des quantités produites X en milliers d'unités. Lorsque qu'aucune quantité n'est produite, ses coûts fixes se montent à 2000 frs. L'entreprise souhaite donc mesurer la tendance linéaire qui existe entre le nombre d'unités produites et les coûts de fabrication au moyen de l'équation de régression linéaire suivante : $y = ax + 2$.

(a) Déterminer la valeur du paramètre a en minimisant $S = \sum R_i^2$

(b) Calculer le coefficient de détermination R^2

(c) Montrer comment obtenir rapidement ces résultats sous Excel.

25.3 Autres types de régression

25.3.1 Régressions se ramenant au modèle linéaire

Moyennant des changements de variables adéquats, les modèles présentés ci-après peuvent être ajustés au moyen de la régression linéaire. Nous considérerons ici les modèles classiques que sont la **régression logarithmique et exponentielle**, la **régression puissance** et **logistique**. Pour ces types de régressions, il sera donc possible de calculer le coefficient de corrélation r, une fois le modèle transformé sous sa forme linéaire.

Concrètement, la méthode de résolution est la suivante :

1. Effectuer un changement de variable sur les valeurs $(x_i; y_i)$ pour obtenir des valeurs $(x_i^*; y_i^*)$
2. Régression linéaire à partir des valeurs $(x_i^*; y_i^*)$ $\quad\rightarrow\quad$ $y^* = Ax^* + B$
3. Changement de variable inverse pour revenir au modèle initial à partir des paramètres A et B obtenus.

✎ Les changements de variables utilisés conduisent à minimiser la somme des résidus quadratiques S d'une fonction linéaire et non la somme des résidus quadratiques du modèle de régression considéré. Les paramètres déterminés souffrent donc d'une certaine imprécision.

Régression logarithmique

La régression logarithmique est utilisée pour modéliser des situations où la croissance, ou la décroissance, s'accélère rapidement au début puis ralentit au fil du temps. Habituellement, l'équation de régression est donnée sous la forme, $y = a\ln(x) + b$.

✎ **Remarques :**

- toutes les valeurs x_i doivent être positives.
- lorsque $a > 0$, le modèle est croissant et lorsque $a < 0$, il est décroissant.

Méthode :

Modèle : $y = a \cdot \ln(x) + b$

1. Effectuer le changement de variable $x_i^* = \ln(x_i)$ et $y_i^* = y_i$
2. Régression linéaire à partir des valeurs $(x_i^*; y_i^*)$ $\quad\rightarrow\quad$ $y^* = Ax^* + B$
3. Forme finale : $y = A \cdot \ln(x) + B$

Exemple 25.8

Effectuer une régression logarithmique à partir des valeurs ci-après et représenter sur un même graphique les valeurs observées $(x_i; y_i)$ ainsi que la courbe de régression.

X	e	$e^{1,5}$	e^{2}	$e^{2,5}$
Y	2	5	7	10

Solution

Valeurs initiales

x_i	y_i
e	2
$e^{1,5}$	5
e^{2}	7
$e^{2,5}$	10

Changement de variable

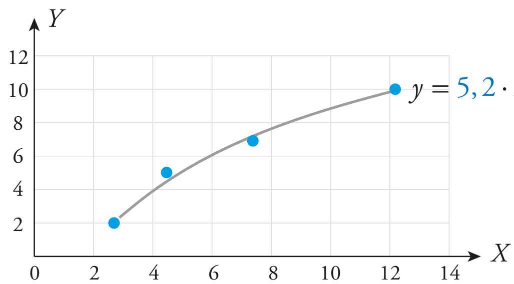
$x_i^* = \ln(x_i)$	$y_i^* = y_i$
1	2
1,5	5
2	7
2,5	10

Régression linéaire

$y^* = 5,2 \cdot x^* - 3,1$

Forme finale

$y = 5,2 \cdot \ln(x) - 3,1$



Régression exponentielle

La régression exponentielle est utilisée pour modéliser des situations dans lesquelles la croissance commence lentement puis accélère rapidement sans limite ou, à contrario, dans lesquelles la décroissance commence rapidement puis ralentit pour se rapprocher de plus en plus de zéro. Habituellement, l'équation de régression est donnée sous la forme, $y = a \cdot b^x$ ou $y = a \cdot e^{bx}$ [Excel]

Remarques :

- Les valeurs y_i doivent être positives.
- Lorsque $b > 1$, on est en présence d'un modèle de croissance exponentielle.
- Lorsque $0 < b < 1$, on est en présence d'un modèle de décroissance exponentielle.

En prenant le logarithme naturel de part et d'autre de l'équation exponentielle, on obtient une forme linéarisée : $\ln(y) = \ln(b) \cdot x + \ln(a)$ permettant un changement de variable aisé.

Méthode :

Modèle : $y = a \cdot b^x$

1. Effectuer le changement de variable $x_i^* = x_i$ et $y_i^* = \ln(y_i)$
2. Régression linéaire à partir des valeurs $(x_i^*; y_i^*)$ $\quad \rightarrow \quad y^* = Ax^* + B$
3. Forme finale : $y = e^B \cdot (e^A)^x$

Exemple 25.9

Effectuer une régression exponentielle à partir des valeurs ci-après et représenter sur un même graphique les valeurs observées $(x_i; y_i)$ ainsi que la courbe de régression.

X	1	3	7	9
Y	e^5	e^4	e^4	e^3

Solution

Valeurs initiales

x_i	y_i
1	e^5
3	e^4
7	e^4
9	e^3

Changement de variable

$x_i^* = x_i$	$y_i^* = \ln y_i$
1	5
3	4
7	4
9	3

Régression linéaire

$\rightarrow y^* = -0,2 \cdot x^* + 5$

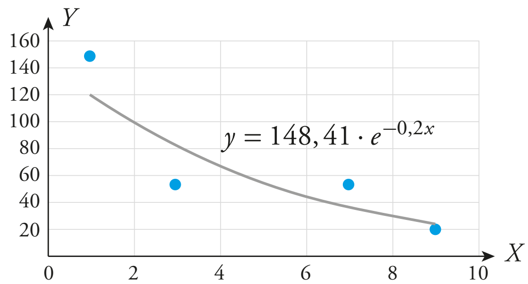
$\downarrow$

Forme finale

$y = e^5 \cdot (e^{-0,2})^x$

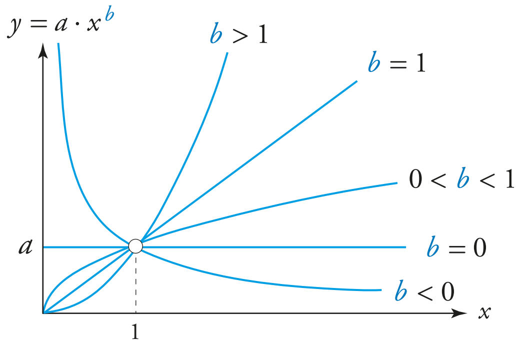
Sur Excel l'équation s'écrira : $y = e^5 \cdot (e^{-0,2})^x \simeq 148,41 \cdot e^{-0,2x}$

Sur la TI-84 l'équation s'écrira : $y = e^5 \cdot (e^{-0,2})^x \simeq 148,41 \cdot 0,819^x$



Régression puissance

La régression puissance est une fonction du type $y = a \cdot x^b$ et s'applique de préférence aux données dont l'allure générale s'apparente à l'une ou l'autre des fonctions ci-après :



En prenant le logarithme naturel de part et d'autre de l'équation puissance on obtient : $\ln(y) = b \cdot \ln(x) + \ln(a)$, ce qui conduit à considérer des valeurs de x_i et y_i uniquement positives.

Méthode :

Modèle : $y = a \cdot x^b$

1. Effectuer le changement de variable $x_i^* = \ln(x_i)$ et $y_i^* = \ln(y_i)$
2. Régression linéaire à partir des valeurs $(x_i^*; y_i^*)$ $\quad \rightarrow \quad y^* = Ax^* + B$
3. Forme finale : $y = e^B \cdot x^A$

Exemple 25.10

Effectuer une régression puissance à partir des valeurs ci-après et représenter sur un même graphique les valeurs observées $(x_i; y_i)$ ainsi que la courbe de régression.

X	e^1	$e^{1,5}$	e^2	$e^{2,5}$
Y	e^5	e^4	e^4	e^3

Solution

Valeurs initiales

x_i	y_i
e^1	e^5
$e^{1,5}$	e^4
e^2	e^4
$e^{2,5}$	e^3

Changement de variable

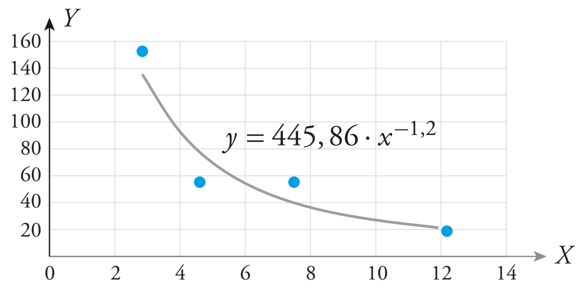
$x_i^* = \ln x_i$	$y_i^* = \ln y_i$
1	5
1,5	4
2	4
2,5	3

Régression linéaire

$\rightarrow y^* = -1,2 \cdot x^* + 6,1$

Forme finale

$y = e^{6,1} \cdot x^{-1,2} \simeq 445,86 \cdot x^{-1,2}$



Régression logistique à valeur maximale fixe M

La fonction logistique est en général de la forme : $y = \dfrac{M}{1+e^{ax+b}}$

Ce type de fonction modélise bien les phénomènes de croissance qui tendent à se stabiliser avec les années à un plafond M, comme par exemple le taux d'équipement des ménages en biens durables. La régression logistique s'applique également en finance dans les calculs de risques liés au crédits bancaires (scoring) ou encore comme ajustement d'une fonction de répartition. Pour déterminer la forme linéaire correspondante, il faut opérer les transformations suivantes :

$$y = \frac{M}{1+e^{ax+b}} \qquad \text{Formule de base}$$

$$\frac{M}{y} = 1 + e^{ax+b} \qquad \text{Produit croisé}$$

$$\frac{M}{y} - 1 = e^{ax+b} \qquad \text{Isoler l'exponentielle}$$

$$\ln\left(\frac{M}{y} - 1\right) = ax + b \qquad \text{Prendre le ln de chaque côté}$$

Méthode :

Modèle : $y = \dfrac{M}{1+e^{ax+b}}$

1. Effectuer le changement de variable $x_i^* = x_i$ et $y_i^* = \ln\left(\dfrac{M}{y_i} - 1\right)$
2. Régression linéaire à partir des valeurs $(x_i^*; y_i^*)$ $\rightarrow$ $y^* = Ax^* + B$
3. Forme finale : $y = \dfrac{M}{1+e^{Ax+B}}$

Remarque :

Les valeurs y_i doivent être inférieures à la valeur maximale M choisie.

Exemple 25.11

Effectuer une régression logistique à valeur maximale $M = 10$ à partir des valeurs ci-après et représenter sur un même graphique les valeurs observées $(x_i ; y_i)$ ainsi que la courbe de régression.

X	2	3	7	9
Y	1	2	8	9

Solution

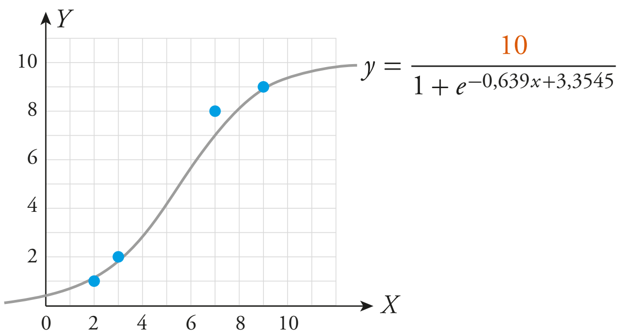
Valeurs initiales		Changement de variable	
x_i	y_i	$x_i^* = x_i$	$y_i^* = \ln(\frac{10}{y_i} - 1)$
2	1	2	2,1972
3	2	3	1,3863
7	8	7	$-1,386$
9	9	9	$-2,197$

Régression linéaire

$$y^* = -0,639 \cdot x^* + 3,3545$$

Forme finale

$$y = \frac{10}{1 + e^{-0,639x+3,3545}}$$



25.3.2 Régression polynomiale,

Dans le cas d'une régression polynomiale, on s'intéresse à ajuster une série d'observations par une fonction pouvant être linéaire, quadratique, cubique, etc., comme par exemple :

- $y = ax + b$ pour une régression linéaire
- $y = ax^2 + bx + c$ pour une régression quadratique, etc..

Nous avons montré dans la première vidéo du chapitre que, dans le cas de la régression linéaire, la minimisation des résidus quadratiques conduisait, au moyen des dérivées partielles, à un système de deux équations à deux inconnues.

Dans le cas d'une régression quadratique, il s'agit de minimiser :

$$S = \sum_{i=1}^{n} (a x_i^2 + b x_i + c - y_i)^2$$

En résolvant le système d'équations : $\frac{\partial S}{\partial a} = 0$, $\frac{\partial S}{\partial b} = 0$ et $\frac{\partial S}{\partial c} = 0$, on obtient l'équation matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^4 & \sum_{i=1}^n x_i^3 & \sum_{i=1}^n x_i^2 \\ \sum_{i=1}^n x_i^3 & \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ \sum_{i=1}^n y_i \end{pmatrix}$$

ou encore, si la matrice A est inversible :

$$AX = B$$

$$X = A^{-1}B$$

Matrice des coefficients

Régression quadratique
Comment obtenir les coefficients a,b,c de façon matricielle ?

En généralisant cette méthode et en simplifiant davantage les matrices A et B, on peut établir le résultat suivant :

Soit n observations (x_1, y_1) à (x_n, y_n) ajustées par un polynôme de degré d. Le vecteur colonne X contenant les $d + 1$ coefficients cherchés est donné par :

$$X = (M^T M)^{-1} M^T Y$$

- $M_{n,d+1}$ la matrice obtenue par $m_{ij} = x_i^{d-j+1}$ et
- $Y_{n,1}$ le vecteur colonne contenant les valeurs y_1 à y_n

Exemple 25.12

Effectuer une régression quadratique $d = 2$ à partir des valeurs ci-après et représenter sur un même graphique les valeurs observées $(x_i; y_i)$ ainsi que la courbe de régression.

X	1	5	7	7
Y	1	2	4	7

Solution

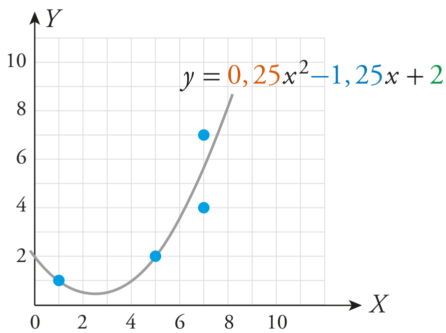
On calcule tous les éléments de la matrice $M_{4,3}$ avec $m_{ij} = x_i^{d-j+1}$, par exemple $m_{2,1} = x_2^{2-1+1} = 25$.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 25 & 5 & 1 \\ 49 & 7 & 1 \\ 49 & 7 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$X = (M^T M)^{-1} M^T Y = \begin{pmatrix} 0,25 \\ -1,25 \\ 2 \end{pmatrix}$$

L'équation de régression s'écrit alors : $y = 0,25x^2 - 1,25x + 2$



✎ Pratiquement, la matrice M se construit avec des 1 dans la dernière colonne, les valeurs de x_i dans l'avant dernière, les valeurs de x_i^2 dans l'anté-pénultième colonne, etc..

25.3.3 Régression linéaire multiple

La régression linéaire multiple est une généralisation de la régression linéaire simple. En effet, dans la pratique, la variable expliquée ne dépend pas uniquement d'une seule variable explicative. L'objectif de cette section est donc d'établir une relation statistique entre la variable dépendante et plusieurs variables explicatives (variables indépendantes). [4]

Si l'on prend pour commencer une régression linéaire multiple à deux variables explicatives X et Z, l'équation de régression linéaire s'écrira :

$$y = ax + bz + c$$

4. Les variables explicatives sont aussi appelées variables **exogènes** et la variable dépendante, la variable **endogène**.

Les valeurs observées peuvent être résumées dans un tableau :

X	Z	Y
x_1	z_1	y_1
x_2	z_2	y_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_n	z_n	y_n

On cherche à minimiser : $S = \sum_{i=1}^{n}(ax_i + bz_i + c - y_i)^2$

On forme le système d'équations :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial S}{\partial a} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad a\sum x_i^2 + b\sum x_i z_i + c\sum x_i = \sum x_i y_i \\
\frac{\partial S}{\partial b} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad a\sum x_i z_i + b\sum z_i^2 + c\sum z_i = \sum z_i y_i \\
\frac{\partial S}{\partial c} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad a\sum x_i + b\sum z_i + cn = \sum y_i
\end{aligned}$$

Système pouvant être écrit sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \sum x_i^2 & \sum x_i z_i & \sum x_i \\ \sum x_i z_i & \sum z_i^2 & \sum z_i \\ \sum x_i & \sum z_i & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum x_i y_i \\ \sum z_i y_i \\ \sum y_i \end{pmatrix}$$

Ou encore :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ z_1 & z_2 & \cdots & z_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}}_{M^T} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & z_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & z_n & 1 \end{pmatrix}}_{M} \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ z_1 & z_2 & \cdots & z_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}}_{M^T} \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}_{Y}$$

Ce qui conduit à la solution matricielle : $X = (M^T M)^{-1} M^T Y$

Remarque

Les valeurs ajustées (ou prédites) $\hat{Y}$ peuvent être obtenues de façon matricielle comme suit :

$$\hat{Y} = MX$$

Ce procédé de calcul peut être étendu à d variables explicatives :

X_1	X_2	$\dots$	X_d	Y
x_{11}	x_{21}	$\vdots$	x_{d1}	y_1
x_{12}	x_{22}	$\vdots$	x_{d2}	y_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{1n}	x_{2n}	$\vdots$	x_{dn}	y_n

Modèle à d variables explicatives

$$y = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_d x_d + a_{d+1}$$

$$X = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{d+1} \end{pmatrix} = (M^T M)^{-1} M^T Y$$

Avec : $M = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & \dots & x_{d1} & 1 \\ x_{12} & x_{22} & \dots & x_{d2} & 1 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ x_{1n} & x_{2n} & \dots & x_{dn} & 1 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

Exemple 25.13

Déterminer l'équation de régression linéaire multiple à partir des données suivantes :

X	Z	U	Y
4	2	1	1
3	7	3	2
1	8	4	4
2	2	2	5

Solution

Comme il y a 3 variables explicatives, il y a 4 coefficients à déterminer :

$$y = ax + bz + cu + d$$

On construit les matrices : $M = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 3 & 1 \\ 1 & 8 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

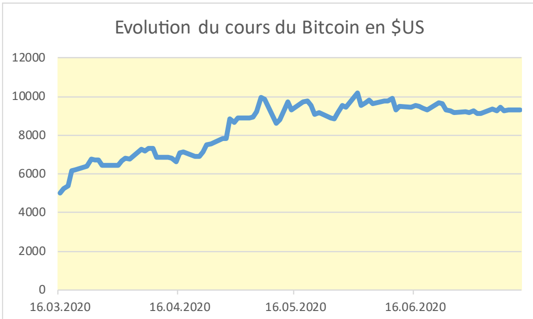
Puis on calcule l'expression matricielle : $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = (M^T M)^{-1} M^T Y = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$

Ainsi l'équation de régression linaire multiple s'écrit : $y = 6x - 2z + u - 5$

Exercices d'application de la section 25.3

17 [espérance de vie] Le fichier esperancevie.xlsx montre l'évolution de l'espérance de vie masculine en Suisse de 1876 à 2020. Utiliser ce fichier pour déterminer l'espérance de vie en 2050 sur la base d'une régression logarithmique. Effectuer tous les calculs pour y parvenir puis vérifier l'équation de régression obtenue au moyen des outils d'Excel.

18 [Cours du Bitcoin] Le graphique ci-après représente l'évolution du Bitcoin en 2020 depuis son cours le plus bas en mars jusqu'au 10 juillet. Une prévision prudente consiste à vue d'oeil à opter pour une régression de type logarithmique. En utilisant le fichier Excel bitcoin.xlsx estimer le cours du Bitcoin en date du 18.09.2020.



19 [Passagers] Les transports publics de la région lausannoise (TL) ont mesuré au cours des dernières années la fréquentation suivante en millions de passagers :

Année	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
Usagers	74	74	89	95	98	101	105	107	109	112

On ne peut que le constater : le nombre de passagers ne cesse de croître ! Quel modèle de régression semble le plus adapté à cette évolution ? Commenter les résultats.

20 [Investissement] Daniel a investi 380 frs en actions. Au cours des 5 premières années, la valeur de son investissement a augmenté, comme le montre le tableau ci-après :

Année	0	1	2	3	4	5
Cours	380	395	411	427	445	462

(a) Déterminer, calculs à l'appui, la courbe de régression exponentielle $y = a \cdot b^x$

(b) Estimer la valeur de ces actions 10 ans après l'achat si la tendance actuelle devait se poursuivre.

(c) Quel est le taux annuel moyen de croissance observé sur les 5 premières années ?

21 [Régression puissance] Les valeurs suivantes doivent être ajustées selon un modèle de régression puissance de la forme $y = ax^b + c$. Ce modèle ne pouvant être linéarisé, déterminer les paramètres a, b et c qui minimisent l'erreur totale de prédiction au moyen du solveur d'Excel.

X	0	1	2	3	4	5	6	7
Y	2	2	3	4	5	7	8	10

22 [Régression puissance] Les valeurs suivantes ont été ajustées par une courbe de régression puissance d'équation $y = ax^b$. L'ajustement a fourni également $R^2 = 1$.

X	3	5	6	?
Y	10	6	5	10/3

(a) Déterminer, calculs à l'appui, les paramètres a et b.

(b) Déterminer ces mêmes paramètres de façon algébrique.

(c) Compléter la valeur manquante du tableau.

23 [Régression logistique] L'évolution des technologies mobiles et la généralisation des smartphones au sein de la population permettent d'accéder à internet hors de la maison ou du lieu de travail de plus en plus facilement. Selon l'Office fédéral de la statistiques, le nombre d'utilisateurs du téléphone mobile parmi les internautes a évolué comme suit les dernières années au sein de la communauté européenne :

Année	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
Taux en %	26	37	47	57	65	68	75	78	84

(a) Déterminer l'équation de régression logistique en posant $x = 0$ pour l'année 2011. (arrondir les valeurs obtenues au dixième)

(b) Si ce rythme se poursuit, en quelle année sera franchie la barre des 90% d'utilisateurs de téléphone mobile parmi les internautes?

24 [Régression logistique] Louis aimerait disposer d'une formule approximative pour calculer la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. Il opte donc pour une régression logistique en partant de 17 valeurs pour X dont il calcule les images par la fonction LOI.NORMALE.N.

X	-2	$-1{,}75$	$\cdots$	$1{,}75$	2
$F(X)$			$\cdots$		

(a) Établir le tableau des 17 valeurs.

(b) Donner l'équation de régression logistique.

(c) Louis effectue le calcul suivant : $P(-1 \leq X \leq 1)$. Quelle erreur de calcul en % va-t-il commettre par rapport à la valeur exacte?

25 [Régression quadratique]

Un éditeur de livres a connu l'évolution suivante de ses ventes (en milliers d'exemplaires) durant les 12 derniers trimestres. Pour modéliser cette évolution, l'éditeur choisit le modèle de la régression quadratique $y = ax^2 + bx + c$, qui semble le plus adapté à la situation :

Année N				Année $N+1$				Année $N+2$			
T1	T2	T3	T4	T1	T2	T3	T4	T1	T2	T3	T4
40	70	80	90	90	90	100	100	90	80	70	60

(a) Déterminer l'équation de régression quadratique ainsi que le coefficient de détermination.

(b) Représenter graphiquement les valeurs observées ainsi que la courbe de régression.

(c) Combien d'exemplaires peut-il espérer vendre au premier trimestre de l'année $N+3$ si la tendance actuelle se poursuit selon ce modèle ?

26 [Régression quadratique]

(a) Déterminer, en utilisant la méthode des moindres carrés, la formule permettant d'obtenir la régression quadratique suivante : $y = ax^2$.

(b) Déterminer, au moyen de la formule obtenue, l'équation de régression quadratique passant par les points $A(2;2)$, $B(4;8)$ et $C(6;18)$ ainsi que le coefficient de détermination R^2.

(c) Que peut-on conclure ?

27 [Régression linéaire multiple] Dans une entreprise, on souhaite examiner la quantité de pièces produites Y par employé en fonction du test de dextérité X_1 et du nombre d'années d'expérience X_2. À l'aide d'un modèle de régression linéaire double, prévoir approximativement le nombre de pièces que pourrait produire un employé avec 8 ans d'expérience et un test d'aptitude de 7. On dispose des observations suivantes :

Employé n°	Quantité de pièces	Test de dextérité	Années d'expérience
1	10	8	6
2	15	10	9
3	12	8	7
4	7	6	1
5	9	8	4

28 [Régression linéaire multiple] On tente d'expliquer les résultats d'un test scolaire Y mesuré sur 6 élèves au moyen de 3 variables explicatives :

- X le nombre d'heures passées à étudier
- Z le nombre d'heures passées devant la télé
- U le nombre d'heures passées à faire du sport

Y
5
4,5
5
4
3,5
4

X	Z	U
4	2	2
4	1	0
5	0	1
4	3	1
2	2	0
3	2	1

(a) Déterminer l'équation de régression linéaire simple $y = ax + b$ ainsi que R^2.

(b) Déterminer l'équation de régression linéaire multiple $y = ax + bz + cu + d$ ainsi que R^2.

(c) Calculer le coefficient de détermination corrigé $R^2_{\text{ajusté}}$ [5]

$$R^2_{\text{ajusté}} = \frac{1-(1-R^2)(n-1)}{n-k-1} \qquad \text{avec } k = \text{nombre de variables explicatives.}$$

(d) Selon ce modèle, quelle note pourrait avoir un étudiant qui n'aurait fait qu'étudier durant 5 heures ?

25.4 Moyens informatiques

25.4.1 Utilisation de la calculatrice TI-84

À partir du menu STAT + CALC de la calculatrice, il est possible de calculer les principales régressions simples présentées dans ce livre.

Lorsque la régression est linéaire ou peut se ramener à une forme linéaire, la calculatrice renvoie la valeur du coefficient de corrélation linéaire r ainsi que le coefficient de détermination R^2. Lorsque la régression est polynomiale, de degré supérieur à 1, la calculatrice ne renvoie uniquement la valeur du R^2.

Stockez les valeurs de la variable X et Y dans les listes L_1 et L_2 par exemple. (stat + Modifier).

Les principales régressions calculées sont les suivantes :

5. Le coefficient de détermination ajusté tient compte du nombre de variables. En effet, le principal défaut du R^2 est de croître avec le nombre de variables explicatives. Le $R^2_{\text{ajusté}}$ n'augmente que si la nouvelle variable améliore la qualité du modèle.

Menu STAT+CALC	Modèle de régression
Réglin(ax+b) L_1, L_2	$y = ax + b$
RégDeg2 L_1, L_2	$y = ax^2 + bx + c$
RégDeg2 L_1, L_2	$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$
RégDeg4 L_1, L_2	$y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$
RégLn L_1, L_2	$y = a + b \cdot \ln(x)$
RégExp L_1, L_2	$y = a \cdot b^x$
RégPuiss L_1, L_2	$y = a \cdot x^b$
Logistique L_1, L_2	$y = \dfrac{c}{1 + e^{-bx}}$

Remarques :

- Pour afficher le coefficient de corrélation il faut au préalable activer le menu : mode + DIAGNOSTIQUES STATS AFF
- La valeur c de la fonction logistique est calculée automatiquement. Cependant, selon la donnée du problème on peut être amené à imposer cette valeur. Dans ce cas, l'outil n'est pas adapté et il faut recourir au calcul tel que présenté dans ce livre.

25.4.2 Utilisation d'Excel

Dans Excel, il est possible, dans les fonctions statistiques de base de calculer les diverses fonctions suivantes en rapport avec la régression :

- PREVISION(x_i ;Y ;X) : Renvoie la valeur ajustée $f(x_i) = ax_i + b$ de la droite de régression, à partir des plages de cellules Y et X

- DROITEREG(Y ;X) : Renvoie les coefficients $a, b, c, \ldots$ du modèle de régression linéaire simple ou multiple à partir d'une plage de cellules Y et X

$$y = ax + b \quad \text{ou} \quad y = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + b$$

  Cette formule doit être rentrée de façon matricielle (Ctrl + Maj + Enter) en prévoyant $d + 1$ cellules (en ligne), soit le nombre de coefficients recherchés.

- COEFFICIENT.CORRELATION(X ;Y) : Renvoie le coefficient de corrélation linéaire de deux plages de valeurs X et Y.
- COEFFICIENT.DETERMINATION(Y ;Ŷ) : Renvoie le coefficient de détermination entre les valeurs observées Y et prédites $\hat{Y}$.

25.5 Problèmes et exercices de synthèse

29 [Emprunt] Une entreprise a contracté un emprunt de 285 000 frs pour l'achat d'un nouvel équipement. À la fin de chaque mois, elle note dans le tableau suivant les bénéfices cumulés (en milliers de frs) réalisés depuis l'acquisition du nouvel équipement :

Mois x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
Bénéfices cumulés y_i	28	40	51	65	78	84	89	98

(a) Déterminer la courbe de tendance au moyen de la régression linéaire et puissance.

(b) Lequel des deux modèles semble préférable selon le principe des moindres carrés ?

(c) Représenter au moyen de deux graphiques ces ajustements.

(d) Évaluer, dans le cas des deux modèles, à partir de quel mois l'emprunt sera amorti par les bénéfices cumulés ?

30 [Hypermarché] Un hypermarché dispose de 20 caisses. Le tableau ci-dessous donne le temps moyen d'attente Y (en minutes) à une caisse en fonction du nombre de caisses ouvertes X :

X	3	4	5	6	8	10	12
Y	16	12	10	8	6	5	4

(a) Calculer le coefficient de corrélation linéaire r ainsi que S.

(b) Déterminer, l'équation de la droite de régression par la méthode des moindres carrés.

(c) Représenter sur un même graphique cette droite ainsi que les valeurs observées.

(d) Estimer le temps moyen d'attente à la caisse lorsque 15 caisses sont ouvertes.

(e) Pensez-vous que, dans le cas de la question (d), la régression linéaire soit fiable ?

31 [Coûts] Soit X le nombre d'heures facturées dans un atelier de construction mécanique. Soit Y le coût total correspondant. La statistique suivante est effectuée sur un ensemble de 6 clients :

i	x_i	y_i
1	200	16 000
2	160	14 400
3	80	8 000
4	150	12 750
5	210	17 220
6	60	4 500

(a) Calculer le coefficient de corrélation linéaire r ainsi que la droite de régression $y = ax + b$

(b) Déterminer le coût variable CV ainsi que le coût fixe de fabrication CF.

32 [Covariance] Démontrer l'égalité de la formule de la covariance :

$$\sigma_{XY} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) = \overline{xy} - \overline{x}\cdot\overline{y}$$

33 [Droite de régression] Montrer comment sont déterminés les paramètres a et b de la droite de régression à partir des dérivées partielles suivantes :

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 2\sum_{i=1}^{n}[(ax_i + b) - y_i]\cdot x_i = 0$$
$$\frac{\partial S}{\partial b} = 2\sum_{i=1}^{n}[(ax_i + b) - y_i] = 0$$

34 [Droite de régression] Déterminer la droite de régression $y = ax + b$ au moyen des informations partielles suivantes :

$$\sum x_i = 20 \qquad \sum x_i^2 = 120 \qquad \overline{x} = 5 \qquad \overline{y} = 4,5 \qquad r = 0,8 \qquad S = 1,8$$

35 [Quartet d'Anscombe] Les quatre séries statistiques suivantes $(X_1; Y_1)$, $(X_2; Y_2)$, $(X_3; Y_3)$ et $(X_4; Y_4)$ (appelées aussi Quartet d'Anscombe) ont été construites en 1973 par le statisticien Francis Anscombe dans le but de démontrer l'importance de tracer des graphiques avant d'analyser un ensemble de données. Pour chacune de ces séries, on demande :

(a) Calculer les 4 coefficients de corrélation linéaire.

(b) Déterminer les équations des 4 droites de régression linéaire.

(c) Sur la simple base des résultats obtenus, peut-on dire que la régression linéaire soit adaptée ?

(d) Représenter graphiquement les séries, puis commenter à nouveau les résultats obtenus.

X_1	Y_1
4	4,26
5	5,68
6	7,24
7	4,82
8	6,95
9	8,81
10	8,04
11	8,33
12	10,84
13	7,58
14	9,96

X_2	Y_2
4	3,1
5	4,74
6	6,13
7	7,26
8	8,14
9	8,77
10	9,14
11	9,26
12	9,13
13	8,74
14	8,1

X_3	Y_3
4	5,39
5	5,73
6	6,08
7	6,42
8	6,77
9	7,11
10	7,46
11	7,81
12	8,15
13	12,74
14	8,84

X_4	Y_4
19	12,5
8	6,89
8	5,25
8	7,91
8	5,76
8	8,84
8	6,58
8	8,47
8	5,56
8	7,71
8	7,04

36 [Ligne de vie] Y a-t-il une relation entre l'espérance de vie et la longueur de la «ligne de vie» dans la main ? Dans un article de 1974 publié dans le *Journal of the American Medical Association*, Mather et Wilson ont réalisé 50 observations dont les informations partielles sont fournies ci-après.

$$\sum_{t=1}^{50} X_t = 3\,333 \qquad \sum_{t=1}^{50} X_t^2 = 231\,933 \qquad \sum_{t=1}^{50} X_t Y_t = 30\,549{,}75$$

$$\sum_{t=1}^{50} Y_t = 459,9 \qquad \sum_{t=1}^{50} Y_t^2 = 4\,308{,}57$$

37 [Modèle logistique] En quoi le modèle de régression logistique parfois présenté dans la littérature sous la forme :

$$y = \frac{\alpha \exp(\beta_0 + \beta_1 x)}{1 + \exp(\beta_0 + \beta_1 x)}$$

est-il différent du modèle de régression logistique présenté dans ce livre ?

$$y = \frac{M}{1 + e^{mx+h}}$$

38 [Modèle logistique] On dispose des statistiques de ventes (en milliers d'unités) d'un nouveau produit au cours des 6 premiers mois d'existence :

Mois	1	2	3	4	5	6
Ventes	5	10	20	30	35	37

(a) Réaliser une régression logistique, sachant que les ventes de ce produit ne devraient pas dépasser cette année les 40 000 unités.

(b) Calculer le volume des ventes prévisibles au second semestre.

39 [Modèle sinusoïdal] Un petit magasin de sport connaît depuis plusieurs années un mouvement cyclique de son chiffre d'affaires. Les résultats de l'an passé sont présentés dans le tableau suivant (valeurs en milliers de francs) :

Mois	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
CA	6	7	5	3	2	2	5	6	4	1	1	5

(a) Déterminer les paramètres a, b, c et d de la courbe de régression $y = a \times \sin(bx + c) + d$

(b) Représenter graphiquement les valeurs ainsi que la courbe d'ajustement.

(c) Prévoir le chiffre d'affaires du premier trimestre pour l'an prochain en utilisant ce modèle.

40 [Degré zéro] On donne les observations statistiques suivantes :

x_i	3	4	6
y_i	1	7	10

(a) Déterminer à l'aide du calcul matriciel uniquement la courbe de régression polynomiale de degré zéro.

(b) Représenter graphiquement les valeurs observées ainsi que la courbe de régression.

41 [Consommation électrique] En Suisse, la consommation d'électricité (en gigawatt-heure GWh) a évolué depuis 1951 de la façon suivante :

Année	1951	1961	1971	1981	1991	2001	2006
Consommation	5 501	8 400	12 380	16 474	21 528	24 705	26 320

(a) Représenter l'évolution de la consommation par une régression du type :

$$f(t) = \alpha \times (1+a)^{t-t_0} \qquad \text{avec } t_0 = 1951$$

(b) Représenter cette même évolution par une régression du type :

$$f(t) = \alpha \cdot e^{c(t-t_0)} \qquad \text{avec } t_0 = 1951$$

42 [Choix de modèle] Suite à de nombreuses campagnes de sensibilisation, une petite ville a vu le nombre d'accidents de circulation (Y) diminuer passablement au cours des 20 dernières années (X). Les chiffres parlent d'eux-mêmes :

X	1995	2000	2005	2010	2015
Y	130	120	70	30	16

Compte tenu de ces informations, et en choisissant $x = 1$ pour 1995 quel modèle choisiriez-vous, entre ceux proposés ci-après, pour prévoir l'évolution future du nombre d'accidents dans cette ville ?

(a) Régression linéaire

(b) Régression quadratique

(c) Régression logistique à valeur maximale 140

Représenter graphiquement les résultats obtenus.

43 [Productivité] On a mesuré la productivité (en nombre de pièces) de 10 employés selon qu'on les assigne aux deux machines de production A et B de l'entreprise. Les résultats sont donnés dans le tableau suivant :

Machine A	27	22	33	31	28	28	26	27	30	29
Machine$B$	40	41	57	55	52	51	50	50	55	52

Pourriez-vous, en calculant le coefficient des rangs de Spearman, prévoir un tournus des employés sur les deux machines ?

44 [Classement] Quinze élèves ont été classés une première fois par une épreuve d'économie et une seconde fois par une épreuve de comptabilité :

Élève i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Économie x_i	10	1	11	2	8	12	4	5	7	15	6	3	14	9	13
Comptabilité y_i	11	3	6	1	8	14	2	4	9	15	5	7	12	13	10

(a) Calculez le coefficient de corrélation linéaire r.

(b) Calculez le coefficient de corrélation des rangs de Spearman r_s.

(c) Que constatez-vous ?

45 [Bénéfice] Dans une région de sports d'hiver, on a relevé l'an passé pour 10 entreprises de remontées mécaniques le bénéfice y (en milliers de frs), le nombre d'installations x_1 ainsi que le nombre de jours d'exploitation x_2 :

Entreprise i	Bénéfice y	Installations x_1	Exploitation x_2
1	305	21	90
2	218	14	85
3	86	8	70
4	690	44	88
5	553	37	87
6	301	25	84
7	17	6	65
8	698	41	103
9	117	10	77
10	415	28	82

(a) Déterminer l'équation de régression multiple $y = ax_1 + bx_2 + c$.

(b) Quelle pourrait être une bonne estimation du profit pour une compagnie ayant 30 installations et 85 jours d'exploitation ?

(c) Calculer le coefficient de détermination ajusté.

46 [Modèle a/x] Le chiffre d'affaires Y (en millions de frs) d'une grande société florissante dans les années 90 a diminué d'année en année. Après une rapide représentation graphique des données, ce chiffre d'affaires semble suivre une tendance de type $f(x) = \frac{a}{x}$. Par ailleurs, les coûts de fonctionnement annuels qui se montent à 150 000 frs, sont, eux, relativement stables dans le temps.

(a) Trouver la valeur du paramètre a de la courbe de régression $f(x) = \frac{a}{x}$. Ce paramètre est obtenu selon le principe des moindres carrés, c'est-à-dire en minimisant l'expression :

$$S = \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - y_i]^2$$

(b) Calculer la valeur du paramètre a (à 2 décimales) compte tenu des informations suivantes fournies par la société :

Année	x_i	y_i
2000	1	3
2003	4	1,2
2005	6	0,66
2008	9	0,37
2010	11	0,29
2015	16	0,21

(c) Selon ces tristes prévisions, en quelle année la société pourrait-elle se trouver en dépôt de bilan si la tendance actuelle selon ce modèle devait se poursuivre ?

47 [Assurance-vie] En assurance-vie, les actuaires doivent établir des tables de mortalité ajustées q_x à partir de taux bruts de mortalité observés $\tilde{q}_x$ à différents âges x, afin de pouvoir construire un tarif qui tienne compte de la tendance générale de la mortalité.

Parmi les différentes méthodes de calcul, la méthode dite de King-Hardy permet de déterminer assez facilement, les paramètres s, g et c de la formule de Makeham utilisée pour ce modèle :

$$q_x = 1 - s\, g^{c^x(c-1)}$$

Cette méthode applicable à des âges consécutifs est la suivante :

1. Séparer les observations en 3 groupes consécutifs de t observations chacun.
2. Pour chaque groupe calculer l'expression

$$S = \sum_t \ln(1 - \tilde{q}_x)$$

ce qui va donc former 3 valeurs : S_1, S_2 et S_3

3. On calcule les valeurs intermédiaires a, b et c suivantes au moyen des formules :

$$a = \frac{S_1 S_3 - S_2^2}{t(S_1 + S_3 - 2S_2)} \qquad c = \sqrt[t]{\frac{S_3 - S_2}{S_2 - S_1}} \qquad b = \frac{(c-1)(S_2 - S_1)}{c^{x_1} \cdot (c^t - 1)^2}$$

4. Les deux valeurs finales manquantes s et g sont données par :

$$s = e^{a} \qquad \text{et} \qquad g = e^{\frac{b}{c-1}}$$

(a) Calculer les paramètres s, g et c de la formule de Makeham à partir des observations suivantes :

i	x_i	$1000\tilde{q}_{x_i}$
1	20	1,46
2	21	1,45
3	22	1,52
4	23	1,51
5	24	1,48
6	25	1,53
7	26	1,58
8	27	1,55
9	28	1,57

(b) Représenter graphiquement cette courbe de régression avec les valeurs observées.

(c) Déterminer les taux de mortalité ajustés qui seront utilisés pour le tarif.

48 [Défi] On donne 3 points non alignés $(-2;1)$, $(h;3)$ et $(2;p)$ ajustés par la droite des moindres carrés $y = x + 3$. Que valent les valeurs h et p ?

Cinquième partie

Probabilités

Chapitre 26

Analyse combinatoire

Objectifs du chapitre

- connaître les principes fondamentaux du dénombrement.
- savoir calculer avec des factorielles.
- résoudre des problèmes liés aux permutations, arrangements et combinaisons.
- résoudre des problèmes liés au binôme de Newton et triangle de Pascal.

L'analyse combinatoire est une branche des mathématiques qui étudie comment compter les objets. Elle fournit des méthodes de **dénombrements** particulièrement utiles en théorie des probabilités. Un exemple d'application intéressante de cette dernière est le binôme de Newton utilisé dans le calcul des probabilités d'une loi binomiale.

Dans ce chapitre, nous allons donc développer les techniques de dénombrement qui permettront de résoudre des problèmes du genre :

- Combien de façons peut-on choisir un ensemble de 3 employés parmi 20 ?
- Combien de bulletins différents peut-on remplir à la loterie à numéros ?
- De combien de façons peut-on assigner 7 personnes à deux machines s'il faut au moins 3 personnes par machine ?

26.1 Le dénombrement

26.1.1 Principes généraux

Notion d'ordre

Dans certains exercices de dénombrement, on tient compte de l'ordre et dans d'autres, l'ordre n'est pas important.

Exemple 26.1

On dispose des trois lettres A, B et C. Combien d'**anagrammes**, c'est-à-dire de mots différents, peut-on former :

(a) en tenant compte de l'ordre

(b) sans tenir compte de l'ordre

Solution

(a) en tenant compte de l'ordre, il y a 6 anagrammes possibles :

ABC	BAC	CAB
ACB	BCA	CBA

(b) sans tenir compte de l'ordre, il n'y a qu'un anagramme :

$$\text{ABC} = \text{ACB} = \text{BAC} = \text{BCA} = \text{CAB} = \text{CBA}$$

Exemple 26.2

On souhaite désigner un comité de 2 personnes pour représenter une assemblée.

- si les deux personnes désignées occupent une place quelconque au sein du comité, alors l'**ordre n'est pas important**.
- si, par contre, le comité se compose d'un président et d'un secrétaire, l'**ordre joue ici un rôle**.

Exemple 26.3

Établir un tableau représentant tous les groupes de 2 lettres que l'on peut former avec les lettres A, B, C et D avec ordre et sans ordre.

Solution

Avec ordre		
AB	AC	AD
BA	BC	BD
CA	CB	CD
DA	DB	DC

Sans ordre		
AB	AC	AD
	BC	BD
		CD

Notion de répétition

Dans certains cas, les éléments peuvent être répétés plusieurs fois.

Exemple 26.4

Combien de codes de 2 chiffres peut-on utiliser pour ouvrir une porte sachant que seuls les chiffres 1,2 et 3 ont été utilisés ?

Solution

Codes possibles		
11	12	13
21	22	23
31	32	33

- Si les répétitions sont autorisées, il y a 9 codes possibles.
- Si les répétitions sont interdites, il y a 6 codes possibles (en orange).

Dans d'autres cas, on peut imposer une répétition de plusieurs éléments.

Exemple 26.5

Combien d'anagrammes du mot LPP peut-on former ?

Solution

La lettre «P» est répétée deux fois. Les 3 mots possibles sont : «LPP», «PLP» et «PPL».

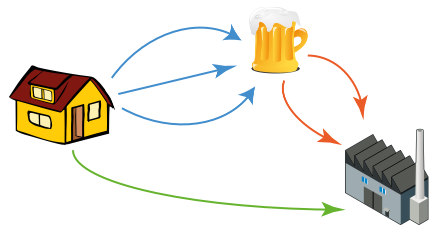
Principes d'addition et de multiplication

Si un premier événement A peut se réaliser de m façons, un deuxième événement B de n façons et un troisième événement C de p façons, alors il y aura :

- $m \times n \times p$ façons de réaliser les 3 événements ensemble. (**principe multiplicatif**)
- $m + n + p$ façons de réaliser l'un **ou** l'autre des événements. (**principe additif**)

Exemple 26.6

Pour aller de la maison à l'usine on peut passer par le bistro. Il y a 3 trajets possibles entre la maison et le bistro, deux entre le bistro et l'usine et un entre la maison et l'usine.



maison au bistro **ET** bistro à l'usine:
3 x 2 = 6 chemins

maison au bistro **OU** bistro à l'usine:
3 + 2 = 5 chemins

Les principes additifs et multiplicatifs peuvent se combiner au sein d'un problème.

Exemple 26.7

Combien peut-on former de nombre de 4 chiffres différents strictement inférieurs à 1250 ?

Solution

On doit envisager 2 cas :

1. Le nombre commence par 10, alors il y a 8 possibilités pour le troisième chiffre (2 ;3 ;4 ;5 ;6 ;7 ;8 ;9) et 7 possibilités pour le dernier.
   Dans ce cas, il y a $8 \times 7 = 56$ possibilités.
2. Le nombre commence par 12, alors il y a 3 possibilités pour le troisième chiffre (0 ;3 ;4) et 7 possibilités pour le dernier.
   Dans ce cas, il y a $3 \times 7 = 21$ possibilités.

Les deux cas étant mutuellement exclusifs, on applique le principe additif. Il y a donc au total : $56 + 21 = 77$ nombres.

26.1.2 Notation factorielle

Soit n un entier naturel. Sa **factorielle** [1], notée $n!$ est un nombre défini par :

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

On obtient par exemple les résultats suivants :

- $1! = 1$
- $2! = 2 \times 1 = 2$
- $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$

1. La factorielle peut se définir à l'aide du symbole produit : $n! = \prod_{i=1}^{n} i = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-1) \times n$

- $10! = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 3\,628\,800$

La factorielle peut être définie également sous forme récursive :

$$n! = n \times (n-1)! \quad \text{pour tout entier } n$$

Cette définition permet de simplifier les expressions composées de factorielles.

Exemple 26.8

Simplifier l'expression : $\dfrac{7!}{5!}$

Solution

On développe le 7! jusqu'au niveau du 5!, puis on simplifie :

$$\frac{7!}{5!} = \frac{7 \times 6 \times \cancel{5!}}{\cancel{5!}} = 42$$

La factorielle de 2,5 est-elle calculable ?
Extension de la notion de factorielle.

26.1.3 Les permutations

Permutations simples

Considérons n objets distincts, c'est-à-dire tous différents. On appelle **permutation simple** de n objets, toutes les façons possibles de ranger ces n objets. Le raisonnement suivant conduit à la formule générale :

«Le premier objet a n possibilités de placement. Une fois placé, il reste $(n-1)$ possibilités de placement pour le second objet. Quand celui-ci est placé, il reste $(n-2)$ possibilités de placement pour le troisième et ainsi de suite.»

Les permutations simples de n objets distincts P_n s'écrivent alors par :

$$P_n = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1$$
$$P_n = n!$$

Exemple 26.9

On a élu un comité de 4 personnes. Le comité se compose d'un président, d'un caissier, d'une secrétaire ainsi que d'un vérificateur des comptes. Combien de comités différents peut-on envisager ?

Solution

Pour la place du président : 4 choix possibles. Une fois le président en place, il reste 3 choix possibles pour le caissier, etc. Le nombre de possibilités est donc :

$$P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Exemple 26.10

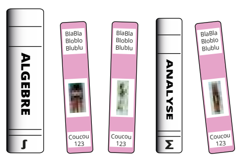
Dans une bibliothèque, on place 5 livres (3 livres littéraires et 2 livres de mathématiques). De combien de façon peut-on les ranger si :

(a) aucune restriction n'est imposée ?

(b) les livres de mathématiques doivent être rangées ensemble et les livres littéraires également ?

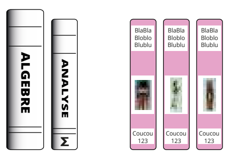
Solution

(a) Dans ce cas, on considère qu'il y a 5 livres différents, donc $P_5 = 5! = 120$ possibilités.



(b) On permute le «groupe mathématique» et le «groupe littéraire». Puis on permute les ouvrages à l'intérieur de chaque groupe, ce qui donne :

$$P_2 \times P_2 \times P_3 = 2! \times 2! \times 3! = 24 \text{ possibilités.}$$



Permutations avec répétitions

Dans la liste des objets, il est possible que certains soient identiques. Le résultat global doit être alors divisé par toutes les permutations d'objets identiques.

Ce raisonnement conduit ainsi à la formule des permutations avec répétitions :

$$\overline{P}_n(r_1; r_2; \cdots; r_k) = \frac{n!}{r_1!\ r_2!\ \cdots r_k!} \qquad \text{avec } r_1 + r_2 + \cdots + r_k \leq n$$

où $r_1; r_2; \cdots; r_k$ représente le nombre d'objets identiques.

Exemple 26.11

Combien de mots différents (anagrammes) peut-on former avec les lettres du mot «CARAPACE» ?

Solution

Sans remarquer que plusieurs lettres sont identiques, on aurait répondu : $P_8 = 8!$. Or, dans ce mot, la lettre «A» revient 3 fois, la lettre «C» deux fois et les lettres «P», «R» et «E» une seule fois. On peut donc écrire :

$$\overline{P}_8(3; 2; 1; 1; 1) = \frac{8!}{3!\ 2!\ 1!\ 1!\ 1!}$$

ou plus simplement :

$$\overline{P}_8(3; 2) = \frac{8!}{3!\ 2!} = 3360$$

Exemple 26.12

De combien de façons différentes peut-on aligner ces pièces ?

Solution

$$\overline{P}_8(2; 2; 4) = \frac{8!}{2!\ 2!\ 4!} = 420$$

26.1.4 Les arrangements

Arrangements simples

Un arrangement simple est une disposition **ordonnée** de p objets **distincts** choisis parmi n objets. Un arrangement simple se calcule selon le même principe que les permutations simples :

$$A_p^n = n\,(n-1)\,(n-2)\,\cdots(n-p+1)$$

Ou de façon plus concentrée :

$$A_p^n = \frac{n!}{(n-p)!} \qquad \text{avec} \quad 0 \leq p \leq n$$

Exemple 26.13

On veut former un comité à partir d'un groupe de 8 personnes. De combien de façons différentes peut-on former ce comité si ce dernier est composé d'un président, d'un vice-président, d'un secrétaire et d'un trésorier ? ($p = 4$ et $n = 8$)

Solution

Il y a 8 choix possibles pour désigner le président, puis 7 pour le vice-président et ainsi de suite...

Président	Vice-président	Secrétaire	Trésorier
8	7	6	5
n	$(n-1)$	$(n-2)$	$(n-p+1)$

Au final on aura :

$$A_4^8 = 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 1680 \quad \text{ou}$$

$$A_4^8 = \frac{8!}{(8-4)!} = \frac{8!}{4!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4!} = 1680$$

Remarque

Si $p = n$ alors les arrangements deviennent des permutations simples de n objets.

Exemple 26.14

Si cinq personnes désirent s'asseoir dans un compartiment de 8 places, il y a

$$A_5^8 = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 6\,720 \text{ possibilités.}$$

Par contre, si 8 personnes désirent s'asseoir dans ce même compartiment, il y aura :

$$A_8^8 = 8! = 40\,320 \text{ possibilités.}$$

Arrangements avec répétitions

Un arrangement avec répétitions est une disposition **ordonnée** de p objets **distincts** choisis parmi n objets qui peuvent être répétés plusieurs fois. Un arrangement avec répétitions se calcule au moyen de la formule suivante :

$$\overline{A}_p^{\,n} = n^p \qquad \text{avec} \quad 0 \leq p$$

Il y a en effet : n choix pour le 1er objet, n choix pour le second, $\cdots$ n choix pour le $p^{\text{ième}}$. On multiplie finalement le nombre de toutes ces possibilités, soit n^p.

Exemple 26.15

En informatique, le bit est une unité d'information qui peut représenter deux valeurs distinctes : 0 ou 1. Un champ de 8 bits, aussi appelé octet, s'écrit par exemple sous la forme : 01011010. Combien existe-il d'octets ?

Solution

Chaque bit ayant 2 valeurs distinctes, il y aura $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 256$ octets possibles. Ce qui revient à constituer des groupes ordonnés de 8 chiffres à l'aide des deux chiffres 0 et 1, c'est-à-dire :

$$\overline{A}_8^{\,2} = 2^8 = 256$$

Exemple 26.16

On forme des mots de 2 lettres à partir des 8 premières lettres de l'alphabet. Combien de mots peut-on former si les répétitions sont admises, comme par exemple le mot «BB» ?

Solution

Dans ce cas on a :

$$\overline{A}_2^{\,8} = 8^2 = 64 \text{ mots différents.}$$

Exemple 26.17

Combien de plaques d'immatriculation comportant 6 chiffres sont possibles dans le canton de Vaud ?

Solution

Selon le principe de multiplication, il y a 9 possibilités pour le chiffre le plus à gauche, 10 pour le suivant, etc.., c'est-à-dire : $9 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10$ ou simplement :

$$9 \times A_5^{10} = 9 \times 10^5 = 900\,000 \text{ plaques.}$$

26.1.5 Les combinaisons

Combinaisons simples

Une combinaison simple est une disposition **non ordonnée** de p objets **distincts** choisis parmi n objets. Une combinaison simple se calcule au moyen de la formule suivante :

$$C_p^n = \frac{n!}{p!\,(n-p)!} \qquad \text{avec} \quad 0 \leq p \leq n$$

Ainsi, deux combinaisons distinctes diffèrent par la nature des objets les composant, mais pas par l'ordre. La formule des combinaisons simples s'obtient à partir de celle des arrangements simples que l'on divise par les $p!$ objets ordonnés. [2]

Exemple 26.18

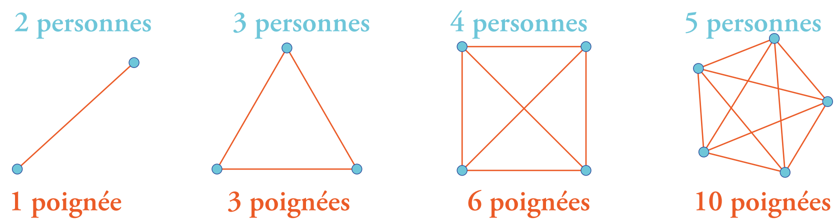
On veut former un comité de 4 personnes à partir d'un groupe de 8 personnes ($p = 4$ et $n = 8$). De combien de façons différentes peut-on former ce comité, si aucune attribution particulière au sein de celui-ci n'est précisée ?

Solution

$$C_4^8 = \frac{8!}{4!\,(8-4)!} = \frac{8!}{4!\,4!} = 70$$

Exemple 26.19

Douze personnes s'échangent des poignées de mains, chacun à chacun une seule fois. Combien y a-t-il de poignées de mains ?



Solution

On peut représenter les personnes par les lettres A, B, C, etc.. Comme le montre le schéma ci-après, le nombre de poignées de mains entre n personnes peut être considéré comme l'ensemble des couples de 2 lettres parmi n lettres, sans ordre ni répétition.

2. Plusieurs écritures sont possibles : $\binom{n}{p}$ ou C_n^p [France] ou ${}^{n}C_k$ ou encore ${}_{n}C_k$.

2 personnes	3 personnes	4 personnes	5 personnes
AB	AB AC BC	AB AC BC AD BD CD	AB AC BC AD BD CD AE BE CE DE
$C_2^2 = 1$	$C_2^3 = 3$	$C_2^4 = 6$	$C_2^5 = 10$

Dans le cas de 12 personnes, on aura :

$$C_2^{12} = \frac{12!}{2!\ 10!} = 66 \text{ poignées de mains.}$$

Combinaisons avec répétitions

Une combinaison avec répétitions est une disposition **non ordonnée** de p objets **distincts** choisis parmi n objets qui peuvent être répétés plusieurs fois. Une combinaison avec répétitions se calcule au moyen de la formule suivante :

$$\overline{C}_p^n = C_p^{n+p-1} = C_{n-p}^{n+p-1} \qquad \text{avec} \quad 0 \le p \quad \text{et} \quad 1 \le n$$

Exemple 26.20

Combien de compositions de cornets de glaces sont possibles si l'on doit choisir 2 boules parmi 4 arômes (vanille, fraise, chocolat et pistache) ?

Solution

L'ordre des boules sur le cornet n'est pas important et il est possible de prendre 2 boules d'un même arôme. Ainsi :

$$\overline{C}_2^4 = C_2^{2+4-1} = C_2^5 = 10 \text{ compositions.}$$

Dans l'exemple précédent, on pourrait imaginer que les boules soient sélectionnées par un automate qui se positionne tour à tour devant le bac de vanille, de fraise, de chocolat et enfin celui de pistache. Pour sélectionner une boule on lui donne l'instruction ○, et pour passer au bac suivant l'instruction →. On obtient alors les exemples de codage suivants :

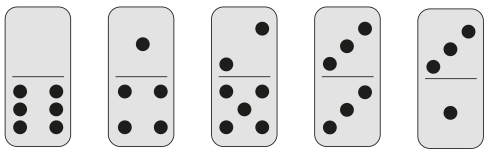
vanille et vanille	○ ○ → → →	
vanille et pistache	○ → → → ○	$\overline{P}_5(2;3) = C_2^5 = C_3^5 = 10$
fraise et pistache	→ ○ → → ○	
fraise et chocolat	→ ○ → ○ →	

D'une manière générale, avec n arômes et p boules, il y aura donc :

$$\overline{C}_p^n = C_p^{n+p-1} = C_{n-p}^{n+p-1} \text{ compositions différentes.}$$

Exemple 26.21

Déterminer le nombre de pièces que comporte un jeu de dominos.



Solution

Chaque pièce comporte deux symboles parmi 7 disponibles (0 ;1 ;2 ;3 ;4 ;5 ;6). Un même symbole peut être répété sur la même pièce. De plus, l'ordre des deux symboles n'est pas important. Il s'agit donc d'une combinaison avec répétitions de deux objets parmi 7. On trouve donc :

$$\overline{C}_2^7 = C_2^{7+2-1} = C_2^8 = 28 \text{ dominos}$$

26.1.6 Outils informatiques

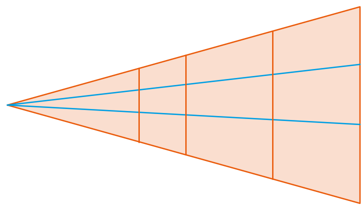
Les valeurs des factorielles, des arrangements et des combinaisons peuvent être obtenues sous Excel et sur les calculatrices Texas au moyen des commandes suivantes :

Fonction	Excel	Texas
$n\,!$	=FACT(n)	n !
A_p^n	=PERMUTATION(n ;p)	n nPr p
$\overline{A}_p^n$	=PERMUTATIONA(n ;p)	
C_p^n	=COMBINAISON(n ;p)	n nCr p
$\overline{C}_p^n$	=COMBINAISONA(n ;p)	

Exercices d'application de la section 26.1

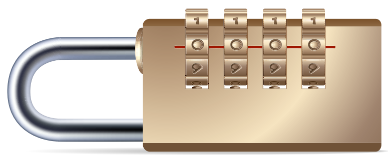
Exercices de dénombrement simples et intuitifs (principes)

1 [Triangles] Combien de triangles peut-on compter dans cette figure ?



2 [Habillement] Un jeune cadre dynamique dispose de 10 cravates, 4 vestons et 6 pantalons. De combien de façons peut-il s'habiller ?

3 [Cadenas] Combien de combinaisons sont possibles avec le cadenas suivant :



4 [Nombres de 4 chiffres] À l'aide des chiffres 1, 2, 3, 4 et 5, on forme des nombres de quatre chiffres.

(a) De combien de manières peut-on procéder ?

(b) Combien de ces nombres ne contiennent pas le chiffre 3 ?

(c) Combien contiennent au moins une fois le chiffre 3 ?

(d) Combien contiennent au moins une fois le chiffre 3 **ou** le chiffre 5 ?

Exercices sur les factorielles

5 [Factorielles] Simplifier les expressions suivantes :

(a) $4!$ **(c)** $(3/4)!$ **(e)** $(n+2)(n+1)!$

(b) $\dfrac{5}{0!}$ **(d)** $\dfrac{20!}{18!}$ **(f)** $\dfrac{(x-3)!}{(x-1)!}$

6 [Factorielles] Simplifier les expressions suivantes :

(a) $\dfrac{n!(n-1)!}{(n+1)!(n-2)!}$ **(b)** $\dfrac{10!-9!}{9^2}$ **(c)** $\dfrac{n!+(n-1)!}{(n+1)!}$

7 [Équations] Résoudre les équations suivantes en précisant l'ensemble de définition :

(a) $C_2^x = 55$ **(b)** $A_3^x = 240x$

8 [Équations] Résoudre les équations suivantes en précisant l'ensemble de définition :

(a) $A_5^{x+1} = 8A_4^x$ **(c)** $\overline{C}_x^3 = 10$

(b) $x! + \dfrac{6}{x!} = 7$ **(d)** $x! = 12\sqrt{x! - 20}$

Exercices sur les permutations

9 [Anagrammes] Combien d'anagrammes peut-on former avec les lettres du mot «LAUSANNE» si :

(a) aucune restriction n'est imposée ?

(b) les voyelles et consonnes doivent alterner ?

10 [Anagrammes] Soit le mot «MATIN»

(a) Combien d'anagrammes de ce mot existe-t-il ?

(b) Combien commencent par M ?

(c) Combien commencent par MA ?

(d) Combien **ne** se terminent **pas** par N ?

(e) Combien commencent par M et finissent par N ?

(f) Combien commencent par M ou finissent par N ?

11 [Bibliothèque] On range sur un rayon 2 livres de cuisine, 3 livres de mathématiques et 4 livres de français. De combien de manières peut-on faire ce rangement si :

(a) aucune contrainte n'est imposée ?

(b) si les livres de mathématiques doivent rester ensemble ?

(c) si les livres d'un même sujet doivent rester ensemble ?

(d) si l'on souhaite avoir un livre de mathématique de part et d'autre de l'étagère ?

12 [Escorte] Une escorte présidentielle comporte 3 voitures de police et quatre limousines. De combien de manières différentes, en tenant compte de l'ordre, peut-on former cette escorte, sachant que la première et la dernière voiture doivent être des voitures de police,

(a) si chaque véhicule est discernable ?

(b) si seules les limousines ne sont pas discernables ?

13 [Mots croisés] On souhaite former des grilles de mots croisés de 4 lignes et 6 colonnes comportant 4 cases noires.

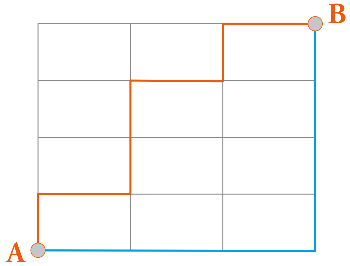
(a) Combien peut-on former de grilles ?

(b) Combien de grilles ont deux coins comportant des cases noires ?

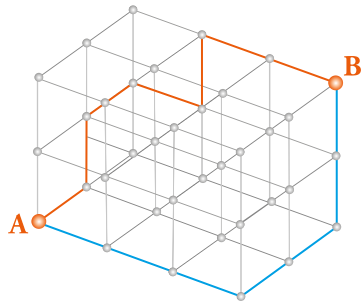
(c) Combien de grilles ont une case noire par ligne ?

14 [Chemins] Combien de chemins sont possibles pour aller du point A au point B en suivant le quadrillage par le chemin le plus court ?

(a)



(b)



15 [Questionnaire] Un questionnaire comprend 6 questions auxquelles il faut répondre par oui ou par non. Combien peut-on donner de réponses différentes :

(a) avec 3 oui et 3 non ?

(b) avec un seul oui ?

(c) avec au moins un oui ?

16 [Répartition d'objets] La répartition de k objets dans n boites n'est pas une problématique simple en combinatoire. Il faut savoir en effet si les boites et/ou les objets sont discernables et si les boites peuvent être vides. Par exemple, la répartition de k objets distincts dans n boites identiques devant contenir au moins un objet est donnée par la formule récursive suivante :

$$S(k,n) = S(k-1,n-1) + n \cdot S(k-1,n) \quad \text{avec } S(k,0) = S(0,k) = 0 \quad \text{et } S(0,0) = 1$$

(a) Combien y a-t-il de possibilités de répartir 4 objets différents dans 2 boites identiques, si aucune boite ne doit rester vide ?

(b) Établir la liste de toutes ces possibilités.

Exercices sur les arrangements

17 [Mots] Avec les 26 lettres de l'alphabet, combien de mots de 4 lettres peut-on former :

(a) si il est possible d'écrire la même lettre plusieurs fois ?

(b) si toutes les lettres doivent être différentes ?

18 [Multiples de 5] Combien peut-on former de multiples de 5 différents comportant 3 chiffres distincts à l'aide des chiffres 1,2,3,4,5 et 6 ?

19 [Questionnaire] De combien de manières peut-on répondre à une épreuve comportant 10 questions de type VRAI/FAUX ?

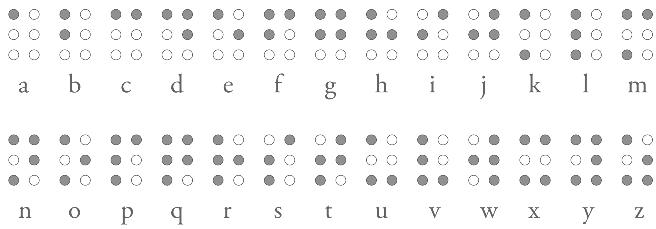
20 [Coffre-fort] Un coffre-fort possède 3 roulettes numérotées de 1 à 20. De combien de façons peut-on se tromper en tentant de l'ouvrir ?

21 [Nombres de 3 chiffres] Combien de nombres composés de trois chiffres et inférieurs à 500 peut-on former à l'aide des chiffres 1,2,3,4,5,6 et 7 si les répétitions :

(a) sont permises ?

(b) ne sont pas permises ?

22 [Écriture braille] Les symboles de l'écriture braille sont formés d'un assemblage de six points en relief, comme le montre l'image ci-dessous. Combien de symboles différents peut-on fabriquer selon ce principe ?



23 [Ascenseur] Un immeuble est composé d'un rez-de-chaussée et de 8 étages. Un ascenseur part du rez-de-chaussée avec 4 personnes.

(a) De combien de façons ces 4 personnes peuvent-elles choisir les étages auxquels elles vont se rendre ?

(b) De combien de façons ces 4 personnes peuvent-elles choisir les étages auxquels elles vont se rendre si à chaque étage un occupant au plus quitte l'ascenseur ?

24 [SGA] Afin de sensibiliser le citoyen helvétique au civisme, la Société Générale d'Affichage (SGA) a mis en place en 2011 une campagne d'affichage dans toute la Suisse. Sur chaque affiche était représenté un visage découpé en 4 parties horizontales. Chaque partie du portrait ainsi composé était celui d'un homme ou d'une femme politique suisse, comme le montre l'illustration ci-après :

Sachant que n hommes et p femmes politiques ont participé à cette campagne, calculer :

(a) Le nombre d'affiches différentes que l'on peut imprimer ?

(b) Le nombre d'affiches différentes que l'on peut imprimer si chaque partie adjacente doit être composée d'un personnage de sexe différent ?

(c) Le nombre d'affiches différentes que l'on peut imprimer si chaque partie est composée d'un personnage différent ?

25 [Codes de 4 chiffres] Une entreprise souhaite élaborer un système de code à l'aide de 4 chiffres de 1 à 4 et des deux lettres x et y, chacun étant pris une seule fois. Pour des raisons techniques, elle souhaite connaître les codes différents :

(a) comportant 6 positions

(b) comportant 4 positions

(c) comportant 6 positions et commençant par la lettre x

(d) comportant 4 positions et commençant par la lettre x

(e) comportant 4 positions et contenant la lettre x mais pas la lettre y

(f) comportant 4 positions et contenant ni la lettre x ni la lettre y

(g) comportant deux lettres aux deux premières positions puis 4 chiffres aux positions suivantes.

26 [Répartition] De combien de façons peut-on répartir :

(a) 2 cadeaux différents entre 4 enfants ?

(b) 4 cadeaux différents entre 2 enfants ?

27 [Dérangements] En combinatoire, on parle parfois de **dérangements** : c'est-à-dire de permutations particulières telles qu'aucun des éléments initiaux ne se retrouve à sa place initiale. La quantité de dérangements est notée $!n$ (sous-factorielle de n) et se calcule comme suit :

$$!n = n! \times \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

Dans sa classe, un prof souhaite faire changer de place à 3 élèves (A, B et C).

(a) De combien de manières peut-il procéder, si les places initiales sont ABC ?

(b) De combien de manières peut-il procéder s'il ne veut qu'aucun des 3 élèves occupe sa place initiale ?

Les dérangements ou permutations sans points fixes.
Comment établir cette formule ?

28 [Palindrome] Un **palindrome numérique** est un entier que l'on peut lire aussi bien depuis la gauche que depuis la droite, comme par exemple 12621.

(a) Combien de palindromes à 5 chiffres existe-t-il ?

(b) Combien de palindromes à n chiffres existe-t-il ?

Exercices sur les combinaisons

29 [Swiss Lotto] Le Swiss Lotto est un jeu où il faut cocher sur une grille 6 numéros sur 42 ainsi qu'un numéro «Chance» parmi 6. Pour réaliser un gain il faut avoir coché au moins 3 numéros gagnants. Pour gagner le jackpot, il faut avoir trouvé tous les numéros gagnants ! La liste des gains est présentée ci-après :

Rang des gains	Nombre de bons numéros	Bon numéro chance	Paiement moyen
1	6	1	Jackpot
2	6	0	CHF 1 000 000.-
3	5	1	CHF 10 000.-
4	5	0	CHF 1 000.-
5	4	1	CHF 150.-
6	4	0	CHF 75.-
7	3	1	CHF 25.-
8	3	0	CHF 10.-

Si l'on joue toutes les grilles possibles :

(a) combien y a-t-il de grilles différentes possibles ?

(b) combien de grilles gagnent au premier rang ?

(c) combien de grilles gagnent au deuxième rang ?

(d) combien de grilles gagnent au cinquième rang ?

(e) combien de grilles ne gagnent rien ?

30 [Jeu de cartes] De combien de façons peut-on choisir une main de 5 cartes dans un jeu de 36 cartes, si l'on veut que ces 5 cartes contiennent :

(a) les 4 dames ?

(b) deux dames et deux as ?

(c) au moins un as ?

31 [Questionnaire] Lors d'un examen, vous recevez un questionnaire dont les questions sont divisées en deux groupes. Le groupe A contient quatre questions et le groupe B en contient six. De combien de façons pouvez-vous faire votre choix si vous devez répondre à :

(a) quatre questions dont 2 du groupe A et 2 du groupe B ?

(b) six questions dont 2 du groupe A et quatre du groupe B ?

(c) deux questions que vous devez choisir soit dans le groupe A, soit dans le groupe B ?

(d) six questions en choisissant au moins deux questions du groupe A ?

(e) six questions en choisissant au plus deux questions du groupe A ?

32 [Mots de passe] À partir des 5 lettres : A, B, C, D, E, combien peut-on former de mots de passe possibles ?

33 [Lignes aériennes] Une compagnie aérienne a 45 lignes en service. Quel est le nombre de villes desservies, en supposant que toutes les villes soient reliées entre elles ?

34 [Droites sécantes] En combien de points au maximum 5 droites du plan peuvent-elles se couper ?

35 [Nombre de paires] On donne l'ensemble $P = \{1;2;3;4\}$.

(a) Énumérer le nombre de paires (x, y) avec $x, y \in \mathbb{N}$ et $x \leq y$

(b) À quelle formule de combinatoire cela correspond-il ?

36 [Retrouver la formule] Quelle formule se cache derrière les groupes de lettres suivants :

ABC	BCD	CDE	ABD	BCE
ABE	ACD	ACE	ADE	BDE

37 [Équation]

(a) Si $x, y, z \in \mathbb{N}$, combien y a-t-il de solutions différentes à l'équation suivante ?

$$x + y + z = 4$$

(b) Dresser un tableau avec toutes les solutions

(c) Même question que la question **(a)**, mais $x, y, z \in \mathbb{N}^*$

38 [Lancer de dés] On lance 2 dés simultanément. Combien y a-t-il de résultats possibles ?

26.2 Binôme de Newton et triangle de Pascal

Binôme de Newton

La formule du binôme de Newton (philosophe, mathématicien, physicien et astronome anglais 1643 - 1727) est une formule permettant de trouver pour une puissance n entière, l'expression :

$$(a+b)^n$$

En développant $(a+b)^n = (a+b)(a+b)\cdots(a+b)$, et en regroupant les coefficients, on constate que cette expression peut être écrite sous la forme :

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= C_0^n a^n + C_1^n a^{n-1} b + C_2^n a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^n b^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} C_k^n a^{n-k} b^k\end{aligned}$$

où les nombres C_k^n, aussi notés $\binom{n}{k}$, sont appelés ici **coefficients binomiaux**.

Coefficients binomiaux.
Pourquoi ils interviennent dans la formule du binôme ?

Exemple 26.22

Développer le binôme $(a+b)^3$

Solution

En appliquant la formule du binôme, on trouve :

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= \sum_{k=0}^{3} C_k^3 a^{3-k} b^k \\ &= C_0^3 a^3 b^0 + C_1^3 a^2 b^1 + C_2^3 a^1 b^2 + C_3^3 a^0 b^3 \\ &= 1 \times a^3 + 3 \times a^2 b + 3 \times a b^2 + 1 \times b^3 \\ &= a^3 + 3a^2 b + 3a b^2 + b^3\end{aligned}$$

Remarque

Dans la formule du binôme, le premier terme correspond à $k = 0$. Un terme quelconque i correspond donc à $k = i - 1$, comme le montre l'exemple suivant :

Exemple 26.23

Calculer le cinquième terme du développement de $\left(2x - \frac{y}{5}\right)^9$

Solution

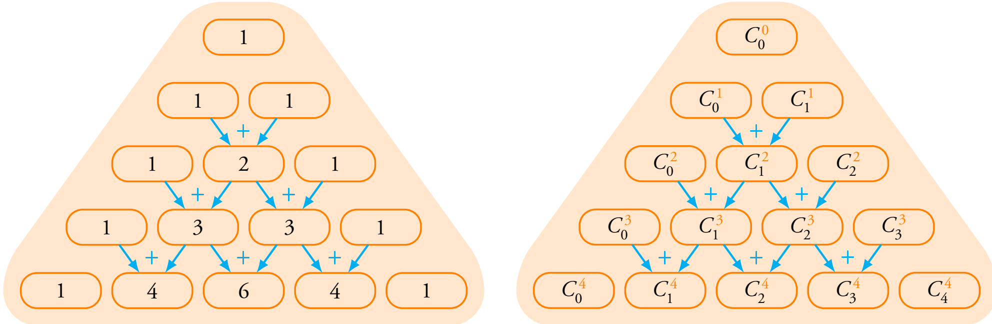
On a ici : $n = 9$, $k = 5 - 1 = 4$, $a = 2x$ et $b = -\frac{y}{5}$

$$\begin{aligned}\text{5ème terme } &= C_4^9 \cdot (2x)^{9-4} \cdot \left(-\frac{y}{5}\right)^4 \\ &= 126 \cdot (2x)^5 \cdot \left(-\frac{y}{5}\right)^4 \\ &= 126 \times 32 \times x^5 \times \frac{y^4}{625} = \frac{4032}{625} x^5 y^4\end{aligned}$$

Triangle de Pascal

Le triangle de Pascal (mathématicien et philosophe français 1623 - 1662) permet un calcul rapide des différents coefficients du développement du binôme. La construction d'un tel triangle se fait très facilement et peut se poursuivre indéfiniment. Dans ce triangle tout nombre est formé de la somme des deux nombres qui sont immédiatement au-dessus de lui.

Les nombres composant ce triangle ne sont rien d'autre que des coefficients binomiaux, comme le montre le triangle de droite :



Comme tout nombre est obtenu par la somme des deux nombres du dessus, on peut écrire la formule suivante :

$$C_p^n = C_{p-1}^{n-1} + C_p^{n-1}$$

On observe également dans un triangle de Pascal une symétrie verticale des valeurs, ce qui peut se traduire algébriquement par :

$$C_p^n = C_{n-p}^n$$

Exemple 26.24

Développer le binôme : $(a+b)^4$

Solution

En appliquant la formule du binôme, ainsi que la dernière ligne du triangle de Pascal précédent, on trouve :

$$\begin{aligned}
(a+b)^4 &= \sum_{k=0}^{4} C_k^4 a^{4-k} b^k \\
&= C_0^4 a^4 b^0 + C_1^4 a^3 b^1 + C_2^4 a^2 b^2 + C_3^4 a^1 b^3 + C_4^4 a^0 b^4 \\
&= 1a^4 b^0 + 4a^3 b^1 + 6a^2 b^2 + 4a^1 b^3 + 1a^0 b^4 \\
&= a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4a b^3 + b^4
\end{aligned}$$

Exercices d'application de la section 26.2

39 [Binôme de Newton] Développer les expressions suivantes :

(a) $(x+y)^5$ **(b)** $(2x-1)^3$ **(c)** $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3$

40 [Binôme de Newton] Développer les expressions suivantes :

(d) $(1+x^3)^3$ **(e)** $\left(\dfrac{a}{x}-\dfrac{x}{a}\right)^3$ **(f)** $\left(a+\dfrac{b}{a}\right)^4$

41 [Deux premiers termes] Trouver les 2 **premiers** termes :

(a) $(x-2a)^{10}$ **(b)** $(x^3-x)^6$ **(c)** $\left(\sqrt{x}-\dfrac{y}{\sqrt{x}}\right)^6$

42 [Deux derniers termes] Trouver les 2 **derniers** termes :

(a) $(2x-3a)^{12}$ **(b)** $(2x^{-2}-2x^2)^{10}$ **(c)** $\left(\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^6$

43 [Terme donné] Trouver le terme indiqué :

(a) le 20ᵉ terme de $(x+y)^{22}$

(b) le terme ne contenant pas de x dans $\left(2x-\dfrac{4}{x^2}\right)^9$

(c) le terme milieu de $(x-1)^{2m}$ avec $m \in \mathbb{N}^*$

44 [Coefficient] Quel est le coefficient de :

(a) x^3y^3 dans le calcul de $(x-y)^6$ **(b)** x^2y^6 dans le calcul de $\left(4x-\dfrac{y}{2}\right)^8$

45 [Retrouver une valeur] Le coefficient de x^4 dans l'expression $\left(x+\dfrac{2}{k}\right)^6$ est 15. Trouver la valeur de k.

46 [Retrouver une valeur] Pour quelle valeur de C le coefficient du terme central de $(1+Cx)^4$ est égal au coefficient du terme central de $(1-Cx)^6$? Que vaut alors ce coefficient ?

47 [Rapport] La somme du 5ᵉ et 6ᵉ terme de $(a-b)^n$ est nulle. ($n \geq 5$). Que vaut le rapport a/b ?

48 [Une équation pas simple!] Résoudre l'équation : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} C_k^n \cdot 6^{k-1} = 400$

26.3 Problèmes et exercices de synthèse

49 [Chemins] Il existe 6 chemins possibles allant de A à B et 4 chemins allant de B à C. De combien de façons peut-on :

(a) aller de A à C en passant par B ?

(b) aller et revenir de A à C en passant par B ?

(c) aller et revenir de A à C en passant par B et en ne passant qu'une seule fois par le même chemin ?

50 [Sièges voiture] De combien de façons 7 personnes peuvent-elles s'asseoir dans une voiture à 5 sièges si seulement 2 d'entre elles savent conduire ?

51 [Simplification] Simplifier l'expression suivante :

$$\frac{\displaystyle\prod_{i=1}^{n}\big((2i)!+(2i-1)!\big)}{\displaystyle\prod_{i=1}^{n}\big((2i)!-(2i-1)!\big)}$$

52 [Tirage dans une urne] Une urne contient 9 boules numérotées de 1 à 9. Déterminer le nombre de tirages différents si l'on tire 3 boules :

(a) simultanément, c'est-à-dire sans regarder l'ordre d'arrivée ;

(b) successivement, en tenant compte de l'ordre d'arrivée et de manière exhaustive ;

(c) successivement, en tenant compte de l'ordre d'arrivée et en remettant la boule tirée dans l'urne.

53 [Euromillions] Pour gagner au premier rang (le jackpot) à l'Euromillions il faut avoir tracé les 5 bons numéros parmi une grille de 50 numéros ainsi que les deux bonnes étoiles de la chance parmi une grille de 12 étoiles.

(a) Combien de grilles doit-on remplir pour être sûr de gagner au premier rang ?

(b) Combien de grilles possibles peuvent-elles gagner au douzième rang (2 numéros et 1 étoile) ?

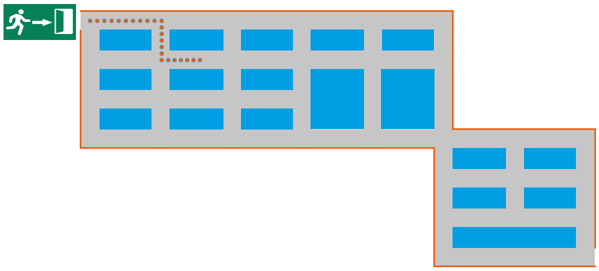
54 [Plaques d'immatriculation] En France, le système des numéros d'immatriculation est entré en vigueur en avril 2009. Les nouvelles plaques, désormais attribuées à vie, comportent sur le fond blanc le numéro, composé d'une série de 7 caractères formée de 2 lettres, 1 tiret, 3 chiffres, 1 tiret, 2 lettres. Les lettres I, O et U du fait de leur trop proche ressemblance avec le 1, le 0 et le V sont interdites ainsi que les séries SS et WW du bloc de gauche et la série SS du bloc de droite. La numérotation des véhicules se fait donc de manière séquentielle de AA-001-AA à ZZ-999-ZZ. Calculer le nombre de plaques autorisées par ce nouveau système.

55 [Feuille Excel] La version d'Excel 2016 comprend des feuilles de calcul composées de lignes, numérotées de 1 à 1 048 576 et de colonnes «numérotées» de A à XFD.

(a) Combien de cellules composent alors une feuille Excel ?

(b) Les premières versions d'Excel étaient composées de 16 384 lignes et de 256 colonnes. Quelle était alors la référence de la dernière cellule ?

56 [Sortie de secours] Combien de façons existe-t-il pour trouver la sortie par le chemin le plus court ?



57 [Marches d'escalier] Pour monter à son appartement, Aline doit emprunter un escalier dont elle monte les 10 marches une à une ou deux par deux. De combien de façons peut-elle gravir ces marches ?

58 [Défi] $\dfrac{99!}{(33!)^3}$ est-ce un nombre entier ?

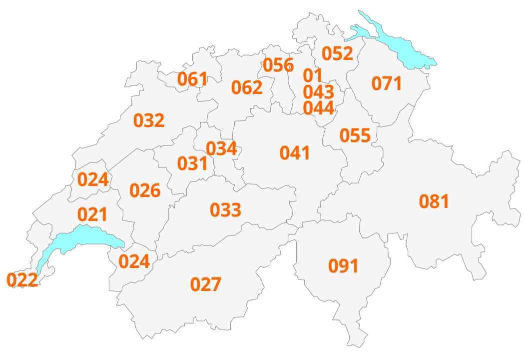
59 [Défi] En Suisse, les numéros de téléphone comprennent un indicatif, par exemple 021, suivi de 7 chiffres. Chez Swisscom, il est possible d'acheter des numéros particuliers appelés «Top Numbers Class A» au prix de 30 000 frs le numéro.

Un tel numéro comporte soit une séquence de 7 à 9 chiffres identiques comme par exemple 021 333 33 33 ou 3 blocs identiques de 3 chiffres comme par exemple 0419 419 419.

Swisscom précise : Les numéros d'appel se terminant par les chiffres 95 à 99 ne sont pas disponibles.

Si tous les numéros Top Numbers Class A sont attribués sur le réseau fixe, combien cela pourrait rapporter à Swisscom ?

La liste des indicatifs du réseau fixe pour la Suisse est donnée ci-après :



Chapitre 27

Introduction aux probabilités

Objectifs du chapitre

- comprendre les différentes approches des probabilités.
- savoir construire des arbres de probabilités ou des diagrammes de Venn afin de calculer les probabilités souhaitées.
- comprendre et appliquer la notion de probabilité conditionnelle.
- de calculer des probabilités à partir d'une table de contingence.

La théorie des probabilités est née de l'étude par les mathématiciens des jeux de hasard. En effet, le mot hasard vient du mot arabe «az-zahr» signifiant dé à jouer. On attribue au mathématicien et philosophe français Blaise Pascal (1623 - 1662) les premières pierres de cet édifice théorique. On doit au mathématicien russe Andreï Kolmogorov (1903 - 1987) une formalisation de la théorie des probabilités.

Il existe principalement 3 approches de la notion de probabilité : **intuitive**, **empirique** et **axiomatique**. Cette dernière formalise et unifie le tout.

27.1 Les différentes approches

27.1.1 L'approche intuitive

Si on lance par exemple un dé non truqué, c'est-à-dire dont chaque face à la même probabilité d'apparition (ou **équiprobable**), alors la probabilité d'obtenir un nombre quelconque, par exemple le 5, est donnée par : $p = \frac{1}{6}$. Quand les événements sont équiprobables, la probabilité p d'un **événement** s'obtient par la formule :

$$p = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

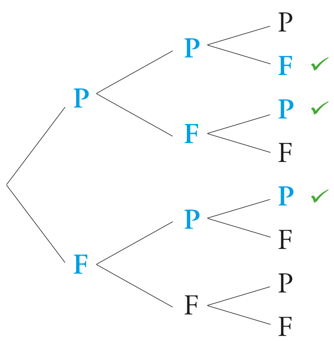
dans le cas d'événements équiprobables

Exemple 27.1

On lance une pièce de monnaie trois fois de suite. Calculer la probabilité d'obtenir exactement 2 fois pile ?

Solution

Cette situation, où les événements sont équiprobables, peut être modélisée à l'aide de l'arbre suivant, où 3 branches sur 8 correspondent à la probabilité cherchée :



$$P = \frac{3}{8} = 0{,}375$$

Remarque

- Les cas favorables peuvent être considérés comme des permutations avec répétitions (**PPF**, **PFP** et **FPP**)
- Les cas possibles peuvent être considérés comme des arrangements avec répétitions (PPP, PPF, etc.. FFF)

$$p = \frac{\overline{P}_3(2)}{\overline{A}_3^2} = \frac{3}{8}$$

Dans certains cas, on définit une probabilité basée sur le rapport de mesures (**probabilité géométrique**).

Probabilité géométrique à une dimension Soit un objet géométrique S à une dimension ayant une longueur finie. Soit A une partie de l'objet S, alors la probabilité de choisir A au hasard est :

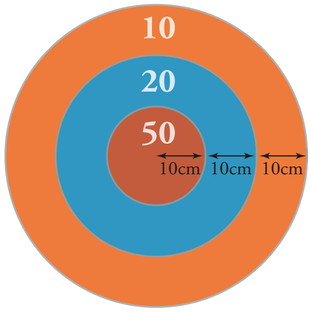
$$P(A) = \frac{\text{Longueur } A}{\text{Longueur } S}$$

Probabilité géométrique à deux dimensions Soit un objet géométrique S à deux dimensions ayant une aire finie. Soit A une partie de l'objet S, alors la probabilité de choisir A au hasard est :

$$P(A) = \frac{\text{Aire de } A}{\text{Aire de } S}$$

Exemple 27.2

Quelle est la probabilité de réaliser 20 points aux fléchettes sur la cible ci-après ?



Solution

La probabilité cherchée correspond au rapport entre la surface bleue sur la surface totale de la cible. L'aire d'un disque étant $\pi \cdot r^2$, on obtient :

$$P(20 \text{ points}) = \frac{\pi \cdot 20^2 - \pi \cdot 10^2}{\pi \cdot 30^2} = \frac{300\pi}{900\pi} = \frac{1}{3}$$

27.1.2 Approche empirique

Une autre façon d'approcher cette notion de probabilité, plus expérimentale cette fois, est la suivante : Considérons une pièce que l'on jette n fois et comptons le nombre k de fois où le côté pile sort. Un simulation à l'aide d'un tableur pourrait être la suivante :

Nombre de lancers n	Nombre k de pile	Fréquence $p = \frac{k}{n}$
10	3	0,3
100	44	0,44
1 000	538	0,538
10 000	4 801	0,4801
100 000	50 864	0,50864

On constate que, lorsque n augmente, et que l'on répète cette expérience de façon identique, la fréquence p se stabilise et tend vers la valeur intuitive et limite 0,5. Ainsi on définit la probabilité empirique au moyen de la formule :

$$p = \lim_{n \to \infty} \frac{k}{n}$$

Exemple 27.3

Un magasin a observé que 300 de ses 500 ventes du mois passé sont d'un montant de moins de 45 frs. Quelle est la probabilité qu'un client choisi au hasard ait effectué un achat de 45 frs ou plus ?

Solution

La probabilité qu'un achat soit inférieur à 45 frs est de $P(M < 45) = \frac{300}{500}$, par conséquent, la probabilité qu'un achat soit supérieur ou égal à 45 frs est :

$$P(M \geq 45) = \frac{200}{500} = 0,4$$

27.1.3 Approche axiomatique

Cette approche plus récente résulte des travaux du mathématicien russe Kolmogorov en 1933. Elle est plus rigoureuse que les deux approches précédentes.

Notion d'événement et d'univers

On appelle **univers** ou **ensemble fondamental** associé à une expérience aléatoire, noté U [1], l'ensemble de toutes les **issues** possibles de cette expérience.

Exemple 27.4

Soit l'expérience consistant à lancer deux fois un dé à 6 faces. On s'intéresse à la somme obtenue. L'univers est alors :

$$U = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

Exemple 27.5

Soit l'expérience aléatoire consistant à lancer une pièce. On s'intéresse aux issues possibles. L'univers est alors :

$$U = \{\text{pile}, \text{face}\} \qquad \text{ou} \qquad U = \{P, F\}$$

Un **événement** A est un sous-ensemble de U. On note un événement par une lettre majuscule. Le sous-ensemble vide $\varnothing$ est appelé **événement impossible** et l'univers U l'**événement certain**.

1. L'univers U est aussi noté E ou encore Ω selon les ouvrages.

Exemple 27.6

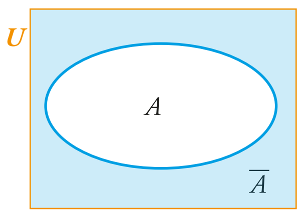
Soit l'expérience consistant à lancer un dé à 6 faces. On s'intéresse à l'événement A =tirer le chiffre 7. Cet événement impossible se note $A = \varnothing$.

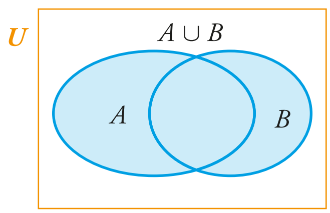
Opérations sur les événements

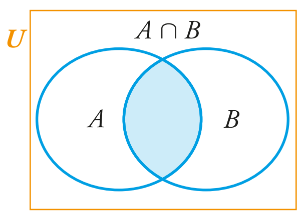
Les principales opérations sur les événements sont les suivantes :

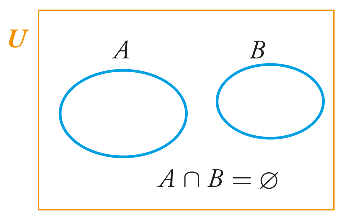
$\overline{A}$	Événement **contraire** ou **complémentaire** à A. Il se réalise chaque fois que A ne se réalise pas.
$A \cup B$	Événement A **ou** B. Il se réalise si A ou B se réalise ou les deux (ou inclusif).
$A \cap B$	Événement A **et** B. Il se réalise si A et B se réalisent en même temps.
$A \cap B = \varnothing$	Événements **incompatibles** ou **mutuellement exclusifs**. Ils ne peuvent se réaliser simultanément.
$A \setminus B$	Événement A moins événement B. L'événement A se réalise mais pas B.

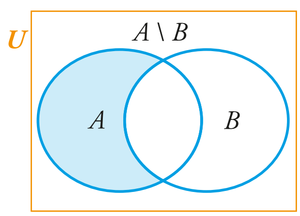
Les diagrammes de Venn (mathématicien anglais, 1834-1923) représentent facilement ces opérations logiques et toutes les propriétés relatives aux ensembles sont applicables aux événements.











Axiomes du calcul des probabilités

À chaque événement A de U, on associe un nombre réel $P(A)$ satisfaisant les axiomes de Kolmogorov :

Axiome 1 la probabilité d'un événement A est un nombre compris entre 0 et 1 :

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

Axiome 2 la probabilité de l'événement certain U est égal à 1.

$$P(U) = 1$$

Par conséquent la probabilité de l'événement impossible est égal à 0 :

$$P(\varnothing) = 0$$

Axiome 3 si A et B sont incompatibles (c'est à dire $A \cap B = \varnothing$), alors :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \qquad \text{si } A \text{ et } B \text{ sont incompatibles}$$

d'une manière générale, si $A_1, A_2, \cdots, A_n$ sont des événements incompatibles 2 à 2, alors :

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \cdots + P(A_n)$$

Quelques propriétés

Des axiomes de Kolmogorov, et des propriétés sur les ensembles, on peut déduire les propriétés suivantes :

1. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
3. $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B)$ Selon la loi de Morgan
4. $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$ Selon la loi de Morgan
5. $P(A \setminus B) = P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$
6. si $A \subseteq B$, alors $P(A) \leq P(B)$

Exemple 27.7

Parmi les 80 femmes qui ont terminé leur formation en économie il y a dix ans, 36 sont aujourd'hui salariées; 39 sont mères de famille; 15 sont salariées et mères de famille. On choisit au hasard une de ces 80 femmes. Considérons les événements :

A la femme choisie est salariée et

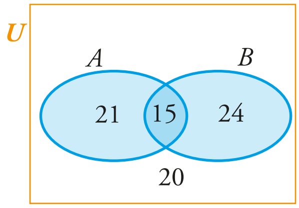
B la femme choisie est mère de famille

Quelle est la probabilité que la femme ne soit ni salariée ni mère de famille ?

Solution

Solution 1 : Utilisation du diagramme de Venn

Le premier nombre placé est 15 qui constitue l'intersection entre A et B, puis on complète ensuite les deux ensembles. On déduit enfin le nombre de femmes qui ne sont ni salariées ni mères de famille, soit $80-60=20$. Ainsi :



$$P(\overline{A\cup B})=\frac{20}{80}=0,25$$

Solution 2 : Utilisation des propriétés

Comme $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{36}{80}+\frac{39}{80}-\frac{15}{80}=\frac{60}{80}=\frac{3}{4}$, donc :

$$P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}=0,25$$

Exemple 27.8

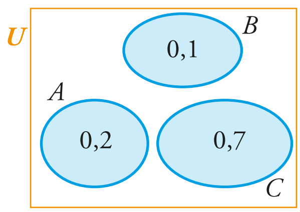
Soit un univers comportant 3 événements mutuellement exclusifs, A, B et C. Si $P(\overline{A})=0,8$ et $P(\overline{B})=0,9$, déterminer $P(\overline{C})$.

Solution

- Comme $P(\overline{A})=0,8$ on a $P(A)=1-0,8=0,2$
- Comme $P(\overline{B})=0,9$ on a $P(B)=1-0,9=0,1$
- Comme $P(A)+P(B)+P(C)=1$ on a $P(C)=1-0,2-0,1=0,7$

Ainsi

$$P(\overline{C})=1-0,7=0,3$$



Exercices d'application de la section 27.1

Exercices faisant appel aux axiomes des probabilités

1 [Axiomes] On donne $P(A \cup B) = 0,2$. Calculer $P(\overline{A} \cap \overline{B})$

2 [Axiomes] 2 événements A et B sont tels que : $P(A) = 1/4$, $P(B) = 1/5$ et $P(A \cup B) = 7/20$. A et B sont-ils indépendants ?

3 [Loi de Morgan] À partir de la loi de Morgan $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, calculer, pour $P(A) = 0,2$ et $P(B) = 0,3$:

(a) $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ si A et B sont deux événements indépendants

(b) $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ si A et B sont deux événements incompatibles

4 [Axiomes] Soit un univers formé de A, B, C et D, 4 événements mutuellement incompatibles tels que :

$$P(B) = \frac{1}{2}P(A) \qquad P(C) = \frac{1}{3}P(B) \qquad P(D) = \frac{1}{2}P(C)$$

Déterminer $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$ et $P(D)$.

5 [Axiomes] 3 événements A, B et C sont tels que : A et B sont incompatibles ; B et C sont indépendants :

$$P(A) = 0,25 \qquad P(A \cup B) = 0,45 \qquad P(B \cap C) = 0,15 \qquad P(A \cup C) = 0,8$$

Calculer :

(a) $P(B)$ **(b)** $P(C)$ **(c)** $P(A \cap C)$ **(d)** $P(\overline{A} \cap \overline{B})$

6 [Axiomes] Calculer $P(B \cap A)/P(A)$ avec $P(A) \neq 0$

(a) si les ensembles A et B sont disjoints.

(b) si l'ensemble A est inclus dans l'ensemble B.

7 [Vente par correspondance] Une société de vente par correspondance offre à ses clients 3 choix de cadeaux :

un stylo, un agenda ou un porte-clés

Si le stylo a deux fois plus de chance d'être choisi que l'agenda et trois fois plus de chance d'être choisi que le porte-clés, trouver la probabilité qu'un client choisisse un stylo ou un agenda.

8 [Cible] A et B tirent sur une cible. B est trois fois meilleur que A. La probabilité que la cible soit atteinte par l'un ou l'autre des tireurs est de $13/16$. Calculer $P(A)$ et $P(B)$.

9 [Tirage de dé] On tire un dé truqué dont la probabilité d'apparition du chiffre i est donné par $i\,k$ (par exemple la probabilité d'apparition du chiffre 4 est $4k$). Quelle est la probabilité de tirer un nombre impair ?

10 [Remise de prix] Trois employés sont nominés pour recevoir un prix. Soit A, B et C les 3 employés. Si A et B ont les mêmes chances de gagner et que chacun a deux fois plus de chances de gagner que C alors trouver la probabilité que B reçoive le prix.

11 [Au moins un] On donne 3 événements indépendants tels que $P(A) = 0,5$, $P(B) = 0,2$ et $P(C) = 0,1$. Quelle est la probabilité qu'au moins un de ces événements se produise ?

Exercices faisant appel aux probabilités géométriques

12 [Distance] On choisit un point au hasard sur une règle de 30 cm de long. Quelle est la probabilité que ce point soit situé à moins de 5 cm du centre de la règle ?

13 [Durée de vie] Les durées de vie de deux équipements A et B sont réparties uniformément entre 10h et 16h, respectivement 13h et 17h. Les équipements sont mis en marche simultanément. Quelle est la probabilité que :

(a) A tombe en panne avant B ?

(b) la somme des deux durées de vie soit au moins égale à 30h ?

14 [Produit de 2 nombres] On choisit au hasard deux entiers naturels x et y dans l'intervalle $[1;3]$. Quelle est la probabilité que le produit des deux nombres choisis soit supérieur à leur somme ?

15 [Moyenne de 2 nombres] On choisit 2 nombres au hasard entre $[0;5]$. Quelle est la probabilité que la moyenne des deux nombres soit supérieure ou égale à 4,

(a) si les deux nombres sont des nombres entiers ?

(b) si les deux nombres sont des nombres réels ?

16 [Cours boursiers] Les cours journaliers à la clôture de 2 actions varient uniformément entre 200 frs et 300 frs pour l'action A et entre 260 frs et 320 frs pour l'action B.

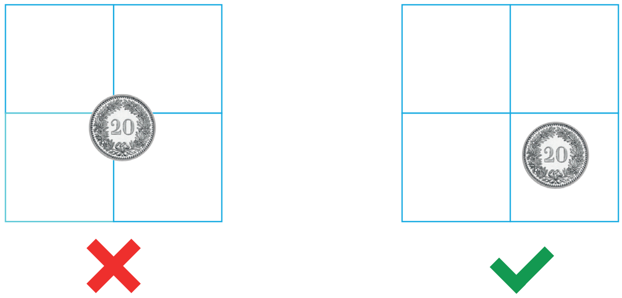
(a) Calculer la probabilité que le cours de l'action B soit plus élevé que le cours de l'action A.

(b) Calculer la probabilité que les deux cours soient simultanément supérieurs à 280 frs.

17 [Entier naturel] On choisit un entier naturel x au hasard dans l'intervalle $[\,1\,;\,100\,]$. Quelle est la probabilité que : $\dfrac{(x-30)(x-50)}{(x-40)} < 0$?

18 [Rendez-vous] Deux collègues se donnent rendez-vous entre 12h00 et 13h00. Ils conviennent que le premier arrivé s'en ira après une attente de 20 minutes au maximum. Quelle est la probabilité que le rendez-vous ait lieu ?

19 [Diamètre] On jette une pièce de 20 cts de diamètre 21 mm sur le sol composé d'un carrelage dont les catelles mesurent toutes 35 mm de côté. Si l'on néglige l'espace de séparation entre ces catelles, quelle est la probabilité que la pièce ne touche pas les séparations ?



Exercices divers

20 [Clés USB] Un magasin d'informatique reçoit un arrivage de 100 clés USB. Par expérience il sait qu'il y a environ 8% de clés défectueuses. Un client vient d'acheter 4 clés USB. Quelle est la probabilité que toutes ces clés soient exemptes de défaut ?

21 [Plaques de voiture] Dans un canton suisse, il y a 500 000 voitures dotées de plaques numérotées de 1 à 500 000. En n'observant que les voitures de ce canton, quelle probabilité a-t-on de voir une voiture dont le numéro de plaque commence par 1 ?

22 [Modèles de voiture] Un centre automobile propose, pour un certain modèle de voiture, une ou plusieurs options. A : le tempomat, B : le dispositif mains libres et C : le GPS. D'après les données recueillies, 90% des clients choisissent au moins une des trois options, 75% en choisissent au moins deux et 45% les prennent toutes les trois. De plus, les trois options prises individuellement, ont, toutes les trois la même popularité. Finalement, tous les groupes possibles de deux options sont choisies par les clients avec la même probabilité. Quelle est la probabilité qu'un client pris au hasard se soit équipé uniquement du tempomat et du GPS ?

23 [Double tirage] Une boîte contient 7 pièces détachées dont 2 en alu et 5 en cuivre. Une autre contient 3 en alu et 2 en cuivre. On choisit une boîte au hasard. On tire une pièce de la boîte et on la met dans l'autre boîte. On tire ensuite une pièce de la seconde boîte. Calculer la probabilité que les deux pièces tirées soient du même métal ?

24 [Personnel] Une petite entreprise se compose de 8 femmes et 10 hommes. On choisit 3 personnes au hasard pour former un comité. Quelle est la probabilité que ces 3 personnes soient des femmes ?

25 [Confession] Dans une localité, 47% des habitants se déclarent adeptes de la religion X, mais 15% seulement pratiquent effectivement cette religion. Quelle est la probabilité, en choisissant un habitant au hasard, qu'il soit un adepte non pratiquant de la religion X ?

26 [QCM] Un questionnaire à choix multiples comporte 3 questions de type vrai/faux. Une seule erreur est acceptée pour réussir ce questionnaire. Quelle est la probabilité de le réussir en répondant au hasard ?

27 [Cartes de crédit] Un magasin accepte les cartes de crédit Visa ou Eurocard. 20% de ses clients ont la carte Visa, 62% la carte Eurocard et 15% les deux. Quel pourcentage de clients possède une carte de crédit acceptée par le magasin ?

28 [Type d'assurance] Dans une entreprise de 400 personnes, 300 sont assurées contre la maladie, 160 contre les accidents et 120 à la fois contre la maladie et les accidents. Si l'on choisit au hasard une personne dans l'entreprise, quelle est la probabilité qu'elle soit assurée :

(a) contre la maladie, mais pas contre les accidents ?

(b) contre la maladie ou les accidents ?

(c) ni contre la maladie ni contre les accidents ?

29 [Étudiants] Des étudiants d'une école ont été interrogés : 9 sont en emploi (**E**), 13 sont de sexe masculin (**M**), 10 sont en première année (**P**), 2 sont des filles en emploi en première année, 3 sont des garçons en emploi en première année, 3 sont des garçons à plein-temps en 2$^{\text{ème}}$ ou 3$^{\text{ème}}$ année, 3 sont des filles à plein-temps en 3$^{\text{ème}}$ année et 3 sont des garçons en emploi en 3$^{\text{ème}}$ année.

(a) Combien de personnes ont été interrogées ?

(b) En choisissant au hasard une personne interrogée, quelle est la probabilité que ce soit un garçon à plein temps en première année ?

30 [Boules] Dans une urne, il y a N boules rouges et P boules noires.

(a) Quelle est la probabilité de tirer une boule rouge au premier tirage ?

(b) Sachant que k boules rouges et aucune boule noire ont déjà été tirées, quelle est la probabilité de tirer une boule rouge (respectivement une boule noire) ?

31 [Boules] Une urne contient n boules dont r sont rouges et les autres jaunes. On enlève p boules rouges de l'urne avant le tirage ($p < r$). On tire une boule. Quelle est la probabilité qu'elle soit jaune ?

32 [Boules] Une urne contient trois boules rouges, deux bleues et 1 verte. Si un groupe de trois boules est tiré au hasard, quelle est la probabilité que celles-ci soient :

(a) toutes de la même couleur ?

(b) toutes de couleurs différentes ?

33 [Pièces conformes] Une boite contient n pièces dont 3 certifiées conforme. On tire 2 pièces aléatoirement. Quelle doit être la valeur de n pour que la probabilité qu'elles soient les deux certifiées conforme soit de 50% :

(a) si le tirage est exhaustif ?

(b) si le tirage est non exhaustif ?

34 [Contamination] À l'hôpital, un individu risque d'être contaminé par deux bactéries B_1 et B_2. Ces deux sources de contamination sont indépendantes mais compatibles entre elles. Au cours d'une journée, la probabilité qu'un individu soit contaminé par la bactérie B_1 est de 0,05 et qu'il le soit par la bactérie B_2 est de 0,08. Quelle est la probabilité que l'individu soit contaminé :

- **(a)** au cours d'une journée ?
- **(b)** au bout de deux jours ?
- **(c)** au bout de n jours ?
- **(d)** À partir de quelle valeur n l'individu a une probabilité d'être contaminé qui dépasse 50% ?

35 [Boules] Une urne contient quatre boules rouges et n boules vertes. On tire successivement et sans remise deux boules de l'urne. La probabilité qu'on ait tiré deux boules de même couleur est $7/15$. Combien de boules vertes étaient dans l'urne ?

36 [Numéro de téléphone] Kenzo compose le numéro de téléphone de sa copine mais a oublié les deux derniers chiffres du numéro. Il se rappelle juste qu'ils sont différents. Quelle est la probabilité qu'il puisse joindre sa copine du premier coup en composant les deux derniers chiffres au hasard ?

37 [Vérité] Fredo dit la vérité 60% du temps tandis que Martin, lui, 70% du temps. Quelle est la probabilité qu'ils disent la même chose à propos d'un même événement ?

27.2 Probabilités conditionnelles

Une probabilité conditionnelle est la probabilité d'un événement sachant qu'un autre événement a eu lieu. Par exemple, si une carte d'un jeu est tirée au hasard, on estime qu'il y a une chance sur quatre d'obtenir un pique; mais si on aperçoit un reflet noir sur la table, il y maintenant une chance sur deux d'obtenir un pique.
Cette seconde estimation correspond à la probabilité conditionnelle d'obtenir un pique sachant que la carte est noire.

Formellement, cette probabilité se notera :

$$P(\text{«Obtenir un pique»}|\text{«la carte est noire»})$$

D'une manière générale, on définira la probabilité conditionnelle de A sachant B (ou A étant donné B) par : [2]

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad \text{si } P(B) \neq 0$$

2. On trouve aussi l'écriture suivante dans la littérature : $P(A/B)$ ou $P_B(A)$.

Exemple 27.9

Dans une entreprise 90% des salariés parlent le français. 10% des salariés parlent français et habitent en Suisse. Calculer, en choisissant au hasard un employé :

(a) la probabilité qu'il habite en Suisse **et** parle français :

(b) la probabilité qu'il habite en Suisse **étant donné** qu'il parle français

Solution

En définissant les événements par :

- A : le salarié parle français et
- B : le salarié habite en Suisse

(a) la probabilité qu'il habite en Suisse et parle français :

$$P(A \cap B) = 0,1$$ donné dans la consigne.

(b) la probabilité qu'il habite en Suisse étant donné qu'il parle français :

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{0,1}{0,9} = \frac{1}{9}$$

Exemple 27.10

On tire deux dés. Quelle est la probabilité que la somme des points obtenus soit supérieure à 5 sachant que les deux dés ont des résultats identiques ?

Solution

Soit les événements :

- A =la somme des deux dés est supérieure à 5
- B =les deux dés indiquent des résultats identiques

Considérons l'univers réduit U composé des 6 résultats identiques :

$$U = \{(1;1), (2;2), (3;3), (4;4), (5;5), (6;6)\}$$

Dans cet univers, la somme des points supérieure à 5 est donnée par les 4 résultats

$$(3;3), (4;4), (5;5), (6;6)$$

Ainsi, la probabilité conditionnelle cherchée s'exprime par :

$$P(A|B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

27.2.1 Événements indépendants

Il se peut que l'information apportée par la réalisation (ou la connaissance) d'un événement B, ne modifie pas la probabilité de réalisation de l'événement A. Dans ce cas,

$$P(A|B) = P(A)$$

On dit que A et B sont **indépendants**. On peut donc définir l'indépendance de deux événements A et B comme suit :

> Deux événements A et B sont indépendants si :
>
> $$P(A) = P(A|B) \qquad \text{ou} \qquad P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Remarques

- Il ne faut pas confondre des événements indépendants et incompatibles. En effet, si A = aimer le foot et B =aimer la musique, alors A et B sont deux événements compatibles (on peut aimer les deux à la fois), mais sont indépendants.
- Les tirages de boules dans une urne illustrent bien la notion de dépendance et d'indépendance.

Diagrammes de Venn : Indépendance et incompatibilité.
Pour mieux comprendre cette notion

Exemple 27.11

Considérons une urne contenant 3 boules blanches et 2 boules noires. Calculer la probabilité que la deuxième boule tirée soit blanche étant donné que la première l'est aussi :

(a) en considérant un tirage sans remise (**exhaustif**)

(b) en considérant un tirage avec remise (**non exhaustif**)

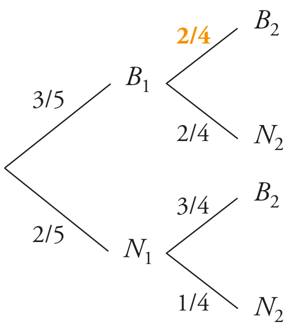
Solution

Soit les événements :

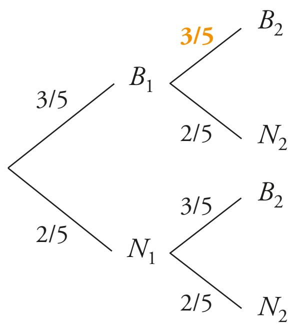
- B_1 la première boule tirée est blanche, et
- B_2 la seconde boule tirée est blanche.

Dans les deux cas, on cherche à calculer $P(B_2|B_1)$. L'aide d'un **arbre probabiliste** est particulièrement adapté dans cette situation.

Tirage sans remise (exhaustif)



Tirage avec remise (non exhaustif)

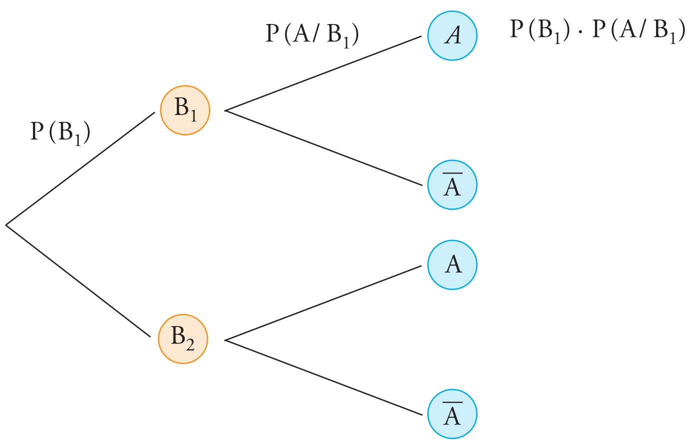


Ainsi, on peut lire directement sur cet arbre :

- si le tirage est sans remise : $P(B_2|B_1) = 2/4$
  la première boule blanche tirée étant sortie de l'urne, il ne reste que 4 boules dont 2 blanches et deux noires. B_2 **dépend** donc du résultat précédent.
- si le tirage est avec remise : $P(B_2|B_1) = 3/5$
  la boule tirée est remise dans l'urne, ce qui ne modifie pas la probabilité de retirer une boule blanche. B_2 **ne dépend** donc **pas** du résultat précédent.

27.2.2 Probabilité totale et formule de Bayes

En observant un arbre probabiliste, on peut mettre en évidence plusieurs probabilités :



- Probabilité **à priori** : $P(B_1)$ ou $P(B_2)$
- Probabilité **conditionnelle** : $P(A|B_1)$ ou $P(\overline{A}|B_2)$, etc.
- Probabilité **jointe** ou **composée** : $P(B_1) \cdot P(A|B_1)$ ou $P(B_2) \cdot P(A|B_2)$, etc.
  Elle est égale au produit des probabilités parcourues le long du chemin concerné.

- Probabilité **totale**, somme de toutes les probabilités jointes composant l'événement A :
$$P(A) = P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2)$$
- Probabilité **à posteriori** (ou probabilité des causes) $P(B_1|A)$. Elle s'obtient au moyen de la **formule de Bayes** (mathématicien britannique 1702 - 1761) :

$$P(B_1|A) = \frac{\text{Probabilité jointe}}{\text{Probabilité totale}} = \frac{P(B_1) \cdot P(A|B_1)}{P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2)}$$

Exemple 27.12

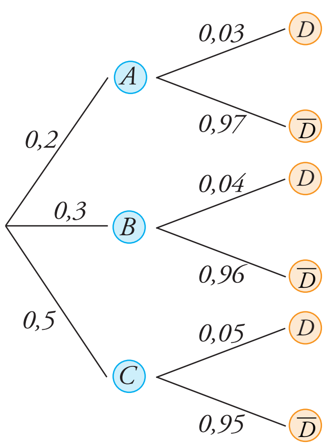
Trois machines A, B et C produisent respectivement 20%, 30% et 50% du nombre total des comprimés fabriqués par un laboratoire pharmaceutique. Chacune de ces machines produit respectivement 3%, 4% et 5% de comprimés défectueux.

(a) On choisit un comprimé au hasard, quelle est la probabilité qu'il soit défectueux ?

(b) On choisit un comprimé au hasard, on constate qu'il est défectueux. Quelle est la probabilité qu'il ait été produit par la machine A ?

Solution

L'arbre probabiliste suivant permet de représenter cette situation :



(a) Selon la formule des probabilités totales on obtient :

$$\begin{aligned} P(D) &= P(A) \cdot P(D|A) + P(B) \cdot P(D|B) + P(C) \cdot P(D|C) \\ &= 0,2 \times 0,03 + 0,3 \times 0,04 + 0,5 \times 0,05 \\ &= 0,043 \end{aligned}$$

probabilité totale (toutes les probabilités menant à D)

(b) On cherche $P(A|D)$. La formule de Bayes donne :

$$P(A|D) = \frac{P(A) \cdot P(D|A)}{P(D)} = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{0,2 \times 0,03}{0,043} \simeq 0,1395$$

27.2.3 Table de contingence

Dans certains cas, une table de contingence permet de résoudre simplement des problèmes de probabilités conditionnelles.

Exemple 27.13

Une entreprise qui dispose des renseignements suivants sur l'âge et le sexe de ses employés, choisit au hasard un employé.

	Homme	Femme	Total
Moins de 30 ans	12	9	21
de 30 à 40 ans	20	18	38
40 ans et plus	17	15	32
Total	49	42	91

(a) Calculer la probabilité que cet employé soit un homme ?

$$P(\text{homme}) = \frac{49}{91} \qquad (U = \text{population totale})$$

(b) Calculer la probabilité que cet employé ait entre 30 et 40 ans ?

$$P(\text{âge entre 30 et 40}) = \frac{38}{91} \qquad (U = \text{population totale})$$

(c) Calculer la probabilité que cet employé soit une femme sachant qu'il a plus de 40 ans ?

$$P(\text{femme}/\text{âge} > 40) = \frac{15}{32} \qquad (U = \text{employés de plus de 40 ans})$$

(d) Calculer la probabilité que cet employé ait moins de 40 ans sachant que c'est un homme ?

$$P(\text{âge} < 40/\text{homme}) = \frac{20+12}{49} = \frac{32}{49} \qquad (U = \text{total des hommes})$$

Exercices d'application de la section 27.2

38 [Conditionnelle] On sait que $A \subset B$. Exprimer les probabilités suivantes de façon simple :

(a) $P(A|B)$ **(b)** $P(B|A)$ **(c)** $P(A|\overline{B})$

39 [Conformité] Une entreprise s'approvisionne d'une pièce d'horlogerie particulière de deux fournisseurs X et Y. Cette pièce est expédiée en lot de 400 unités et chaque pièce est contrôlée à la réception à l'aide d'un instrument de mesure. Ce contrôle conduit à deux résultats possibles : la pièce est conforme ou la pièce n'est pas conforme. Les résultats du contrôle de deux lots de pièces sont présentés dans le tableau suivant :

	Pièce conforme (C)	Pièce non conforme (NC)	Total
Fournisseur X	360	40	400
Fournisseur Y	340	60	400
Total	700	100	800

Malheureusement, après le contrôle, toutes les pièces sont mélangées dans le même compartiment. Si une pièce est tirée au hasard de ce compartiment, déterminer :

(a) la probabilité d'obtenir une pièce non conforme

(b) la probabilité que la pièce prélevée provienne du fournisseur Y

(c) la probabilité de prélever une pièce du fournisseur X qui est conforme

(d) la probabilité de prélever une pièce conforme sachant qu'elle provient du fournisseur X

40 [Jetons] On dispose de 200 jetons ronds ou carrés, blancs ou noirs. On sait que 40% des jetons sont blancs et que 18 jetons sont ronds et noirs.

(a) On choisit au hasard 1 jeton. Il est noir. Quelle est la probabilité qu'il soit rond ?

(b) On sait que 60% des jetons blancs sont ronds. Quelle est la probabilité qu'un jeton rond soit blanc ?

41 [Naissance] 98% des bébés survivent à l'accouchement. Cependant, 15% des naissances nécessitent une césarienne et lorsqu'une césarienne est pratiquée, les bébés survivent dans 96% des cas. Si une femme enceinte choisie aléatoirement ne fait pas de césarienne, quelle est la probabilité que son bébé survive ?

42 [Tricherie] On lance deux dés. Le vainqueur est le premier qui obtient un double six. À priori, la probabilité que votre adversaire soit un tricheur est p. Il commence et obtient un double six. Déterminer a posteriori la probabilité que ce soit un tricheur.

43 [Propriétaires] Dans une ville, 50% des familles sont propriétaires, 75% possèdent une voiture et 30% sont propriétaires et possèdent une voiture. Si on choisit une famille au hasard, trouver la probabilité que cette famille :

(a) possède une voiture si elle est propriétaire.

(b) ne soit pas propriétaire, si elle ne possède pas de voiture.

(c) ne possède pas de voiture, si elle n'est pas propriétaire.

44 [Contrat] Un assureur vous propose un contrat pour une nouvelle police. La probabilité que vous signez est de 20%. Si vous ne signez pas, l'assureur vous propose de revenir avec une nouvelle variante parfaitement adaptée à vos besoins. Dans ce cas, la probabilité que vous signiez est de 30%. Calculez :

(a) la probabilité qu'un contrat soit conclu ?

(b) la probabilité qu'un contrat soit conclu étant donné que vous avez refusé le contrat lors de la première visite ?

(c) la probabilité que vous ayez refusé le contrat la première fois étant donné qu'un contrat a été conclu ?

45 [Diabète] Une population comporte autant d'hommes que de femmes. Dans cette population, 16% des personnes sont diabétiques, dont le quart sont des femmes. Un homme est choisi au hasard dans cette population, quelle est la probabilité qu'il soit diabétique ?

46 [Relecture] 4 étudiants (A, B, C et D) relisent leur exposé effectué en commun. A ne laisse passer que 2% d'erreurs d'orthographe, B : 1%, C : 3% et D : 2%. La répartition du travail a été la suivante : A : 20%, B : 40%, C : 10% et D : 30%. Dans une page imprimée, on trouve une faute d'orthographe. Quelle est la probabilité que cette page ait été lue par A ?

47 [Rigour/Rigor] Les Anglais et les Américains orthographient le mot rigueur, respectivement, rigour et rigor. Un homme ayant pris une chambre dans un hôtel parisien a écrit ce mot sur un bout de papier. Une lettre est prise au hasard dans ce mot, c'est une voyelle. Or 40% des anglophones de l'hôtel sont des Anglais et les 60% restants sont Américains. Quelle est la probabilité que l'auteur du mot soit anglais ?

48 [Gains hommes/femmes] Lors d'un sondage sur des couples mariés, on a établi qu'il y avait une proportion A d'hommes gagnant plus de 50 000 frs et une proportion B de femmes gagnant moins de 50 000 frs. On a également établi qu'il y avait une proportion C de couples dont le mari et la femme gagnent moins de 50 000 frs. On interroge une femme qui dit gagner plus de 50 000 frs, quelle est alors la probabilité que son mari gagne également plus de 50 000 frs ? (utiliser une table de contingence).

49 [Arrosage] Avant de partir en vacances Léon demande à Mathilda de bien vouloir arroser sa plante verte. Sans arrosage, elle mourra avec la probabilité de $5/6$; avec arrosage, elle mourra avec une probabilité de $1/3$. Léon est sûr à 75% que Mathilda l'arrosera.

(a) Quelle est la probabilité que la plante soit vivante à son retour ?

(b) Si, à son retour, la plante est encore vivante, quelle est la probabilité que Mathilda ait oublié de l'arroser ?

50 [Conditions climatiques] Le tableau ci-dessous présente les résultats d'une série d'essais effectués à l'extérieur sous diverses conditions climatiques pour vérifier la fiabilité d'un système de détection comportant des caméras vidéo :

	Ensoleillé	Nuageux	Pluie
Intrus détectés	50	200	250
Intrus non détectés	0	6	4

(a) S'il pleut, quelle est la probabilité que l'intrus ne soit pas détecté ?

(b) Le système ne détecte pas d'intrus. Quelle est la probabilité que le temps soit nuageux ?

51 [Mauvais payeurs] La clientèle d'un magasin est composée d'une proportion α d'hommes. Dans cette même clientèle totale, on trouve une proportion β de mauvais payeurs. Heureusement qu'il y a quand même une proportion γ d'hommes bons payeurs. On choisit une facture au hasard. À l'aide d'une table de contingence, quelle est la probabilité que le client soit une femme, sachant que ce client a payé sa facture à la livraison ?

52 [Groupes de personnes] Dans le cadre d'une enquête, on répartit les individus d'une population en 3 groupes : 30 dans le groupe A, 10 dans le B et 10 dans le groupe C. Pendant 50 jours, on examine chaque jour une personne différente, choisie au hasard dans cette population.

(a) Le premier jour, la personne examinée a été prise dans le groupe A. Quelle est la probabilité que le jour suivant elle ne soit pas choisie dans ce même groupe ?

(b) Sachant que les 10 premières personnes examinées ont été choisies dans le groupe A, quelle est la probabilité que la $11^{\text{ième}}$ personne examinée ne soit pas choisie dans ce même groupe ?

53 [Couleur des yeux] Soit le tableau suivant indiquant la couleur des yeux d'un échantillon de 6 élèves (B =Bleus et N =Noirs). Calculer $P(B/F)$ et $P(H/B)$

Prénom	Sexe	Couleur des yeux
Bernadette	F	B
Jean-Pierre	H	B
Marc	H	N
Marie	F	N
Pierre	H	N
Sophie	F	B

54 [Ski versus tennis] Dans une enquête de population, on constate que 42% des individus n'ont jamais fait de ski, que 58% n'ont jamais fait de tennis, mais que 29% ont déjà fait du ski et fait du tennis. A-t-on plus de chances de rencontrer quelqu'un qui n'ait jamais fait du ski parmi ceux qui n'ont jamais fait de tennis ou quelqu'un qui ait déjà fait du tennis parmi ceux qui ont déjà fait du ski ?

27.3 Problèmes et exercices de synthèse

55 [Dessin] Célia m'a emprunté une feuille de 20 cm par 30 cm sur laquelle elle a peint 360 cm^2 de bleu, puis 420 cm^2 de rouge et enfin 360 cm^2 de jaune. En me rendant son dessin, je constate qu'il y a 60 cm^2 de vert, 60 cm^2 de violet, 60 cm^2 d'orange et enfin 210 cm^2 de marron. Quelle est la probabilité qu'en pointant au hasard du doigt une zone de ce dessin, je tombe sur une surface encore blanche ?

56 [Test médical] On souhaite mettre en place un nouveau test diagnostique afin de déceler une maladie. On définit alors les événements suivants : T : Le test est positif et M : la maladie est présente. On appelle S_e, la sensibilité du test : $P(T|M)$ et S_p la spécificité du test : $P(\overline{T}|\overline{M})$. La situation est idéale quand $S_e = S_p = 1$.

(a) Quelle est la probabilité que le test apporte une conclusion juste ?

(b) Quelle est la probabilité de prédire la présence d'une maladie quand le test est positif si $P(M) = 0,1$ et $S_e = 0,95$ et $S_p = 0,92$?

57 [Batterie] La probabilité que la batterie d'une voiture neuve fonctionne plus de 10 000 km est de 80%, la probabilité qu'elle fonctionne plus de 20 000 km est de 40% et la probabilité qu'elle fonctionne plus de 30 000 km est de 10%. Si la batterie d'une voiture neuve fonctionne toujours après 10 000 km, quelle est la probabilité :

(a) que sa durée de vie dépasse 20 000 km ?

(b) que sa durée de vie supplémentaire dépasse 20 000 km ?

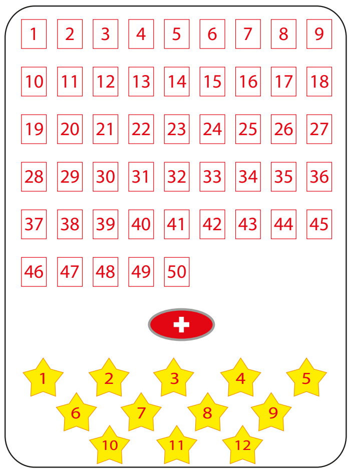
58 [Euro Millions] Au jeu de l'Euro Millions, on doit cocher 5 numéros parmi 50 et 2 étoiles parmi 12. Selon le nombre de numéros et d'étoiles trouvés, on gagne à des rangs différents. Selon le tableau ci-après,

(a) quelle est la probabilité de gagner au premier rang ?

(b) quelle est la probabilité de gagner au 9$^{\text{ème}}$ rang ?

Catégorie des gains

Rang	Numéros trouvés	Etoiles trouvées
1	5	2
2	5	1
3	5	0
4	4	2
5	4	1
6	3	2
7	4	0
8	2	2
9	3	1
10	3	0
11	1	2
12	2	1
13	2	0



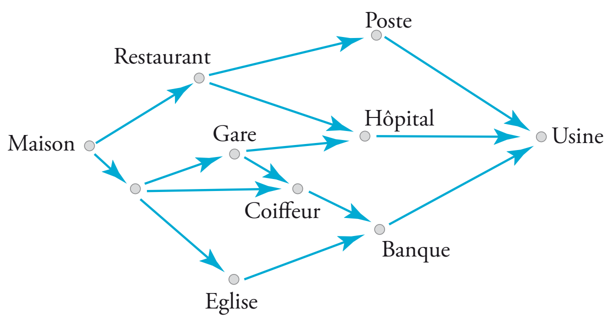
59 [Nombre réel] Si λ est un nombre réel pris aléatoirement dans l'intervalle $[-20\,;\,0]$, quelle est la probabilité que le graphe de la fonction $f(x) = 16x^2 + 8(\lambda+5)x - (7\lambda+5)$ passe au dessus de l'axe des x sans jamais le toucher ?

60 [Guichet] Au seul guichet ouvert ce jour là à la poste, il y a 50 personnes qui attendent. Dans cette file d'attente se trouvent 2 apprentis. Quelle est la probabilité que ces deux apprentis :

(a) soient tous les deux parmi les 10 prochaines personnes à être servies ?

(b) soient séparés par 10 personnes exactement ?

61 [Trajet] Pour se rendre à l'usine, Martin choisit chaque jour son trajet de façon aléatoire sans revenir sur ses pas et en suivant le sens des flèches.



(a) Quelle est la probabilité qu'il passe par la gare et l'hôpital ?

(b) Quelle est la probabilité qu'il passe par la gare ou l'hôpital ?

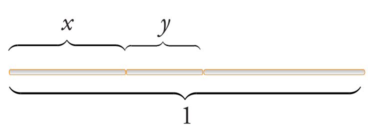
(c) Étant donné qu'il est passé chercher des sous à la banque, quelle est la probabilité qu'il soit alors aussi passé par la gare ?

62 [Roulette russe] Six personnes sont assises autour d'une table avec un revolver à 6 coups. La première personne met une balle dans le barillet, le fait tourner et se tire dans la tempe. Si elle se tue, le «jeu» est terminé. Sinon, la deuxième personne met une balle dans le barillet... ceci jusqu'à la dernière personne qui à son tour met une balle dans le barillet et se tire dans la tempe.

(a) Quelle est la place la moins risquée ?

(b) Quelle est la place la plus risquée ?

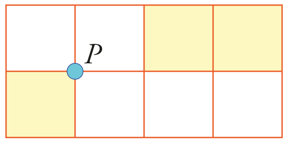
63 [Baguette] Une baguette de bois de longueur 1 est sectionnée en deux endroits. Quelle est la probabilité qu'avec les morceaux on puisse former un triangle ?



Indice : On forme un triangle ABC si les conditions suivantes sont remplies :

$$\overline{AB} + \overline{BC} > \overline{AC}$$
$$\overline{BC} + \overline{AC} > \overline{AB}$$
$$\overline{AC} + \overline{AB} > \overline{BC}$$

64 [Rectangles] On dessine des rectangles jaunes de façon aléatoire dans cette grille :



(a) Quelle est la probabilité qu'un rectangle ainsi dessiné ait un angle au point P (de coordonnées $(1;1)$) ?

(b) Quelle est la probabilité qu'un rectangle ainsi dessiné ait un angle au point P (de coordonnées $(1;1)$) si la grille comporte 32 cases (4 lignes et 8 colonnes) ?

65 [Urne et boules] Une urne contient 70 boules, dont x sont bleues et toutes les autres rouges. On tire simultanément et au hasard 2 boules de l'urne.

(a) Quelle est la probabilité de tirer 2 boules de couleurs différentes ?

(b) Pour quelle valeur de x cette probabilité est maximale ?

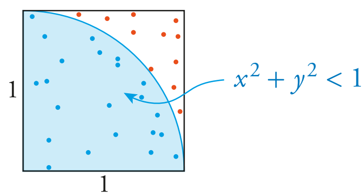
66 [Au moins..] On donne n événements indépendants $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tels que :

$$P(A_i) = \frac{1}{1+i} \qquad \text{pour } i = 1, 2, 3, \ldots, n$$

Quelle est la probabilité qu'au moins un événement se produise ?

67 [Équation quadratique] Une école a mis en place un système d'évaluation mathématique par QCM entièrement informatisé et automatique. Parmi les différents items, il y en a un de type VRAI/FAUX qui demande à l'élève : «L'équation du second degré suivante : $ax^2 + bx + c = 0$ est-elle résolvable dans $\mathbb{R}$?» Le système est conçu pour générer au hasard des valeurs entières de -100 à 100 pour chaque paramètre a, b et c. Estimer la probabilité que l'équation soit résolvable dans $\mathbb{R}$ au moyen d'une simulation de 5 000 essais.

68 [Méthode de Monte-Carlo] Avec la fonction `ALEA()`, simuler 5 000 points au hasard dans un carré de côté 1.



(a) Quelle est la probabilité qu'un point appartienne à la zone en bleu ?

(b) Trouver une valeur approximative pour π.

69 [Défi] Dans une classe de 30 élèves, quelle est la probabilité pour que deux élèves au moins soient nés le même jour ?

70 [Défi] Question tirée d'un entretien d'embauche chez Google : D'après un sondage, 70% des gens aiment le café, et 80% aiment le thé. Quelles sont les limites supérieures et inférieures pour la proportion de gens qui aiment à la fois le café et le thé ?

Chapitre 28

Variables aléatoires discrètes

Objectifs du chapitre

- savoir établir une loi de probabilité discrète.
- savoir calculer l'espérance et la variance d'une loi de probabilités.
- comprendre et appliquer la notion d'espérance mathématique.
- savoir effectuer une transformation affine.
- connaître et utiliser les principales lois usuelles.
- savoir associer une expérience aléatoire à une variable aléatoire usuelle.

Ce chapitre est à mettre en rapport avec les variables statistiques. Les fréquences f_i sont ici considérées comme des probabilités et se notent p_i. Les représentations graphiques, les mesures de tendance centrale ou de dispersion, s'établissent de façon identique.

28.1 Généralités

28.1.1 Définitions

Une expérience aléatoire dont les résultats possibles sont des nombres réels est appelée **variable aléatoire**. Une variable aléatoire qui peut prendre un nombre fini de valeurs $(0; 1; 2; \cdots)$ est appelée variable aléatoire **discrète**.

Une variable aléatoire qui, par contre, peut prendre n'importe quelle valeur numérique dans un intervalle ou une suite d'intervalles est appelée variable aléatoire **continue**. L'étude des variables aléatoires continues est abordée dans le chapitre suivant.

Habituellement, on désigne une variable aléatoire par une lettre majuscule X, Y, etc.. et ses valeurs par la même lettre mais en minuscule.

Exemple 28.1

Considérons un élève qui doit réussir 3 modules pour «passer» l'année. On peut définir la variable aléatoire X comme le nombre de modules réussis. Cette variable aléatoire peut prendre les valeurs possibles $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$ ou $x_4 = 3$.

Le tableau ci-après représente quelques exemples de variables aléatoires discrètes :

Expérience	Variable aléatoire X	Valeurs possibles de X
Téléphoner à 10 clients	Nombre de réponses	$0, 1, 2, \cdots, 10$
Inspecter 100 articles	Nombre d'articles défectueux	$0, 1, 2, \cdots, 100$
Sondage clientèle	Sexe du client	1=homme ; 2=femme

28.1.2 Loi de probabilité

Soit X une variable aléatoire. La fonction qui à toute valeur prise par la variable aléatoire lui associe la probabilité est appelée loi de probabilité. On note cette fonction sous l'une ou l'autre des formes ci-après :

$$P(X = x_i) \quad \text{ou} \quad P(x_i) \quad \text{ou} \quad p_i \quad \text{ou encore simplement} \quad p(x)$$

En général, la loi de probabilité d'une variable aléatoire prenant un nombre limité de valeurs est donnée sous la forme d'un **tableau** :

X	x_i	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n
$P(X = x_i)$	p_i	p_1	p_2	p_3	$\cdots$	p_n

Une loi de probabilité peut être également définie au moyen d'une **formule** mathématique, comme par exemple :

$$P(X = k) = \frac{k}{21} \qquad \text{avec } k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

Exemple 28.2

Soit la variable aléatoire X représentant le nombre de «pile» apparaissant en lançant 2 fois une pièce de monnaie. Définir cette loi de probabilité.

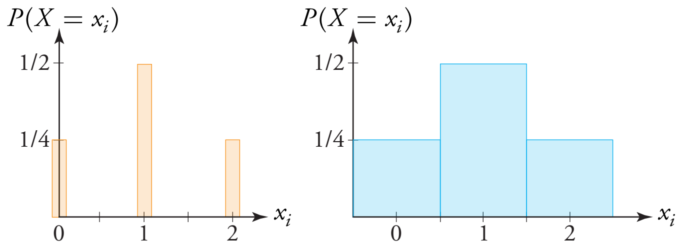
Solution

- L'événement $X = 0$ est $\{FF\}$
- L'événement $X = 1$ est $\{PF\}$ ou $\{FP\}$
- L'événement $X = 2$ est $\{PP\}$

La loi, ou fonction de probabilité est donc définie par :

X	x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	p_i	$1/4$	$2/4$	$1/4$

Le graphique associé à une loi de probabilité est appelé **histogramme** et se représente par l'une ou l'autre des formes ci-après :



Comme en statistiques descriptives on a bien :

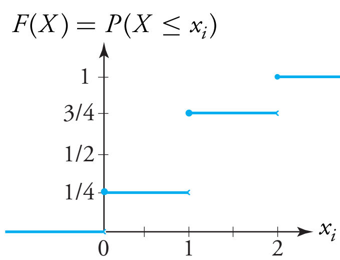
$$\sum_{i=1}^{n} p_i = p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_n = 1$$

28.1.3 Fonction de répartition

La fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète est la fonction définie par :

$$F(x_i) = P(X \leq x_i) \quad \text{ou aussi} \quad F(X) \quad \text{ou encore simplement} \quad F(x)$$

Le graphique associé à une fonction de répartition est appelé **courbe cumulative** ou **fonction de répartition**. Elle correspond à la courbe des fréquences cumulées en statistiques descriptives. Par rapport à l'exemple précédent, on obtient :



La fonction de répartition dispose des propriétés suivantes :

1. Elle est comprise entre 0 et 1 : $0 \leq F(X) \leq 1$
2. Elle est croissante
3. $P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F(b) - F(a)$

28.1.4 Espérance mathématique

Soit X une variable aléatoire comportant n valeurs $x_1, x_2, \cdots, x_n$ avec les probabilités respectives $p_1, p_2, \cdots, p_n$. L'**espérance mathématique** ou **moyenne** est définie selon la même approche qu'en statistiques descriptives :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 + \cdots + p_n x_n$$

Utilisation de l'espérance mathématique

Indicateur de chance ou de risque moyen

L'espérance mathématique est une valeur numérique permettant de mesurer le degré d'équité d'un jeu de hasard. Elle est égale à la somme des gains et des pertes pondérés par les probabilités correspondantes.

Exemple 28.3

À la roulette, si vous jouez un numéro plein, vous avez 1 chance sur 37 (les numéros vont de 0 à 36) de toucher 35 fois votre mise initiale. Calculer l'espérance de gain brut en misant 10 frs.

Solution

La loi de probabilité X est donnée par :

x_i	-10	350
p_i	$36/37$	$1/37$

Ainsi :

$$E(X) = \frac{36}{37} \times (-10) + \frac{1}{37} \times 350 \simeq -0,27$$

Ce score indique qu'en moyenne, vous perdrez 27 centimes pour une mise de 10 frs au casino. Lorsque l'espérance de gain du casino et celle du joueur est égale, on dit que le jeu est **équitable**.

Outil servant au calcul de primes

Dans le secteur de l'assurance de santé ou de l'assurance-vie, l'espérance mathématique correspond au prix moyen ou à la prime moyenne à payer.

Exemple 28.4

Une compagnie d'assurance s'engage à verser 100 000 frs si un assuré de 18 ans décède durant l'année. Quelle prime le preneur d'assurance doit-il payer si sa probabilité annuelle de survie est de $p = 0,996$?

Solution

Cette situation peut être représentée par la loi de probabilité suivante :

x_i	0	100 000
p_i	0,996	0,004

La prime de cette assurance peut alors s'exprimer par :

$$\text{Prime} = E(X) = 0 \times 0,996 + 100\,000 \times 0,004 = 400 \text{ frs}$$

Ce prix est équitable. En effet, d'un point de vue du gain de l'assureur, on a bien :

	Assuré décédé	Assuré en vie
x_i	−99 600	400
p_i	0,004	0,996

D'où l'espérance de gain de l'assureur :

$$E(X) = -99\,600 \times 0,004 + 400 \times 0,996 = 0$$

28.1.5 Variance et écart-type

La **variance** $V(X)$ et l'**écart-type** $\sigma(X)$ d'une variable aléatoire X se définissent par analogie à la variance d'une variable statistique :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i[x_i - E(X)]^2 \qquad \text{et} \qquad \sigma(X) = \sqrt{V(x)}$$

✎ Il est souvent plus simple d'utiliser la formule de König pour calculer la variance :

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$\text{avec } E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 = p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 + p_3 x_3^2 + \cdots + p_n x_n^2$$

Exemple 28.5

Une expérience consiste à tirer trois fois de suite une pièce de monnaie bien équilibrée. On note X le nombre de faces obtenues. Calculer l'espérance et la variance du nombre de faces.

Solution

On forme le tableau suivant :

x_i	p_i	$p_i x_i$	$p_i x_i^2$
0	1/8	0	0
1	3/8	3/8	3/8
2	3/8	6/8	12/8
3	1/8	3/8	9/8
$\sum$	1	3/2	3

Ainsi :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{4} p_i x_i = \frac{3}{2} \qquad \text{et} \qquad E(X^2) = \sum_{i=1}^{4} p_i x_i^2 = 3$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 3 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

Remarque

Comme en statistiques descriptives, la notion de variance et d'écart-type donne une idée de la dispersion des valeurs prises par la variable aléatoire autour de son espérance mathématique.

28.1.6 Transformation affine

Soit X une variable aléatoire admettant une espérance et une variance. Alors pour tout $a; b \in \mathbb{R}$, la variable aléatoire $Y = aX + b$ ou $y_i = ax_i + b$ admet une espérance, une variance et un écart type définis par : [1]

$$E(Y) = E(aX + b) = a \cdot E(X) + b$$
$$V(Y) = V(aX + b) = a^2 \cdot V(X)$$
$$\sigma(Y) = \sigma(aX + b) = |a| \cdot \sigma(X)$$

1. On retrouve les mêmes propriétés vues en statistiques descriptives.

Exemple 28.6

Soit X une variable aléatoire d'espérance $E(X) = 10$ et de variance $V(X) = 9$, calculer l'espérance, la variance et l'écart-type de Y définie par : $Y = -5X + 2$

Solution

$$E(Y) = E(-5X + 2) = -5 \times 10 + 2 = -48$$
$$V(Y) = V(-5X + 2) = (-5)^2 \times 9 = 225$$
$$\sigma(Y) = \sigma(-5X + 2) = |-5| \times 3 = 15$$

Variable aléatoire centrée réduite

La transformation linéaire suivante permet d'obtenir une variable aléatoire **centrée** (c'est-à-dire d'espérance nulle) et **réduite** (c'est-à-dire de variance égale à 1) :

$$Y = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$$

Exemple 28.7

Soit X une variable aléatoire d'espérance $E(X) = 100$ et de variance $V(X) = 25$. Quelle transformation linéaire permet d'obtenir une variable aléatoire centrée réduite ?

Solution

On applique la transformation linéaire suivante :

$$Y = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)} = \frac{X - 100}{5}$$

Cette transformation joue un rôle important dans les calculs des probabilités liés à la loi normale ainsi qu'en inférence statistique.

Exercices d'application de la section 28.1

1 [Type de VA] Les variables aléatoires suivantes sont-elles discrètes ou continues ?

(a) Le poids d'un morceau de viande en grande surface

(b) Le temps pour relier Lausanne à Genève

(c) Le nombre de personnes dont le groupe sanguin est de type AB

(d) Le nombre de clients arrivant au guichet entre 10h et 10h30

(e) Le nombre d'heures d'ensoleillement annuel à Crans-Montana

(f) La distance parcourue par un piéton en une journée

2 [Espérance] Soit une variable aléatoire définie par :

x_i	p_i
2	n
4	$3n$
6	0,2

(a) Calculer $P(X=4)$

(b) Calculer $E(X)$

3 [Différentes probabilités] On donne la loi de probabilité suivante de X :

x_i	0	1	2	3	4	5	6
p_i	0,05	0,1	0,2	0,25	0,2	0,15	0,05

Établir la fonction de répartition puis calculer :

(a) $P(X \leq 4)$

(b) $P(2 \leq X \leq 5)$

(c) $P(X < 5 | X \geq 1)$

(d) $P(X < 5 | X \leq 4)$

4 [Fonction de répartition] Soit la fonction de répartition X donnée par :

$$F(X) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ 0,2 & \text{si } -1 \leq x < 3 \\ 0,4 & \text{si } 3 \leq x < 7 \\ 0,9 & \text{si } 7 \leq x < 10 \\ 1 & \text{si } x \geq 10 \end{cases}$$

(a) Représenter graphiquement la fonction de répartition et l'histogramme.

(b) Déterminer la loi de probabilité de X.

5 [Loi de probabilité] On donne une loi de probabilité sous la forme :

$$P(X = x_i) = \alpha(x_i - 1) \qquad \text{pour } x_i = 3, 4, 5.$$

(a) Déterminer la valeur de α.

(b) Réécrire la loi de probabilité.

6 [Espérance et variance] Soit une variable aléatoire X définie pour les 3 valeurs suivantes : $x = 3, 4, 5$ et par la loi de probabilité :

$$P(X = x) = \frac{x^2}{c}$$

(a) Déterminer la valeur de c puis exprimer la loi de probabilité sous la forme d'un tableau.

(b) Calculer l'espérance mathématique ainsi que la variance de X.

7 [Variance minimale] Les valeurs suivantes ont toutes la même probabilité d'apparition.

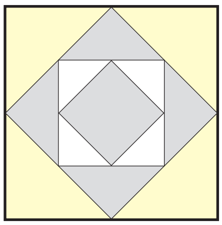
6	8	x	16

(a) Déterminer $E(X)$ et $V(X)$ de cette loi de probabilité.

(b) Quelle valeur faut-il donner à x pour que la variance soit minimale ?

(c) Que valent alors $E(X)$ et $V(X)$?

8 [Cible] La cible carrée suivante représente un jeu dans lequel une fléchette rapporte deux points si elle tombe dans une partie grise et 1 point partout ailleurs. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X représentant le nombre de points obtenus à ce jeu.



9 [Retrouver les valeurs] On donne la loi de probabilité suivante :

x_i	1	2	6
p_i	a	b	c

Déterminer les valeurs des probabilités a, b et c de telle sorte que $E(X) = V(X) = 2$.

10 [Transformation affine] Soit une variable aléatoire X telle que $E(X) = 10$ et $V(X) = 100$. Calculer

(a) $E(2X+3)$

(b) $V(5X-2)$

11 [Transformations] Une variable aléatoire X a une loi de probabilité définie par : $P(X=-1) = 0,2$, $P(X=1) = 0,5$ et $P(X=2) = 0,3$. Calculer :

(a) $E(X)$

(b) $E(X^2)$

(c) $E(2X+3)$

(d) $E(3X^2-1)$

(e) $V(X)$

(f) $E(1/X)$

12 [Loi de probabilité] Une variable aléatoire X a une fonction de répartition donnée par :

$$F(x) = 1 - \left(1 - \frac{x}{4}\right)^x \qquad \text{pour } x = 1, 2, 3, 4$$

(a) Déterminer la loi de probabilité de X.

(b) Calculer son espérance et sa variance.

(c) Calculer $P(X > E(X))$.

13 [Fonction de répartition] On donne la fonction de répartition suivante d'une variable aléatoire X :

X	0	1	2	3	4	5	6	7
$F(X)$	0,05	0,2	0,38	0,6	0,78	0,89	0,97	1

(a) $P(X \leq 4)$

(b) $P(X = 3)$

(c) $P(X \geq 4)$

(d) $P(3 < X \leq 6)$

(e) $P(2 \leq X < 5)$

(f) $P(X < 2 | X < 5)$

14 [Loi de probabilité] Une variable aléatoire Y est définie par :

$$P(Y = n) = np \qquad \text{pour } n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

(a) Déterminer la loi de probabilité de Y.

(b) Déterminer la variance de Y.

(c) Déterminer $E(Y/2)$.

15 [Gain net] Un jeu consiste à tirer au hasard une carte dans un jeu de 36 cartes. Un joueur mise une somme de 1 fr avant de tirer la carte.

- Si le joueur tire un as, il gagne 5 fois sa mise.
- Si le joueur tire un roi, il gagne 2 fois sa mise.
- Si le joueur tire une dame ou un valet, il gagne sa mise.
- Si le joueur tire une autre carte, il perd sa mise.

(a) Calculer l'espérance de gain brut d'un joueur.

(b) Calculer l'espérance de gain net d'un joueur.

(c) Ce jeu est-il équitable ?

16 [Tombola] Pour fêter le départ en retraite d'un employé, une entreprise décide d'organiser une petite tombola. Elle confectionne 100 billets, comprenant 1 billet d'une valeur de 100 frs, 4 billets de 10 frs, 10 billets de 5 frs et 20 billets de 2 frs. Tous les autres billets ne gagnent aucun prix.

(a) Quelle est l'espérance de gain à cette tombola ?

(b) Si l'entreprise a vendu tous les billets au prix de 5 frs, quelle est la valeur du cadeau qu'elle pourra offrir au départ en retraite de l'employé ?

17 [Boites défectueuses] Une usine fabrique 1000 boites de médicaments par heure. Le nombre X de boites défectueuses produites par heure a été mesuré empiriquement par la loi de probabilité suivante :

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0,3	0,1	0,2	0,2	0,1	0,1

Calculer l'espérance du nombre de boites défectueuses.

18 [Rupture de stock] Une entreprise fabrique des masques de protection. Sur le marché, la demande de masques de protection (en milliers d'unités) est une variable aléatoire X définie par :

x_i	1	2	3	4	5
p_i	$6a$	$4a$	$2a$	$2a$	a

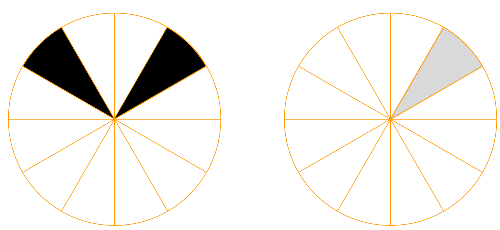
(a) Calculer la valeur de a.

(b) Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

(c) Si l'entreprise dispose d'un stock de 3 000 masques de protection, quelle est la probabilité qu'il y ait rupture de stock ?

19 [Assurance-vie] Une assurance-vie prévoit un paiement en cas de vie de 250 000 frs à un assuré s'il est en vie à 65 ans ou un capital en cas de décès de 400 000 frs s'il décède avant ses 65 ans. Calculer, pour cette combinaison appelée assurance mixte, la prime que paiera l'assuré à 64 ans. Sur la base d'une table de mortalité, la compagnie estime le risque annuel de survie à 99,54% pour un assuré de 64 ans.

20 [Fête foraine] Un forain propose aux passants de faire tourner les deux roues parfaitement équilibrées ci-dessous. Lorsque les deux roues s'arrêtent, l'une sur le noir et l'autre sur le gris, le joueur gagne un lot qui revient au forain à 26 frs. Lorsque l'une des deux roues seulement s'arrête sur le blanc, le joueur gagne un lot qui revient au forain à 5 frs. Si les deux roues s'arrêtent sur le blanc, le joueur gagne un lot qui revient au forain à 2 frs. Combien le forain doit-il faire payer la partie pour espérer un bénéfice moyen de 5 frs la partie ?



21 [Flèches] Un archer disposant de k flèches effectue des tirs répétés jusqu'à ce qu'il ait, soit atteint la cible, soit épuisé ses flèches. Sachant que le tireur atteint la cible avec probabilité p lors de chaque tir, et que ceux-ci sont indépendants, déterminer :

(a) La probabilité qu'il n'atteigne jamais la cible.

(b) La loi de probabilité X du nombre de tirs effectués.

22 [Expérience aléatoire] Une salle contient 6 hommes et 4 femmes. On choisit au hasard dans cette salle une personne et on note le sexe de cette personne. Cette expérience est réalisée 3 fois de suite au total avec toujours le même effectif concerné (tirage avec remise). Si la variable aléatoire X représente le nombre de femmes choisies,

(a) Déterminer la loi de probabilité au moyen d'une formule.

(b) Calculer $P(X \leq 2)$.

28.2 Quelques variables aléatoires discrètes usuelles

28.2.1 Loi uniforme discrète

Une distribution de probabilité suit une **loi uniforme discrète** lorsque toutes les valeurs x_1, $x_2, \cdots, x_n$ prises par la variable aléatoire sont équiprobables.

Notation : $X \sim \mathscr{U}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ (On utilise le symbole $\sim$ pour dire «suit».)

La loi de probabilité est alors la suivante :

$$P(X = x_i) = \frac{1}{n} \qquad \text{pour } i \in \{1, 2, \cdots, n\}$$

L'espérance et la variance de cette loi sont données par :

$$E(X) = \overline{x} \qquad \text{et} \qquad V(X) = \overline{x^2} - \overline{x}^2$$

Exemple 28.8

Montrer que la distribution des chiffres obtenus au lancer d'un dé à 6 faces suit une loi uniforme. Puis calculer son espérance et sa variance.

Solution

En représentant les valeurs obtenues au moyen d'un tableau, on a :

k	1	2	3	4	5	6
$P(X = k)$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$

La loi de probabilité peut donc être définie au moyen de la formule : $P(X = k) = \frac{1}{6}$

L'espérance et la variance par :

$$E(X) = \frac{1 + 2 + \cdots + 6}{6} = 3,5 \qquad \text{et} \qquad V(X) = \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + 6^2}{6} - 3,5^2 = \frac{35}{12}$$

28.2.2 Loi de Bernoulli

La **loi de Bernoulli**, du nom du mathématicien suisse Jacques Bernoulli (1654 - 1705), est une distribution de probabilité où l'on ne considère que deux issues : Échec ou succès.

	k	p_k
Échec	0	$1-p$
Succès	1	p

Cette loi, notée $\mathscr{B}(1, p)$, peut être transcrite par la formule suivante :

$$P(X=k) = p^k \cdot (1-p)^{1-k} \qquad \text{pour } k \in \{0, 1\}$$

L'espérance et la variance de cette loi sont données par :

$$E(X) = p \qquad \text{et} \qquad V(X) = p(1-p)$$

En effet :

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^{1} p_k \cdot k = (1-p) \times 0 + p \times 1 = p \\ V(X) &= \sum_{k=0}^{1} p_k \cdot k^2 - E(X)^2 = [(1-p) \times 0^2 + p \times 1^2] - p^2 \\ &= p - p^2 \\ &= p(1-p) \end{aligned}$$

28.2.3 Loi binomiale

Une **loi binomiale** de paramètres n et p est une loi de probabilité notée $\mathscr{B}(n; p)$ qui correspond à l'expérience suivante :

On compte le nombre de succès obtenus lors de la répétition de n épreuves de Bernoulli, chaque épreuve ne pouvant donner que deux résultats possibles : succès avec une probabilité p ou échec avec une probabilité $(1-p)$. On peut apparenter la loi binomiale à un tirage dans une urne avec remise.

La variable aléatoire X a une loi de probabilité définie par :

$$\begin{aligned} P(X=k) &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \qquad \text{pour } k \in \{0, 1\ 2, \cdots, n\} \\ &= C_k^n \, p^k (1-p)^{n-k} \end{aligned}$$

L'espérance et la variance de cette loi sont données par :

$$E(X) = n \cdot p \qquad \text{et} \qquad V(X) = n \cdot p \cdot (1-p)$$

En effet, cette variable aléatoire X peut être considérée comme la somme de n variables aléatoires de Bernoulli :

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

Comme l'espérance d'une loi de Bernoulli est donnée par $E(X_i) = p$, on obtient facilement l'espérance de la loi binomiale :

$$\begin{aligned} E(X) &= E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) \\ &= E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n) \\ &= p + p + \cdots + p \\ &= np \end{aligned}$$

De même, la variance d'une loi de Bernoulli donnée par $V(X_i) = p(1-p)$, permet d'obtenir la variance de la loi binomiale :

$$\begin{aligned} V(X) &= V(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) \\ &= V(X_1) + V(X_2) + \cdots + V(X_n) \\ &= p(1-p) + p(1-p) + \cdots + p(1-p) \\ &= np(1-p) \end{aligned}$$

Exemple 28.9

On jette une pièce de monnaie 6 fois de suite. Quelle est la probabilité d'obtenir 2 fois pile ?

Solution

2 fois pile peut se réaliser de plusieurs manières différentes, comme par exemple :

P	**P**	F	F	F	F
P	F	**P**	F	F	F
F	F	F	F	**P**	**P**

Pour chacune de ces manières, la probabilité d'obtenir 2 fois pile vaut toujours :

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4$$

Le nombre de façons d'obtenir 2 fois pile sur 6 lancers est obtenu au moyen des permutations avec répétitions :

$$\overline{P}_6(2;4) = \frac{6!}{4!\,2!} = C_2^6 = 15$$

Ce calcul est précisément l'application de la loi binomiale de paramètres $\mathscr{B}(6;0,5)$, ce qui donne :

$$P(2 \text{ succès}) = P(X=2) = C_2^6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 \simeq 0,234$$

Avec la calculatrice TI84, il est possible de calculer la loi de probabilité ou la fonction de répartition de la loi binomiale (menu : 2ND+DISTR)

$$P(X=k) \longrightarrow \mathsf{binomFdp(n,p,k)} \qquad \text{Loi de probabilité}$$
$$P(X \leq k) \longrightarrow \mathsf{binomFRép(n,p,k)} \qquad \text{Fonction de répartition}$$

Exemple 28.10

Vous souhaitez organiser un déjeuner avec vos collègues et pour cela vous envoyer un mail à vos 10 plus proches collaborateurs. Par expérience vous savez qu'environ $1/3$ vous répondront. Quelle est la probabilité que vous receviez au moins 4 réponses à ce questionnaire ?

Solution

Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de bonnes réponses sur 10 envois effectués. X suit une loi binomiale de paramètres $\mathscr{B}(10;1/3)$ pour laquelle on cherche la probabilité suivante :

$$\begin{aligned} P(X \geq 4) &= 1 - P(X < 4) \\ &= 1 - P(X \leq 3) = 1 - \mathsf{binomFRép(10,1/3,3)} \simeq 0,44 \end{aligned}$$

28.2.4 Loi de Poisson

La loi de Poisson (Siméon Denis Poisson, mathématicien français 1781- 1840) est la loi des phénomènes rares de petite probabilité. Cette loi se caractérise par le nombre de fois où un événement se produit dans une période ou un intervalle de temps donnés, sachant que l'événement arrive en moyenne λ fois. Il peut s'agir par exemple :

- du nombre d'arrivées dans une file d'attente
- du nombre de pannes d'un appareil au cours d'une période donnée
- du nombre de pièces défectueuses dans un lot

La loi de Poisson, de paramètre λ et notée $\mathscr{P}(\lambda)$ s'exprime par :

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\lambda} \qquad \text{pour } k\in\{0\,,1\,,2\,,\cdots\}$$

Dans cette loi, l'espérance et la variance sont identiques et valent :

$$E(X)=\lambda \qquad \text{et} \qquad V(X)=\lambda$$

Espérance et variance.
Comment établir l'espérance et la variance d'une loi de Poisson ?

Avec la calculatrice TI84, il est possible de calculer la loi de probabilité ou la fonction de répartition de la loi de Poisson (menu : 2ND+DISTR)

$P(X=k)\longrightarrow$ poissonFdp(λ,k) — Loi de probabilité

$P(X\leq k)\longrightarrow$ poissonFRép(λ, k) — Fonction de répartition

Exemple 28.11

Le nombre moyen de clients à un distributeur est de 1,5 par minute. Quelle est la probabilité de voir arriver 4 clients en 1 minute ?

Solution

$$P(X=4)=\frac{1,5^4}{4!}\cdot e^{-1,5}=\text{poissonFdp}(1.5,4)\simeq 0,047$$

Remarque

La loi de Poisson fournit une bonne **approximation** de la loi binomiale, lorsque le nombre d'expériences n est très grand et que la probabilité de réalisation p est très faible. En pratique, on peut approximer $\mathscr{B}(n;p)$ par $\mathscr{P}(np)$ dès que $n>30$ et si $np<5$. Le principal intérêt d'une telle approximation est de remplacer une loi à 2 paramètres par une loi à un seul paramètre.

Exemple 28.12

Suite à la mise en place d'un nouvel anti-virus, on estime à 2%, dans une entreprise de 100 personnes, la proportion d'ordinateurs qui seront pourtant infectés. Quelle est la probabilité de constater, lors d'un contrôle dans cette entreprise, plus d'un ordinateur infecté ?

Solution

Compte tenu des hypothèses, le nombre d'ordinateurs infectés est ici régi par une loi binomiale de paramètres $n=100$ et $p=0,02$. Comme on a $np=2$, les conditions d'approximation par une loi de Poisson de paramètre $\mathscr{P}(2)$ sont réalisées. Ainsi :

$$\begin{aligned}
P(X \geq 2) &= 1 - P(X \leq 1) \\
&= 1 - [P(X=0) + P(X=1)] \\
&= 1 - \left[e^{-2}\frac{2^0}{0!} + e^{-2}\frac{2^1}{1!}\right] \\
&= 1 - \left[e^{-2} + 2e^{-2}\right] \simeq 0,594 \\
&= 1 - \mathsf{poissonFRép}(2{,}1)
\end{aligned}$$

L'application de la loi binomiale donne un résultat assez proche :

$$\begin{aligned}
P(X \geq 2) &= 1 - P(X \leq 1) \\
&= 1 - [P(X=0) + P(X=1)] \\
&= 1 - \left[C_0^{100} \cdot 0,98^{100} \cdot 0,02^0 + C_1^{100} \cdot 0,98^{99} \cdot 0,02^1\right] \\
&= 1 - \left[0,98^{100} + 2 \cdot 0,98^{99}\right] \simeq 0,597 \\
&= 1 - \mathsf{binomFRép}(100{,}0.02{,}1)
\end{aligned}$$

28.2.5 Loi hypergéométrique

On tire simultanément n boules dans une urne contenant N boules, parmi lesquelles R sont gagnantes et $N-R$ boules perdantes. On compte alors le nombre de boules gagnantes extraites. Ce nombre porte le nom de variable aléatoire hypergéométrique.

Cette loi, notée $\mathscr{H}(N;n;R)$ ou $\mathscr{H}(N;n;p)$, se détermine au moyen de la formule suivante :

$$P(X=k) = \frac{C_k^R \cdot C_{n-k}^{N-R}}{C_n^N} \qquad \text{pour } k \in \{0\,,\,1\;2\,,\cdots,\,\min(R;n)\}$$

- C_k^R représente toutes les possibilités pour choisir k objets parmi les R objets possédant le caractère étudié
- C_{n-k}^{N-R} représente toutes les possibilités pour choisir les autres objets parmi ceux qui ne possèdent pas le caractère étudié
- C_n^N représente tous les échantillons possibles de n éléments que l'on peut former à partir d'une population de taille N

L'espérance et la variance d'une telle loi sont donnés par : [2]

2. Ces formules sont plus difficiles à établir. Pour plus d'information, consulter les ressources de Promath.ch.

$$E(X) = np \qquad V(X) = \frac{N-n}{N-1} np(1-p) \qquad \text{avec } p = \frac{R}{N}$$

Exemple 28.13

Dans une entreprise de 120 employés, il y a 20% de fumeurs. Trois employés sont choisis au hasard. Quelle est la probabilité qu'il y ait un fumeur dans cet échantillon ?

Solution

La population totale est $N = 120$; il y a $R = 24$ fumeurs et l'échantillon choisi est de taille $n = 3$. La probabilité cherchée est donc :

$$P(X = 1) = \frac{C_1^{24} \cdot C_2^{96}}{C_3^{120}} \simeq 0,3897$$

Remarques

- La loi hypergéométrique et la loi binomiale indiquent toutes les deux le nombre de réussites sur n essais. Pour la loi binomiale, la probabilité est la même à chaque essai. Dans le cadre de la loi hypergéométrique, chaque essai change la probabilité de chacun des essais suivants du fait de l'absence de remise.
- Lorsque la taille de la population est grande, la différence entre la loi binomiale et hypergéométrique est faible, car il y a peu de chance qu'un même élément soit choisi deux fois. Dans ce cas, on peut très bien imaginer une approximation de la loi hypergéométrique par la loi binomiale, c'est-à-dire :

$$\mathscr{H}(N; n; R) \approx \mathscr{B}(n; p) \qquad \text{avec } p = \frac{R}{N}$$

Exemple 28.14

Dans une ville de 180 000 habitants, on compte environ 16 fonctionnaires pour 1000 habitants. Si on choisit au hasard 8 personnes dans la rue, quelle est la probabilité qu'on y trouve 3 fonctionnaires ?

Solution

Selon la loi hypergéométrique avec $R = 2880$ on obtient :

$$P(X = 3) = \frac{C_3^{2880} \cdot C_5^{177120}}{C_8^{180000}} \simeq 0,211$$

Selon la loi binomiale avec $p = 0,016$ on obtient :

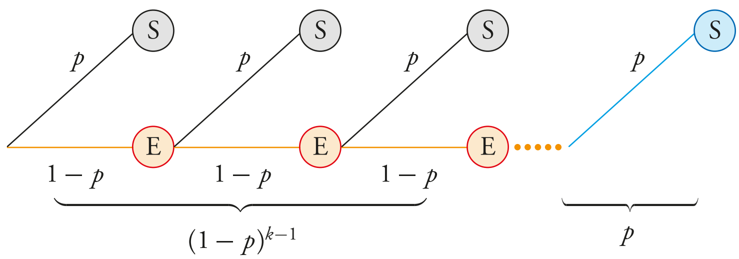
$$P(X = 3) = C_3^8 \cdot 0,016^3 \cdot 0,984^5 \simeq 0,212$$

28.2.6 Loi géométrique

La loi géométrique correspond au modèle suivant : On considère une épreuve de Bernoulli dont la probabilité de succès est p et celle d'échec $q = 1 - p$. On renouvelle cette épreuve de manière indépendante (**tirage avec remise**) jusqu'au premier succès. On appelle X la variable aléatoire donnant le rang du premier succès, c'est-à-dire le nombre de tirages à réaliser pour atteindre le premier succès. X suit alors une loi géométrique de paramètre p, notée $\mathscr{G}(p)$ et se détermine au moyen de la formule suivante :

$$P(X = k) = p(1-p)^{k-1} \qquad \text{pour } k \in \{1\ 2, \cdots\}$$

Cette formule s'obtient facilement en construisant le schéma des tirages ci-après (Échecs $= E$ et Succès $= S$) :



L'espérance et la variance de cette loi sont données par :

$$E(X) = \frac{1}{p} \qquad V(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

Exemple 28.15

On tire avec remise une boule dans une urne contenant 112 boules blanches et 8 boules noires. A priori, combien devra-t-on effectuer de tirages pour obtenir une boule noire pour la première fois ?

Solution

Si p est la proportion de boules noires, $p = \frac{8}{120}$. D'après la formule sur l'espérance mathématique,

$$E(X) = \frac{1}{p} = \frac{120}{8} = 15$$

Il faudra s'attendre à exécuter environ 15 tirages pour voir apparaître pour la première fois une boule noire.

Espérance et variance.
Comment établir l'espérance et la variance d'une loi géométrique ?

28.2.7 Utilisation d'Excel

Loi binomiale $\mathscr{B}(n;p)$

$P(X=k) \rightarrow$ LOI.BINOMIALE.N(k; n; p ;FAUX) Loi de probabilité

$P(X \leq k) \rightarrow$ LOI.BINOMIALE.N(k; n; p ;VRAI) Fonction de répartition

Exemple 28.16

Une entreprise de nettoyage compte 70% de femmes. Quelle est la probabilité que sur une équipe de 10 personnes on trouve 6 femmes ?

Solution

$$P(X=6) = \text{LOI.BINOMIALE.N}(6;10;0.7;\text{FAUX}) = 0,2$$

Loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$

$P(X=k) \rightarrow$ LOI.POISSON.N(k; λ;FAUX) Loi de probabilité

$P(X \leq k) \rightarrow$ LOI.POISSON.N(k; λ;VRAI) Fonction de répartition

Exemple 28.17

Le nombre moyen de clients à un distributeur est de 3 par minute. Quelle est la probabilité de voir arriver plus de 6 clients en 1 minute ?

Solution

$$P(X>6) = 1 - P(X \leq 6) = 1 - \text{LOI.POISSON.N}(6;3;\text{VRAI}) = 0,0335$$

Loi hypergéométrique $\mathscr{H}(N;n;R)$

$P(X=k) \rightarrow$ LOI.HYPERGEOMETRIQUE.N(k; n; R; N ;FAUX) Loi de probabilité

$P(X \leq k) \rightarrow$ LOI.HYPERGEOMETRIQUE.N(k; n; R; N ;VRAI) Fonction de répartition

Exemple 28.18

Dans un stock de 10 appareils, 4 sont défectueux. On en choisi 3 au hasard. Quelle est la probabilité que cet échantillon contienne exactement 2 appareils défectueux ?

Solution

$$P(X=2) = \text{LOI.HYPERGEOMETRIQUE.N}(2;3;4;10;\text{FAUX}) = 0,3$$

Exercices d'application de la section 28.2

Exercices en rapport avec la loi uniforme discrète

23 [Loi et probabilités] Une variable aléatoire X est définie par $P(X = k) = \lambda$ pour k =15, 25, 85, 95.

(a) Déterminer la loi de probabilité de X.

(b) Calculer $E(X)$

(c) Calculer $P(X < E(X))$

(d) Calculer $V(X)$

24 [Recherche de n] Soit X une variable aléatoire uniforme définie pour $k = 1, 2, 3, \cdots, n$ avec $n \in \mathbb{N}$. Si $E(x) = 7$, que vaut n ?

25 [Espérance et variance] Établir l'espérance et la variance d'une loi uniforme discrète définie par :

$$P(X = k) = \frac{1}{n} \qquad \text{pour } k \in \{1, 2, \cdots, n\}$$

On utilisera les deux résultats suivants :

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

26 [Espérance et variance] Soit une variable aléatoire uniforme X définie sur l'ensemble des valeurs $\{-1; 0; 1\}$

(a) Déterminer la loi de probabilité de X.

(b) Calculer $E(X)$ et $V(X)$

(c) Calculer $E(Y)$ si $Y = X^2$

Exercices en rapport avec la loi binomiale

27 [Espérance et variance] Si X suit une variable aléatoire binomiale $\mathscr{B}(10; 0,2)$, calculer en utilisant la formule :

(a) $P(X = 6)$

(b) $P(X \geq 2)$

(c) $E(X)$

(d) $V(X)$

28 [Texte à trous] Compléter le texte suivant :

Une machine produit des pièces avec un pourcentage de 97% de pièces acceptables. On appelle X la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 10 pièces prélevées avec remise, associe le nombre de pièces défectueuses dans cet échantillon.

X suit une loi [...] de paramètres [...]. La probabilité de n'obtenir que des pièces acceptables est de [...].
Pour obtenir la probabilité d'avoir plus de 6 pièces acceptables parmi les 10 pièces tirées, on doit calculer la probabilité de l'événement [...].
Cette probabilité est égale à [...].
L'espérance de X est égale à [...] et son écart type est égal à [...].

29 [Diverses probabilités] Si X est une variable aléatoire binomiale définie par $\mathscr{B}(20; 0,6)$, calculer :

(a) $P(X < 10)$

(b) $P(5 < X < 10)$

(c) $P(X < 5 | X < 10)$

(d) $V(X)$

30 [Tirs sur une cible] A chaque tir, la probabilité pour qu'un tireur touche la cible est 0,7. Il tire 3 fois de suite. La variable aléatoire X est définie par le nombre de coups dans la cible.

(a) Définir la loi de probabilité X

(b) Calculer $E(X)$ et $V(X)$

31 [Matchs de tennis] Célia et Pauline décident de jouer trois matchs de tennis dans l'année et de faire une cagnotte pour s'offrir un repas en fin d'année. À la fin de chaque match, la perdante versera 25 frs dans la cagnotte. La probabilité que Célia remporte un match est de 0,6.

(a) Définir la loi de probabilité X correspondant au nombre de matchs gagnés par Pauline.

(b) Définir la loi de probabilité Y correspondant à la dépense de Pauline.

(c) Quelle est la probabilité que Pauline dépense 50 frs ?

(d) Que dépensera Pauline en moyenne en fin d'année ?

32 [Over-booking] Une compagnie d'aviation estime que 90% des clients qui font une réservation confirment le vol. Pour maximiser le remplissage d'un avion de 150 places, la compagnie décide d'accepter 160 réservations.

(a) Calculer la probabilité qu'il y ait over-booking.

(b) Calculer la probabilité d'avoir 10 sièges vides.

(c) Calculer l'espérance et la variance du remplissage de l'avion.

33 [Envoi de lettres] Un demandeur d'emploi écrit des lettres à plusieurs employeurs. Il estime la probabilité de décrocher un entretien d'embauche à 5% par lettre envoyée. Combien de lettres doit-il envoyer pour que la probabilité d'obtenir au moins un entretien d'embauche soit supérieure à 80% ?

34 [Lancers de dés] Combien faut-il lancer de fois un dé équilibré pour avoir plus de 9 chances sur 10 d'obtenir au moins un «six» ?

35 [QCM] Un questionnaire à choix multiples comporte 6 questions. Pour chacune des questions il y a 3 réponses possibles, dont une seule est exacte. Mélina répond au hasard à toutes les questions. On désigne par X la variable aléatoire correspondant au nombre de bonnes réponses données par Mélina.

(a) Quelle est la loi de probabilité X ainsi que son espérance mathématique ?

(b) Quelle est la loi de probabilité Y donnant le nombre de points obtenus par Mélina, sachant qu'une bonne réponse rapporte 1 point et une mauvaise réponse enlève 0,5 point.

(c) Quel nombre moyen de points Mélina peut-elle espérer ?

Exercices en rapport avec la loi de Poisson

36 [Calcul de probabilité] X suit une loi de Poisson d'écart-type 1,2. Calculer $P(X \geq 3)$.

37 [Indemnisations] Une agence d'assurance reçoit en moyenne deux demandes d'indemnisation par semaine. En supposant que le nombre de demandes d'indemnisation suit une loi de Poisson, et que l'agence est ouverte 5 jours par semaine, calculer la probabilité quelle reçoive :

(a) 4 réclamations en une semaine.

(b) plus que 4 réclamations en une semaine

(c) 4 réclamations en deux semaines

(d) aucune réclamation durant une journée

38 [Effectifs] On donne la distribution statistique suivante. Que valent les effectifs (arrondis à l'unité) si cette distribution suivait une loi de Poisson de même moyenne ?

x_i	0	1	2	3	4	5
n_i	95	65	20	12	7	1

39 [Fréquentation moyenne] Dans une petite boutique, il entre en moyenne 5 clients par heure. La vendeuse ferme la boutique pendant 5 minutes. Quelle est la probabilité qu'en une heure plus d'un client trouve porte close ?

40 [Temps d'attente] Dans une poste, le nombre de clients qui se présentent à un guichet au cours d'une minute suit une loi de Poisson de paramètre 1. Si un guichet peut traiter environ 2 clients par minute, quelle est la probabilité que durant une minute donnée, il n'y ait pas d'attente à ce guichet ?

41 [Mails indésirables] Aujourd'hui, 98% des mails sont considérés comme du spam (ou pourriel). Sur 500 mails reçus, quelle est la probabilité d'en trouver plus de 4 qui ne soient pas des mails indésirables ? Faire le calcul :

(a) en utilisant la loi binomiale

(b) en utilisant la loi de Poisson.

Exercices en rapport avec la loi hypergéométrique

42 [Différents calculs] Soit X, la loi hypergéométrique définie par : $\mathscr{H}(10;5;0,3)$. Calculer :

(a) $P(X=3)$ **(b)** $P(X \leq 2)$ **(c)** $E(X)$ **(d)** $V(X)$

43 [Boules et urne] Une urne contient 10 boules, dont 6 rouges et 4 bleues. On tire 2 boules de l'urne sans remise. Quelle est la probabilité d'obtenir 2 boules rouges ?

(a) en faisant le calcul avec un arbre de probabilité

(b) en utilisant la loi hypergéométrique.

44 [Loterie] À la loterie suisse à numéro, on doit choisir 6 numéros parmi 42. Lors du tirage officiel, 6 numéros sont tirés au hasard. On définit X comme le nombre de bons numéros choisis.

(a) Donner la loi de probabilité de X avec ses paramètres.

(b) Déterminer le nombre moyen de bons numéros tirés.

45 [Contrôle qualité] Le responsable qualité d'une entreprise contrôle 20 articles dans chaque lot de 1000 articles avant de le laisser partir vers le client. Il accepte seulement les lots pour lesquels il ne trouve aucun article non conforme dans l'échantillon.

(a) Si $p\%$ des articles fabriqués sont défectueux, quelle est la probabilité d'en trouver k dans un lot donné de taille 20 ?

(b) Quelle est la probabilité pour qu'un lot contenant une proportion $p = 0,05$ d'articles non conformes soit accepté ?

Exercices en rapport avec la loi géométrique

46 [Loi de probabilité] Quelle loi de probabilité se cache derrière le raisonnement suivant d'un joueur obstiné : «Tant que je perds, je joue» ?

47 [Fonction de répartition] Exprimer au moyen d'une formule la fonction de répartition d'une loi géométrique de paramètre p.

48 [Diverses probabilités] On donne la loi géométrique de paramètre $p = 0,6$. Calculer les probabilités suivantes :

(a) $P(X=6)$

(b) $P(X<6)$

(c) $P(3 \leq X < 7)$

(d) $P(3 < X \leq 7)$

(e) $P(X > 3 | X < 5)$

49 [Langue allemande] Dans une entreprise, 10% des employés parlent l'allemand. En choisissant au hasard et avec remise des employés de cette entreprise, quelle est la probabilité :

(a) que la première personne parlant l'allemand soit la $4^{\text{ème}}$ personne choisie ?

(b) que la première personne parlant l'allemand soit dans les 4 premières personnes choisies ?

50 [Lancer de pièce] Vous lancez trois pièces d'un euro simultanément jusqu'à ce que vous obteniez 3 «piles» au cours d'un même lancer. Quelle est la probabilité que vous arriviez en moins de 5 lancers ?

51 [Loi sans mémoire] La loi géométrique est une variable aléatoire dite **sans mémoire**, ce qui se traduit mathématiquement par :

$$P(X > s + t \,|\, X > t) = P(X > s)$$

Montrer que ce résultat est vrai.

52 [Premier succès] On donne une loi géométrique de paramètre p avec $p < 0,5$. Si la probabilité que le premier succès est obtenu au deuxième essai est 0,21, calculer $P(X > 2)$.

53 [Coût d'un projet] Une société souhaite mettre sur le marché un nouveau produit. Une campagne de pub lui coûte 15 000 frs. Si les résultats sont concluants elle lancera le produit à grande échelle sinon elle refera une campagne de pub qui lui coûtera 2 000 frs de plus que la précédente campagne et ainsi de suite. La probabilité à chaque tentative d'obtenir des résultats concluants est de 0,25.

(a) Quel est le coût moyen d'un tel projet ?

(b) Quelle est la probabilité de ne pas dépasser les 140 000 frs alloués à ce projet ?

28.3 Problèmes et exercices de synthèse

54 [Retrouver une loi] Retrouver la loi de probabilité de X connaissant sa fonction de répartition :

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad x < 1 \\ 0,2, & \text{si} \quad x \in [1\,;6[\\ 0,7, & \text{si} \quad x \in [6\,;8[\\ 1, & \text{si} \quad x \geq 8 \end{cases}$$

55 [Loi de probabilité] Pour $\theta \in]0,1[$, on définit la loi de probabilité $P(k)$ par :

$$P(k) = \begin{cases} C \cdot \theta \cdot \min\{k, 8-k\}, & \text{si} \quad k = 1,2,\ldots,7 \\ 1-\theta, & \text{si} \quad k = 8 \end{cases}$$

où C est une constante positive.

(a) Déterminer la constante C de telle sorte que $P(k)$ soit une loi de probabilité.

(b) Écrire la fonction de probabilité.

56 [Prime d'assurance] Une compagnie d'assurance établit un contrat stipulant qu'une somme S doit être versée, si un événement E se produit dans l'intervalle d'un an. La compagnie estime que la probabilité que E se produise dans l'espace d'un an est p. Quelle sera la prime d'assurance sachant que le bénéfice représente 10% de S ?

57 [Loi de probabilité] Soit a un nombre entier positif et X une variable aléatoire à valeurs dans $\{1, 2, 3, \cdots, 34\}$ dont la loi de probabilité est :

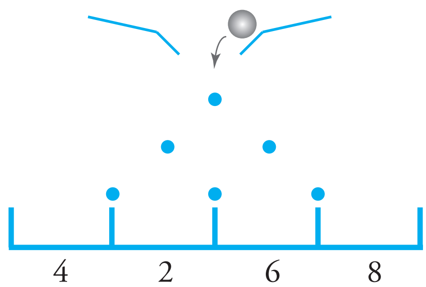
$$P(X = k) = \frac{1}{187a}(k - a)^2$$

(a) Quelle doit être la valeur de a pour que X soit une loi de probabilité ?

(b) Pour quelle valeur de k a-t-on la plus petite probabilité ?

58 [Démarrage de jeu] Pour pouvoir démarrer un certain jeu de société, il faut lancer un dé à 6 faces et obtenir un 6. Combien faut-il lancer de fois le dé pour que l'on puisse démarrer le jeu avec une probabilité d'au moins 90% avant le $k^{\text{ème}}$ lancer au maximum ?

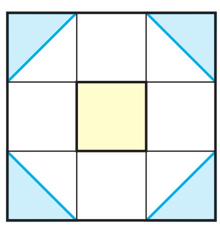
59 [Crible de Galton] Le schéma ci-après représente une crible de Galton où une bille a la même probabilité d'aller sur la droite comme sur la gauche. On désigne par X la variable aléatoire représentant le nombre de points obtenus.



(a) Établir la loi de probabilité de X

(b) Quel est le prix moyen de ce jeu si l'on donne au joueur le montant inscrit sous la case dans laquelle la balle termine sa course ?

60 [Fléchettes] Un forain expérimente un nouveau jeu. Vous jouez 5 frs. Vous pouvez ensuite tirer une fléchette sur une cible que vous atteindrez à coup sûr. Si la fléchette se plante dans le carré central, vous doublez votre mise. Si la fléchette se plante dans l'un des 4 coins de la cible, vous récupérez votre mise. Partout ailleurs, vous perdez votre mise. Quelle est la marge du forain ?



61 [Variable centrée réduite] Démontrer que la variable Y définie ci-après est une variable centrée et réduite, c'est-à-dire d'espérance et de variance égale à 1.

$$Y = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$$

62 [Prime d'assurance] Une compagnie d'assurance assure une maison en cas de sinistre total durant l'année pour un montant de 600 000 frs. La compagnie évalue le risque incendie de cette maison à 0,00053. La prime commerciale encaissée par la compagnie se monte à 361 frs. Quelle est la marge espérée de l'assureur sur ce contrat ?

63 [Valeur des ventes] Un institut de beauté estime qu'au premier rendez-vous il peut vendre un produit de rajeunissement avec une probabilité de 0,4. Au second rendez-vous, par contre, il estime à 0,8 ses chances de vendre ce produit miracle s'il n'a pas déjà été acheté lors du premier rendez-vous. À chaque vente, il a autant de chances de vendre un flacon à 60 frs qu'un flacon à 100 frs. Déterminer la loi de probabilité X donnant la valeur totale de toutes les ventes en francs.

64 [Choix d'équipement] Un hôpital a le choix entre 3 équipements A, B et C. Il estime que le premier équipement peut lui faire économiser 50 000 frs avec une probabilité de 0,8 ou lui faire économiser 20 000 frs avec une probabilité de 0,2. Le second équipement peut lui faire économiser 30 000 frs avec une probabilité de 0,4 ou lui faire économiser 10 000 frs avec une probabilité de 0,6. Le dernier équipement peut lui faire économiser 40 000 frs ou 50 000 frs avec une même probabilité. Quelle devrait être sa stratégie ?

65 [Trousseau de clés] Un trousseau contient six clés dont 2 peuvent ouvrir la porte d'un bureau. Comme on ne sait pas lesquelles, on essaie les clés sans tester deux fois la même.

(a) À l'aide d'un arbre, calculer la probabilité que la porte s'ouvre au $4^{\text{ème}}$ essai.

(b) À quelle loi de probabilité s'apparente cette expérience ?

66 [Fonds de placement] Une banque propose un nouveau fonds de placement à ses clients. Elle constate après quelques semaines que ce fonds a intéressé 8% de sa clientèle. Elle effectue aujourd'hui un sondage auprès de 32 clients choisis au hasard avec remise. On désigne par X, la variable aléatoire représentant le nombre de clients dans cet échantillon intéressés par le nouveau fonds de placement.

(a) De quelle loi de probabilité s'agit-il ?

(b) Calculer $P(X < 6 | X \geq 3)$.

(c) Calculer $P(X < 6 | X \geq 3)$ en utilisant une approximation de cette loi par la loi de Poisson.

67 [Arrivées tardives] Une entreprise constate en moyenne 8 arrivées tardives sur 100 employés. On suppose que la variable aléatoire X mesurant le nombre d'arrivées tardives sur 100 employés est une loi de Poisson de paramètre 8.

(a) Calculer la probabilité qu'il y ait 8 arrivées tardives exactement.

(b) Calculer la probabilité qu'il y ait plus de 7 arrivées tardives.

(c) Déterminer le plus petit entier k tel que la probabilité d'avoir moins de k arrivées tardives soit supérieure à 95%.

68 [Approximation] On forme au hasard un comité de 5 employés choisis parmi les 5 femmes et les 6 hommes du département des RH. Quelle est la probabilité que 3 membres du comité soient des femmes ? Faire le calcul

(a) intuitivement au moyen de l'analyse combinatoire.

(b) en utilisant la loi hypergéométrique.

(c) approximativement en utilisant la loi binomiale.

69 [Probabilité maximale] Une école comporte une proportion p de filles. On prélève au hasard avec remise 20 élèves et on compte le nombre X de filles obtenues.

(a) Quelle est la loi de X ?

(b) Le prélèvement a donné $X = 8$. Pour quelle valeur de p cette probabilité est-elle maximale ?

70 [Feux de signalisation] Un étudiant se rend chaque jour en vélo à son école. Il fait les 5 km du trajet à une vitesse constante de 30 km/h. Sur son parcours, il doit passer 5 feux de signalisation non synchronisés. À chaque feu, la probabilité qu'il soit vert est de $2/3$ et $1/3$ qu'il soit orange ou rouge. Dans ce dernier cas il perd 1 minute.

(a) Déterminer la loi de probabilité Y mesurant le nombre de feux verts rencontrés parmi 5 feux.

(b) Soit X, le temps mis par cet étudiant pour se rendre à l'école. Exprimer X en fonction de Y.

(c) Calculer la durée moyenne du trajet.

(d) Si cet étudiant part 12 minutes avant le début des cours, quelle est la probabilité qu'il arrive en retard ?

71 [Défi] Une secrétaire doit envoyer 4 lettres différentes à 4 clients. Malheureusement elle met les lettres aléatoirement à l'intérieur des enveloppes déjà adressées. Calculer le nombre moyen de clients qui recevront la bonne lettre.

Chapitre 29

Variables aléatoires continues

Objectifs du chapitre

- savoir reconnaître une densité de probabilité.
- savoir calculer les principaux indicateurs : espérance, variance, mode, etc.
- savoir utiliser les principales lois continues : loi uniforme, loi exponentielle et loi normale.
- savoir approximer certaines lois discrètes.
- savoir effectuer des sommes de certaines variables aléatoires.

Jusqu'à maintenant, on a étudié des variables aléatoires de type discret, c'est-à-dire pouvant prendre un nombre fini de valeurs, comme par exemple le nombre de clients entrant dans un magasin au cours d'une journée. Si l'on s'intéresse par contre au temps passé par ces clients dans le magasin, il s'agit alors d'une variable aléatoire continue, pouvant prendre n'importe quelle valeur réelle dans un ou plusieurs intervalles de temps donnés.

29.1 Généralités

29.1.1 Introduction

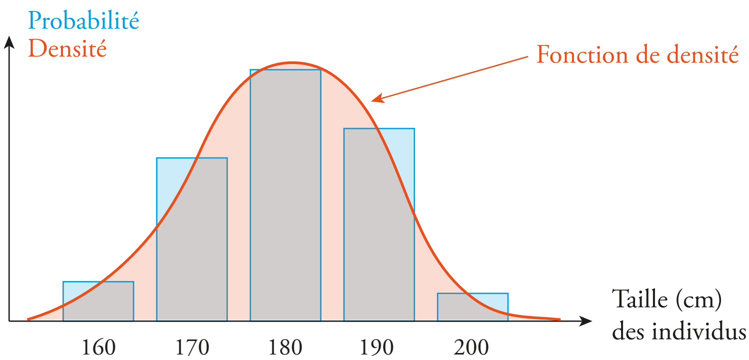
Une variable aléatoire est dite continue si elle peut prendre toutes les valeurs dans un intervalle donné. En règle générale, toutes les variables qui résultent d'une mesure sont de type continu. Il peut s'agir par exemple du poids de pièces usinées, de la durée de vie de tel ou tel équipement, ou encore le temps d'attente à un guichet postal.

Contrairement aux variables aléatoires discrètes, il n'est pas possible de déterminer ici une probabilité bien précise, comme par exemple la probabilité que la masse d'une pièce fasse précisément 2,34 kg. Cette probabilité est nulle. Par contre, on définira un intervalle autour de cette valeur et l'on cherchera, par exemple, la masse de la pièce comprise entre 2,3 et 2,4 kg, ce qui se notera :

$$P(2,3 \leq X \leq 2,4)$$

29.1.2 Densité de probabilité

Une **fonction de densité** appelée aussi **densité de probabilité** est une fonction qui représente «là où il y a beaucoup» et «là où il y a peu» de valeurs de la variable. Cette fonction est comparable à la notion d'histogramme d'une variable aléatoire discrète, mais où le nombre de modalités devenant très grand que l'histogramme prend la forme d'une fonction continue :



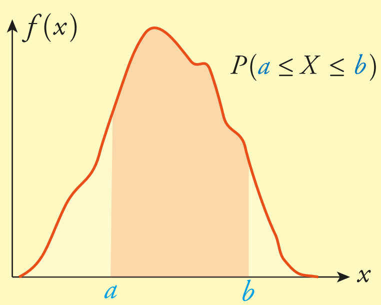
Par similitude à une variable aléatoire discrète, la fonction de densité se définit comme suit :

Une fonction f est une densité de probabilité sur un intervalle I lorsque :

- $f(x) \geq 0$ pour tout x — f est continue et positive sur I
- $\int_I f(x)\,dx = 1$ — aire sous la fonction de densité est égale à 1.

Par ailleurs :

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx$$



Remarques :

- $P(X = a) = 0$ — la probabilité d'une valeur précise est nulle
- $P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b)$ — pas de différence si l'on inclut ou exclut les bornes

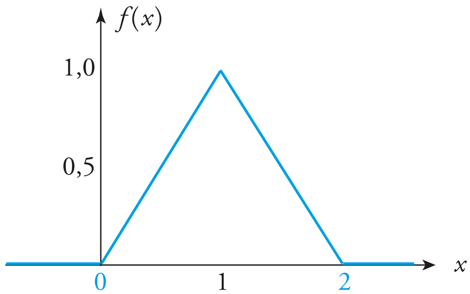
Exemple 29.1

Montrer que la fonction f définie ci-après est une fonction de densité.

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in [0;1[\\ -x+2, & \text{si } x \in [1;2[\\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Solution

Cette fonction de densité est représentée simplement comme suit :



En calculant l'aire totale sous cette courbe, dans l'intervalle $I = [0;2]$ on obtient :

$$\begin{aligned} \int_I f(x)\,dx &= \int_0^1 x\,dx + \int_1^2 (-x+2)\,dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[-\frac{x^2}{2} + 2x\right]_1^2 \\ &= \frac{1}{2} + \left[-\frac{4}{2} + 4\right] - \left[-\frac{1}{2} + 2\right] \\ &= 1 \end{aligned}$$

29.1.3 Fonction de répartition

La fonction de répartition notée $F(x_i)$ permet de déterminer la probabilité que la variable aléatoire X prenne une valeur inférieure ou égale à une certaine borne x_i. Dans le cas discret, on a simplement additionné les probabilités de toutes les valeurs inférieures ou égales à cette borne :

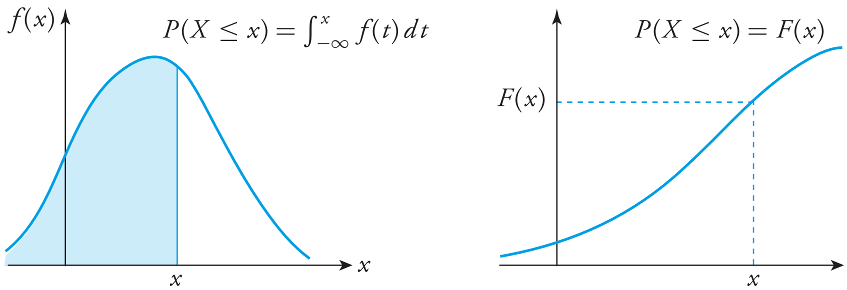
$$\begin{aligned} F(x_i) &= P(X \leq x_i) \\ &= P(X = x_1) + P(X = x_2) + P(X = x_3) + \cdots + P(X = x_i) \end{aligned}$$

Lorsque la variable aléatoire est continue, la somme est remplacée par une intégrale et la fonction de répartition s'écrit alors :

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

La limite inférieure est donnée par $-\infty$, mais en pratique il s'agit de la plus petite valeur de x dans l'intervalle I.

La probabilité que la variable aléatoire X prenne une valeur inférieure à x peut alors être interprétée comme la portion d'aire de $-\infty$ à x sous la fonction de densité ou simplement la valeur $F(x)$ de la fonction de répartition F.



La fonction de répartition $F(x)$ est particulièrement utile pour trouver $P(a \leq X \leq b$ ou encore la médiane ou autres quartiles :

- $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$
- Médiane (M_e) : Valeur de M_e telle que $F(M_e) = 0,5$

29.1.4 Espérance et variance

Les formules de l'espérance et de la variance se déterminent de façon similaire aux variables aléatoires discrètes :

- L'espérance mathématique :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\,dx$$

- La variance :

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)\,dx - [E(X)]^2$$

- L'écart type : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Exemple 29.2

Une variable aléatoire a une densité de probabilité définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot x(3-x)^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Calculer :

(a) la valeur de λ **(b)** l'espérance $E(X)$ **(c)** l'écart type $\sigma(X)$

Solution

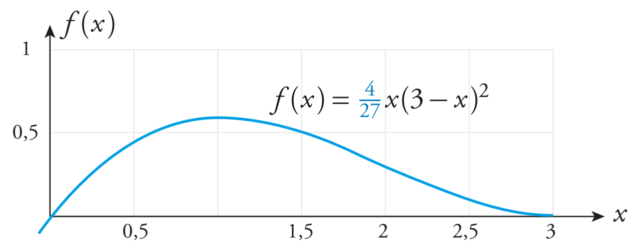
(a) la valeur de λ se détermine comme suit :

$$\int_I f(x)\,dx = 1$$ Aire sous la courbe =1

$$\int_0^3 \lambda x(3-x)^2\,dx = 1$$ Intervalle de valeurs : $I = [0; 3]$

$$\lambda \int_0^3 x(3-x)^2\,dx = 1$$ Mise en évidence de λ

$$\lambda = \frac{1}{\int_0^3 x(3-x)^2\,dx} = \frac{4}{27}$$ Isoler λ et calcul de l'intégrale



(b) l'espérance de X se calcule comme suit :

$$E(X) = \int_0^3 x \cdot f(x)\,dx$$ Définition de l'espérance

$$= \int_0^3 x \cdot \frac{4}{27} x(3-x)^2\,dx$$

$$= \frac{4}{27} \int_0^3 9x^2 - 6x^3 + x^4\,dx = 1,2$$

(c) la variance et l'écart type sont donnés par :

$$E(X^2) = \int_0^3 x^2 \cdot f(x)\,dx = \int_0^3 x^2 \cdot \frac{4}{27} x(3-x)^2\,dx = 1,8$$

$$V(X) = 1,8 - 1,2^2 = 0,36 \quad \rightarrow \quad \sigma(X) = \sqrt{0,36} = 0,6$$

Exercices d'application de la section 29.1

1 [Délai de réparation] Le délai de réparation en heures d'une certaine pièce métallique peut être modélisé par une loi de probabilité X de densité $f(x) = 0,4 - 0,08x$.

(a) Calculer la probabilité que le délai de réparation dure moins de 2 heures.

(b) Calculer la probabilité que le délai de réparation dure entre 1 et 4 heures.

2 [Fonction de densité] Une variable aléatoire X définie pour $x \in [0;6]$ a une fonction de densité donnée par $f(x) = \frac{1}{36}x(6-x)$.

(a) Montrer que f est une fonction de densité de probabilité.

(b) Calculer $P(X > 4)$

3 [Paramètre manquant] Une variable aléatoire continue a une fonction de densité donnée par $f(x) = ax^2$ pour $2 \leq x \leq 5$.

(a) Trouver le paramètre a

(b) Calculer $P(3 \leq X \leq 4)$

4 [Paramètre manquant] Une variable aléatoire X a une fonction de densité donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} k(x-1)^2 & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ k & \text{si } 2 \leq x \leq 20/3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(a) Trouver le paramètre k

(b) Tracer la fonction de densité

(c) Calculer $P(1 \leq X \leq 3)$

(d) Calculer $P(X > 4)$

5 [Tendance centrale] On donne la fonction de densité d'une variable aléatoire X :

$$f(x) = \begin{cases} kx(2-x)^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(a) Trouver le paramètre k

(b) Calculer l'espérance $E(X)$

(c) Calculer l'écart type $\sigma(X)$

(d) Calculer le mode $M_o(X)$

6 [Médiane] Une variable aléatoire continue X a une fonction de densité donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{5}{8}x & \text{si } 0 \leq x \leq 1,6 \\ -2,5x+5 & \text{si } 1,6 < x \leq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(a) Tracer la fonction de densité $f(x)$

(b) Déterminer et tracer $F(x)$

(c) Calculer le mode $M_o(X)$

(d) Calculer la médiane $M_e(X)$

29.2 Quelques lois importantes

29.2.1 Loi uniforme continue

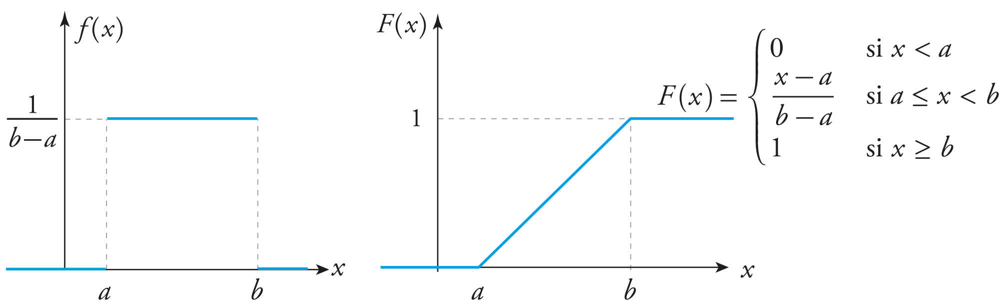
Une distribution de probabilité suit une **loi uniforme**, notée $\mathscr{U}(a;b)$ lorsque toutes les valeurs prises par la variable aléatoire sont équiprobables dans un intervalle $[a;b]$. Contrairement à la loi uniforme discrète, les valeurs dans l'intervalle $[a;b]$ ne sont pas des valeurs entières, mais peuvent être n'importe quel nombre réel. Cette loi est définie au moyen de la fonction de densité suivante :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Sa fonction de répartition s'obtient en calculant

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_I^x f(x)\,dx \\ &= \int_a^x \frac{1}{b-a}\,dt \\ &= \left[\frac{t}{b-a}\right]_a^x \\ &= \frac{x}{b-a} - \frac{a}{b-a} = \frac{x-a}{b-a} \end{aligned}$$

Cela peut être représenté graphiquement par :



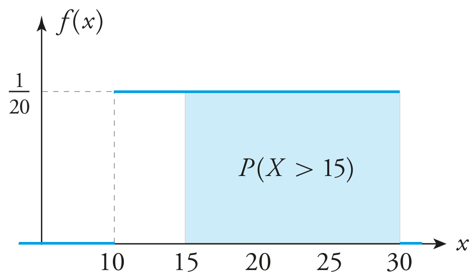
L'espérance et la variance sont données par (démonstration demandée en exercice) :

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \qquad \text{et} \qquad V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Exemple 29.3

Votre collègue a toujours entre 10 et 30 minutes de retard à chaque rendez-vous. Quelle est la probabilité qu'au prochain rendez-vous, vous devrez attendre plus d'un quart-d'heure ?

Solution



Pour calculer cette probabilité, il suffit simplement de calculer l'aire de la surface bleue :

$$P(X > 15) = (30 - 15) \times \frac{1}{20} = \frac{15}{20}$$

Le résultat est identique en passant par le calcul intégral :

$$\begin{aligned} P(X > 15) &= \int_{15}^{30} \frac{1}{20}\, dx \\ &= \left[\frac{x}{20}\right]_{15}^{30} \\ &= \frac{30}{20} - \frac{15}{20} = \frac{15}{20} \end{aligned}$$

29.2.2 Loi exponentielle

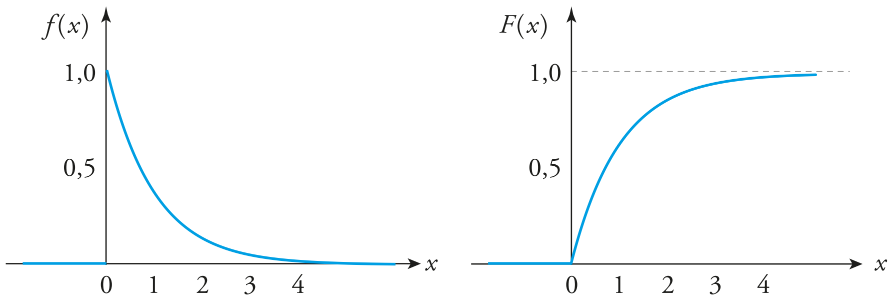
La **loi exponentielle** est utilisée dans les problèmes de file d'attente. Il peut s'agir du temps que doit attendre un client à un guichet de poste avant d'être servi, du temps d'attente d'un avion avant de pouvoir décoller. On modélise aussi fréquemment la durée de vie d'un composant électronique par une loi exponentielle.

On dit qu'une variable aléatoire continue X suit une loi exponentielle $\mathscr{E}(\lambda)$ de paramètre λ ($\lambda > 0$), si sa densité de probabilité est définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{si } x \geq 0 \\ 0, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Sa fonction de répartition peut être déterminée comme suit :

$$
\begin{aligned}
F(x) &= P(X \leq x) \\
&= \int_0^x \lambda e^{-\lambda x}\, dt \\
&= \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^x \\
&= 1 - e^{-\lambda x}
\end{aligned}
$$



L'espérance et la variance sont donnés par (démonstration demandée en exercice) :

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \qquad \text{et} \qquad V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Exemple 29.4

Dans une entreprise de construction, il s'écoule en moyenne 12 jours entre 2 cas d'hospitalisation pour cause d'accident. Un cas vient de se produire aujourd'hui. Quelle est la probabilité qu'il s'écoule moins de 18 jours avant le prochain cas ?

Solution

Soit X, le nombre de jours écoulés avant l'apparition du prochains cas.
L'espérance étant égale à 12 ($E(X) = 12 = \frac{1}{\lambda}$), on peut alors dire que X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{12}$.

La probabilité cherchée s'écrit :

$$
\begin{aligned}
P(X < 18) &= F(18) \\
&= 1 - e^{-\frac{1}{12}\times 18} \\
&\simeq 0{,}777
\end{aligned}
$$

Utilisation d'Excel

La fonction suivante est disponible : $P(X \leq k) \rightarrow$ LOI.EXPONENTIELLE.N(k; λ;vrai)

29.2.3 Loi normale

La **loi normale** appelée aussi loi de Laplace-Gauss, est la loi de probabilité la plus courante pour les variables aléatoires continues. Une loi normale est entièrement définie par son espérance μ et son écart-type σ. On note alors cette loi $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$, ou aussi $\mathcal{N}(\mu;\sigma)$. Cette loi convient bien pour représenter des résultats qui s'accumulent autour d'une moyenne de façon symétrique avec une fréquence qui décroît rapidement en s'éloignant de cette moyenne. On utilise souvent cette loi pour décrire des phénomènes tels que :

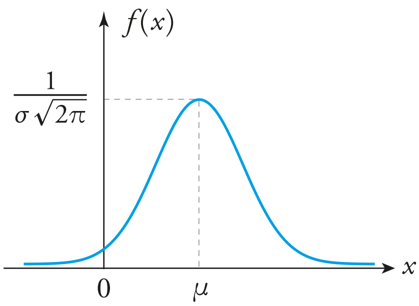
- la variation de longueur ou de diamètre de pièces fabriquées,
- les erreurs commises lors de la mesure de grandeurs physiques,
- la distribution de la taille des personnes d'une population donnée.

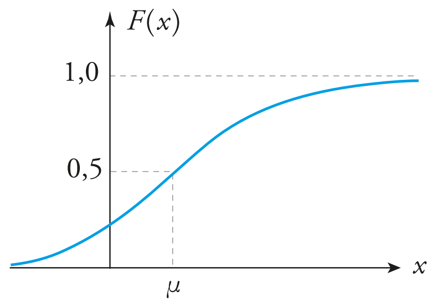
La fonction de densité de la loi normale est donnée, pour toute valeur de x par :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

La fonction de répartition de la loi normale se définit par :

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$





Il n'existe pas une formule pour la fonction de répartition de la loi normale, comme c'est du reste le cas de certaines lois discrètes. On doit dans ce cas utiliser soit :

- une table standardisée donnant des valeurs approchées de la fonction de répartition.
- des fonctions intégrées dans Excel ou la calculatrice TI-84

Table standardisée : Loi normale centrée réduite

Il faut commencer par faire la transformation affine suivante :

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Cette transformation conduit à une nouvelle variable aléatoire Z, d'espérance nulle et d'écart-type 1. Cette nouvelle loi est appelée **loi normale centrée réduite** $\mathcal{N}(0;1)$.

Si l'on note $\Phi(x)$ sa fonction de répartition, alors il est possible de calculer en utilisant la table en annexe :

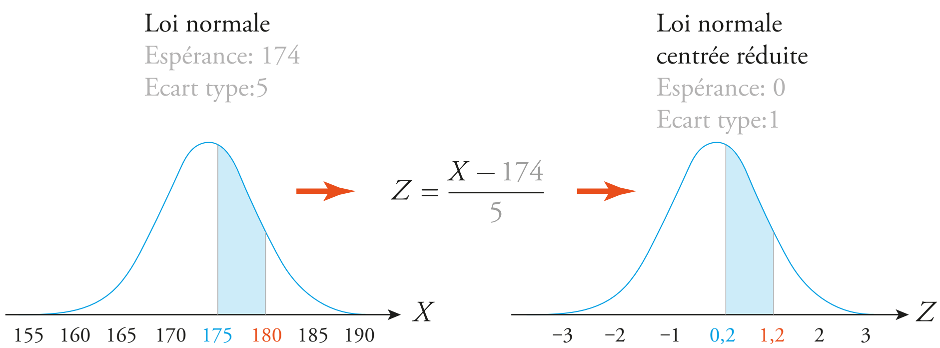
- $P(a \leq X \leq b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{b-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$
- $P(X \leq b) = P\left(Z \leq \frac{b-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)$

Exemple 29.5

Dans une classe, la taille moyenne des élèves est de 174 cm avec un écart-type de 5 cm. En supposant que la taille des élèves soit distribuée normalement, quelle est la probabilité qu'un élève pris au hasard mesure entre 175 cm et 180 cm ?

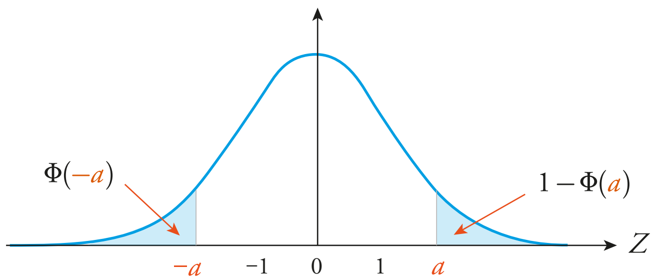
Solution

$$\begin{aligned}
P(175 < x < 180) &= P\left(\frac{175-174}{5} < Z < \frac{180-174}{5}\right) \\
&= P(0,2 < Z < 1,2) \\
&= \Phi(1,2) - \Phi(0,2) \\
&= 0,8849 - 0,5793 \simeq 0,3057
\end{aligned}$$



Pour les valeurs négatives de la variable aléatoire, on utilise le fait que cette loi est symétrique par rapport à l'axe des y, ce qui permet d'écrire :

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$



Exemple 29.6

Des études statistiques ont permis de modéliser la durée de vie, en mois, d'un type de lave-linge par une variable aléatoire X suivant une loi normale de moyenne 80 et d'écart type 5. Calculer la probabilité qu'un lave-linge neuf ne dépasse pas 75 mois.

Solution

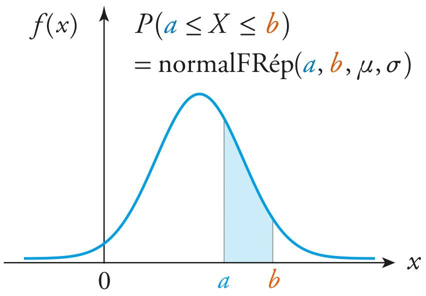
On cherche : $P(X \leq 75)$. En utilisant la transformation affine $Z = \dfrac{X-80}{5}$, on obtient :

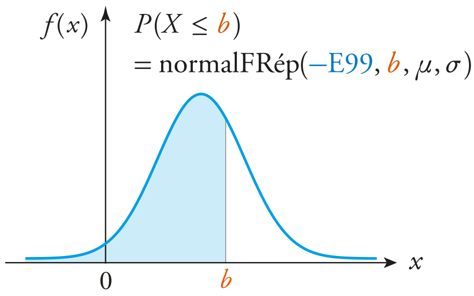
$$\begin{aligned} P(X \leq 75) &= P\left(Z \leq \frac{75-80}{5}\right) && \text{variable } Z \text{ centrée réduite} \\ &= P(Z \leq -1) = \Phi(-1) && \text{valeur de } Z \text{ négative} \\ &= 1 - \Phi(1) && \text{propriété } \Phi(-x) = 1 - \Phi(x) \\ &= 1 - 0{,}8413 \simeq 0{,}1587 \end{aligned}$$

Loi normale centrée réduite
Comment montrer que la densité totale vaut 1 ?

Utilisation de la calculatrice TI 84 Plus

Les deux probabilités suivantes peuvent être définies (touches 2nd + distr) :





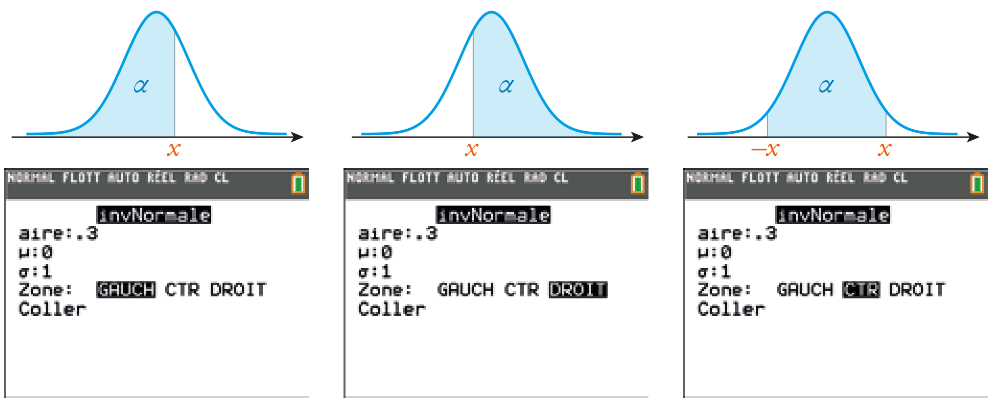
Exemple 29.7

Dans une classe, la taille moyenne des élèves est de 174 cm avec un écart-type de 5 cm. En supposant que la taille des élèves soit distribuée normalement, quelle est la probabilité qu'un élève pris au hasard mesure entre 175 cm et 180 cm ?

Solution

$$P(175 \leq X \leq 180) = \text{normalFRép}(175, 180, 174, 5) \simeq 0,3057$$

La calculatrice fournit également la fonction réciproque **invNormale**, donnant la ou les valeurs de X correspondant à la probabilité donnée α (aire sous la courbe), par exemple 0,3 :



Utilisation d'Excel

Sous Excel, les fonctions suivantes sont disponibles :

- $P(X \leq b) \rightarrow$ LOI.NORMALE.N(b; μ; σ ;vrai) — fonction de répartition
- Fonction réciproque $\rightarrow$ LOI.NORMALE.INVERSE.N(α; μ; σ) — valeur α donnant l'aire à gauche

Exercices d'application de la section 29.2

7 [Balance] Une balance indique une erreur en grammes pouvant être représentée par une variable aléatoire X de densité :

$$f(x) = \begin{cases} 0,1 & \text{si } -4 \leq x \leq 6 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(a) Quelle est la probabilité d'une erreur positive ?

(b) Quelle est la probabilité d'une erreur inférieure à 2 grammes ?

(c) Quelle est la probabilité d'une erreur supérieure à 3 grammes ?

8 [Cafétéria] Chaque jour, Jean-Pierre prend son repas de midi à la cafétéria de 12H à 12H30. Sa collègue Laura, quant à elle, prend son repas de midi à la cafétéria aléatoirement entre 11H45 et 13H15.

(a) Quelle est la probabilité que Jean-Pierre et Laura se croisent ?

(b) Ce jeudi, Laura n'est pas à la cafétéria à 12H15, quelle est la probabilité que les deux collègues se croisent ?

(c) Si vous posez la question à Veronica qui travaille à la cafétéria, elle vous répondra que Laura prend habituellement son repas aux alentours de...

9 [Loi uniforme] Soit une loi uniforme continue X définie sur l'intervalle $[a; b]$.

(a) Déterminer son espérance mathématique $E(X)$

(b) Déterminer sa variance $V(X)$

10 [Loi uniforme] Une variable aléatoire de variance 1 est définie avec une densité constante sur l'intervalle $[-a; a]$. Calculer :

(a) la valeur de a,

(b) la fonction de répartition,

(c) la moyenne

(d) la médiane

11 [Loi exponentielle] Le temps en heures pour réparer un moteur est une variable exponentielle X. Le temps moyen de réparation est de 2 heures.

(a) Quelle est la probabilité qu'il faille plus que 2 heures pour réparer un moteur ?

(b) Quelle est la probabilité qu'une réparation prenne plus de 5 heures étant donné que le mécanicien a déjà effectué plus de 4 heures de réparation ?

12 [Loi exponentielle] Le temps en heures avant la première panne d'une machine de chantier est une variable aléatoire dont la fonction de répartition est définie par :

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & \text{si } x \geq 0 \\ 0, & \text{si } x < 0 \end{cases} \qquad \text{avec } \lambda > 0$$

(a) Déterminer la fonction de densité $f(x)$

(b) Par expérience, 40% des machines tombent en panne avant 1000 heures d'utilisation. Quelle est la probabilité que la première panne ne se produise pas avant 2000 heures d'utilisation ?

13 [Loi exponentielle] ne variable aléatoire a une densité définie par :

$$f(x)\begin{cases} \lambda e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \quad \text{et } \lambda > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Calculer :

(a) la valeur de λ,

(b) la fonction de répartition,

(c) la moyenne et la variance

(d) la médiane de cette distribution

14 [Loi exponentielle] Soit une variable aléatoire exponentielle X de paramètre λ. Montrer que cette loi est sans mémoire, c'est-à-dire :

$$P(X > s + t \mid X > t) = P(X > s)$$

15 [Loi exponentielle] Une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Déterminer λ sachant que $P(1 < X < 2) = 0,25$.

16 [Loi exponentielle] La durée de vie T, en heures, d'une lampe frontale est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle. La probabilité que cette lampe fonctionne encore après 5 heures est de 0,9. Calculer la durée d pour laquelle la probabilité qu'elle fonctionne encore soit de 0,8.

17 [Loi normale] On donne une loi normale centrée réduite. Calculer les probabilités suivantes en faisant usage de la table en annexe.

(a) $P(X > 1,2)$

(b) $P(X \leq 1,02)$

(c) $P(X > -1,8)$

(d) $P(X \leq -0,5)$

(e) $P(-1,645 < X < 1,645)$

(f) $P(|X| > 2,326)$

18 [Loi normale] On donne une loi normale centrée réduite. Calculer les probabilités suivantes en faisant usage de la table en annexe.

(a) $P(X > 1,75)$

(b) $P(X \leq 1,645)$

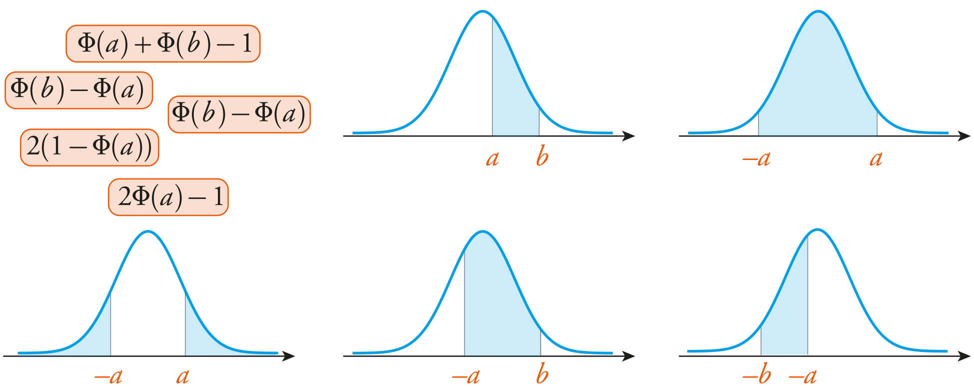
(c) $P(X > -3)$

(d) $P(-2 \leq X \leq 0)$

(e) $P(|X| < 1,96)$

(f) $P(X > 1,255)$

19 [Loi normale] Associer la bonne étiquette à la fonction de densité correspondante.



20 [Loi normale] On donne une loi normale centrée réduite. Calculer les probabilités suivantes en faisant usage de la table en annexe.

(a) $P(0,45 < X < 1,75)$

(b) $P(-2 < X < 1)$

(c) $P(-1,52 \leq X \leq -0,52)$

(d) $P(|X| < 1,48)$

21 [Loi normale] On donne une loi normale $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) = \mathcal{N}(50, 20)$. Calculer les probabilités suivantes en faisant usage de la table en annexe.

(a) $P(X > 60)$

(b) $P(X \leq 45)$

22 [Loi normale] On donne une loi normale $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) = \mathcal{N}(100, 64)$. Calculer les probabilités suivantes en faisant usage de la table en annexe.

(a) $P(|X-100| < 15)$

(b) $P(|X-100| > 5)$

(c) $P(10 < X-100 < 18)$

23 [Loi normale inverse] On donne une loi normale centrée réduite. Calculer la valeur de a en faisant usage de la table en annexe.

(a) $P(X < a) = 0,877$

(b) $P(X > a) = 0,33$

(c) $P(X > a) = 0,719$

(d) $P(|X| < a) = 0,9$

24 + [Loi normale inverse] On donne une loi normale centrée réduite. Calculer la valeur de a en faisant usage de la calculatrice et d'Excel.

(a) $P(X < a) = 0,8$

(b) $P(X > a) = 0,3$

(c) $P(X > a) = 0,7$

(d) $P(|X| > a) = 0,1$

25 [Devoirs] Un prof de mathématiques estime que le temps en minutes, consacré quotidiennement par un élève à faire ses exercices de mathématiques, est une variable aléatoire X suivant une loi normale d'espérance 40 minutes et d'écart type 12 minutes. Déterminer la probabilité qu'un élève consacre quotidiennement moins d'une heure à faire ses exercices de mathématiques.

26 [Avoir bancaire] La somme que Martin a sur son compte en banque (en milliers de frs) est donnée par une variable aléatoire $X \sim \mathcal{N}(0,1)$.

(a) Quelle est la probabilité que son compte soit à découvert ?

(b) Quelle est la probabilité qu'il ait entre 250 et 500 frs sur son compte ?

(c) Quelle est la probabilité qu'il soit à découvert entre 250 et 500 frs ?

(d) S'il est à découvert, Martin reçoit un SMS de sa banque. Déterminer la probabilité qu'il soit à découvert de plus de 500 frs sachant qu'il a reçu un SMS ?

27 [Taille d'individus] La taille des individus dans une entreprise est distribuée normalement avec une moyenne de 1,72 m et un écart type de 9 cm.

(a) Si 80% des individus ont une taille inférieure à T, trouver la valeur de T.

(b) Si 70% des individus ont une taille supérieure à T, trouver la valeur de T.

28 [Écart interquartile] Une variable aléatoire X est distribuée normalement avec une espérance mathématique de 400 et une variance de 64.

(a) Calculer la valeur de a de telle sorte que $P(|X| < a) = 0,95$

(b) Calculer l'écart interquartile $Q = Q_3 - Q_1$

29 [Recherche de σ] La durée de vie, en mois, d'un appareil ménager est distribué normalement avec une moyenne 84 et d'écart-type inconnu. Si 16% des appareils tombent en panne avant 64 mois, trouver l'écart type σ.

30 [Recherche de μ et σ] La masse (X) des caisses de vendange remplies de raisins est distribuée normalement : $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Si 40% des caisses ont une masse supérieure à 16 kg et 20% une masse supérieure à 19 kg, estimer l'espérance et l'écart type de cette variable aléatoire.

29.3 Approximations et sommes de variables aléatoires

29.3.1 Approximations de certaines lois discrètes

La loi binomiale et la loi de Poisson peuvent être approximées par une loi normale, mais sous certaines conditions mentionnées ci-après :

Loi	Approximation	Paramètre	Conditions
Binomiale $\mathscr{B}(n;p)$	Normale $\mathscr{N}(\mu;\sigma)$	$\mu = np$ $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$	$n \geq 30; np \geq 15; np(1-p) > 5$
Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$	Normale $\mathscr{N}(\mu;\sigma)$	$\mu = \lambda$ $\sigma = \sqrt{\lambda}$	$\lambda \geq 15$

Ces approximations entraînent une difficulté due au fait que, pour une loi continue, la probabilité $P(X = x)$ est nulle, ce qui n'est pas forcément vrai pour les lois discrètes. On effectue alors une **correction de continuité** en définissant un intervalle autour de la probabilité cherchée. Ainsi, pour une loi discrète X approximée par une loi continue Y on a :

Correction de continuité :

- $P(X = k) \simeq P(k - 0,5 \leq Y \leq k + 0,5)$
- $P(a \leq X \leq b) \simeq P(a - 0,5 \leq Y \leq b + 0,5)$
- $P(a < X < b) \simeq P(a + 0,5 \leq Y \leq b - 0,5)$

Exemple 29.8

Soit une loi de Poisson $X \sim \mathscr{P}(\lambda = 40)$, calculer $P(X = 30)$ en utilisant une première fois la loi de Poisson, puis en utilisant une approximation par la loi normale.

Solution

(a) *Utilisation de la loi de Poisson*

$$\begin{aligned} P(X = 30) &= \text{poissonFdp}(40, 30) \\ &\simeq 0,018465 \end{aligned}$$

(b) *Approximation par la loi normale*
Les conditions sont remplies car $\lambda > 15$, ainsi

$$\mu = \lambda = 40 \qquad \text{et} \qquad \sigma = \sqrt{\lambda} = \sqrt{40} \quad \rightarrow \quad Y \sim \mathscr{N}(40; \sqrt{40})$$

$$\begin{aligned} P(X = 30) &= P(29,5 \leq Y \leq 30,5) \\ &= \text{normalFRép}(29.5, 30.5, 40, \sqrt{40}) \\ &\simeq 0,0181 \end{aligned}$$

Exemple 29.9

Soit une loi binomiale $X \sim \mathscr{B}(40; 0,7)$, calculer $P(20 \leq X \leq 30)$ en utilisant une première fois la loi binomiale, puis en utilisant une approximation par la loi normale.

Solution

(a) *Utilisation de la loi binomiale*

$$\begin{aligned} P(20 \leq X \leq 30) &= P(19 < X \leq 30) \\ &= F(30) - F(19) \\ &= \text{binomFRép}(40, 0.7, 30) - \text{binomFRép}(40, 0.7, 19) \\ &\simeq 0,801655 \end{aligned}$$

(b) *Approximation par la loi normale*

Les conditions sont remplies car $n > 30$, $np > 15$ et $np(1-p) > 5$, ainsi

$$\mu = np = 28 \qquad \text{et} \qquad \sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{8,4} \quad \rightarrow \quad Y \sim \mathcal{N}(28; \sqrt{8,4})$$

$$\begin{aligned} P(20 \leq X \leq 30) &= P(19,5 \leq Y \leq 30,5) \\ &= \text{normalFRép}(19.5, 30.5, 28, \sqrt{8,4}) \\ &\simeq 0,80414 \end{aligned}$$

29.3.2 Sommes de variables aléatoires indépendantes

Il arrive que l'on doive déterminer certaines fois la loi d'une somme ou d'une combinaison linéaire de variables aléatoires indépendantes.

Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes ou continues, et a, b deux constantes, alors :

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y) \qquad \text{Toujours vrai}$$

$$V(aX + bY) = aV(X) + bV(Y) \qquad \text{Uniquement si } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes}$$

Exemple 29.10

John note au hasard le chiffre un, deux, ou trois sur une feuille. Marc, lui note au hasard le chiffre deux ou trois sur une autre feuille. On définit les deux variables aléatoires indépendantes suivantes :

- X = chiffre de John
- Y = chiffre de Marc

(a) Calculer l'espérance et la variance des deux lois séparées.

(b) Établir la loi de $Z = X + Y$

(c) Calculer $E(Z)$ et $V(Z)$

Solution

(a) X et Y sont deux lois uniformes.

$$E(X) = \frac{1+3}{2} = 2 \qquad E(Y) = \frac{2+3}{2} = 2,5$$

$$V(X) = \frac{3^2-1}{12} = \frac{8}{12} \qquad V(X) = \frac{2^2-1}{12} = \frac{3}{12}$$

(b) Loi de $Z = X + Y$

z_i	3	4	5	6
p_i	1/6	2/6	2/6	1/6

(c)

$$E(Z) = \sum z_i p_i = 4,5 \quad E(Z^2) = \sum z_i^2 p_i = 127/6 \quad \text{et}$$

$$V(Z) = 127/6 - 4,5^2 = \frac{11}{12}$$

On a bien $E(Z) = 2 + 2,5 = 4,5$ et $V(Z) = \frac{8}{12} + \frac{3}{12} = \frac{11}{12}$

Somme de deux variables binomiales indépendantes de même probabilité

Si $X \sim \mathscr{B}(n_1, p)$ et $Y \sim \mathscr{B}(n_2, p)$, alors $X + Y \sim \mathscr{B}(n_1 + n_2, p)$

Ce résultat peut être étendu à plus de deux variables binomiales.

Exemple 29.11

On désigne par X, la variable aléatoire représentant le nombre de «pile» obtenus par Jean sur 20 lancers d'une pièce et par Y, la variable aléatoire représentant le nombre de «pile» obtenus par Odette sur 10 lancers d'une autre pièce. Déterminer la loi de $X + Y$ et donner son espérance.

Solution

$X \sim \mathscr{B}(20, 0.5)$ et $Y \sim \mathscr{B}(10, 0.5)$. La loi de $Z = X + Y$ est donnée par :

$$Z \sim \mathscr{B}(20 + 10, 0.5) = \mathscr{B}(30, 0.5)$$

$$E(Z) = E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 20 \times 0,5 + 10 \times 0,5 = 15$$

Somme de deux variables de Poison indépendantes

Si $X \sim \mathscr{P}(\lambda_1)$ et $Y \sim \mathscr{P}(\lambda_2)$, alors $X + Y \sim \mathscr{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$

Ce résultat peut être étendu à plus de deux variables de Poisson.

Exemple 29.12

La police cantonale place chaque samedi un radar sur une des petites routes du canton. On suppose que le nombre de contraventions émises au courant d'un samedi est une variable aléatoire de Poisson de moyenne 4. Quelle est la probabilité que le nombre de contraventions enregistrées sur l'année (52 samedis) dépasse 200 ?

Solution

Pour chaque samedi n°i : $X_i \sim \mathscr{P}(\lambda = 4)$.
Ainsi : $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_{52}$. Donc Y est distribué comme suit :

$$Y \sim \mathscr{P}(52 \times 4) = \mathscr{P}(208)$$

Ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned} P(> 200) &= 1 - P(Y \leq 200) \\ &= 1 - \text{poissonFRép}(208, 200) \simeq 0,6955 \end{aligned}$$

Somme de deux variables normales indépendantes

Si $X \sim \mathscr{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ et $Y \sim \mathscr{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$, alors $X + Y \sim \mathscr{N}\left(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2\right)$

Ce résultat peut être étendu à plus de deux variables normales.

Exemple 29.13

La masse d'un certain article est normalement distribuée avec une moyenne de 500 g et un écart type de 25 g. Si l'on conditionne 60 articles identiques, quelle est la probabilité que l'envoi dépasse les 30 kg, y compris l'emballage de 60 g ?

Solution

$Y \sim \mathscr{N}(60 \times 500, 60 \times 25^2) = \mathscr{N}(30\,000, 37\,500)$

$$\begin{aligned} P(Y > 29\,940) &= 1 - P(Y < 29\,940) \\ &= 1 - \text{normalFRép}(-1E99, 29\,940, 30\,000, \sqrt{37500}) \simeq 0,622 \end{aligned}$$

Exercices d'application de la section 29.3

31 [Approximation] Une ville compte environ 40% de population étrangère. On sélectionne au hasard 150 habitants de cette ville. Quelle est la probabilité de trouver plus de 60 personnes étrangères dans l'échantillon ainsi constitué,

(a) en utilisant une loi binomiale ?

(b) en utilisant une loi normale ?

32 [Absentéisme] Une entreprise emploie 240 salariés. On admet que la probabilité pour qu'un salarié soit absent une semaine donnée est égale à 5%. Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre de salariés absents une semaine donnée. Quelle est la probabilité que le nombre de salariés absents dans l'entreprise au cours d'une semaine donnée soit supérieur ou égal à 8 et inférieur ou égal à 12,

(a) en utilisant une loi binomiale ?

(b) en utilisant une loi normale ?

33 [Approximation] $X \sim \mathscr{P}(30)$. Utiliser l'approximation normale pour évaluer :

(a) $P(X \leq 27)$

(b) $P(27 < X < 33)$

(c) $P(X > 32)$

(d) $P(X = 32)$

34 [Fabrication] Une usine fabrique des plaques d'aluminium. On estime à 0,1% la proportion de plaques inutilisables. On note X la variable aléatoire représentant le nombre de plaques inutilisables parmi un échantillon de 2000 plaques.

(a) Quelle est la loi de X ?

(b) En utilisant une approximation normale, évaluer la probabilité qu'il y ait moins de 3 plaques inutilisables.

35 [Ascenseur] L'ascenseur d'un immeuble indique : MAX : 4 personnes - 320 kg. Si cette charge est dépassée l'ascenseur ne démarre pas. 3 femmes et 2 hommes rentrent simultanément dans l'ascenseur. Quelle est la probabilité que l'ascenseur ne démarre pas ? Le poids des hommes est distribué normalement avec μ =75 kg et σ =5 kg. Celui des femmes est distribué normalement avec μ =60 kg et σ =3 kg.

36 [Triathlon] Denis, Alfred et Joseph veulent participer au prochain triathlon de la région, par équipe, en relais. Chacun s'est entraîné dans sa discipline et les temps individuels, distribués normalement, sont résumés dans le tableau ci-après :

Prénom	Denis	Alfred	Joseph
Discipline	Natation : 500 m	Vélo : 20 km	Course : 5 km
Temps moyen	12:34	38:15	29:40
Ecart type	±1:20	±2:15	±1:40

Quelle est la probabilité que leur équipe puis boucler le parcours en moins d'une heure et vingt minutes ?

29.4 Problèmes et exercices de synthèse

37 [Retards des trains] Dans une compagnie de trains, les retards à l'arrivée des trains suivent une loi uniforme T entre 10 et 15 minutes. La compagnie s'engage à rembourser une somme X en fonction du retard T c'est-à-dire par $X = \beta T$. Quelle valeur faut-il donner à β de telle sorte que le coût moyen d'un retard par voyageur n'excède pas 24 ?

38 [Intervalle] On choisit au hasard un nombre réel x dans l'intervalle $[0;10]$. Quelle est la probabilité que x soit solution de l'inéquation $x^2 - 4x + 3 > 0$?

39 [Garantie] Un magasin de télévision offre une garantie d'une année sur tous ses modèles. Il estime que le temps, en années, avant la première panne est une variable aléatoire X dont la densité est définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0,25 \cdot e^{-0,25x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(a) Quel pourcentage d'appareils sera réparé durant la période de garantie ?

(b) Une vente rapporte en moyenne 350 frs et le coût de la réparation est de 250 frs. Quel est le profit unitaire moyen réalisé par ce magasin ?

40 [Garantie] Un appareil neuf est garanti pour 1 an. Sa durée de vie en années est une variable exponentielle de moyenne égale à 3 ans. Le profit réalisé par la vente de l'appareil est de 1000 frs et le coût de réparation de 250 frs.

(a) Quel est le profit unitaire moyen ?

(b) Jusqu'à quelle limite de temps peut-on étendre la garantie pour réaliser un profit moyen unitaire de 800 frs ?

41 [Arrivées] Dans une petite station service, les automobilistes y arrivent à un taux moyen de 6 à l'heure. On considère que ces arrivées se comportent comme un processus de Poisson. Pendant une période donnée de 2 heures, quelle est la probabilité que se présentent 8 automobilistes à cette station service ? Faire le calcul :

(a) en utilisant la loi de Poisson

(b) en utilisant une approximation par la loi normale

42 [Épaisseur de pièces] Une machine fabrique des petites pièces de précision. On admet que la variable aléatoire X qui, à chaque pièce traitée, associe son épaisseur suit une loi normale de moyenne 30 μm et d'écart type 1,2 μm. Une pièce est défectueuse si son épaisseur est inférieure à 28,5 μm ou supérieure à 31,5 μm.

(a) Quelle est la probabilité qu'une pièce soit défectueuse ?

(b) Déterminer la valeur k pour que 82% des pièces aient une épaisseur entre $30 - k$ et $30 + k$.

43 [Durée de vie] Un jouet électronique est fabriqué en grande série. La durée de vie X, en heures, d'un tel jouet peut être modélisée par une variable aléatoire normale $\mathcal{N}(20;5)$.

(a) Calculer $P(X > 28)$

(b) Déterminer la valeur réelle positive x telle que $P(|X-20| > x) = 0,08$

(c) Calculer $P(X < 20 \,|\, X > 15)$

44 [Longueur de pièces] Une machine usine des pièces de métal dont la longueur X suit une loi normale $\mathcal{N}(34;0,15)$. Une pièce est considérée comme défectueuse si sa longueur est inférieure à 33,7 mm ou supérieure à 34,3 mm.

(a) Calculer la probabilité qu'une pièce soit défectueuse.

(b) Déterminer les cotes d'alerte $\mu - k$ et $\mu + k$ pour que $P(\mu - k < X < \mu + k) = 0,95$

45 [Montant des achats] Un fabricant commercialise des vêtements. On note Y la variable aléatoire qui, à chaque client, choisi au hasard, associe le montant total de ses achats en francs. On suppose que Y suit une loi normale $N(\mu;\sigma)$. Une étude statistique réalisée sur un grand nombre de clients a permis d'établir que $\mu = 550$ et $\sigma = 195$. Le fabricant décide, au cours d'une campagne promotionnelle, d'accorder une remise aux clients dont le montant des achats est suffisamment élevé. À partir de quel montant, 5% des clients bénéficieront-ils de cette remise ?

46 [Réglage machine] Sur une chaîne de production automatique, une machine traite 65 pièces par minute. Si la machine nécessite un réglage, elle doit alors être arrêtée. Par expérience, l'entreprise a constaté que la durée en minutes d'un réglage suit une loi normale $\mathcal{N}(5;1)$. Chaque pièce non fabriquée représente un manque à gagner de 0,4 frs. Quel est le manque à gagner moyen que représente un réglage de la machine ?

47 [Temps de trajet] Une entreprise a mesuré le temps, en minutes, que mettent ses employés pour se rendre au travail le matin. Dans un compte rendu, on peut lire que 35% des employés mettent moins de 30 minutes et que 20% plus de 40 minutes. Sur la base de ces informations et en supposant que la durée du trajet suit une loi normale $N(\mu;\sigma)$, déterminer les paramètres μ et σ.

48 [Durée de vie] Un horloger a fait une commande d'un lot de piles en vrac composé d'environ 80% de piles standard dont la durée de vie en années suit une loi exponentielle de paramètre $0,5$ et de 20% de piles au lithium-iode dont la durée de vie en années suit une loi exponentielle de paramètre $0,2$. Si une montre fonctionne toujours après 3 ans, quelle est la probabilité qu'elle ait été équipée d'une pile standard ?

49 [Table de la loi normale] Avec un tableur, une table de la loi normale centrée réduite peut être construite assez rapidement. Dans cet exercice, on demande de reproduire cette table comme présentée en annexe. Quelle formule doit-on introduire en B2 afin de rendre une recopie des cellules facilitée ?

	A	B	C	D	E	F
1	x	0	1	2	3	4
2	0.0					
3	0.1					
4	0.2					

50 [Black-Sholes] En finance, la formule de **Black-Scholes** permet de calculer la valeur théorique C d'une option d'achat européenne à partir des cinq données suivantes :

- S_0 la valeur actuelle de l'action sous-jacente,
- t le temps en années qui reste à l'option avant son échéance,
- K le prix d'exercice fixé par l'option,
- r le taux d'intérêt sans risque,
- σ la volatilité du prix de l'action

La formule permettant de calculer C est la suivante :

$$C = S_0 \mathscr{N}(d_1) - K e^{-rt} \mathscr{N}(d_2)$$

Dans cette formule $\mathscr{N}$ représente la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. d_1 et d_2 sont donnés par :

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{t}}\left[\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)t\right] \qquad \text{et} \qquad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t}$$

La valeur actuelle d'une action est de 42 frs, le prix d'exercice de 40 frs, le taux d'intérêt sans risque de 10% et la volatilité de 20%. Calculer le prix théorique C de l'option d'achat sachant qu'il reste 6 mois avant son échéance.

51 [Défi] Une variable aléatoire continue est définie comme suit :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{13} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Si $a + b = 23$, que vaut $a \times b$?

Chapitre 30

Notions d'inférence statistique

Objectifs du chapitre

- comprendre les principes de l'inférence statistique.
- montrer les erreurs d'interprétation possibles d'un test statistique.
- savoir calculer des intervalles de fluctuation et de confiance.
- savoir réaliser un test statistique simple dans une situation bilatérale.
- comprendre les erreurs d'interprétation possibles d'un test statistique.
- savoir réaliser un test du «khi carré» pour tester l'indépendance de 2 variables statistiques.

Remarque préliminaire

Ce chapitre constitue une introduction à l'inférence statistique. L'objectif de ce chapitre n'est pas d'accumuler des techniques, mais de comprendre le sens des procédures permettant de réaliser des intervalles de confiance et de fluctuation ainsi que quelques tests statistiques simples utilisés en pratique, notamment le test d'indépendance du Khi-deux.

30.1 Principe de l'inférence statistique

Pour faire simple, on dira que l'**inférence** statistique consiste à induire [1] les **paramètres** inconnus d'une population, en général une moyenne ou une proportion, à partir d'une **statistique** effectuée sur un échantillon issu de cette population. En d'autres termes, les caractéristiques de l'échantillon, une fois connues, reflètent avec une certaine marge d'erreur possible celles de la population.

Prenons, par exemple, un échantillon de personnes dans les rues de Lausanne et posons leur la question : «Fumez-vous ?» Si 32% des personnes interrogées disent fumer on pourrait inférer

1. L'induction est le nom utilisé pour signifier un genre de raisonnement qui consiste à chercher des lois générales à partir de l'observation de faits particuliers.

(ou induire) que 32% de la population suisse par exemple fume. Il s'agit ici d'une estimation dite **ponctuelle**. Ce résultat peut s'avérer loin de la valeur réelle, pour différentes raisons :

- parce que l'échantillon peut être de taille trop petite, si par exemple seules 10 personnes sont interrogées.
- le lieu du sondage, si par exemple il est effectué à la sortie d'un pub, où se retrouve une plus grande concentration de fumeurs.
- ou tout simplement la malchance (ou erreur d'échantillonnage) d'être tombé sur des personnes plutôt fumeuses.

30.1.1 Intervalle de confiance

Pour compléter l'estimation ponctuelle qui conduit à une estimation trop peu précise, on recours alors à l'**intervalle de confiance**, c'est-à-dire une fourchette de valeurs à l'intérieur de laquelle on a une forte probabilité ou **niveau de confiance**, 95% par exemple, de trouver la vraie valeur recherchée.

Ainsi, un intervalle de confiance à 95% donnera un encadrement correct 95 fois sur 100 en moyenne. En d'autres termes, si l'on pouvait répéter des estimations de même nature un grand nombre de fois, en affirmant à chaque fois que le paramètre à estimer se trouve dans cet intervalle, on se tromperait en moyenne 5 fois sur cent. Plus on souhaite un niveau de confiance élevé, plus il faudra donc agrandir l'intervalle de confiance.

30.1.2 Tests d'hypothèses

Liés aux estimations par intervalles, on trouve les **tests statistiques** qui permettent de décider si les données confirment ou contredisent une opinion à priori concernant la valeur d'un paramètre de la population (la moyenne par exemple).

On réalise un test en commençant par énoncer une *hypothèse nulle* (notée H_0) qu'on pense être vraie ou pas prouvée. À cette hypothèse nulle on lui oppose une *hypothèse alternative* (notée H_1).

Par exemple, dans un essai clinique d'un nouveau médicament, où on prétend que le nouveau médicament est meilleur que l'ancien, on pourrait présenter les deux hypothèses comme suit :

- H_0 : Il n'y a aucune différence en moyenne entre les deux médicaments.
- H_1 : Le nouveau médicament est meilleur, en moyenne, que le médicament actuel.

Une hypothèse alternative peut être **unilatérale** ou **bilatérale**. Une hypothèse unilatérale indique qu'un paramètre est plus grand ou plus petit que la valeur donnée par l'hypothèse nulle. Une hypothèse bilatérale indique qu'un paramètre n'est simplement pas égal à la valeur donnée par l'hypothèse nulle.

Exemple 30.1

Le contenu moyen d'une substance dans un certain médicament est normalement de $\mu = 2$ gr. L'hypothèse nulle est donc : $H_0 : \mu = 2$. Selon que le test est unilatéral ou bilatéral, l'hypothèse alternative H_1 est la suivante :

Test bilatéral	$H_1 : \quad \mu \neq 2$
Test unilatéral	$H_1 : \quad \mu < 2 \quad$ ou $\quad H_1 : \quad \mu > 2$

30.1.3 Les risques d'erreur

Il est malheureusement toujours possible de commettre des erreurs. En faisant une comparaison de deux médicaments, on peut en arriver à de fausses conclusions de deux façons :

- conclure qu'il existe une différence entre les médicaments alors qu'en réalité, il n'y en a pas.
- conclure à tort que les médicaments s'équivalent alors qu'en fait, un d'entre eux est supérieur.

D'une façon plus générale on dira qu'il y a deux façons de se tromper lors d'un test statistique :

- la possibilité de rejeter à tort l'hypothèse nulle lorsqu'elle est vraie. On appelle ce risque l'**erreur de type I** et en général on note α la probabilité de se tromper dans ce sens.
- la possibilité d'accepter à tort l'hypothèse nulle lorsqu'elle est fausse. On appelle ce risque l'**erreur de type II** et en général on note β la probabilité de se tromper dans ce sens.

Pour simplifier, on peut considérer l'erreur de type I comme étant celle qui consiste à condamner un innocent et l'erreur de type II comme celle de laisser un coupable en liberté. α et β peuvent être alors vues comme des probabilités conditionnelles :

$$\alpha = P(\text{rejeter } H_0 \; / \; H_0 \text{ est vrai})$$
$$\beta = P(\text{accepter } H_0 \; / \; H_0 \text{ est faux})$$

30.1.4 Notations et hypothèses de travail

Notations

Selon qu'on travaille à partir d'un échantillon de la population étudiée ou que l'on fait référence à la population elle-même, on utilise les notations suivantes : [2]

2. Ces notations diffèrent selon les auteurs, mais en général les lettres grecques font normalement référence à la population.

Population		Echantillon	
Taille	N	Taille	n
Moyenne	μ	Moyenne	$\overline{x}$
Écart type	σ	Écart type	S
Proportion	π	Proportion	$f = n_i/n$

Remarque

En inférence statistique, lorsque l'on travaille sur des échantillons, on utilise l'**écart type échantillonnal**. Ce dernier servira alors d'**estimateur** de l'écart type de la population. L'écart type échantillonnal se calcule comme suit :

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n-1}} = \sigma \times \sqrt{\frac{n}{n-1}}$$ valeur Sx sur les calculatrices TI

Hypothèses de travail

Dans ce qui suivra on supposera ou vérifiera :

1. Que les échantillons sont constitués de façon aléatoire.
2. Que le tirage des éléments dans l'échantillon se fait avec remise.

30.2 Estimation et intervalle de confiance

30.2.1 Estimation d'une moyenne d'une population

On commence par utiliser la moyenne $\overline{x}$ comme estimateur de la moyenne μ. Cet estimateur est qualifié de bon estimateur. Mais il s'agit uniquement d'une estimation ponctuelle.

Pour construire une «fourchette de valeurs numériques permettant de situer» cette moyenne avec un niveau de confiance choisi, on utilise un intervalle de confiance qui se calcule comme suit :

$\overline{x} \pm$ Marge d'erreur (E) ou $\overline{x} \pm z \times \frac{S}{\sqrt{n}}$

Avec z obtenu en fonction du niveau de confiance souhaité :

Niveau de confiance	90%	95%	98%	99%
z	1,64	1,96	2,33	2,58

Conditions d'utilisation : $n \geq 30$

Exemple 30.2

La société suisse Gromatou SA fabrique des boîtes de conserves d'aliments pour chats. Pour le lancement de son nouveau produit, elle procède à une étude de marché lui donnant les résultats suivants : un échantillon de 100 propriétaires de chats choisis au hasard donne une dépense moyenne mensuelle consacrée à l'alimentation de l'animal de 25 frs et un écart type de 6 frs. Déterminez un intervalle de confiance à 90% de la moyenne des dépenses mensuelles pour l'alimentation des chats en Suisse.

Solution

- On connait : $\overline{x} = 25$, $\sigma = 6$ et $z = 1,64$
- L'écart-type estimé donne : $S = 6 \times \sqrt{\frac{100}{99}} \simeq 6,03$
- L'intervalle de confiance souhaité est : $25 \pm 1,64 \times \frac{6,03}{\sqrt{100}} = 25 \pm 0,98$, ou encore :

$$\mu \in [24,01\,;\,25,98]$$

Il y a donc 90% de chance pour que la moyenne des dépenses mensuelles pour l'alimentation des chats en Suisse se situe dans cet intervalle.

30.2.2 Estimation d'une proportion dans une population

On choisit un échantillon aléatoire de taille n dans lequel on observe une proportion quelconque : $f = n_i/n$.

On cherche alors à inférer (estimer) la proportion π dans la population entière.

On part donc de l'estimateur ponctuel f auquel on ajoute une marge d'erreur $\pm E$.

$$f \pm \text{Marge d'erreur (E)} \qquad \text{ou} \qquad f \pm z \times \sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}$$

Avec z obtenu en fonction du niveau de confiance souhaité :

Niveau de confiance	90%	95%	98%	99%
z	1,64	1,96	2,33	2,58

Conditions d'utilisation : $n \geq 30$ $\quad n \cdot f \geq 5$ $\quad n \cdot (1-f) \geq 5$

Exemple 30.3

Dans un échantillon de 650 personnes, on en trouve 182 qui se disent prêtes à voter pour un candidat donné aux prochaines élections. Construire un intervalle de confiance à 95% pour estimer la proportion de personnes qui voteront probablement pour ce candidat.

Solution

- On connait : $f = \dfrac{182}{650} = 0,28$ et $z = 1,96$.
- L'intervalle de confiance souhaité est :

$$0,28 \pm 1,96 \times \sqrt{\frac{0,28 \times 0,72}{650}} = 0,28 \pm 0,0176$$

ou encore sous forme d'intervalle :

$$\pi \in [0,245\ ;\ 0,315]$$

Il y a donc 95% de chance pour que la proportion de personnes qui voteront probablement pour ce candidat se situe dans cet intervalle.

Échantillon de 1067 personnes!
Pourquoi très souvent 1067 personnes sont-elles interrogées pour un sondage?

Exercices d'application de la section 30.2

1 [Échantillon] On donne les valeurs suivantes d'un échantillon :

$$1 \quad 5 \quad 7 \quad 3 \quad 4$$

(a) Calculer la moyenne de l'échantillon.
(b) Calculer σ
(c) Calculer l'écart type échantillonnal S.

2 et [Échantillon] On donne les mêmes valeurs que l'exercice 1 :

$$1 \quad 5 \quad 7 \quad 3 \quad 4$$

Calculer avec la calculatrice et Excel la moyenne $\overline{x}$, l'écart type σ ainsi que l'écart type échantillonnal S.

3 [Intervalle de confiance] Dans un échantillon de taille $n = 25$, on a trouvé une fréquence égale à $f = 0,72$. Indiquer si les conditions usuelles d'utilisation de l'intervalle de confiance au niveau de confiance 0,95 sont remplies et donner cet intervalle.

4 [Intervalle de confiance] Dans un échantillon de taille $n = 36$, on a trouvé une fréquence égale à $f = 0,15$.

(a) Indiquer si les conditions usuelles d'utilisation de l'intervalle de confiance au niveau de confiance 0,95 sont remplies.

(b) Si oui, donner cet intervalle.

5 [Intervalle de confiance] Dans un échantillon de 100 employés d'une usine, on trouve un âge moyen de 44 ans et un écart-type de 3 ans. En supposant que l'échantillon a été constitué de façon non-exhaustive (avec remise) estimer l'âge moyen de l'ensemble des employés au niveau de confiance de 95%.

6 [Intervalle de confiance] Dans une ville, pour déterminer le prix moyen du panier de la ménagère, on prélève un échantillon de 50 familles. On obtient un montant moyen de 123 frs avec un écart-type échantillonnal $S = 12$ frs. Estimer le prix moyen du panier à l'aide d'un intervalle de confiance de 95%.

7 [Contamination] Dans le cas d'une contamination d'un grand cheptel bovin par une bactérie, un vétérinaire observe 54 avortements pour 135 vaches gestantes. Quel risque d'avortement peut-il prédire dans le cheptel avec un niveau de confiance de 95% ?

8 [Accidents] Dans un échantillon de 150 ouvriers, on a établi la statistique d'accident suivante :

Nombre d'accidents annuels	0	1	2	3
Effectif	84	51	12	3

Estimer par intervalle de confiance à 95% la proportion d'ouvriers ayant subi au moins 1 accident dans l'année.

9 [Niveau de confiance faible] On dispose des valeurs suivantes issues d'une population :

8	10	7	10	8	8	11	10	8	9
10	10	8	8	7	8	8	10	11	9
9	10	11	13	9	8	8	7	8	6

(a) Donner une estimation ponctuelle de la moyenne de la population.

(b) Donner au niveau de confiance de 0% un intervalle de confiance de la moyenne de la population.

(c) Interpréter le résultat.

10 [Type d'erreur] Compléter le tableau suivant par les expressions suivantes : «Erreur de type I», «Erreur de type II» et «Bonne décision».

	Hypothèse H_0 vraie	Hypothèse H_0 fausse
Hypothèse H_0 acceptée		
Hypothèse H_0 refusée		

11 [Taille de l'échantillon] Dans un pays, on estime la proportion de personnes atteinte d'un virus à 30%. Quelle taille de l'échantillon doit-on utiliser si l'on veut estimer cette proportion avec une marge d'erreur de 2% pour un niveau de confiance de 95% ?

12 [Taille de l'échantillon] Quelle est la taille de l'échantillon d'une étude statistique si les valeurs suivantes ont été obtenues ?

$$\text{Écart type échantillonnal} = 84,32 \qquad \text{et} \qquad \text{Écart type de la population} = 84$$

13 [Psychologie] Des chercheurs ont soumis un questionnaire de psychologie à 150 enfants dyscalculiques tirés au sort. Le questionnaire comporte 20 questions et les chercheurs ont recueilli pour chaque enfant dyscalculique le nombre x_i de bonnes réponses. Les résultats ainsi récoltés sont tels que :

$$\sum x_i = 1500 \qquad \text{et} \qquad \sum x_i^2 = 19\,500$$

(a) Donner une estimation ponctuelle du nombre moyen de bonnes réponses dans la population étudiée.

(b) Donner une estimation ponctuelle de σ.

(c) Estimer le nombre moyen de bonnes réponses dans la population par un intervalle de confiance au niveau 99%.

(d) Quelle est la marge d'erreur dans l'estimation du nombre moyen de bonnes réponses au niveau 99% ?

14 [Assurance] Une compagnie d'assurance a mesuré sur un échantillon de 100 assurés le nombre de factures faisant l'objet de rappels :

Nombre de rappels	0	1	2 et plus
Nombre de factures	74	20	6

Estimer la proportion de bons payeurs au sein de la compagnie au moyen d'un intervalle au niveau de confiance de 98%.

30.3 Intervalle de fluctuation et test d'hypothèse

On utilise un **intervalle de fluctuation**[3] lorsque une moyenne μ ou une proportion π dans la population est donnée mais que l'on fait une hypothèse sur leur valeur à partir d'un échantillon. La moyenne $\overline{x}$ ou la fréquence f observée dans un échantillon «doit» alors appartenir à cet intervalle de fluctuation pour pouvoir valider l'hypothèse fixée.

Compte tenu de ce qui a été étudié dans la section précédente, on peut définir un intervalle de fluctuation pour une moyenne ou pour une proportion, comme suit :

- Intervalle de fluctuation d'une moyenne : $\mu \pm z \times \dfrac{\sigma \text{ ou } S}{\sqrt{n}}$
- Intervalle de fluctuation d'une proportion : $\pi \pm z \times \sqrt{\dfrac{\pi(1-\pi)}{n}}$

Avec z obtenu en fonction du niveau de confiance souhaité :

Niveau de confiance	90%	95%	98%	99%
z	1,64	1,96	2,33	2,58

Conditions d'utilisation : $n \geq 30$ $\quad n \cdot \pi \geq 5$ $\quad n \cdot (1-\pi) \geq 5$

30.3.1 Test d'hypothèse

On considère une population dans laquelle on suppose connu la proportion d'un certain caractère π ou une certaine moyenne μ.

Effectuer un test statistique dans le cadre de cet ouvrage consistera a construire un intervalle de fluctuation et à regarder si la valeur moyenne ou la proportion trouvée dans l'échantillon tombe à l'intérieur de cet intervalle de fluctuation.[4] Si c'est le cas, on acceptera l'hypothèse selon laquelle $\overline{x}$ ou f n'est statistiquement pas différent de μ ou π.

Remarque

Lorsque l'on travaille sur des tests statistiques on parle plus volontiers du **risque d'erreur** que du niveau de confiance :

$$\text{Risque d'erreur} = 1 - \text{Niveau de confiance}$$

3. On l'appelle aussi intervalle de fluctuation asymptotique ou encore intervalle de pari.
4. Cela revient à calculer uniquement des tests d'hypothèse bilatéraux.

Exemple 30.4

L'entreprise Alpha recrute ses employés en mettant en évidence le respect de la parité hommes-femmes. Or, dans cette entreprise il y a 200 employés dont 88 femmes. Peut-on dire que cette entreprise respecte la parité au risque d'erreur de 5% ?

Solution

- $\pi = 0,5$ (proportion à tester) et $f = \dfrac{88}{200} = 0,44$ (fréquence observée)
- $n = 200$ (taille de l'échantillon)
- Risque d'erreur de 5% $\rightarrow z = 1,96$
- Intervalle de fluctuation :

$$0,5 \pm 1,96 \times \sqrt{\frac{0,5(1-0,5)}{200}} = 0,5 \pm 0,0693 \qquad \text{ou}$$

$$\text{Intervalle de fluctuation} \simeq [\,0,43\,;\,0,57\,]$$

Comme la fréquence observée tombe dans l'intervalle de fluctuation, on peut conclure que l'entreprise Alpha respecte la parité 95 fois sur 100.

Exemple 30.5

Un fabricant de médicaments affirme que la durée moyenne d'effet de son nouveau médicament est de 10 heures. Afin de vérifier cette affirmation, on administre le médicament sur 50 sujets différents. On obtient $\overline{x} = 9$ et $S = 1,2$ (écart-type échantillonnal). Peut-on dire au risque d'erreur de 5% que cette affirmation est correcte ?

Solution

- $\mu = 10$ heures (moyenne à tester) et $\overline{x} = 9$ (moyenne observée)
- $n = 50$ (taille de l'échantillon $n \geq 30$)
- Risque d'erreur de 5% $\rightarrow z = 1,96$
- Intervalle de fluctuation :

$$10 \pm 1,96 \times \frac{1,2}{\sqrt{50}} = 0,5 \pm 0,333 \qquad \text{ou}$$

$$\text{Intervalle de fluctuation} \simeq [\,9,67\,;\,10,33\,]$$

Comme la moyenne observée ($\overline{x}$) ne tombe pas dans l'intervalle de fluctuation, on peut conclure au risque de 5% que la durée moyenne d'effet du médicament n'est pas de 10 heures comme affirmé.

Exercices d'application de la section 30.3

15 [Test bilatéral] Une machine est réglée afin de verser du sirop pour la toux dans des bouteilles de 500 ml. Selon le technicien qui procède au réglage, le volume de sirop suit une loi normale d'écart type 5 ml. Un échantillon de 100 bouteilles remplies par cette machine est vérifiée et une moyenne $\overline{x}$ d'échantillon de 496,7 ml est observée. Peut-on conclure au risque d'erreur 5% que la machine est déréglée ?

16 [Test bilatéral] On donne un test bilatéral avec les éléments suivants :

$1-\alpha = 99\% \quad H_0 : \mu_0 = 12000 \quad H_1 : \mu_0 \neq 12000 \quad S = 2500 \quad n = 400.$

Déterminer les valeurs critiques, c'est-à-dire les valeurs à partir desquelles il faudra accepter ou refuser H_0.

17 [Fabrication] Une fabrication comporte 10% de pièces défectueuses. On essaie un nouveau procédé de fabrication. Sur un échantillon de 64 pièces, on en compte 8 défectueuses. Peut-on dire, au risque d'erreur de 5% que la fabrication a été influencée par le nouveau procédé de fabrication ?

18 [Pharmaceutique] On décide d'utiliser un nouveau médicament contre la malaria à condition que l'efficacité de celui-ci s'avère significativement plus grande que celle du médicament actuellement en usage. On sait qu'il est possible de guérir 60% des patients atteints de cette maladie grâce au médicament utilisé actuellement.

(a) Quelles sont les hypothèses à confronter ?

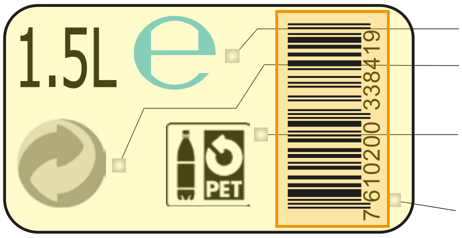
(b) Quelles sont les conséquences de la réalisation des erreurs de type I et de type II ?

19 [Hôpital] Le responsable du service des urgences d'un hôpital pense que son service est sollicité en moyenne 130 fois par jour. Son adjoint prétend que cette estimation n'est pas correcte. Un échantillon portant sur 40 jours montre qu'en moyenne le service a été sollicité 137 fois par jour avec un écart-type corrigé (S) de 22 fois. Tester l'avis du responsable des urgences avec un risque d'erreur de 1%.

20 [Industrie] Le diamètre moyen des boîtes de tomates pelées en conserve produites par une machine est de 7,5 cm. Ce diamètre est distribué normalement. Peut-on savoir si le diamètre moyen a été modifié suite à l'usure de la machine en prélevant l'échantillon suivant au risque d'erreur de 5% ?

7,53	7,51	7,52	7,54	7,51	7,55	7,51	7,49
7,55	7,49	7,47	7,53	7,47	7,56	7,52	7,50
7,51	7,46	7,52	7,48	7,48	7,38	7,54	7,49
7,54	7,49	7,59	7,51	7,50	7,52	7,51	7,56

21 [Métrologie] En France, le décret 78-166 du 31 janvier 1978 relatif au contrôle métrologique de certains préemballages précise que pour un contenu nominal de 1,5 litres, il est toléré un manque maximum de 3% au delà duquel un préemballage ne peut ni être vendu, ni porter la lettre «e», correspondant à l'abréviation du mot anglais «estimate».



Un nouvel industriel a mis sur le marché de l'eau minérale. Un contrôle sur un échantillon aléatoire de 250 bouteilles de 1,5 l a fourni les résultats suivants :

$$\overline{x} = 1{,}42 \text{ l} \qquad \text{et} \qquad S = 0{,}31 \text{ l}$$

Quel test devrait faire l'industriel afin qu'il puisse dire, au risque de 5%, qu'il respecte la législation ?

22 [Notes examen] Dans une école de commerce, les notes de l'examen final sont en principe distribuées normalement. L'an passé, la moyenne était de 4,35. Cette année, afin de se faire une idée des résultats avant une correction complète, 30 copies sont corrigées au hasard. Les résultats sont les suivants :

4,1	3,8	3,7	4,9	5,0	5,1	3,5	3,5	2,9	5,0
5,1	2,9	3,6	4,4	5,3	5,1	3,3	3,7	3,1	5,1
2,6	2,8	4,1	3,6	4,5	2,8	4,8	4,7	4,0	3,3

Peut-on dire que la moyenne des étudiants sera différente cette année que l'an passé au risque d'erreur de 5% ?

23 [Urne et boules] Une urne contient des boules blanches et des boules noires. On effectue 100 tirages avec remise dans cette une et on obtient 40 boules noires. Peut-on affirmer, avec une probabilité d'au moins 95%, qu'il n'y a pas le même nombre de boules blanches que de boules noires dans l'urne ?

24 [Coûts d'entretien] On estime en Suisse qu'un chat coûte en moyenne 200 frs par an. Une enquête menée par Comparis sur la base de 64 propriétaires de chats a montré que la dépense annuelle était en moyenne de 210 frs avec un écart type échantillonnal de 16 frs. Sur la base de cet échantillon, au risque d'erreur de 1%, peut-on conclure que la dépense annuelle moyenne pour un chat est différente de 200 frs ?

30.4 Table de contingence et test du Khi-deux

30.4.1 Table de contingence

Lorsque les données sont groupées par modalités ou sont de type qualitatif, il est possible de les représenter au moyen d'un tableau appelé **table de contingence**. [5]

Les effectifs partiels sont rassemblés dans un tableau par ligne pour le premier caractère et par colonne en fonction du second caractère.

Exemple 30.6

On interroge 10 personnes pour lesquelles on détermine :

- X : Le sexe (variable qualitative à 2 modalités : H[homme] et F[femme])
- Y : La boisson préférée (variable qualitative à 3 modalités : B[bière], V[vin], S[soda])

Les résultats obtenus sont les suivants :

Sexe (X)	H	F	F	F	H	F	H	H	H	H
Préférence (Y)	B	S	V	B	V	V	B	S	B	B

(a) Établir la table de contingence correspondante

(b) Calculer les proportions suivantes :

- Proportion d'hommes buveurs de bière
- Proportion de buveurs de bière parmi les hommes
- Proportion d'hommes parmi les buveurs de bière
- Proportion de buveurs de bière

Solution

(a) Table de contingence :

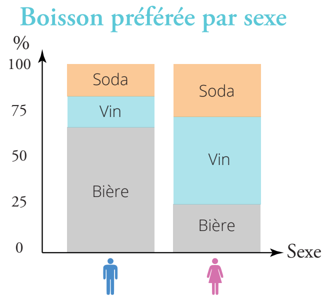
$X \backslash Y$	Bière	Vin	Soda	Total
Homme	4	1	1	6
Femme	1	2	1	4
Total	5	3	2	10

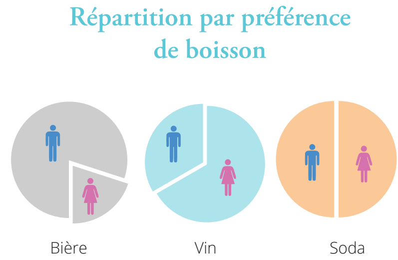
(b)
- Proportion d'hommes buveurs de bière : $4/10$
- Proportion de buveurs de bière parmi les hommes : $4/6$
- Proportion d'hommes parmi les buveurs de bière : $4/5$
- Proportion de buveurs de bière : $5/10$

5. Aussi appelé table à double entrée ou encore tableau croisé dynamique.

Selon l'information à présenter, il est possible de représenter graphiquement (diagramme en barres, camemberts, etc..) :

- La boisson préférée par sexe
- La répartition hommes / femmes par type de boisson





30.4.2 Aspects mathématiques associées à une table de contingence

Une table de contingence à l lignes et c colonnes se présente en principe comme suit :

$X\backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_c	Total
x_1	n_{11}	n_{12}	$\cdots$	n_{1c}	$n_{1\bullet}$
x_2	n_{21}	n_{22}	$\cdots$	n_{2c}	$n_{2\bullet}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_l	n_{l1}	n_{l2}	$\cdots$	n_{lc}	$n_{l\bullet}$
Total	$n_{\bullet 1}$	$n_{\bullet 2}$	$\cdots$	$n_{\bullet c}$	N

Dans cette table :

- $n_{1\bullet}$ =total de la ligne 1, $n_{\bullet 1}$ = total de la colonne 1, etc..
- L'ensemble des cases identifiées par (x_i, y_j, n_{ij}) est appelée **distribution jointe**.
- La colonne jaune, identifiée par $(x_i, n_{i\bullet})$ est appelée **distribution marginale** de X.
- La ligne jaune, identifiée par $(y_i, n_{\bullet j})$ est appelée **distribution marginale** de Y.
- Le comportement d'une ligne ou d'une colonne étant donné une cellule jaune fixée est appelée **distribution conditionnelle**.

Exemple 30.7

Dans l'exemple précédent on peut identifier les différentes distributions comme suit :

- Proportion d'hommes buveurs de bière : distribution jointe
- Proportion de buveurs de bière parmi les hommes : distribution conditionnelle
- Proportion d'hommes parmi les buveurs de bière : distribution conditionnelle

- Proportion de buveurs de bière : distribution marginale

30.4.3 Indépendance des variables X et Y

On dit que X et Y sont deux variables **indépendantes** si les lignes (respectivement les colonnes) sont proportionnelles entre elles. Ce qui peut aussi se traduire par :

X et Y sont deux variables indépendantes si, pour toutes les valeurs n_{ij} de la table :

$$n_{ij} = \frac{n_{i\bullet} \times n_{\bullet j}}{N}$$

Exemple 30.8

Les variables X et Y de cette table de contingence sont-elles indépendantes ?

$X \backslash Y$	Bière	Vin	Soda	Total
Homme	4	1	1	6
Femme	1	2	1	4
Total	5	3	2	10

Solution

Non : les lignes ne sont pas proportionnelles entre elles, les colonnes non plus !

Exemple 30.9

Compléter cette table de contingence afin que les variables X et Y soient parfaitement indépendantes.

$X \backslash Y$	y_1	y_2	Total
x_1			12
x_2			8
Total	5	15	20

Solution

On calcule chaque cellule du tableau par la formule : $n_{ij} = \frac{n_{i\bullet} \times n_{\bullet j}}{N}$

- $n_{11} = \frac{12 \times 5}{20} = 3$
- $n_{12} = \frac{12 \times 15}{20} = 9$
- $n_{21} = \frac{8 \times 5}{20} = 2$
- $n_{22} = \frac{8 \times 15}{20} = 6$

Ou encore :

$X \backslash Y$	y_1	y_2	Total
x_1	3	9	12
x_2	2	6	8
Total	5	15	20

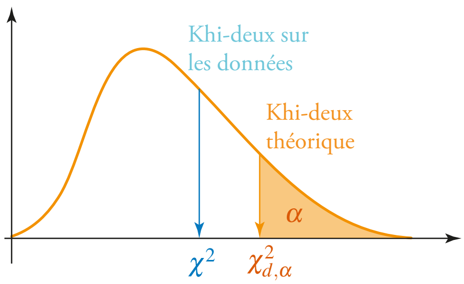
30.4.4 Test du Khi-deux

Dans la réalité, il est rare que deux variables X et Y soient parfaitement indépendantes comme dans l'exemple précédent. La question que l'on peut alors se poser est la suivante : *Jusqu'à quel point les valeurs observées ne s'éloignent pas trop des valeurs théoriques afin que l'on puisse considérer les variables X et Y comme indépendantes ?*

Le test du **Khi-deux**[6] ou χ^2 répond précisément à cette question.

Pour réaliser ce test, on procède globalement comme suit :

1. Déterminer la limite acceptable au moyen d'une table ou d'un programme informatique. Cette limite, appelée Khi-deux théorique se note $\chi^2_{d,\alpha}$.
2. Calculer χ^2 sur la base des données observées.
3. X et Y sont **indépendantes**, si $\chi^2 < \chi^2_{d,\alpha}$.[7]



Test du Khi-deux étapes par étapes

- On se fixe un seul de signification α. En général $\alpha = 5\%$
  nombre de fois qu'on accepte de se tromper si on faisait 100 fois l'expérience.
- On calcule $d = (\text{nombre de lignes} - 1) \times (\text{nombre de colonnes} - 1)$
  la valeur *d* est appelée aussi degré de liberté.
- On calcule $\chi^2_{d,\alpha}$ au moyen de la table du Khi-deux en annexe.
  ou avec la fonction Excel : $\chi^2_{d,\alpha}$ = KHIDEUX.INVERSE(α, d)

6. Ce test se prononce «qui deux» ou encore «qui carré». χ est une lettre grecque à ne pas confondre avec X.
7. Autre manière de s'exprimer : X et Y sont indépendantes si l'aire sous la courbe à droite de χ^2, appelée **p-valeur** est supérieure à l'aire α sous la courbe à droite de $\chi^2_{d,\alpha}$, appelée **seuil de signification**.

- On calcule $\chi^2 = \sum \frac{(O-E)^2}{E}$ O = effectifs observés et E = effectifs théoriques
- X et Y sont **indépendantes**, si $\chi^2 < \chi^2_{d,\alpha}$.

Remarque

Pour un test valable, il faut que $N \geq 30$ et regrouper au besoin des classes d'effectifs < 5.

Exemple 30.10

On a interrogé 100 personnes à qui on a demandé :

X leur préférence alimentaire (fondue ou raclette)

Y leur niveau d'études (secondaire ou supérieur)

O	Études secondaires	Études supérieures	Total
Fondue	14	28	42
Raclette	36	22	58
Total	50	50	100

Y a-t-il un lien entre le niveau d'étude et la préférence alimentaire au seuil de signification de 5% ?

Solution

- $\alpha = 0,05$ et $d = (2-1)\times(2-1) = 1$.
- Dans la table en annexe on peut lire le Khi-deux théorique : $\chi^2_{0.05,1} = 3,84$
- On construit la table de contingence des effectifs théoriques $[E]$ avec :

$$E_{ij} = \frac{n_{i\bullet} \times n_{\bullet j}}{N}$$

E	Études secondaires	Études supérieures	Total
Fondue	21	21	42
Raclette	29	29	58
Total	50	50	100

- On calcule χ^2 avec la formule $\chi^2 = \sum \frac{(O-E)^2}{E}$

O	E	$\frac{(0-E)^2}{E}$
14	21	2,3
28	21	2,3
36	29	1,7
22	29	1,7
	Total	$\chi^2 = 8$

Comme $\chi^2 > \chi^2_{d,\alpha}$ les deux variables peuvent être considérées comme dépendantes. Il y a donc un lien entre le niveau d'étude et la préférence alimentaire.

Exercices d'application de la section 30.4

25 [Table de contingence] Un petit producteur agricole a vendu le mois dernier ses yoghourts artisanaux dans différentes grandes surfaces de la place. Le nombre de yogourts vendus dans les différentes surfaces est donné ci-après :

	Coop	Migros	Manor	Total
Mocca	230	165	65	460
Vanille	205	130	65	400
Chocolat	130	220	70	420
Fraise	170	100	50	320
Total	735	615	250	1600

(a) Quelle est la part des yoghourts mocca achetés par Manor ?

(b) Quelle est la part de la Coop dans l'ensemble des yoghourts mocca vendus ?

(c) Quelle part les yoghourts mocca représentent-ils dans les ventes du producteur ?

26 [Table de contingence] Le tableau suivant représente le résultat d'un sondage visant à mettre en relation l'état civil (X) et le niveau d'étude (Y) :

$X \backslash Y$	Primaire	Secondaire	Supérieur
Marié	15	23	12
Célibataire	14	3	3

(a) Combien de personnes ont été interrogées ?

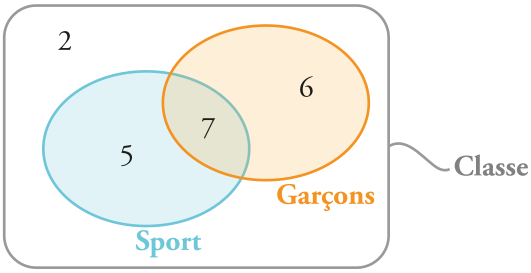
(b) Représenter un graphique en barre représentant le niveau d'étude en fonction de l'état civil.

27 [Sondage] Un institut de sondage utilise une application internet en ligne. Lors d'un sondage, 700 personnes sont interrogées en Suisse par région linguistique afin de connaître leur appartenance religieuse. Les résultats bruts sont consignés dans le fichier Religions en Suisse dans les ressources de Promath.

(a) Construire un tableau croisé dynamique (table de contingence) ainsi qu'un graphique croisé dynamique permettant de montrer l'appartenance religieuse en fonction de la région linguistique.

(b) Quelle région semble la plus conservatrice ?

28 [Diagramme de Venn] On a classé des élèves selon le diagramme de Venn suivant :

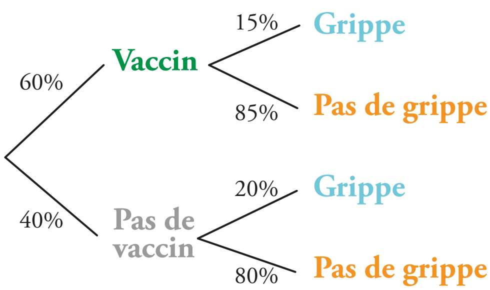


(a) Combien d'élèves y a-t-il dans cette classe ?

(b) Combien de filles y a-t-il dans cette classe ?

(c) Organiser ces informations sous la forme d'une table de contingence.

29 [Indépendance] Une étude a mesuré l'effet d'un vaccin pour la grippe sur une population. Les informations ont été présentées de la manière suivante :



(a) Quel pourcentage de la population a eu la grippe ?

(b) Organiser ces informations sous la forme d'une table de contingence.

(c) Peut-on dire que le fait d'être vacciné a un impact sur le fait d'attraper la grippe ?

(d) Dans le schéma ci-dessus, par quelles valeurs devrait-on remplacer les 15% et 85% afin de considérer les variables «État de santé» et «Vaccination» comme indépendantes ?

30 [Indépendance] Les variables X et Y suivantes sont-elles indépendantes ?

$X \backslash Y$	Bleu	Blanc	Rouge	Total
Poupée A	1	2	3	6
Poupée B	4	5	6	15
Poupée C	7	8	9	24
Total	12	15	18	45

31 [Indépendance] Compléter la table afin que les variables X et Y suivantes soient indépendantes.

$X \backslash Y$	Bleu	Blanc	Rouge	Total
Poupée A				6
Poupée B				15
Poupée C				24
Total	12	15	18	45

32 [Indépendance] On dispose de la statistique suivante issue d'une table de contingence de format 3×2. Peut-on conclure à l'indépendance des variables X et Y au seuil de signification de 5% ?

$$\sum_{i=1}^{6} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} = 2,44$$

33 [Stations radio] On a interrogé des habitants de Lausanne, de Genève et de Nyon sur l'appréciation de 4 stations de radio. Les informations sont recueillies ci-après :

	Lausanne	Nyon	Genève
LFM	162	64	26
One FM	136	94	64
Rouge FM	82	96	88
NRJ	40	26	122

Peut-on conclure que l'écoute d'une radio est indépendante du lieu de résidence ?

34 [Absentéisme] Le tableau ci-dessous mesure, au sein d'un échantillon aléatoire de 500 employés, le temps pris pour se rendre quotidiennement au travail et l'absentéisme au travail durant l'année.

	Moins de 15 min.	de 15 à 45 min.	Plus de 45 min.	Total
Absentéisme faible	80	122	38	240
Absentéisme moyen	25	36	36	97
Absentéisme élevé	31	75	57	163
Total	136	233	131	500

L'absentéisme est considéré par l'entreprise comme :

- faible si un employé a eu moins de 2 jours d'absence durant l'année,
- moyen si un employé a eu entre 3 et 5 jours d'absence durant l'année,
- élevé si un employé a eu plus de 5 jours d'absence durant l'année.

Ces données permettent-elles de conclure, au seuil de signification de 10% qu'il existe un lien entre l'absentéisme et le temps pour se rendre quotidiennement au travail ?

30.5 Problèmes et exercices de synthèse

35 [Médecine] En médecine, un test diagnostique est un test qui permet de poser un diagnostic, c'est à dire distinguer, pour une affection donnée, les individus malades des individus sains. Quatre combinaisons sont alors envisageables :

1. un vrai positif (**VP**) est une personne qui est malade et qui présente un test positif.
2. un faux positif (**FP**) est une personne qui n'est pas malade et qui présente un test positif.
3. un faux négatif (**FN**) est une personne qui est malade et qui présente un test négatif.
4. un vrai négatif (**VN**) est une personne qui n'est pas malade et qui présente un test négatif.

Compte tenu de ces informations, compléter le tableau par FN, FP, VN et VP.

	Hypothèse H_0 vraie	Hypothèse H_0 fausse
Hypothèse H_0 acceptée		
Hypothèse H_0 refusée		

36 [Chaîne de production] Sur une chaîne de production, on a observé le temps nécessaire (en secondes) à 20 employés pour effectuer une tâche déterminée :

260	245	300	285	277
241	236	275	281	280
265	294	300	301	286
303	266	276	270	259

Donner une estimation ponctuelle de la moyenne et de la variance de la population.

37 [Intervalle de confiance simplifié] Établir dans le cadre de l'estimation d'une proportion, l'intervalle de confiance simplifié à 95% en considérant que $z \simeq 2$ et que $f(1-f) \simeq 0,5 \times 0,5$.[8]

38 [Distributeur] Dans une école, on a relevé la caisse en fin de journée du distributeur de boissons sur un échantillon de 100 jours :

Total en frs	$[0-50[$	$[50-100[$	$[100-150[$	$[150-200[$
Nombre de jours	4	20	56	20

(a) Donner une estimation ponctuelle du montant moyen récolté en fin de journée dans ce distributeur.

(b) Donner une estimation ponctuelle du nombre moyen de boissons prises à ce distributeur au cours d'une journée, sachant qu'une boisson coûte 1,10 frs.

8. Cet intervalle est utilisé en France comme première approche aux intervalles de confiance dans les classes de seconde.

39 [Dépenses de loisir] Dans une grande entreprise, on prélève avec remise 45 employés pour lesquels on calcule les dépenses annuelles consacrées aux loisirs. Celles-ci se montent en moyenne à 2 000 frs avec un écart-type sans biais de 600 frs. Déterminer un intervalle de confiance à 98% pour estimer les dépenses moyennes des salariés consacrées aux loisirs.

40 [Téléphone portable] On souhaite estimer la proportion de jeunes de 8 à 12 ans qui possèdent un téléphone portable. Quelle doit être la taille de l'échantillon pour obtenir un résultat avec une précision de 1% au niveau de confiance 0,95%.

- **(a)** Quelle doit être la taille de l'échantillon pour obtenir un résultat avec une précision de 1% au seuil de 0,95% ?
- **(b)** Une telle enquête est-elle facilement envisageable ?

41 [Taille de l'échantillon] Une école d'agriculture a estimé sur la base d'un échantillon de 100 pommes à 54,35 g le poids moyen d'un certain type de pommes avec une marge d'erreur de 5,2 g. Quelle taille de l'échantillon aurait-il fallu choisir pour obtenir une marge d'erreur deux fois plus petite ?

42 [Intervalle de confiance] On choisit 30 femmes adultes au hasard dans une population afin d'estimer la taille moyenne μ des femmes adultes dans cette population. On obtient $\overline{x} = 163,3$ cm et $S = 3,6$ cm. Construire un intervalle de confiance pour μ au niveau de confiance de 95%.

43 [Intervalle de confiance] Une entreprise fabrique des composants électroniques dont la durée de vie X, exprimée en heures, est une variable aléatoire. Des mesures effectuées sur un échantillon de taille 50 ont donné les résultats suivants :

$$\sum x_i = 60\,000 \qquad \sum x_i^2 = 74 \times 10^6$$

- **(a)** Donner une estimation ponctuelle de la durée de vie moyenne des composants.
- **(b)** Donner une estimation ponctuelle de l'écart type de cette durée de vie.
- **(c)** Déterminer un intervalle de confiance à 95% de cette durée de vie moyenne.
- **(d)** Quelle aurait dû être la taille de l'échantillon pour que l'intervalle de confiance à 95% de la durée de vie moyenne des composants ait une amplitude de 60 h ?

44 [Roulette] Un contrôle est effectué sur une machine à sous type «roulette» à 37 numéros. Sur 10 000 tirages, on a constaté que le zéro est sorti 298 fois et qu'il y a eu, avec le zéro compris, 5280 nombres pairs tirés. Au risque d'erreur de 5%, ces résultats sont-ils compatibles avec le fait que la roulette n'est pas truquée ?

- **(a)** Faire le calcul pour le zéro.
- **(b)** Faire le calcul pour les nombres pairs y compris le zéro.

45 [Test inconnu] Dans une population, on interroge 20 personnes pour connaître la proportion de la population qui fume. L'échantillon étant inférieur à ce qui a été étudié ici, rechercher sur Internet le nom du test qui pourrait convenir à cette étude.

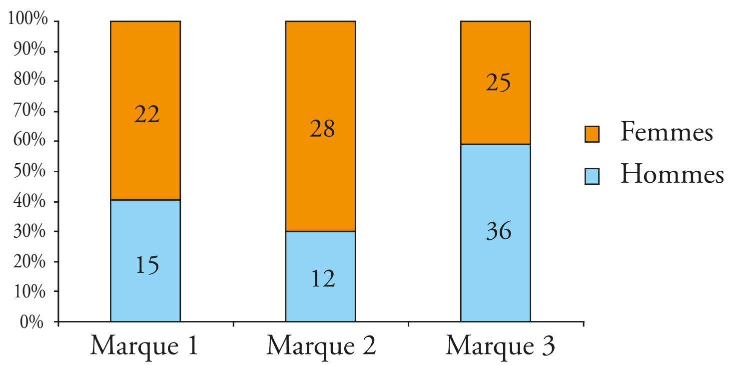
46 [Sondage] Lors d'un sondage portant sur 100 personnes, 52 personnes indiquent qu'elles voteront pour Tintin.

(a) Déterminer un intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95% de la proportion de personnes qui voteront pour Tintin.

(b) Les conditions pour réaliser l'intervalle de confiance sont-elles remplies ?

(c) En supposant que la fréquence des personnes indiquant voter pour Tintin reste identique, quelle taille minimale aurait dû avoir l'échantillon pour pouvoir conclure à la victoire de Tintin ?

47 [Marques de voiture] Le graphique suivant représente le nombre de voitures achetées auprès d'un concessionnaire durant une année, en fonction du sexe de l'acheteur et des trois marques proposées $M1$, $M2$ et $M3$.



Au seuil de signification de 5%, peut-on dire que la vente des différentes marques est influencée par le sexe des clients ?

48 [Correction de Yates] Dans le cadre d'une table de contingence 2 × 2, le calcul du χ^2 peut être amélioré par la formule suivante (**correction de Yates**) :

$$\chi^2 = \sum \frac{(|O-E|-0,5)^2}{E}$$

Une école a fait passer un test de langue à 100 élèves. Sur 40 garçons, 28 ont réussi le test et sur 60 filles, 34 l'on réussi. Y a-t-il un lien entre le sexe et la capacité à réussir le test de langue au seuil de signification de 5% ?

49 [Causes d'échec] Dans une université, on a fait une étude sur 40 étudiants ayant échoués en première année afin de connaître les raisons de leur échec. L'étude a pu mettre en évidence 3 principales raisons :

- R1 : Raison personnelle (finance, transport, famille, etc...)
- R2 : Raison professionnelle
- R3 : Raison académique (cours pas adaptés, manque de travail, difficultés, etc...)

Les résultats bruts sont les suivants : (fichier universite.xlsx)

Sexe	Raison	Sexe	Raison	Sexe	Raison	Sexe	Raison
H	R1	H	R2	H	R3	H	R2
H	R3	H	R3	H	R2	H	R3
F	R3	F	R1	H	R3	F	R3
H	R3	F	R3	F	R1	F	R2
F	R2	F	R3	H	R1	H	R3
F	R3	H	R1	F	R2	H	R3
H	R1	H	R2	F	R3	H	R1
H	R3	H	R1	H	R1	H	R1
H	R3	H	R3	F	R3	H	R3
F	R3	F	R3	F	R3	F	R2

(a) Construire une table de contingence pour les deux variables en question.

(b) Le sexe est-il indépendant de la cause de l'échec au niveau de signification de 10% ?

50 [Défi] Max reçoit sa dissertation avec la remarque suivante de son professeur : «Copie pleine de fautes d'orthographe ! Il y en a une tous les trois mots !». Max sélectionne la première phrase de sa dissertation qui contient 30 mots et 6 fautes d'orthographe. Peut-il remettre en cause l'affirmation de son professeur ?

Sixième partie

Mathématiques financières

Chapitre 31

Intérêts simples et composés

Objectifs du chapitre

- savoir calculer le nombre de jours séparant deux dates.
- connaître les formules de l'intérêt simple et composé.
- appliquer les formules de l'intérêt simple et composé dans un contexte pratique.
- résoudre ces formules en fonction de chacune des variables.
- comprendre les notions d'actualisation et de capitalisation.
- comprendre la différence entre les taux proportionnels, équivalents, moyens, effectifs, nominaux et instantanés.

31.1 Calcul du nombre de jours

Pour déterminer le montant d'un intérêt sur un placement, il est indispensable de connaître au préalable la durée de ce dernier. La plupart des établissements bancaires ou de crédit font usage de la **méthode commerciale** appelée aussi **Base 30 / 360**. [1]

L'usage commercial se résume ainsi :

- Tous les mois comptent 30 jours
- Une année commerciale compte 360 jours

1. D'autres méthodes existent comme par exemple la méthode **Base Exact / Exact** qui utilise le nombre exact de jours calendaires de l'opération.

Deux variantes de la méthode commerciale existent :

- **Méthode allemande** : Le dernier jour du mois est considéré comme le 30. [2]
- **Méthode européenne** : Tous les mois qui dépassent 30 jours sont ramenés à 30 jours.

Ces deux méthodes donnent des résultats identiques sauf dans le cas de contrats qui débutent ou finissent à fin février. En effet, si le 28 février est considéré comme le 28 février par la méthode européenne, dans la méthode allemande ce jour est en fait le dernier jour du mois et donc est avancé au 30. (sauf s'il s'agit d'une année bissextile.) [3]
L'exemple ci-après illustre toutes ces possibilités :

Exemple 31.1

Jour		Méthode allemande		Méthode européenne
31.07.2019	→	30.07.2019	→	30.07.2019
28.02.2019	→	30.02.2019	→	28.02.2019
28.02.2020	→	28.02.2020	→	28.02.2020
29.02.2020	→	30.02.2020	→	29.02.2020

31.1.1 Calcul manuel

Le nombre de jours N_j entre deux dates peut se calculer comme suit :

- Pour deux jours J_1 et J_2 compris à l'intérieur d'un mois :

$$[\,J_1\,;\,J_2\,[\qquad\rightarrow\qquad N_j = J_2 - J_1$$

- Pour deux jours J_1 et J_2 à cheval sur deux mois :

$$[\,J_1\,;\,30\,[\qquad+\qquad[\,0\,;\,J_2\,[\qquad\rightarrow\qquad N_j = 30 - J_1 + J_2$$

Exemple 31.2

Le nombre de jours :

(a) du 10 janvier au 20 janvier : $N_j = 20 - 10 = 10$ jours.
(b) du 10 janvier au 9 février : $N_j = 30 - 10 + 9 = 29$ jours.
(c) du 10 janvier au 17 avril : $N_j = 30 - 10 + 60 + 17 = 97$ jours.

2. Cette méthode est surtout utilisée en Suisse, en Allemagne ainsi que dans certains pays scandinaves.
3. Une année bissextile compte un jour de plus en février. Mathématiquement, une année est bissextile si le reste de la division par 4 de ses deux derniers chiffres est nul. Par exemple 2020 est une année bissextile.

31.1.2 Calcul au moyen d'une formule

La formule pour calculer le nombre de jours (N_j) entre deux dates $J_1/M_1/A_1$ et $J_2/M_2/A_2$ en base 30/360 est la suivante :

$$N_j = (J_2 - J_1) + 30 \times (M_2 - M_1) + 360 \times (A_2 - A_1)$$

Exemple 31.3

Calculer, avec la méthode allemande et européenne le nombre de jours séparant la date du 29 février 2020 au 28 février 2021.

Solution

Les dates de début et de fin de période doivent être corrigées selon la méthode choisie.

	Donnée	Allemande	Européenne
J_1	29	**30**	**29**
M_1	02	02	02
A_1	2020	2020	2020
J_2	28	**30**	**28**
M_2	02	02	02
A_2	2021	2021	2021

Méthode allemande :

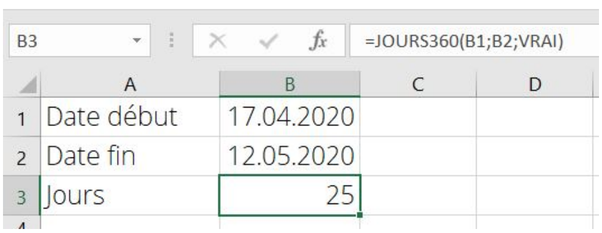
- $N_j = (30 - 30) + 30 \times (02 - 02) + 360 \times (2021 - 2020) = 360$ jours.

Méthode européenne :

- $N_j = (28 - 29) + 30 \times (02 - 02) + 360 \times (2021 - 2020) = 359$ jours.

31.1.3 Calcul au moyen d'Excel

Sur Excel, la fonction JOURS360() avec le chiffre 1 ou VRAI comme 3$^{\text{ème}}$ argument renvoie le nombre de jours selon la méthode européenne. [4]



4. Si le 3$^{\text{ème}}$ argument est omis, Excel calcule le nombre de jours selon la méthode américaine US 30/360, ou «bond basis» utilisée par l'Association nationale américaine des agents de change (NASD).

31.2 Opérations à intérêts simples

Quelques considérations

- On définit l'**intérêt** comme la rémunération d'un **capital** (somme d'argent) prêtée pendant un certain temps.
- L'intérêt peut être payé en une fois ou de façon fractionnée.
- L'intérêt est en principe payable en fin de période (**postnumerando**) mais pourrait l'être aussi d'avance (**praenumerando**).
- L'intérêt est fonction de la **durée** du prêt, du capital emprunté ainsi que du **taux** d'intérêt pratiqué.
- La **période** sur laquelle l'intérêt porte est en général l'année, mais elle peut être plus courte : semestre, trimestre ou mois.
- Dans un texte, l'intérêt est exprimé normalement en %, mais dans les calculs financiers, il est plus simple de l'exprimer sous forme décimale. Ainsi, 3,55% s'écrira 0,0355.

Notations

n	Durée du prêt
i	Taux d'intérêt
I	Montant d'intérêt
C_0	Capital initial
C_n	Capital final ou acquis à la fin de la durée n

31.2.1 Formule de l'intérêt simple

L'intérêt simple s'applique normalement aux opérations financières dont la durée est en générale inférieure à une année.
En pratique le taux d'intérêt est défini pour une période annuelle. En lisant «5%», on sous-entend un intérêt de 5% l'an. La durée doit donc aussi être exprimée en année.

Exemple 31.4

Taux d'intérêt annuel : 4%. Durée du prêt : 30 mois. Déterminer n ?

Solution

On convertit les mois en années : $\dfrac{30}{12} = 2,5$ ans.

Dans le système de l'intérêt simple, le montant d'intérêt (I) se calcule toujours à partir du capital initial placé (C_0) comme suit :

$$\text{Intérêt} = \text{Capital} \times \text{Taux} \times \text{Temps} \qquad \text{ou} \qquad I = C_0 \times i \times n$$

On peut donc exprimer la valeur finale du capital en fonction du capital initial placé :

$$\begin{aligned} C_n &= C_0 + I \\ &= C_0 + C_0 \cdot i \cdot n \end{aligned}$$

Ou encore, en mettant C_0 en évidence :

$$C_n = C_0(1 + ni)$$

Exemple 31.5

On place 5 000 frs durant 3 mois sur un compte à 3%. Quel sera le capital acquis au bout de ces 3 mois ?

Solution

Les éléments constitutifs de la formule sont les suivants :
$C_0 = 5000$, $i = 0,03$ et $n = 3/12$. Ainsi :

$$C_n = 5000\left(1 + \frac{3}{12} \times 0,03\right) = 5037,50 \text{ frs}$$

Exemple 31.6

On a placé 2 500 frs durant n mois sur un compte à 5%. Quelle est la durée de ce placement si le capital final se monte à 2 531,25 ?

Solution

Les éléments constitutifs de la formule sont les suivants :
$C_0 = 2500$, $i = 0,05$ et $C_n = 2531,25$.

En isolant n dans la formule $C_n = C_0(1 + ni)$, on obtient :

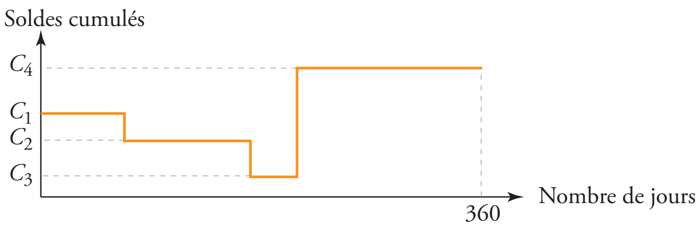
$$n = \frac{C_n - C_0}{i\,C_0} = \frac{2531,25 - 2500}{0,05 \times 2500} = 0,25$$

Réponse : $0,25 \times 12 = 3$ mois.

31.2.2 Méthode des nombres

Il s'agit d'une méthode de calcul rapide des intérêts simples, qui trouve son utilité dans le calcul de l'intérêt produit par plusieurs capitaux, placés au même taux.[5] Cette méthode est appliquée par les banques comme moyen de calcul des intérêts des carnets d'épargne ainsi que des comptes courants.

Le principe est de calculer les intérêts sur les soldes successifs $C_1, C_2, C_3, \cdots$ pour chaque intervalle de temps $n_1, n_2, n_3, \cdots$ où se produit des mouvements sur le compte, et ainsi de suite jusqu'à la clôture à fin décembre.



Le montant total d'intérêt se calcule donc comme suit :

$$\begin{aligned} I_{\text{tot}} &= C_1 \cdot \frac{n_1}{360} \cdot i + C_2 \cdot \frac{n_2}{360} \cdot i + C_3 \cdot \frac{n_3}{360} \cdot i + \cdots \\ &= \underbrace{\frac{i}{360}}_{\text{Taux}} \cdot \underbrace{\left(C_1 \cdot n_1 + C_2 \cdot n_2 + C_3 \cdot n_3 + \cdots\right)}_{\text{Nombres}} \end{aligned}$$

Exemple 31.7

Voici l'extrait d'un compte épargne à 2%. Calculer l'intérêt annuel de ce compte au 31.12.N en utilisant la méthode des nombres et diviseurs fixes.

Chaque mois compte 30 jours.

Valeur	Libellé	Débit	Crédit
31.12.N−1	Solde à nouveau	3600	
13.04.N	Retrait d'espèces		1200
15.09.N	Dépôt	4000	

Solution

On calcule successivement :

- Le nombre de jours entre chaque opération.
  Par exemple du 31.12.N−1 au 13.04.N=103 jours.
- À la dernière ligne, le nombre de jours jusqu'à la date de clôture.

5. Ce taux est différent si le compte présente un solde positif ou négatif. L'adaptation de la formule se fait en conséquence.

- Le solde du compte à chaque date valeur.
- Les nombres à chaque date valeur.

Valeur	Libellé	Débit	Crédit	Jours	Solde	Nombres
31.12.N−1	Solde à nouveau	3600		103	3600	370 800
13.04.N	Retrait d'espèces		1200	152	2400	364 800
15.09.N	Dépôt	4000		105	6400	672 000

La somme des nombres est : 1 407 600 et le coefficient multiplicateur est : $\frac{2\%}{360}$.
L'intérêt total avant les frais et impôts se monte donc à :

$$I_{\text{tot}} = 1\,407\,600 \times \frac{0,02}{360} = 78,20$$

Exercices d'application de la section 31.2

Dans les exercices qui suivent, on fera usage uniquement de l'intérêt simple et de la méthode commerciale 30/360.

1 [Nombre de jours] Calculer le nombre de jours séparant les dates suivantes.

(a) du 15.02.2020 au 27.02.2020
(b) du 18.04.2020 au 31.07.2020
(c) du 01.08.N au 31.12.N

2 [Nombre de jours] Calculer le nombre de jours séparant les dates suivantes selon la méthode allemande et européenne.

(a) du 28.02.2020 au 31.03.2020
(b) du 31.12.2020 au 28.02.2021
(c) du 28.02.2020 au 28.02.2021

3 [Date du dépôt] Si le 15.05.2021, 345 jours se sont écoulés depuis un dépôt bancaire, à quelle date a été fait ce dépôt ?

4 [Intérêt] Que rapporte un capital de 30 000 frs placé à 4% durant 3 mois et 27 jours ?

5 [Capital] Placé du 19.07.2020 au 31.12.2020 à 4%, un capital a rapporté 2 093 frs d'intérêts après déduction de l'impôt anticipé de 35%. Quel est ce capital ?

6 [Divers calculs] Compléter le tableau suivant :

Capital initial	Taux (en %)	Durée (en jours)	Intérêt	Capital final
4500	1,2	126		
		215	165,55	6465,55
50 000	3,6			50 600

7 [Montant emprunté] En remboursement d'un emprunt d'une année, on a réglé 2 700 frs. Ce versement comprend :

- l'intérêt au taux de 5% sur la somme empruntée.
- 2/5 de la somme empruntée.

Quel est le montant emprunté ?

8 [Dépôt] Quelle somme faut-il déposer chaque premier du mois sur un compte rémunéré à 5% si l'état du compte après bouclement de fin d'année montre un solde de 7 394 ?

9 [Date de remboursement] On a emprunté 6 000 frs à 4,5% le 1er avril. Ne souhaitant pas payer plus que 100 frs d'intérêts, à quelle date doit-on rembourser ce prêt ?

10 [Durée du placement] Une personne a placé 3 000 frs à 3%. Quelque temps plus tard elle retire son capital avec intérêts. Le banquier qui tient compte également de 30 frs de frais lui remet une somme identique à ce qu'elle avait déposé initialement. Calculer la durée du placement.

11 [Capital placé] Quel capital a-t-on placé le 09.02.N si en fin d'année le compte montre un solde de 30 663 frs, après déduction de l'impôt anticipé de 35% et de 50 frs de frais de gestion du compte ? Taux d'intérêt : 4%.

12 [Taux annuel] Placé durant 3 mois, un capital de 1 600 frs a produit un intérêt de 36 frs. Quel est le taux annuel du placement ?

13 [Taux d'intérêt] On a acheté une machine dont on a payé 30% à la livraison et le solde doit être payé dans les 3 mois avec un intérêt de retard de 210 frs. Quel est le taux d'intérêt simple pratiqué si le montant versé à la livraison est de 2 400 frs ?

14 [Montants] Deux montants placés à 2,5% pendant 8 mois ont rapporté en tout 350 frs. Quels sont ces deux montants, si leurs intérêts diffèrent de 50 frs ?

15 [Durée et capital] Un capital placé à 4% se monte aujourd'hui à 3 080 frs. S'il avait été placé à 5% il se montrait à 3 100 frs. Calculer la durée de ce placement, ainsi que le capital placé.

16 [Intérêt total] En utilisant la méthode des nombres, calculer l'intérêt total au 31.12.2020 de l'ensemble des mouvements suivants sur un compte épargne au taux de 3,75% :

Placement/Retrait	Date
4 000 frs	15.03.2020
–2 400 frs	17.05.2020
4 800 frs	23.08.2020

17 [Taux d'intérêt] Une personne possède 10 000 frs. Elle place 6 000 frs à 3%, 3 000 frs à 4% et le solde à 5%. À quel taux aurait-elle dû placer le tout pour obtenir un même revenu annuel ?

31.3 Opérations à intérêts composés

Un capital est placé à **intérêts composés** lorsque, à l'issue de chaque période de placement, les intérêts s'ajoutent au capital et portent eux-mêmes intérêt au taux du contrat initial. Ce principe, fondamental en mathématiques financières, est appelé «**capitalisation des intérêts**».

Contrairement aux intérêts simples, les intérêts composés s'appliquent en principe pour des périodes de placement qui excèdent une année.

En règle générale, les intérêts sont payables à **terme échu**, c'est-à-dire à la fin de chaque période de placement.

La pluie d'or!
ou comment se rendre compte de la force de l'intérêt composé.

31.3.1 Formule de l'intérêt composé

À chaque période, l'intérêt est calculé sur le capital final accumulé. On établit ainsi une relation entre le capital initial et le capital final de la manière suivante :

Valeur acquise à la fin de la première année :

$C_1 = C_0 + C_0 i = C_0(1+i)$

Valeur acquise à la fin de la deuxième année :

$C_2 = C_1 + C_1 i = C_1(1+i) = C_0(1+i)(1+i) = C_0(1+i)^2$

Valeur acquise à la fin de la troisième année :

$C_3 = C_2 + C_2 i = C_2(1+i) = C_0(1+i)^2(1+i) = C_0(1+i)^3$

D'où la formule générale de l'intérêt composé :

$$C_n = C_0(1+i)^n$$

Exemple 31.8

On place 5 000 frs durant 20 ans sur un compte à 2%. Quel sera le capital acquis au bout de ces 20 ans?

Solution

Les éléments constitutifs de la formule sont les suivants :

$C_0 = 5000,\ i = 0,02$ et $n = 20$. On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} C_n &= 5000(1+0,02)^{20} \\ &= 5000 \times 1,02^{20} \simeq 7\,429,74 \text{ frs.} \end{aligned}$$

Exemple 31.9

Un capital a doublé en 20 ans. Quel est le taux d'intérêt annuel utilisé ?

Solution

$$C_n = C_0(1+i)^n \qquad \text{Formule initiale}$$

$$(1+i)^n = \frac{C_n}{C_0} \qquad \text{Diviser chaque membre par } C_0$$

$$1+i = \sqrt[n]{\frac{C_n}{C_0}} \qquad \text{Prendre la racine nième dans chaque membre}$$

$$i = \sqrt[n]{\frac{C_n}{C_0}} - 1 \qquad \text{Isoler l'inconnue } i$$

Au moyen des éléments suivants :
$C_0 = C_0$, $C_n = 2C_0$ et $n = 20$, on obtient :

$$i = \sqrt[20]{\frac{2C_0}{C_0}} - 1 = \sqrt[20]{2} - 1 = 0,03526 \simeq 3,526\%$$

Exemple 31.10

Un investisseur a placé 50 000 frs à 2,5%. Il a retiré son capital investi quand celui-ci s'est monté à 53 000 frs. Quelle a été la durée du placement ?

Solution

$$C_n = C_0(1+i)^n \qquad \text{Formule initiale}$$

$$(1+i)^n = \frac{C_n}{C_0} \qquad \text{Diviser chaque membre par } C_0$$

$$\ln(1+i)^n = \ln\left(\frac{C_n}{C_0}\right) \qquad \text{Appliquer le ln dans chaque membre}$$

$$n\ln(1+i) = \ln\left(\frac{C_n}{C_0}\right) \qquad \text{Propriété des logarithmes}$$

$$n = \frac{\ln(C_n/C_0)}{\ln(1+i)} \qquad \text{Isoler l'inconnue } n$$

Au moyen des éléments suivants :
$C_0 = 50000$, $C_n = 53000$ et $i = 0,025$, on calcule :

$$n = \frac{\ln(\frac{53000}{50000})}{\ln(1,025)} \simeq 2,35977$$
$$= 2 \text{ ans, } 4 \text{ mois et } 9 \text{ jours}$$

Formules EXCEL

Les 4 composantes de la formule $C_n = C_0(1+i)^n$ peuvent être obtenues comme suit :

Formule financière	Équivalent Excel
$C_n = C_0(1+i)^n$	$C_n = \mathsf{VC}(i; n; 0; -C_0; 0)$
$i = \sqrt[n]{C_n/C_0} - 1$	$i = \mathsf{TAUX}(n; 0; -C_0; C_n; 0)$
$n = \frac{\ln(C_n/C_0)}{\ln(1+i)}$	$n = \mathsf{NPM}(i; 0; -C_0; C_n; 0)$
$C_0 = \frac{C_n}{(1+i)^n}$	$C_0 = \mathsf{VA}(i; n; 0; -C_n; 0)$

Exemple 31.11

Un investisseur a placé 50 000 frs à 2,5%. Il a retiré son capital investi quand celui-ci s'est monté à 53 000 frs. Quelle a été la durée du placement ?

Solution

On utilise la fonction NPM avec les éléments suivants :
$C_0 = 50\,000$, $C_n = 53\,000$ et $i = 0,025$. Ce qui donne :

$$n = \mathsf{NPM}(0.025; 0; -50000; 53000; 0) \simeq 2,35977 \text{ années.}$$

31.3.2 Facteur de capitalisation et d'escompte

- En répondant à la question : «Quel capital obtient-on au bout d'un certain temps en plaçant aujourd'hui une somme X sur un carnet d'épargne ?», on fait une recherche de valeur finale ou acquise d'un capital. On parle alors d'opération de **capitalisation**.
- Par contre, si l'on se demande : «Quel capital doit-on placer aujourd'hui sur un carnet d'épargne pour obtenir au bout d'un certain temps un capital X ?», on fait une recherche de valeur actuelle d'un capital. On parle alors d'opération d'**escompte**.

On appelle r le **facteur de capitalisation** et v le **facteur d'escompte**. Ces deux valeurs permettent d'alléger les formules. Elles se calculent comme suit :

$$r = 1 + i \qquad \text{et} \qquad v = \frac{1}{r} = \frac{1}{1+i} = (1+i)^{-1}$$

Les formules de capitalisation ou d'escompte peuvent alors s'écrire de façon plus allégée :

$$C_n = C_0 \cdot r^n \qquad \text{et} \qquad C_0 = C_n \cdot v^n$$

31.3.3 Equivalence de capitaux

Ce concept est fondamental en mathématiques financières. Il s'appuie sur les calculs d'actualisation ou de capitalisation qui permettent d'homogénéiser et de comparer des valeurs exprimées à des moments différents.

L'**équivalence des capitaux** aussi appelée **équivalence actuarielle** est réalisée lorsque leurs valeurs à une date quelconque sont égales.

Si l'on considère ces capitaux comme des flux entrants ou sortants, on peut écrire cette équivalence selon l'une ou l'autre des formes ci-après :

$$\text{Valeur actuelle des entrées} = \text{Valeur actuelle des sorties}$$

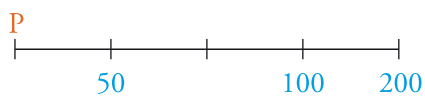
$$\text{Valeur finale des entrées} = \text{Valeur finale des sorties}$$

$$\text{Valeur actuelle des entrées à la date } t = \text{Valeur actuelle des sorties à la date } t$$

Exemple 31.12

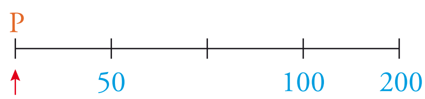
Avec un taux d'intérêt i, quel montant P payé en date 0 permet de financer les 3 prestations suivantes versées en fin d'année 1, en fin d'année 3 et en fin d'année 4 ?

Effectuer le calcul en fixant la date de calcul au début du contrat, en fin de deuxième année ainsi qu'en fin d'année 4.



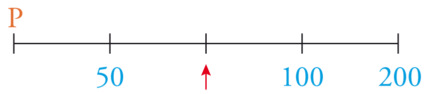
Solution

- En fixant la date du calcul en début de contrat, on obtient :



$$P = 50 \cdot v + 100 \cdot v^3 + 200 \cdot v^4$$

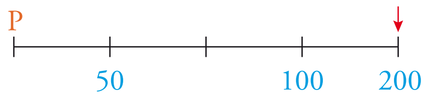
- En fixant la date du calcul en fin de deuxième année, on obtient :



$$P \cdot r^2 = 50 \cdot r + 100 \cdot v + 200 \cdot v^2$$

$$P = \frac{50 \cdot r + 100 \cdot v + 200 \cdot v^2}{r^2}$$

- En fixant la date du calcul en fin d'année 4, on obtient :



$$P \cdot r^4 = 50 \cdot r^3 + 100 \cdot r + 200$$

$$P = \frac{50 \cdot r^3 + 100 \cdot r + 200}{r^4}$$

Exercices d'application de la section 31.3

18 [Valeur finale] Calculer la valeur finale d'un capital de 13 000 frs placé uniquement à intérêts composés de 4,2% durant 8 ans, 8 mois et 3 jours ?

19 [Durée] Après combien d'années, un capital de 3 000 frs peut-il atteindre 5 000 frs au taux d'intérêt composé de 3% ?

20 [Taux d'intérêt] Un capital de 2 500 frs a été placé durant 13 ans à intérêts composés et vaut aujourd'hui 3 234 frs. Quel a été le taux d'intérêt du placement ?

21 [Capital final] Un capital a été placé à 4% durant 3 mois à intérêts simples. Le capital obtenu a été laissé ensuite sur un compte pendant 5 ans à 1% d'intérêts composés. Exprimer le capital final C_n en fonction du capital initial placé C_0.

22 [Taux d'intérêt] On dépose en banque 5 000 frs à intérêts composés. Un an après, on retire la somme déposée. Le reste est laissé sur le compte durant encore une année, ce qui fait au final un montant sur le compte de 208 frs. Calculer le taux d'intérêt du placement.

23 [Taux d'intérêt] Mélina a déposé 10 000 frs sur un compte et laissé cette somme porter des intérêts durant 2 ans. Trouvant le taux attractif, elle ajoute alors 8 764 frs au capital acquis et laisse le tout sur le compte (au même intérêt) durant deux ans supplémentaires. Ainsi, au bout de 4 ans son compte présente un solde de 22 472 frs. À quel taux d'intérêt la banque travaille-t-elle ?

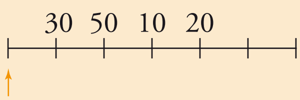
24 [Simplification] Simplifier les calculs suivants, sachant que $r = 1+i$, $v = 1/r$ et $d = i \cdot v$.

(a) $\dfrac{v^2}{v^3}$ **(c)** $r \cdot d$ **(e)** $\dfrac{1-v}{v-1}$

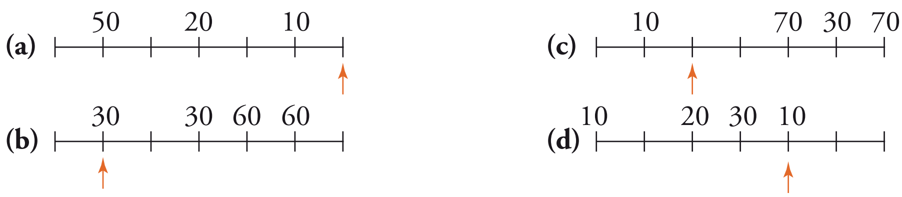
(b) $v \cdot r \cdot d$ **(d)** $\dfrac{1-v}{v}$ **(f)** $\dfrac{v(1-v^n)}{1-v}$

25 [Facteurs] Indiquer la valeur des prestations à la date de calcul notée par la flèche en utilisant les facteurs de capitalisation r et d'escompte v. Les graduations sur l'axe représentent des années.

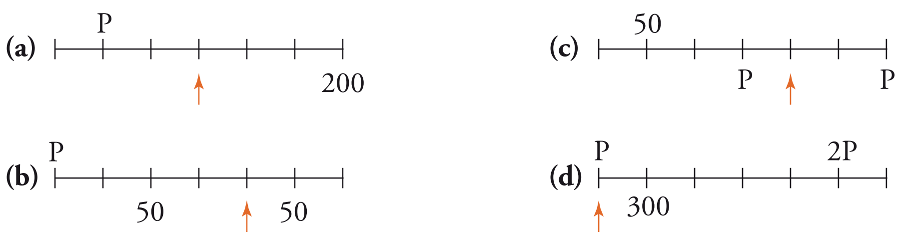
Exemple :



$$\text{Valeur} = 30v + 50v^2 + 10v^3 + 20v^4$$



26 [Équilibre financier] Les valeurs sur l'axe désignent des entrées annuelles et sous l'axe des sorties annuelles. Déterminer la valeur de P permettant d'équilibrer les entrées et les sorties en utilisant un taux d'intérêt à 10% et en utilisant la date de calcul symbolisée par la flèche orange.



27 [Solde] Vous devez régler 5 000 frs à René dans 1 an et 9 500 frs dans 2 ans. Après négociation, René accepte que vous lui versiez 8 000 frs dans un an et le solde dans deux ans. Au taux d'intérêt de 10%, calculez le montant du solde.

28 [Montant d'un prix] On souhaite verser un prix d'une valeur P la première fois dans 5 ans et ce même montant dans 10 ans. On dispose aujourd'hui de 20 000 frs que l'on peut placer à 2,5% d'intérêt annuel. Calculer P.

29 [Taux de rendement] On vous propose un investissement qui doublera votre fortune tous les 10 ans à intérêts composés. Quel est le taux de rendement annuel de cet investissement ?

31.4 Taux particuliers

31.4.1 Taux proportionnel

Le **taux proportionnel** fait référence à l'intérêt simple. On parle de taux proportionnel car si l'intérêt annuel est par exemple de 12%, il sera proportionnellement de 1% par mois.

Formellement, le taux proportionnel i_m, payable m fois l'an fait donc rapporter à un même capital, durant la même période, le même intérêt simple.

Cette définition se traduit par la relation suivante :

$$\underbrace{C_0(1+i_m \cdot m)}_{\substack{\text{Intérêt simple payable} \\ m \text{ fois dans l'année}}} = \underbrace{C_0(1+i)}_{\substack{\text{Intérêt simple} \\ \text{annuel}}}$$

Cela permet d'exprimer i_m en fonction de i et réciproquement :

$$i_m = \frac{i}{m} \qquad \text{ou} \qquad i = i_m \cdot m$$

ou encore entre deux taux proportionnels i_m et i_k :

$$i_m \cdot m = i_k \cdot k$$

Dans la pratique, les périodes suivantes sont normalement considérées :

Période	m	i_m
Annuelle	1	i
Semestrielle	2	i_2
Trimestrielle	4	i_4
Mensuelle	12	i_{12}

Exemple 31.13

Trouver le taux mensuel proportionnel au taux annuel de 12% ?

Solution

Comme $i = 0,12$ alors $i_{12} = \frac{i}{12} = \frac{0,12}{12} = 0,01$ soit 1%.

Exemple 31.14

Trouver le taux mensuel proportionnel au taux semestriel de 3% ?

Solution

On a $i_2 = 0,03$ et on cherche i_{12}. Comme $i_{12} \cdot 12 = i_2 \cdot 2$, on obtient :

$$i_{12} = \frac{0,03 \times 2}{12} = 0,005 \quad \text{ou} \quad 0,5\%$$

31.4.2 Taux équivalent

Les taux équivalents s'appliquent aux calculs des intérêts composés.

Un **taux équivalent** fait rapporter à un même capital, durant la même période, le même intérêt composé.

Comme pour l'intérêt simple, le taux équivalent se note i_m et est payable m fois l'an, mais cette fois ci de façon composée. Cela conduit alors à la relation suivante :

$$\underbrace{C_0(1+i_m)^m}_{\substack{\text{Intérêt composé payable} \\ m \text{ fois dans l'année}}} = \underbrace{C_0(1+i)}_{\substack{\text{Intérêt composé} \\ \text{annuel}}}$$

On peut alors exprimer i_m en fonction de i et réciproquement :

$$i_m = (1+i)^{\frac{1}{m}} - 1 \qquad \text{ou} \qquad i = (1+i_m)^m - 1$$

ou encore entre deux taux équivalents i_m et i_k :

$$(1+i_m)^m = (1+i_k)^k$$

Exemple 31.15

Trouver le taux mensuel équivalent au taux annuel de 12%.

Solution

Comme $i = 0,12$, on trouve $i_{12} = (1+0,12)^{\frac{1}{12}} - 1 \simeq 0,009488$ soit 0,949%.

Exemple 31.16

Trouver le taux trimestriel équivalent au taux mensuel de 1%.

Solution

On a $i_{12} = 0,01$ et on cherche i_4. Comme $(1+i_4)^4 = (1+i_{12})^{12}$, on obtient :

$$i_4 = (1+0,01)^{\frac{12}{4}} - 1 \simeq 0,0303 \quad \text{ou} \quad 3,03\%.$$

31.4.3 Taux moyen de plusieurs placements

Si plusieurs placements sont effectués simultanément pour des durées et à des taux différents, on peut être amené à calculer le taux unique T ou **taux moyen** de l'ensemble de ces placements.[6]

Notations :

C_t Placement numéro t

i_t Taux d'intérêt annuel du placement numéro t

n_t Durée du placement numéro t

k Nombre de placements

T Taux moyen de l'ensemble des paiements

Le taux moyen T doit satisfaire l'équation d'équilibre suivante :

$$\sum_{t=1}^{k} C_t \cdot i_t \cdot n_t = \sum_{t=1}^{k} C_t \cdot T \cdot n_t$$

Ce qui conduit à :

$$T = \frac{\sum_{t=1}^{k} C_t \cdot i_t \cdot n_t}{\sum_{t=1}^{k} C_t \cdot n_t}$$

Exemple 31.17

Trouver le taux moyen des 3 placements suivants :

Placement	Durée	Taux
1 000 frs	90 jours	3%
2 000 frs	120 jours	4%
3 000 frs	170 jours	5%

Solution

$$T = \frac{1000 \times 0,03 \times \frac{90}{360} + 2000 \times 0,04 \times \frac{120}{360} + 3000 \times 0,05 \times \frac{170}{360}}{1000 \times \frac{90}{360} + 2000 \times \frac{120}{360} + 3000 \times \frac{170}{360}}$$

$$= 4,5\%$$

6. Pour ne pas alourdir l'écriture, C_t exprime ici le placement numéro t et i_t le taux d'intérêt annuel du placement numéro t.

31.4.4 Taux effectif et nominal

Ces taux interviennent parfois dans les calculs d'emprunts, comme le petit crédit par exemple. Ils permettent à l'émetteur de l'emprunt d'afficher un taux inférieur à ce qu'il est réellement. Cette pratique est par ailleurs interdite.

Imaginons que les conditions d'un prêt soient les suivantes : Intérêt annuel de 12% payable par tranches mensuelles de 1%. Un lecteur attentif se rend compte que payer 1% tous les mois dans un système d'intérêts composés ne donne pas un intérêt annuel de 12% mais de $i = (1 + 0,01)^{12} - 1 = 12,682\%$. Pour que l'énoncé soit correct, il faudrait écrire : «Taux annuel de 12,682% payable par tranches mensuelles de 1%».

Cette illustration introduit 2 nouvelles notions :
Le **taux effectif** (12,682%) et le **taux nominal** (12%) payable par fractions mensuelles (de 1%).

On appelle $i^{(m)}$, le **taux nominal** payable par fractions de $\frac{i^{(m)}}{m}$ et i, le **taux annuel effectif**. Ce dernier se calcule comme suit :

$$i = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m - 1 \qquad \text{ou} \qquad i^{(m)} = m\left[(1+i)^{1/m} - 1\right]$$

Exemple 31.18

Calculer le taux annuel effectif correspondant au taux nominal de 8% payable par fractions trimestrielles de 2%.

Solution

Comme $i^{(4)} = 0,08$ donc :

$$i = \left(1 + \frac{0,08}{4}\right)^4 - 1 \simeq 8,243\%$$

Taux effectif et TAEG quelle différence ?

Le **taux annuel effectif global** (**TAEG**), est un taux effectif qui prend en compte la totalité des frais occasionnés par la souscription d'un prêt, à savoir :

- les intérêts bancaires (taux d'intérêt nominal),
- les frais de dossier (frais bancaires ou commission de courtier),
- les autres frais qui sont imposés pour l'obtention du crédit.

Exemple 31.19

Soit un prêt de 1 000 frs, remboursé un an et demi plus tard par un montant de 1 200 frs. Les frais de dossier de 50 frs sont acquittés en même temps que la mise à disposition des fonds. Calculer le TAEG.

Solution

L'équation d'équilibre donne :

$$\begin{aligned} 1000 &= 50 + \frac{1200}{(1+\mathrm{TAEG})^{1,5}} \\ \mathrm{TAEG} &= \left(\frac{1200}{950}\right)^{1/1,5} - 1 \\ &\simeq 0,1685 = 16,85\% \end{aligned}$$

31.4.5 Taux instantané et capitalisation continue

Taux instantané

En reprenant la formule du taux effectif :

$$i = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m - 1$$

on peut se demander ce qu'il adviendrait du taux effectif si l'intérêt était versé non pas mensuellement, ni quotidiennement, mais en continu, d'une manière instantanée.

Un résultat établi d'analyse (sortant du cadre de ce livre) donne :

$$\lim_{m\to\infty} \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m = e^x$$

Si on applique ce résultat ici,

$$\lim_{m\to\infty} \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m = e^{i^{(m)}}$$

on se rend compte que $i^{(m)}$ devient alors un taux instantané. En notant $\delta = i^{(m)}$, on détermine le taux effectif en fonction du taux instantané par :

$$i = e^{\delta} - 1 \qquad \text{ou} \qquad \delta = \ln(1+1)$$

Exemple 31.20

Calculer le taux annuel effectif correspondant au taux instantané de 8%.

Solution

Comme $\delta = 0,08$, on obtient : $i = e^{0,08} - 1 \simeq 8,329\%$

Capitalisation continue

En cas de capitalisation continue calculée sur la base d'un intérêt continu ou instantané δ, la fonction de capitalisation s'écrit :

$$C_n = C_0 e^{\delta n}$$

Exemple 31.21

Au taux d'intérêt continu de 10% l'an, calculer le nombre d'années qu'il faut pour qu'un capital de 6 000 frs atteigne 15 000 frs.

Solution

À partir des éléments constitutifs suivants :
$C_0 = 6000$, $C_n = 15000$, $\delta = 0,1$, on détermine n comme suit :

$$n = \frac{\ln(C_n/C_0)}{\delta} = \frac{\ln(2,5)}{0,1} \simeq 9,1629 \text{ ans.}$$

Exercices d'application de la section 31.4

30 [Taux proportionnels] Exprimer les taux proportionnels suivants :

(a) i en fonction de i_m

(b) i_3 en fonction de i_4

(c) i_{360} en fonction de i_{12}

(d) $i_{2 \text{ ans}}$ en fonction de i

31 [Taux proportionnels] On place C_0 durant une année au taux proportionnel i_k payable k fois l'an. Exprimer C_n en fonction de C_0.

32 [Taux proportionnel] Que vaut le taux proportionnel i_{12} si $C_n = M$, $C_0 = \dfrac{200}{203}M$ et $n = 3$ mois ?

33 [Taux mensuel] Un magasin propose un paiement comptant de 20% et un solde majoré de 2 points de pour-cent à payer dans les 60 jours. À quel taux mensuel cette opération de crédit correspond-elle ?

34 [Taux équivalent]

(a) On donne un taux annuel de 10%. Quel est le taux semestriel équivalent ?

(b) On donne un taux mensuel de 1%. Quel est le taux annuel équivalent ?

(c) On donne un taux trimestriel de 3%. Quel est le taux mensuel équivalent ?

35 [Valeur acquise] Quel est la valeur acquise d'un capital C, placé à intérêt composé pendant 3 ans et demi, au taux annuel i ?

(a) en utilisant une capitalisation annuelle.

(b) en utilisant une capitalisation mensuelle.

36 [Valeur actuelle] Quelle est la valeur actuelle d'un capital de 18 000 frs à intérêt composé annuel de 4% durant 6 trimestres.

(a) en utilisant une capitalisation annuelle.

(b) en utilisant une capitalisation semestrielle.

37 [Intérêt équivalent] Si un intérêt composé de 2% est versé chaque année, quel devrait être alors l'intérêt équivalent qui pourrait être versé tous les 5 ans ?

38 [Taux effectif] Calculer les taux d'intérêt annuels effectifs correspondant aux taux annuels nominaux suivants :

(a) 4% capitalisé semestriellement

(b) 3,6% capitalisé mensuellement

(c) 8% capitalisé trimestriellement

39 [Taux nominal] La banque X paie l'intérêt tous les trois mois sur les dépôts au taux nominal de 4% par an capitalisé trimestriellement. La banque Y paie l'intérêt quotidiennement sur ses dépôts. Quel doit être le taux annuel nominal d'intérêt de la banque Y si elle entend concurrencer la banque X ?

40 [Investissement] En investissant P frs pendant n années au taux nominal de 4% capitalisé semestriellement, on obtient un capital accumulé de 5 305 frs. Par contre, la valeur actuelle de $3P$ frs payables dans n années au taux annuel effectif de 4% est de 13 593,75 frs. Déterminer P et n.

41 [TAEG] Pour emprunter une somme de 13 000 frs, un particulier a le choix entre deux banques.

- La banque A propose de rembourser l'emprunt par un seul versement de 14 000 frs au bout de 2 ans. Il y a 300 frs de frais de dossier à payer en début de contrat.
- La banque B propose de rembourser l'emprunt par deux versements de 7 000 frs, le premier 1 an après l'emprunt, le second 2 ans après l'emprunt. Elle ne facture par contre aucun frais de dossier.

Calculer le TAEG proposé par chacune des deux banques.

42 [TAEG] Pour rembourser un crédit à la consommation de 3 000 frs, on doit verser 60 frs de frais de dossiers et d'assurance à la date de signature du prêt puis 1580 frs après 6 mois et 1540 frs après un an. Calculer le TAEG de l'emprunt.

43 [TAEG] Un capital de 20 000 frs placé à intérêts composés durant 4 ans a rapporté un revenu de 9 282 frs.

(a) À quel taux continu ce placement a-t-il été fait ?

(b) Quel est le taux annuel effectif ?

44 [TAEG] Pour un achat à crédit chez ARNAK SA vous devez vous acquitter immédiatement de frais de dossier représentant 4% du crédit ainsi qu'un premier acompte de 34% du prix de la marchandise. Le solde est payé à 30 jours.

(a) Quel est le TAEG correspondant ?

(b) Montrer que le TAEG est indépendant de l'acompte versé.

31.5 Problèmes et exercices de synthèse

45 [Capitalisation] Capitaliser 20 000 frs sur 10 ans au taux d'intérêt annuel nominal de 9%, payable par fractions mensuelles.

46 [Intérêt annuel] Voici l'extrait d'un compte épargne à 2%. Calculer l'intérêt annuel de ce compte au 31.12.2021 en utilisant la méthode des nombres et diviseurs fixes.

Les dates à prendre en compte dans les calculs sont toujours les dates valeur.

Date	Valeur	Libellé	Débit	Crédit
01.01.2021	31.12.2020	Solde à nouveau	3600 frs	
12.04.2021	13.04.2021	Retrait d'espèces		1200 frs
15.09.2021	15.09.2021	Dépôt	4000 frs	

47 [Durée de capitalisation] Combien de temps faut-il pour qu'un capital double à intérêts composés de 4% ?

48 [Valeur finale] 35 000 frs sont déposés sur un compte épargne à un taux d'intérêt composé continu de 10% l'an.

(a) Quel sera le capital acquis dans une année ?

(b) Quand cette somme atteindra-t-elle 100 000 frs ?

49 [Recherche de capitaux] Deux capitaux, dont le total est de 5 000 frs, sont placés :

- L'un au taux d'intérêt simple annuel de 10%
- L'autre au taux d'intérêt composé annuel de 8%

Au bout de 9 ans, ils ont acquis la même valeur. Quels sont ces deux capitaux ?

50 [Recherche de capitaux] Nicolas a placé 10 351,30 frs sur un compte épargne à 3%. Au même moment, son frère, Sébastien a placé 4 931,60 frs sur un autre compte à 4%. Au bout de n années, Nicolas aura deux fois plus sur son compte que Sébastien. Déterminer n ainsi que les deux capitaux finaux. (Intérêt composé)

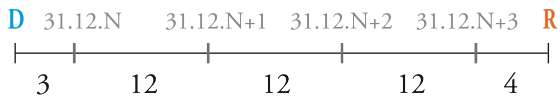
51 [Taux annuel] On place à intérêt composé 2900 frs à 9% durant 1 an et 7000 frs à 3% durant 2 ans. Quel est le taux annuel moyen de cette opération ?

52 [Date du dépôt] La banque Picsou utilise le système calendaire exact pour le calcul du nombre de jours. Si le 21.08.2020 1 000 jours se sont écoulés depuis le dépôt d'une certaine somme, à quelle date a eu lieu le dépôt ?

53 [Montant du capital] Un capital placé à 4% d'intérêt simple pendant une durée a rapporté 1600 frs. Si l'on place ce même capital au taux de 5% un mois de moins, l'intérêt fourni par ce capital sera de 1500 frs. Calculer le montant de ce capital ainsi que les durées (en mois) du placement.

54 [Retrait] Martin dispose d'un capital de 78 100 frs qu'il décide de placer sur un compte le 15.01.N lui rapportant un intérêt simple annuel de 4,5%. Quel retrait peut-il se permettre tous les 15 du mois afin de ne pas entamer son capital ?

55 [Calcul du retrait] À propos d'un dépôt **D** suivi d'un retrait **R**, 3 ans et 7 mois plus tard. Qui a raison ?



- Cécile : $R = D(1+i)^{3+7/12}$
- Laure : $R = D\left(1+\frac{7}{12}i\right)\cdot(1+i)^3$
- Julie : $R = D\left(1+\frac{1}{4}i\right)\cdot(1+i)^3\cdot\left(1+\frac{1}{3}i\right)$
- Diane : $R = D\left(1+\frac{43}{12}i\right)$

56 [Recherche du taux] On dépose un montant A au taux i durant un an. On rajoute ensuite au montant capitalisé un montant B. À la fin de la seconde année, le solde du compte avec les intérêts se monte à S.

(a) Exprimer i en fonction de A, B et S

(b) Application numérique : Que vaut i si $A = 3\,000$, $B = 4\,250$ et $S = 7\,770$

57 [Fonction de capitalisation] On donne la fonction de capitalisation suivante :

$$r(n) = 1 + \frac{0,5}{100}n^2 \qquad \text{pour } n \in [0;10]$$

(a) Quelle est la valeur accumulée d'un capital de 18 000 frs au bout de 4 ans ?

(b) Quelle est la valeur accumulée à la fin de la dixième année d'un capital de 20 900 frs placé au début de la quatrième année ?

(c) Quel est le taux effectif d'intérêt pour la sixième année ?

(d) Quelle est la valeur actuelle de 5 250 frs payable à la fin de la dixième année ?

58 [Fonction de capitalisation] On donne la fonction de capitalisation suivante :

$$C_n = C_0 + 200n^3 \qquad \text{pour } n \in [0;20]$$

Si le taux effectif d'intérêt pour la sixième année est de 3,64%, déterminer :

(a) le capital initial placé

(b) le taux effectif d'intérêt pour la seizième année

(c) l'intérêt gagné pendant les 5 premières années.

59 [Taux du crédit] Un crédit à la consommation de 25 000 frs est accordé aux conditions suivantes :

- 47,2% du crédit remboursable dans un an.
- 19 952 frs remboursable dans 2 ans.

(a) Quel est le taux du crédit ?

(b) Ce taux est-il légal en Suisse ?

60 [LPP] En Suisse, dans la prévoyance professionnelle (LPP), on trouve la formule suivante pour calculer la somme des taux futurs de bonification de vieillesse :

$$B_{\ddot{x},s} = b_{\ddot{x}} + b_{\ddot{x}+1} + b_{\ddot{x}+2} + \cdots + b_s \frac{m}{12}$$

Les éléments constitutifs de cette formule sont les suivants :

s 65 ans (âge d'entrée en retraite),

$\ddot{x}$ Âge de l'assuré (année civile moins année de naissance),

$b_{\ddot{x}}$ Taux de bonification de vieillesse à l'âge $\ddot{x}$ ($b_{\ddot{x}}$=18% pour $\ddot{x} \geq 55$ ans),

m Nombre de mois depuis le début de l'année civile jusqu'au premier jour du mois qui suit celui de l'anniversaire.

Calculer $B_{\ddot{x},s}$ pour un assuré né le 10 mars 1959 et dont la date de calcul est le 4 juin 2021.

61 [Défi] La formule ci-après permet un calcul exact du nombre de jours (N_j) entre deux dates ($J_1/M_1/A_1$ et $J_2/M_2/A_2$) comprises entre le 1er janvier 1950 et le 31 décembre 2049 :

$$N_j = f(J_2, M_2, A_2) - f(J_1, M_1, A_1)$$

avec :

$$f(J,M,A) = \begin{cases} 365(A-1) + E\left(\dfrac{A-1}{4}\right) - E\left(\dfrac{A-1}{100}\right) \\ +E\left(\dfrac{A-1}{400}\right) + 31(M-1) + J & \text{si} \quad M \leq 2 \\ 365(A-1) + E\left(\dfrac{A}{4}\right) - E\left(\dfrac{A}{100}\right) \\ +E\left(\dfrac{A}{400}\right) + 31(M-1) + J - E(0,4M+2,2) & \text{si} \quad M > 2 \end{cases}$$

Dans cette formule, $E(x)$ désigne la partie entière de x.

Qu'à fêté Martin le 09.02.2020 sachant qu'il est né le 23.09.1992 ?

Chapitre 32

Rentes

Objectifs du chapitre

- connaître les formules de base des annuités.
- appliquer la formule de base des annuités dans une contexte économique.
- résoudre des problèmes en fonction des variables en jeu.
- résoudre des problèmes liés à des annuités fractionnées ou variables.

32.1 Introduction

Au chapitre précédent, on a étudié la valeur actuelle ou finale d'un seul capital. Ce chapitre lui, est en quelque sorte une généralisation du chapitre précédent puisqu'il s'intéresse aux valeurs actuelles ou finales de plusieurs capitaux versés dans le temps.

32.1.1 Définitions

Une **rente** ou **annuité** est une suite de paiements périodiques à intervalles de temps réguliers et durant une période fixée d'avance.
Il suffit alors d'appliquer la formule $C_0 = v^n C_n$ à chaque **terme** de rente versé si l'on souhaite connaître la **valeur actuelle** de cette rente.
Par contre, si l'on souhaite obtenir la **valeur finale** de la rente, on appliquera à chaque terme la formule $C_n = C_0 r^n$.

Calculer une valeur finale, revient à se poser la question suivante : «Combien obtiendrais-je au final en plaçant des montants réguliers sur un compte bancaire ?» Au contraire, calculer une valeur actuelle revient à se poser la question suivante : «Quelle somme dois-je avoir aujourd'hui à disposition pour pouvoir verser des montants réguliers fixés d'avance ?»

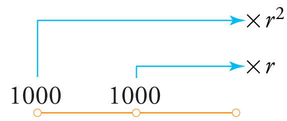
Exemple 32.1

On effectue les versements suivants sur un compte épargne à 5%. Quel capital aura-t-on à notre disposition après 2 ans ?

Montant versé	Date
1 000 frs	Aujourd'hui
1 000 frs	Dans un an

Solution

Il s'agit de calculer la valeur finale d'une rente de 1 000 frs payable pendant 2 ans au moyen de la formule $C_n = C_0 r^n$:



Ainsi, la valeur finale VF de cette rente vaut après 2 ans :

$$\begin{aligned} \text{VF} &= 1000\ r^2 + 1000\ r \\ &= 1000 \times 1,05^2 + 1000 \times 1,05 = 2152,50 \text{ frs.} \end{aligned}$$

Les formules étudiées dans ce chapitre permettront de simplifier ce type de calcul.

Remarque

On parle de rente à **termes constants** si tous les termes sont de même montant, comme dans l'exemple précédent. Dans le cas contraire, on parle de rente à **termes variables**.

Si la rente est payable en fin de période, elle est dite **postnumerando** ou **à terme échu**. Par contre, si elle est payable en début de période, elle est dite **praenumerando**, ce qui est le cas de l'exemple précédent.

En mathématiques financières, on étudie des rentes qui sont toujours payées (**rentes certaines**) et dont la durée est normalement fixée d'avance (**rentes temporaires**). On parle alors de rentes certaines temporaires. En mathématiques actuarielles, les rentes sont versées normalement en cas de vie d'un assuré. On parle dans ce cas de **rentes viagères**. On reviendra sur ce type de rentes au dernier chapitre de cet ouvrage.

32.1.2 Notations

$a_{\overline{n}|}$ Valeur **actuelle** d'une rente annuelle de 1 fr payable n fois de façon **postnumerando**.
$\ddot{a}_{\overline{n}|}$ Valeur actuelle d'une rente annuelle de 1 fr payable n fois de façon **praenumerando**.
$s_{\overline{n}|}$ Valeur **finale** d'une rente annuelle de 1 fr payable n fois de façon postnumerando.
$\ddot{s}_{\overline{n}|}$ Valeur finale d'une rente annuelle de 1 fr payable n fois de façon praenumerando.

Remarque

Dans le calcul des rentes, la valeur n représente non pas une durée comme au premier chapitre mais un nombre de paiements. Lorsque de façon usuelle, on dit qu'une rente est payée durant n années, on sous-entend en fait n versements!

La formule de rente à utiliser dépend de la date de calcul :

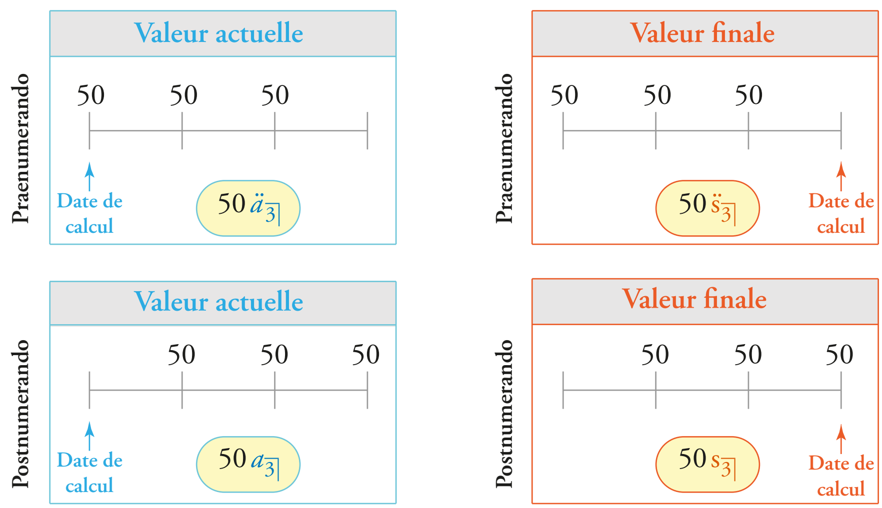
- Date de calcul : un an avant le premier versement : $a_{\overline{n}|}$
- Date de calcul : au moment du premier versement : $\ddot{a}_{\overline{n}|}$
- Date de calcul : un an après le dernier versement : $\ddot{s}_{\overline{n}|}$
- Date de calcul : au moment du dernier versement : $s_{\overline{n}|}$

L'exemple ci-après illustre toutes ces possibilités :

Exemple 32.2

Illustrer le paiement de 3 termes de rentes de 50 frs en utilisant des dates de calcul différentes.

Solution



32.2 Rentes à termes constants

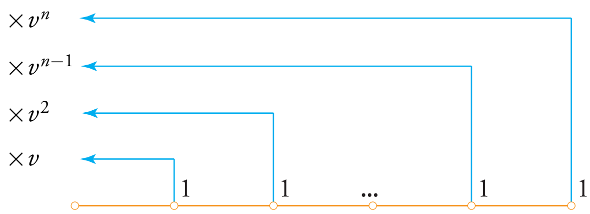
32.2.1 Rente postnumerando

Le paiement du premier terme de rente a lieu un an après la date de calcul. Cette situation correspond en général au remboursement d'une dette. On emprunte à l'instant 0 puis on commence à rembourser à la fin du premier mois, du premier trimestre, ou en fin d'année.

Valeur actuelle

On cherche la valeur de cette rente à l'instant 0, c'est-à-dire en début de contrat. Chaque terme de rente est alors ramené (escompté) à l'origine.

Schéma



$$a_{\overline{n}|} = v + v^2 + \cdots + v^{n-1} + v^n \qquad \text{forme développée}$$

$$a_{\overline{n}|} = \frac{1 - v^n}{i} \qquad \text{forme simplifiée}$$

Formules des rentes.
Comment les établir ?

Exemple 32.3

Calculer la valeur actuelle d'une rente postnumerando de 3 500 frs versée durant 10 ans et calculée au taux d'intérêt annuel de 6%.

Solution

On utilise la formule simplifiée qui permet un calcul immédiat. On calcule successivement :

$$i = 0,06 \qquad v = \frac{1}{1,06} \qquad a_{\overline{10}|} = \frac{1 - v^{10}}{i} = \frac{1 - 1,06^{-10}}{0,06} \simeq 7,360087$$

Pour une rente de 3 500 frs, cela donne :

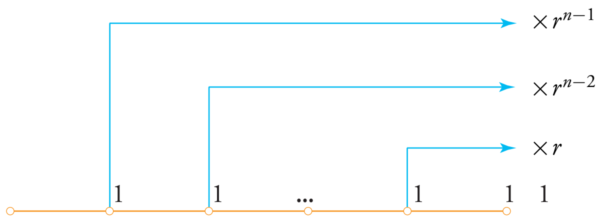
$$\text{Valeur actuelle} = 3\,500 a_{\overline{10}|}$$
$$= 3\,500 \times 7,360087 \simeq 25\,760{,}30 \text{ frs.}$$

Cette valeur correspond au montant qu'il faudrait par exemple placer sur un carnet d'épargne à 6% afin de pouvoir y faire un retrait annuel à la fin de chaque année de 3 500 frs durant 10 ans.

Valeur finale

Cette valeur est la moins utilisée en pratique. Elle correspond à des paiements périodiques dont on cherche à connaître la valeur finale au moment du dernier versement.

Schéma



$$s_{\overline{n}|} = 1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-2} + r^{n-1} \qquad \text{forme développée}$$

$$s_{\overline{n}|} = \frac{r^n - 1}{i} \qquad \text{forme simplifiée}$$

Exemple 32.4

Calculer la valeur finale d'une rente postnumerando de 3 500 frs versée durant 10 ans et calculée au taux d'intérêt annuel de 6%.

Solution

On utilise la formule simplifiée qui permet un calcul immédiat. On calcule successivement :

$$i = 0,06 \qquad r = 1 + i = 1,06 \qquad s_{\overline{10}|} = \frac{r^n - 1}{i} = \frac{1,06^{10} - 1}{0,06} \simeq 13,180795$$

Pour une rente de 3 500 frs, on obtient :

$$\begin{aligned}\text{Valeur finale} &= 3\,500 s_{\overline{10}|} \\ &= 3\,500 \times 13,180795 \simeq 46\,132{,}80 \text{ frs.}\end{aligned}$$

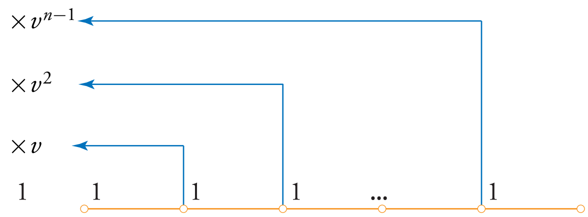
Cette valeur représente ainsi le capital acquis au bout de 10 ans, calculé au moment du dernier versement.

32.2.2 Rente praenumerando

Dans une rente praenumerando, les paiements se font en début de période. On s'en sert par exemple pour constituer un capital par des paiement réguliers. On l'utilise également pour le calcul des primes d'assurance-vie, dont la première prime est précisément due au moment de la conclusion du contrat.

Valeur actuelle

Schéma



$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = 1 + v + v^2 + \cdots + v^{n-2} + v^{n-1} \qquad \text{forme développée}$$

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = \frac{1 - v^n}{d} \qquad \text{avec} \qquad d = \frac{i}{1+i} = i\,v \qquad \text{forme simplifiée}$$

Exemple 32.5

Calculer la valeur actuelle d'une rente praenumerando de 3 500 frs versée durant 10 ans et calculée au taux d'intérêt annuel de 6%.

Solution

On calcule au préalable :

$$i = 0,06 \qquad v = \frac{1}{1,06} \qquad d = \frac{0,06}{1,06} \simeq 0,0566037$$

puis :

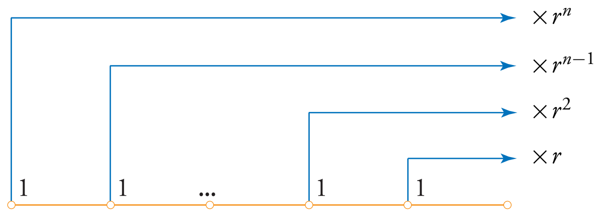
$$\begin{aligned}\text{Valeur actuelle} &= 3\,500\ddot{a}_{\overline{10}|}\\ &= 3\,500 \times \frac{1-1,06^{-10}}{0,0566037} =\simeq 27\,305,92 \text{ frs.}\end{aligned}$$

Avec 27 305,92 frs, on peut donc financer une rente annuelle de 3 500 frs à 6% débutant immédiatement et versée pendant 10 ans.

Valeur finale

La valeur finale d'une rente praenumerando permet de connaître par exemple le montant accumulé sur un compte épargne alimenté par des entrées régulières et constantes. La date du calcul de la valeur finale d'une rente annuelle praenumerando a lieu un an après le dernier terme de rente versé.

Schéma



$$\ddot{s}_{\overline{n}|} = r + r^2 + \cdots + r^{n-1} + r^n \qquad \text{forme développée}$$

$$\ddot{s}_{\overline{n}|} = \frac{r^n - 1}{d} \qquad \text{avec} \qquad d = \frac{i}{1+i} = i\,v \qquad \text{forme simplifiée}$$

Exemple 32.6

Calculer la valeur finale d'une rente praenumerando de 3 500 frs versée durant 10 ans et calculée au taux d'intérêt annuel de 6%.
On calcule au préalable :

$$i = 0,06 \qquad r = 1,06 \qquad d = \frac{i}{1+i} \simeq 0,0566037$$

On calcule ensuite :

$$\begin{aligned}\text{Valeur finale} &= 3\,500\,\ddot{s}_{\overline{10}|}\\ &= 3\,500 \times \frac{1,06^{10}-1}{0,0566037} \simeq 48\,900{,}75 \text{ frs.}\end{aligned}$$

Cette valeur se calcule pour connaître par exemple la valeur finale d'un carnet d'épargne alimenté régulièrement par des montants constants et dont le premier versement a lieu immédiatement.

Formules des rentes.
Comment les établir sans progressions géométriques.

Excel
Sur Excel, les valeurs actuelles ou finales de rentes peuvent être obtenues au moyen des fonctions financières intégrées :

Formule financière	Équivalent Excel
$a_{\overline{n}|}$	$\text{VA}(i;n;-1;0;0)$
$s_{\overline{n}|}$	$\text{VC}(i;n;-1;0;0)$
$\ddot{a}_{\overline{n}|}$	$\text{VA}(i;n;-1;0;1)$
$\ddot{s}_{\overline{n}|}$	$\text{VC}(i;n;-1;0;1)$

Exemple 32.7

Un investisseur place chaque année 5 000 frs sur un compte rémunéré à 2,5%. Quel est son capital acquis à la fin de la 4ème année ?

Solution
On recherche ici la valeur finale d'une rente de 5 000 frs payable praenumerando :

$$5000 \cdot \ddot{s}_{\overline{n}|} = 5\,000 \times \text{VC}(0.025;4;-1;0;1) \simeq 21\,281{,}64 \text{ frs.}$$

Le 3ème paramètre peut aussi être remplacé par le montant de la rente, ainsi :

$$5\,000 \times \ddot{s}_{\overline{n}|} = \text{VC}(0.025;4;-5000;0;1) \simeq 21\,281{,}64 \text{ frs.}$$

32.2.3 Relations entre les paramètres

Dans une fonction financière standard liée aux rentes, on met en présence une valeur finale ou actuelle V, une rente annuelle R, ainsi qu'une fonction de capitalisation ou d'actualisation $f(i,n)$ dépendant de i et n, comme par exemple $a_{\overline{n}|}$, $\ddot{a}_{\overline{n}|}$ ou $\ddot{s}_{\overline{n}|}$: $V = R \cdot f(i,n)$

Recherche de *i*

Cette opération est difficile car il n'est pas possible d'isoler i en fonction des autres paramètres. Mathématiquement, il faut utiliser des méthodes par itération comme la méthode de bissection (dichotomie), celle de la sécante ou encore de la méthode de Newton-Raphson, méthodes qui dépassent le cadre de cet ouvrage. On se contente ici d'utiliser les fonctions intégrées d'Excel.

Méthodes numériques.
Un aperçu des méthodes précitées.

Excel
Le tableau ci-après résume les fonctions financières d'Excel à utiliser pour déterminer le taux d'intérêt selon les différentes situations :

La valeur suivante est connue	i s'obtient au moyen de
$a_{\overline{n}\vert}$	$i = \text{TAUX}(n; -1; a_{\overline{n}\vert}; 0; 0)$
$s_{\overline{n}\vert}$	$i = \text{TAUX}(n; -1; 0; s_{\overline{n}\vert}; 0)$
$\ddot{a}_{\overline{n}\vert}$	$i = \text{TAUX}(n; -1; \ddot{a}_{\overline{n}\vert}; 0; 1)$
$\ddot{s}_{\overline{n}\vert}$	$i = \text{TAUX}(n; -1; 0; \ddot{s}_{\overline{n}\vert}; 1)$

Exemple 32.8

On dispose aujourd'hui de 17 572,22 frs permettant de verser immédiatement une rente de 2 000 frs par an durant 10 ans. À quel taux d'intérêt cette opération correspond-elle ?

Solution
On peut écrire la relation suivante : $2\,000\ddot{a}_{\overline{10}|} = 17\,572{,}22$, c'est-à-dire :

$$\ddot{a}_{\overline{10}|} = \frac{17\,572{,}22}{2\,000} = 8{,}786109$$

En utilisant la fonction Excel TAUX on obtient :

$$\text{TAUX}(10; -1; 8.786109; 0; 1) = 3\%.$$

Recherche de *n*

Contrairement à la recherche de i, n peut être obtenu algébriquement ou déterminé au moyen d'Excel.
Cependant, lorsque l'on recherche n, on recherche un nombre de paiements et non pas une durée. Or, la plupart du temps, la valeur de n obtenue n'est pas un nombre entier. Pour que

le calcul financier soit exact, il faut alors procéder comme suit :

1. Si n n'est pas entier, on complète la rente par un paiement partiel de valeur X, soit au moment du dernier terme de rente soit 1 an après le dernier terme de rente.
2. Pour déterminer la valeur X, on pose l'équation d'équilibre actuarielle en tenant compte des $[n]$ termes entiers de rentes, puis on résout par rapport à X.

Exemple 32.9

Un particulier a une dette de 2 400 frs qu'il s'engage à rembourser par des montants postnumerando annuels de 800 frs. Si l'institut de crédit travaille à 10% d'intérêt :

(a) Déterminer n

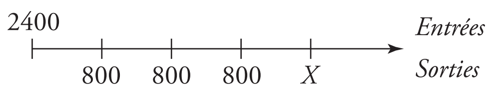
(b) Quel sera le montant partiel versé un an après le dernier terme de rente?

Solution

(a) Pour déterminer n, il suffit d'isoler cette valeur de l'équation d'équilibre suivante :

$$\begin{aligned}
800 \cdot a_{\overline{n}|} &= 2400 && \text{équation d'équilibre} \\
a_{\overline{n}|} &= 3 && \text{isoler } a_{\overline{n}|} \\
\frac{1-v^n}{i} &= 3 && \text{développer } a_{\overline{n}|} \\
n &= \frac{\ln(1-3i)}{\ln(v)} && \text{isoler } n \\
&= \frac{\ln(1-3\times 0,1)}{\ln(1,1^{-1})} \simeq 3,742
\end{aligned}$$

(b) Le montant partiel X versé un an après le dernier terme de rente se détermine comme suit, à partir de l'équation d'équilibre actuarielle : (valeur actuelle des entrées = valeur actuelle des sorties)



$$2400 = 800 \cdot a_{\overline{3}|} + X \cdot v^4$$

$$X = \frac{2400 - 800 \cdot a_{\overline{3}|}}{v^4} = 601,04 \text{ frs.}$$

Excel

Les fonctions financières d'Excel permettent de déterminer la durée, mais ne calculent pas le dernier paiement partiel :

La valeur suivante est connue	n s'obtient au moyen de
$a_{\overline{n}\rvert}$	$n = \text{NPM}(\text{i}; -1; a_{\overline{n}\rvert}; 0; 0)$
$s_{\overline{n}\rvert}$	$n = \text{NPM}(\text{i}; -1; 0; s_{\overline{n}\rvert}; 0)$
$\ddot{a}_{\overline{n}\rvert}$	$n = \text{NPM}(\text{i}; -1; \ddot{a}_{\overline{n}\rvert}; 0; 1)$
$\ddot{s}_{\overline{n}\rvert}$	$n = \text{NPM}(\text{i}; -1; 0; \ddot{s}_{\overline{n}\rvert}; 1)$

Exemple 32.10

On dispose aujourd'hui de 17 000 frs permettant de verser une rente praenumerando de 2 000 frs par an. Combien de paiements peut-on effectuer si le taux d'intérêt est de 3% ?

Solution

On peut écrire la relation suivante : $2\,000\ddot{a}_{\overline{10}\rvert} = 17\,000$, donc :

$$\ddot{a}_{\overline{10}\rvert} = \frac{17000}{2000} = 8,5$$

En utilisant la fonction Excel NPM, on obtient :

$$\text{NPM}(0.03; -1; 8.5; 0; 1) \simeq 9,6232$$

Soit 9 paiements de 2 000 frs ainsi qu'un paiement partiel à déterminer.

Exercices d'application de la section 32.2

1 [Valeurs de rentes] Calculer les valeurs des rentes suivantes au taux d'intérêt indiqué.

(a) $a_{\overline{2}\rvert 4\%}$

(b) $800 \cdot s_{\overline{4}\rvert 5\%}$

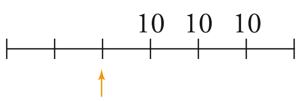
(c) $650 \cdot \ddot{s}_{\overline{10}\rvert 0\%}$

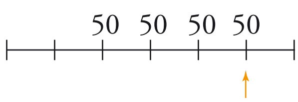
(d) $175 \cdot \ddot{a}_{\overline{1}\rvert 5\%}$

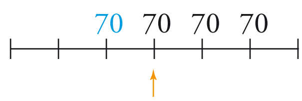
(e) $500 \cdot \ddot{a}_{\overline{10}\rvert 10\%}$

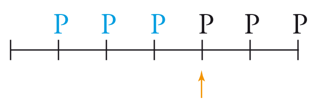
(f) $234 \cdot a_{\overline{1000}\rvert 10\%}$

2 [Valeurs de rentes] Indiquer la valeur de la rente annuelle à la date de calcul notée par la flèche.

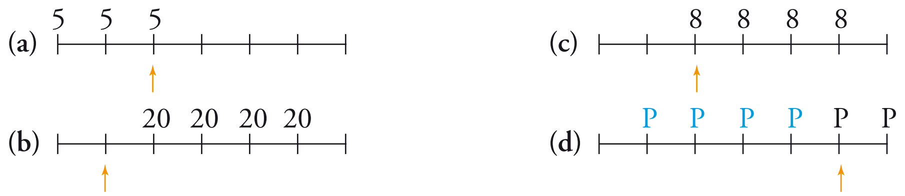
(a)


(b)


(c)


(d)


3 [Valeurs de rentes] Indiquer la valeur de la rente annuelle à la date de calcul notée par la flèche.



4 [Valeurs de rentes] Indiquer la valeur de la rente annuelle à la date de calcul notée par la flèche.

5 [Paiements] Indiquer la valeur des paiements annuels à la date de calcul notée par la flèche. (utiliser les symboles de rentes)

6 [Équation d'équilibre] Écrire l'équation d'équilibre entre les primes annuelles (P) et les rentes à la date de calcul notée par la flèche.

7 [Équation d'équilibre] Écrire l'équation d'équilibre entre les primes annuelles (P) et les rentes à la date de calcul notée par la flèche.

8 [Symbole de sommation] Écrire les 4 symboles des rentes $a_{\overline{n}|}$, $\ddot{a}_{\overline{n}|}$, $s_{\overline{n}|}$ et $\ddot{s}_{\overline{n}|}$ en utilisant le symbole $\sum$.

9 [Relation] Quelle relation existe-t-il entre $a_{\overline{n}|}$ et $s_{\overline{n}|}$ et entre $\ddot{a}_{\overline{n}|}$ et $\ddot{s}_{\overline{n}|}$?

10 [Rechercher n] Résoudre par rapport à n

(a) $10 \times a_{\overline{n}|5\%} = 60$

(b) $s_{\overline{n}|i} = V$

11 [Rechercher n] Résoudre par rapport à n

(a) $200 \times \ddot{s}_{\overline{n}|2\%} = 2\,736$

(b) $R \times \ddot{a}_{\overline{n}|i} = V$

12 [Rechercher n] On donne : $975 \times \ddot{a}_{\overline{n}|3\%} = 6\,000$. Déterminer le nombre de termes de 975 ainsi que le dernier terme partiel P versé un an après le dernier paiement de 975.

13 [Rechercher n] On donne : $2\,350 \times a_{\overline{n}|10\%} = 13\,000$. Déterminer le nombre de paiements entiers ainsi que le dernier paiement partiel P versé un an après le dernier paiement de 2 350.

14 [Rechercher i] Résoudre algébriquement en fonction de i l'équation financière suivante :

$$1\,681 a_{\overline{2}|i} = 3\,240$$

15 [Rechercher i] Résoudre l'équation financière de l'exercice 14 en faisant usage de la fonction TAUX d'Excel.

16 [Newton-Raphson] [nécessite le calcul des dérivées] La méthode de Newton-Raphson décrite ci-après permet de résoudre de façon performante les équations financières simples par rapport au taux d'intérêt i.

1. Exprimer l'équation financière sous la forme $f(x) = 0$
2. Calculer $f'(x)$
3. Calculer de façon récursive x_1, x_2, x_3, etc... au moyen de la formule :

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

4. Choisir un taux d'intérêt initial x_0.
5. S'arrêter quand la précision convient.

Résoudre, selon cette méthode, l'équation financière $5 \times s_{\overline{9}|x} = 50$ en démarrant le processus avec un taux d'intérêt initial $x_0 = 5\%$ et en s'arrêtant après 4 itérations.

17 [Interpolation linéaire] On cherche à trouver le taux d'intérêt i correspondant à l'équation financière suivante : $2\,500 \times s_{\overline{7}|i} = 20\,000$. Après quelques essais, on trouve :

- Pour $i = 4\%$: $2\,500 \times s_{\overline{7}|} = 19\,746$
- Pour $i = 5\%$: $2\,500 \times s_{\overline{7}|} = 20\,355$

Trouver approximativement le taux d'intérêt i en faisant usage d'une interpolation linéaire.

18 [Valeur cible] En utilisant l'outil Valeur cible d'Excel [1], résoudre l'équation financière suivante :

$$100a_{\overline{9}|i} + 481 \cdot v^{12} = 815,70$$

19 [Intérêt recherché] Que vaut l'intérêt i si $s_{\overline{5}|} = x$ et $s_{\overline{10}|} = y$?

32.3 Rentes particulières

32.3.1 Rente perpétuelle

Lorsqu'une rente est versée sans limitation de durée, on parle de **rente perpétuelle**. Une telle rente est comparable au prix Nobel attribué tous les ans et dont le financement est garanti par les revenus provenant du legs d'Alfred Nobel, chimiste suédois (1833-1896), inventeur de la dynamite.

Calculer la valeur finale d'une rente perpétuelle est impossible car les montants ne s'arrêtent jamais. Par contre, le calcul de la valeur actuelle est possible car l'actualisation des termes de rente éloignés dans le temps devient de plus en plus petite. Mathématiquement, une rente perpétuelle est une progression géométrique illimitée.

Notations :

$a_{\overline{\infty}|}$ Valeur actuelle d'une rente perpétuelle postnumerando
$\ddot{a}_{\overline{\infty}|}$ Valeur actuelle d'une rente perpétuelle praenumerando

Valeur actuelle postnumerando

$$a_{\overline{\infty}|} = v + v^2 + v^3 + \cdots \qquad \text{forme développée}$$

$$a_{\overline{\infty}|} = \frac{1}{i} \qquad \text{forme simplifiée}$$

valeur actuelle praenumerando

$$\ddot{a}_{\overline{\infty}|} = 1 + v + v^2 + v^3 + \cdots \qquad \text{forme développée}$$

$$\ddot{a}_{\overline{\infty}|} = \frac{1}{d} \quad \text{avec} \quad d = \frac{i}{1+i} = i\,v \qquad \text{forme simplifiée}$$

1. Menu Données / Analyse de scénarios / Valeur cible.

Exemple 32.11

On souhaite créer le prix Lebon de mathématiques financières. On dispose d'un fonds de 500 000 frs. Quelle sera la somme que l'on pourra allouer chaque année (postnumerando) et sans limite de durée, si ce fonds peut être placé à 2,5% d'intérêt ?

Solution

Il s'agit d'une rente perpétuelle, où finalement seul l'intérêt du capital est distribué sous forme de rente. Les 500 000 frs ne sont donc jamais entamés. Ainsi, en notant R cette rente annuelle on obtient :

$$
\begin{aligned}
500\,000 &= R \cdot a_{\overline{\infty}|} \\
500\,000 &= R \cdot \frac{1}{0,025} \\
R &= 500000 \times 0,025 = 12\,500 \text{ frs.}
\end{aligned}
$$

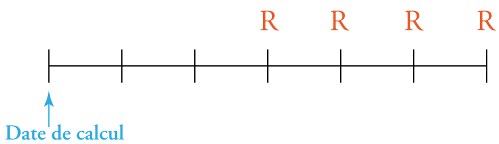
32.3.2 Rente différée

Définition :

Une **rente différée** est une rente qui commence à courir après un certain laps de temps, appelé **différé**. Le principe d'actualisation se fait en 2 étapes : On actualise la rente au moment où elle est versée (date de calcul intermédiaire). Puis on actualise le tout de la durée du différé. [2]

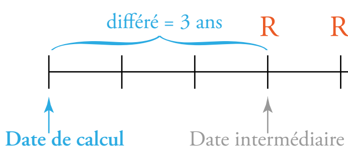
Exemple 32.12

Trouver la valeur actuelle de la rente R suivante versée pendant 4 ans.



Solution

Variante A : date de calcul intermédiaire au moment du premier terme de rente

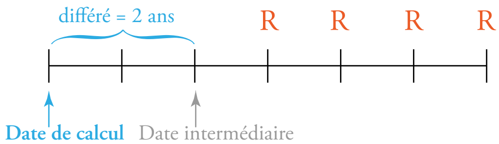


Ainsi, la valeur actuelle (VA) s'écrit :

2. Ce principe de calcul s'applique par analogie aux valeurs finales de rentes qui ne se terminent pas au moment de la date du calcul ou 1 an après.

$$\text{VA} = R \cdot \ddot{a}_{\overline{4}|} \cdot v^3$$

Variante B : date de calcul intermédiaire un an avant le premier terme de rente



Ainsi, la valeur actuelle (VA) s'écrit :

$$\text{VA} = R \cdot a_{\overline{4}|} \cdot v^2$$

32.3.3 Rente à termes fractionnés

Il arrive fréquemment en pratique que le paiement des termes de rentes soit fractionné en plusieurs paiements. Par exemple, une rente annuelle de 12 000 frs peut être payée par tranches mensuelles de 1 000 frs. Dans ce cas, on parle de rente à **termes fractionnés**.

Pour calculer une rente fractionnée :

1. On calcule un taux i_m équivalent à i.
2. On modifie la durée en $n \times m$
3. On utilise les valeurs $a_{\overline{n}|}$, $\ddot{a}_{\overline{n}|}$, $s_{\overline{n}|}$ et $\ddot{s}_{\overline{n}|}$ avec le taux i_m et la nouvelle durée.

Pour éviter toute confusion, on écrit le taux utilisé en indice près du symbole actuariel, par exemple $a_{\overline{36}|i_{12}}$.

Exemple 32.13

Calculer la valeur actuelle d'une rente annuelle de 12 000 frs payable sur 5 ans par tranches mensuelles postnumerando de 1 000 frs, si le taux d'intérêt annuel utilisé est de 10%.

Solution

On commence par calculer le taux équivalent i_{12} :

$$i_{12} = (1+0,1)^{\frac{1}{12}} - 1 = 0,0079741404$$

On exprime ensuite la durée en mois : $nm = 5 \times 12 = 60$ mois. Il reste à calculer :

$$1\,000 a_{\overline{60}|i_{12}} \simeq 47\,538,50 \text{ frs.}$$

Exemple 32.14

Calculer le taux d'intérêt annuel satisfaisant l'équation d'équilibre actuarielle suivante :

$$2250\ddot{s}_{\overline{2}|i_2} = 4834,82$$

Solution

Avec la fonction Excel TAUX, on obtient :

$$\text{TAUX}(2; -2250; 0; 4834.82; 1) \simeq 4,88089\%$$

Le taux d'intérêt annuel i s'obtient par :

$$\begin{aligned} i &= (1+i_2)^2 - 1 \\ &= (1,0488089)^2 - 1 = 0,1 = 10\%. \end{aligned}$$

32.3.4 Rente en progression

Rente en progression arithmétique

Une rente en progression arithmétique est une rente dont les termes suivent un progression arithmétique comme suit :

$$1 \quad , \quad 2 \quad , \quad 3 \quad , \quad \ldots \quad , \quad n-1 \quad , \quad n$$

Valeur actuelle d'une rente postumerando :

$$(Ia)_{\overline{n}|} = 1\,v + 2\,v^2 + 3\,v^3 + \cdots + n\,v^n \qquad \text{forme développée}$$

$$(Ia)_{\overline{n}|} = \frac{\ddot{a}_{\overline{n}|} - n \cdot v^n}{i} \qquad \text{forme simplifiée}$$

Comment obtenir la formule simplifiée ?

$$(Ia)_{\overline{n}|} = v + 2\,v^2 + 3\,v^3 + \cdots + n\,v^n \qquad ①$$

$$r(Ia)_{\overline{n}|} = 1 + 2\,v + 3\,v^2 + \cdots + n\,v^{n-1} \qquad \text{on multiplie par } r \text{ chaque membre} \qquad ②$$

En faisant ② – ①, on obtient :

$$r(Ia)_{\overline{n}|} - (Ia)_{\overline{n}|} = \underbrace{1 + v + v^2 + v^3 + \cdots + v^{n-1}}_{\ddot{a}_{\overline{n}|}} - nv^n$$

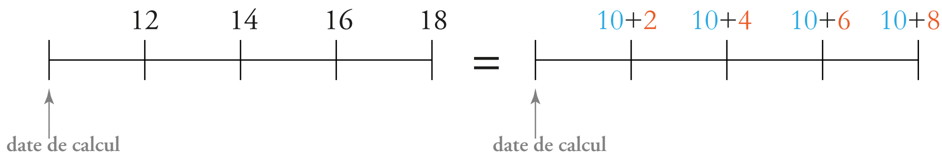
$$(Ia)_{\overline{n}|}(r-1) = \ddot{a}_{\overline{n}|} - nv^n$$

$$(Ia)_{\overline{n}|} = \frac{\ddot{a}_{\overline{n}|} - n \cdot v^n}{i}$$

Pour ce type de rentes, il existe également des symboles spécifiques pour le calcul des valeurs finales, par exemple $(\mathrm{I}s)_{\overline{n}|}$ ou encore si les rentes décroissent, comme par exemple $(\mathrm{D}a)_{\overline{n}|}$. En posant le problème à résoudre sous forme d'un schéma de flux, on remarque qu'il est toujours possible d'exprimer toutes ces variantes au moyen de la seule valeur $(\mathrm{I}a)_{\overline{n}|}$.

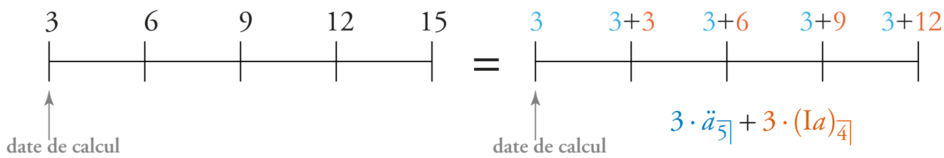
Exemple 32.15

Valeur actuelle d'une rente postumerando croissante :



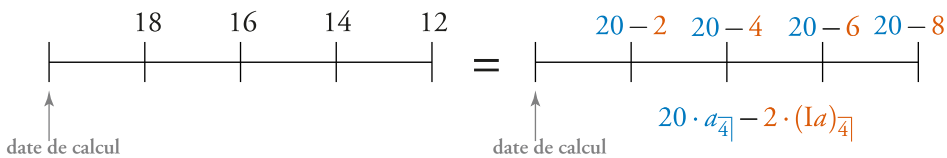
Exemple 32.16

Valeur actuelle d'une rente praenumerando croissante :



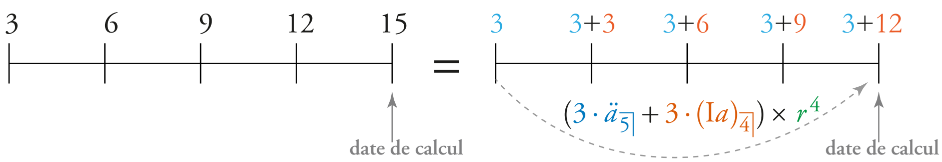
Exemple 32.17

Valeur actuelle d'une rente postumerando décroissante :



Exemple 32.18

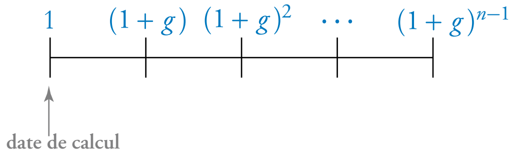
Valeur finale d'une rente postumerando croissante :



Rente en progression géométrique

Dans une rente en progression géométrique, chaque terme est multiplié par le précédent par $(1+g)$. Les valeurs actuelles prae et postnumerando se définissent comme suit :

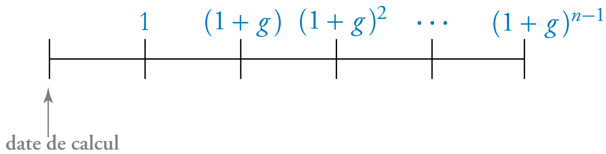
Valeur actuelle d'une rente praenumerando



$$(G\ddot{a})_{\overline{n}|} = 1 + (1+g)\,v + (1+g)^2\, v^2 + \cdots + (1+g)^{n-1}\, v^{n-1} \qquad \text{forme développée}$$

$$(G\ddot{a})_{\overline{n}|} = \ddot{a}_{\overline{n}|i_*} \qquad \text{avec } i_* = \frac{1+i}{1+g} - 1 \qquad \text{forme simplifiée}$$

Valeur actuelle d'une rente postunmerando



$$(Ga)_{\overline{n}|} = 1\, v + (1+g)\, v^2 + (1+g)^2\, v^3 + \cdots + (1+g)^{n-1}\, v^{n} \qquad \text{forme développée}$$

$$(Ga)_{\overline{n}|} = \frac{a_{\overline{n}|i_*}}{1+g} \qquad \text{avec } i_* = \frac{1+i}{1+g} - 1 \qquad \text{forme simplifiée}$$

Exemple 32.19

De quelle somme doit-on disposer aujourd'hui si l'on souhaite financer une rente annuelle postnumerando de 1 000 frs durant 10 ans ? Chaque versement sera majoré de 2% par rapport au précédent. Taux d'intérêt utilisé : 3%.

Solution

$$\begin{aligned} VA &= 1\,000 (Ga)_{\overline{10}|} \\ &= 1\,000 \frac{a_{\overline{10}|i_*}}{1,02} \qquad \text{avec } i_* = \frac{1,03}{1,02} - 1 \simeq 0,980392\% \\ &= 9\,295{,}4 \text{ frs.} \end{aligned}$$

Exemple 32.20

On fait 5 versements sur un compte rapportant du 5%. Le premier versement de 15 000 frs a lieu tout de suite. Quelle valeur obtient-on un an après le dernier versement si chaque versement est supérieur au précédent de 2% ?

Solution

1. On calcule la valeur actuelle de la rente :

$$\begin{aligned} \text{VA} &= 15\,000 \times (G\ddot{a})_{\overline{5}|} \\ &= 15\,000 \times \ddot{a}_{\overline{5}|i_*} \qquad \text{avec } i_* = \frac{1,05}{1,02} - 1 \simeq 0,02941176 \\ &\simeq 70\,835 \text{ frs.} \end{aligned}$$

2. On capitalise cette valeur sur 5 ans pour trouver la valeur finale :

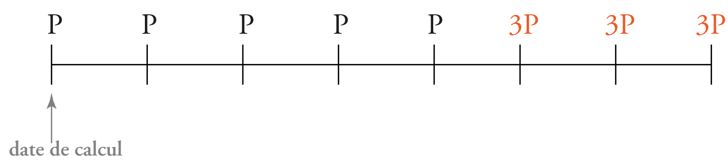
$$\text{VF} = 70\,835 \times 1,05^5 \simeq 90\,405{,}4 \text{ frs.}$$

Exercices d'application de la section 32.3

20 [Recherche de rente] Martin a laissé en héritage 800 000 frs placé dans un fonds de placement rémunéré au taux de 5,25% par année. Dans ses dernières volontés, Martin a exprimé le souhait que l'association des profs de maths reçoive une rente perpétuelle de P frs tous les ans pour toujours, le premier paiement débutant un an après sa mort. Déterminer P.

21 [Rente perpétuelle] Une rente perpétuelle de 640 frs par an au taux de 2,5% sera versée pour la première fois dans 7 mois. Quelle est sa valeur actuelle ?

22 [Paiements] On dispose de 28 000 frs pour garantir les paiements annuels suivants :



(a) Quelle est la valeur de P au taux de 0% ?

(b) Quelle est la valeur de P au taux de 5% ?

23 [Annuités] Il est convenu de rembourser 34 000 frs par 10 annuités postnumerando au taux annuel de 8%. Comme les annuités 5, 6 et 7 sont restées impayées, de quel montant les 3 dernières annuités devront-elles être majorées afin de rembourser la dette dans le délai initialement prévu ?

24 [Gain en intérêts] Quel montant trimestriel faut-il placer à un taux trimestriel de 3% pour constituer un capital de 50 000 frs francs en 10 ans ? Quel est le gain en intérêts ?

25 [Différence d'intérêts] Quelle différence d'intérêt obtient-on au final en plaçant 1 000 frs durant 10 ans à 10% ou au contraire 500 frs au taux semestriel équivalent durant 20 semestres ?

26 [Retraite] Jean prendra sa retraite dans 15 ans. À ce moment-là, son espérance de vie sera d'environ 20 ans. Quel capital doit-il investir aujourd'hui à 3% afin qu'il puisse financer une rente de retraite (praenumerando) de 2 500 frs par mois ?

27 [Paiements bisannuels] On donne une suite de 7 paiements bisannuels postnumerando de 2 144 frs au taux d'intérêt $i = 6\%$.

(a) Calculer la valeur actuelle de cette suite de paiements.

(b) Quels paiements annuels postnumerando fournissent la même valeur actuelle ?

28 [Petit crédit] Sur le site internet de Credit-Now [3], un crédit de 10 000 frs au taux de 9,9% et pour une durée de 36 mois, coûte 338,20 frs garantie de crédit incluse. Quel est le montant mensuel de cette garantie ?

29 [Petit crédit] Article paru dans la presse en 2000. Calculer le montant des mensualités extrêmes sans faire usage de valeurs actuelles.

30 [Financement] Une rente postnumerando comprend 48 mensualités qui décroissent en progression arithmétique. Les premiers et derniers termes valent respectivement 1 200 frs et 25 frs. Quel montant permet de financer cette rente avec un taux de 3,4% ?

31 [Termes de rente] On effectue 10 paiements, la première fois immédiatement. Chaque paiement est supérieur de 50 frs au précédent. Si la valeur finale de cette rente vaut, un an après le dernier terme de rente versé 21 544,74 frs et que le taux d'intérêt utilisé est de 4,18%, quel est le premier et dernier terme de rente ?

3. https ://www.credit-now.ch (état :16 avril 2019)

32 [Termes de rente] On donne la formule suivante pour le calcul d'une certaine valeur actuelle de rente :

$$\mathrm{VA} = 200\sum_{t=0}^{4}(1+0,25t)\cdot v^t$$

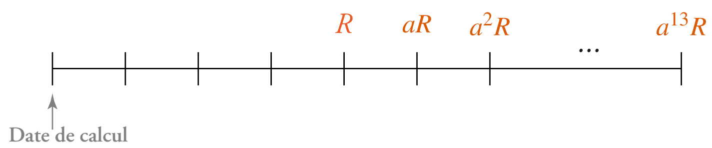
(a) Déterminer le montant de chaque terme de rente.

(b) Comment peut-on appeler cette rente ?

(c) Calculer la valeur actuelle de cette rente en utilisant un taux d'intérêt annuel de 4,4%.

33 [Valeur actuelle] On effectue 8 versements annuels postnumerando en progression géométrique de raison 1,2. Le premier versement se monte à 600 frs. Quelle est la valeur actuelle de cette rente au taux de 6% ?

34 [Valeur d'une rente] On considère les paiements annuels suivants :



(a) Déterminer la valeur de cette rente à la date de calcul indiquée.

(b) Déterminer la valeur de cette rente au moment du dernier terme de rente.

35 [Rente particulière] On donne la formule suivante :

$$V = \frac{1-\left(\frac{1+g}{1+i}\right)^n}{i-g}$$

(a) Quel symbole actuariel résume cette formule ? (une seule réponse possible)

☐ $(Ga)_{\overline{n}|}$ ☐ $(Gs)_{\overline{n}|}$ ☐ $(G\ddot{a})_{\overline{n}|}$ ☐ $(G\ddot{s})_{\overline{n}|}$

(b) Si $i = g$, alors : (une seule réponse possible)

☐ $V = \frac{n}{1+g}$ ☐ $V = 0$ ☐ $V = n$ ☐ n'est pas calculable

(c) Si $g = 0$, alors : (une seule réponse possible)

☐ $V = i^{-1}(1-v)^n$ ☐ $V = i(1+v)^{-n}$ ☐ $V = i^{-1}(1+v)^n$ ☐ aucune de ces réponses

36 [Croissance géométrique] Que vaut la valeur actuelle $R \times (Ga)_{\overline{\infty}|}$ au taux d'intérêt i et au taux de croissance géométrique g ? $[i > g]$

32.4 Problèmes et exercices de synthèse

37 [Valeur actuelle] Un prix de 1 261 frs sera versé perpétuellement dès l'an prochain de façon postnumerando au taux de 5%. Cependant, tous les 3 ans le prix n'est pas versé. Quelle est la valeur actuelle de cette rente ?

38 [Mensualités] Une dette de 8 450 frs est remboursable à raison de deux versements semestriels de 3 500 frs la première année et de 12 versements mensuels de M frs l'année suivante.

(a) Établir l'équation d'équilibre actuarielle.

(b) Quelle est la valeur de M si $i = 4,57\%$?

39 [Renchérissement] Une rente de 1 000 frs est versée pendant 5 ans, la première fois en fin d'année. Dès la deuxième année, et chaque année, cette rente est adaptée au renchérissement, estimé à 2% par an. Quelle est la valeur actuelle de cette rente, si le taux d'intérêt est de 5% ?

40 [Petite annonce] La petite annonce suivante est parue dans la presse suisse en avril 2009. Vous parait-elle correcte ?

CREDITS KREDIT EMPRESTIMOS
De 5'000.- à 80'000.- CHF*
Rachat de vos crédits en cours
Permis G, L, B, C acceptés
Crédit aux indépendants
* Taux: 9,75% - Exemple: F. 20'000.-/60 mois = Fr. 428,45
L'octroi d'un crédit est interdit
s'il occasionne le surendettement du consommateur.

41 [Capital acquis] Un épargnant a déposé chaque année durant 9 ans 3 600 frs par an sur un compte épargne. Les trois premières années, l'intérêt offert était de 3,4% et de 2,8% les six dernières années. Quel capital a été acquis au bout de 9 ans ?

42 [Impôt anticipé] Monsieur Ducroc a déposé 8500 frs par an durant 7 ans à 3,2% d'intérêt annuel. Ce compte n'étant pas déclaré, Monsieur Ducroc n'a jamais fait la demande de récupération de l'impôt anticipé (35%). Quel capital a-t-il acquis au bout de 7 ans ?

43 [Progression géométrique] Un individu désire placer annuellement une somme en progression géométrique de 2%. Le premier versement a lieu immédiatement et se monte à 2 000 frs. Il compte faire cet effort d'épargne durant 6 ans. Sachant que le taux d'intérêt annuel est de 3,5%, déterminer son avoir à la fin de la sixième année.

44 [Renchérissement] Une rente annuelle de 12 000 frs est payable à terme échu durant 10 ans. Cette rente est adaptée au renchérissement qui est estimé à 3% l'an. Ainsi, le premier terme de rente versé sera de 12 360 frs. Quel est le montant permettant de financer cette rente si le taux d'intérêt annuel est de 3% ?

45 [TAEG] Une banque accorde à des jeunes mariés, pour leur installation, un prêt de 30 000 frs aux conditions suivantes :

- Taux d'intérêt du crédit : 7,5% par an,
- Frais de dossier : 400 frs,
- Chaque mensualité est majorée de 4 frs pour frais divers.
- Remboursement : 48 mensualités constantes.

(a) Calculer le montant de la mensualité réellement payée (frais divers compris) ;

(b) Calculer le taux annuel effectif global (TAEG) de ce crédit.

46 [Fondation] Une fondation souhaite verser les prestations suivantes avec un don de 100 000 frs qu'elle vient d'encaisser :

- Un prix de 1 000 frs d'une manière perpétuelle qui sera versé dès l'an prochain
- Tous les 5 ans, un prix de 5 000 frs supplémentaires sera également attribué
- Le solde disponible sera reversé durant 20 ans comme prime de fin d'année à l'ensemble des employés.

Quelle prime P pourra alors être attribuée si le don peut être placé à 2,5% d'intérêt annuel ?

47 [Montant final] On effectue des dépôts mensuels de 400 frs par mois sur un compte durant 3 ans. La première année, le taux d'intérêt est de 2%. L'année suivante il est de 3% et la dernière année de 4%. Toutes les transactions se font à intérêt composé.

(a) Établir l'équation d'équilibre actuarielle permettant de représenter le capital accumulé C_n à la fin de la troisième année.

(b) Calculer C_n

48 [Emprunt possible] Un indépendant gagne 8 500 frs par mois et ne prévoit pas de modification de son revenu dans l'avenir. Il souhaite effectuer un emprunt immobilier sur 15 ans. Sachant que le banquier accepte un ratio mensualité/revenu de 30% et qu'il lui propose un financement à 7% d'intérêt annuel, quel montant peut-il emprunter ?

49 [Prix d'un camion] Une entreprise de transport envisage d'acquérir un camion d'occasion. Le financement est prévu ainsi :

- Un versement comptant représentant 20% du prix du véhicule.
- Le reste, payable en 5 annuités constantes de 8 000 frs au taux de 10,425%.

Calculer le prix au franc près du camion neuf.

50 [Rente viagère] Une personne qui peut espérer vivre encore 13 ans paie une prime unique de 20 000 frs pour recevoir une rente mensuelle postnumerando. Quel est le montant de cette rente, si le taux d'intérêt est de 3,1% ?

51 [Preferred stock] Une action de préférence (preferred stock) est un titre qui paye des dividendes réguliers, sans limitation de durée. Supposons que le dividende est payé une fois tous les 6 mois et que son montant est de 50 frs. Si le taux d'intérêt est de 10% annuel, quelle est la valeur actuelle de tous les dividendes qui seront payées par cette action ? On suppose que le premier payement sera effectué dans 6 mois.

52 [Capital final] Un capital C est placé à intérêts composés au taux i ; à la fin de chaque année on ajoute ou on retranche une somme B. Que deviendra ce capital au bout de n années ?

53 [Capital final] On retranche dès à présent et chaque année 400 frs d'un capital de 5 000 frs placé à 5%. Au bout de 10 ans, que restera-t-il de ce capital ?

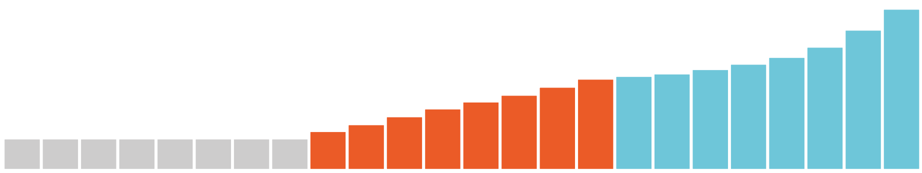
54 [Vie probable] Une société d'assurance propose de payer à quelqu'un une rente à terme échu de 2 000 frs par an pour un capital de 34 584 frs qu'il a placé à fonds perdu à 4%. À combien d'années la société a-t-elle fixé la durée probable de la vie de cet individu ?

55 [Cotisation] Monsieur Favre est engagé dans l'entreprise Alpha S.A. Son engagement est soumis à la condition qu'il touche une rente mensuelle de 1 500 frs au début de sa 65ème année. Son espérance de vie à 65 ans est estimée à 20 ans. Le financement de ce 2ème pilier s'effectue pour moitié par l'employeur et pour moitié par l'employé. Monsieur Favre est âgé aujourd'hui de 45 ans. Quelle sera la cotisation mensuelle praenumerando déduite du salaire de Monsieur Favre si le taux d'intérêt annuel est de 5% ?

56 [Montant final] Monsieur Martin décide de se constituer une épargne en effectuant 12 versements A sur un compte rémunéré au taux i les 7 premières années, puis au taux j le reste du temps. De quelle somme disposera-t-il une année après son dernier versement sachant qu'il n'a pas effectué son cinquième versement ?

57 [Financement] On prévoit le plan financier suivant :

- en gris, une rente annuelle constante de 2 000 frs suivie
- en orange d'une rente croissante de 60 frs par an, suivie
- en bleu d'une rente en progression géométrique de 10% par an.



Sachant que tous les versements ont lieu postnumerando, de quelle somme doit-on disposer aujourd'hui pour garantir ces prestations au taux d'intérêt de 4,5% ?

58 [Gordon-Shapiro] La méthode de Gordon-Shapiro est un modèle d'actualisation des actions mis au point en 1956. Ce modèle permet de calculer la valeur théorique d'une action P_0 en fonction du dividende anticipé de la première période D_1, du taux de rendement k attendu par l'actionnaire et du taux de croissance g des dividendes. ($k > g$). Selon ce modèle, P_0 est défini par :

$$P_0 = \lim_{n\to\infty} \sum_{t=1}^{n} \frac{(1+g)^{t-1} \cdot D_1}{(1+k)^t}$$

Trouver une formule simplifiée pour P_0.

59 [Défi] Frida a emprunté 10 000 frs à Maxime au taux d'intérêt composé annuel i. Elle rembourse au bout d'une année un montant unique de 1 000 frs. L'année suivante, elle rembourse 500 frs par semestre. La troisième année elle rembourse 500 frs par trimestre et la dernière année 500 frs par mois. Déterminer le taux d'intérêt annuel de ce crédit.

Chapitre 33

Emprunts

Objectifs du chapitre

- connaître les différents emprunts indivis utilisés dans la pratique.
- savoir construire un tableau d'amortissement mettant en évidence la part d'intérêt et de remboursement.
- savoir calculer le prix d'une obligation.
- comprendre la différence entre le prix et le cours d'une obligation.
- savoir calculer le taux de rendement d'une obligation.
- comprendre la notion de nue-propriété et d'usufruit.

33.1 Emprunts indivis

33.1.1 Définitions et notations

Dans cette section, on étudie les emprunts **indivis**, c'est-à-dire comportant qu'un seul prêteur, en général un établissement financier. La section suivante sera consacrée aux emprunts **obligataires**, où interviendront plusieurs prêteurs.

Les principales questions concernant les emprunts sont :

- Connaître l'état de la dette à tout moment
- Connaître le montant à rembourser à chaque période
- Connaître l'intérêt dû à chaque période

Les paiements effectués dans le cadre des emprunts sont appelés **annuités**. Une annuité comprend une part de **remboursement** (appelé aussi **amortissement financier**) et une part d'**intérêt**.

$$\text{Annuité} = \text{Amortissement} + \text{intérêts}$$

La décomposition de l'annuité en amortissement et intérêts est une notion importante non seulement en finance mais aussi en comptabilité. En effet, la part d'amortissement financier correspond à un remboursement de dette à la différence de l'intérêt qui est une charge financière. Les écritures comptables relatives au paiement d'une annuité sont les suivantes :

Amortissement :	*Dette X à Disponibilités*
Intérêt :	*Charges financières à Disponibilités*

On présentera ici 3 types principaux d'emprunts :

- Les emprunts remboursables à échéance fixe
- Les emprunts à remboursement constant
- Les emprunts à annuité constante (les plus pratiqués)

Notations communes à l'ensemble des emprunts :

i Taux d'intérêt annuel de l'emprunt
C Capital emprunté
n Durée de l'emprunt en années (ou nombre d'annuités prévues)
C_k État de la dette **en début d'année** k
R_k Remboursement (amortissement) effectué **en fin d'année** k
I_k Intérêt payé **en fin d'année** k
S_k Amortissement cumulé **en fin d'année** k
A_k Annuité payée **en fin d'année** k ($A_k = R_k + I_k$)

Remarques

- On considère ici des emprunts annuels. Les formules s'adaptent par analogie aux emprunts mensuels, trimestriels, ... en modifiant le taux d'intérêt annuel en taux équivalent : $i_m = (1+i)^{\frac{1}{m}} - 1$.
- Des annuités mensuelles sont appelées des **mensualités**.
- Pour respecter les tableaux d'amortissement établis usuellement par les instituts bancaires, on fait le choix de considérer l'indice k comme une période et non une époque. Ainsi, le capital initial se note C_1 et non C_0.

33.1.2 Emprunt à échéance fixe

Dans ce type d'emprunt, l'annuité comprend uniquement la part d'intérêt. La dernière année, l'annuité comprend l'intérêt ainsi que la totalité du remboursement de l'emprunt.
Ce modèle d'amortissement est particulièrement utilisé dans les emprunts obligataires, étudiés plus loin.

Les formules suivantes permettent d'établir n'importe quel élément du tableau d'amortissement :

$$C_k = C \quad \forall k$$ Etat de la dette

$$R_k = S_k = \begin{cases} 0 & \text{si } k < n, \\ C & \text{si } k = n. \end{cases}$$ Amortissement

$$I_k = i \cdot C_k$$ Intérêt

$$A_k = R_k + I_k$$ Annuité

Exemple 33.1

Un emprunt de 9 930 frs à 10% l'an est remboursé à l'échéance au bout de 3 ans. Établir le tableau d'amortissement et déterminer le coût du crédit.

Solution

Période	Etat de la dette	Amortissement	Amort. cumulé	Intérêt	Annuité
k	C_k	R_k	S_k	I_k	A_k
1	9 930	0	0	993	993
2	9 930	0	0	993	993
3	9 930	9 930	9 930	993	10 923

Le coût du crédit représente la somme des intérêts : $3 \times 993 = 2\,979$ frs.

33.1.3 Emprunt à amortissement constant

Le montant annuel remboursé est constant, c'est-à-dire identique d'années en années. Les formules suivantes permettent d'établir n'importe quel élément du tableau d'amortissement :

$$C_k = (n - k + 1)\frac{C}{n}$$ Etat de la dette

$$R_k = R = \frac{C}{n}$$ Amortissement

$$S_k = k\frac{C}{n}$$ Amortissement cumulé

$$I_k = i \cdot C_k$$ Intérêt

$$A_k = R_k + I_k$$ Annuité

Exemple 33.2

Un emprunt de 9 930 frs à 10% l'an est remboursé par amortissement constant en 3 ans. Établir le tableau d'amortissement et déterminer le coût du crédit.

Solution

On calcule au préalable : $R = \frac{C}{n} = \frac{9930}{3} = 3\,310$.

Période	Etat de la dette	Amortis-sement	Amort. cumulé	Intérêt	Annuité
k	C_k	R_k	S_k	I_k	A_k
1	9 930	3 310	3 310	993	4 303
2	6 620	3 310	6 620	662	3 972
3	3 310	3 310	9 930	331	3 641

Le coût du crédit représente la somme des intérêts : $993 + 662 + 331 = 1986$ frs.

33.1.4 Emprunt à annuité constante

C'est le cas le plus fréquent. Il est utilisé par la plupart des instituts de petit crédit et de leasing. L'emprunteur connaît d'avance la somme qu'il aura à payer d'années en années. Cette somme est en fait le résultat de l'équivalence actuarielle suivante : $C = A \times a_{\overline{n}|}$, étudiée au chapitre précédent. Les formules suivantes permettent d'établir n'importe quel élément du tableau d'amortissement :

$$A_k = A = \frac{C}{a_{\overline{n}|}} \qquad \text{Annuité}$$

$$C_k = A \cdot a_{\overline{n-k+1}|} \qquad \text{Etat de la dette}$$

$$R_k = A - i\,C_k \qquad \text{Amortissement}$$

$$S_k = C - A \cdot a_{\overline{n-k}|} \qquad \text{Amortissement cumulé}$$

$$I_k = i \cdot C_k \qquad \text{Intérêt}$$

Solde restant dû et amortissement cumulé
Comment interpréter ces formules ?

Exemple 33.3

Un emprunt de 9 930 frs à 10% l'an est remboursé par annuité constante en 3 ans. Établir le tableau d'amortissement et déterminer le coût du crédit.

Solution

On calcule au préalable : $A = \dfrac{C}{a_{\overline{n}|}} = \dfrac{9\,930}{2,486852} = 3\,993$ frs.

Période	Etat de la dette	Amortis-sement	Amort. cumulé	Intérêt	Annuité
k	C_k	R_k	S_k	I_k	A_k
1	9 930	3 000	3 000	993	3 993
2	6 930	3 300	6 300	693	3 993
3	3 630	3 630	9930	363	3 993

Le coût du crédit représente la somme des intérêts : $993 + 693 + 363 = 2\,049$ frs.
Ce résultat peut également s'obtenir plus rapidement par :

$$nA - C = 3 \times 3993 - 9930 = 2\,049 \text{ frs.}$$

Excel

Sur Excel, un tableau d'amortissement peut être obtenu de façon récursive. Il suffit pour cela d'établir les deux premières lignes du tableau. On commence par calculer la valeur fixe A que l'on recopie sur toutes les lignes :

$$A = \frac{C}{a_{\overline{n}|}} = \frac{C}{\mathrm{VA}(i;n;-C;0;0)}$$

k	C_k	R_k	S_k	I_k	A_k
	A	B	C	D	E
1	$= C$	= E1 − D1	= B1	$= i \times$ A1	A
2	= A1 − B1	= E2 − D2	= C1 + B2	$= i \times$ A2	A

Exercices d'application de la section 33.1

1 [Remboursement à l'échéance] Un prêt de 100 000 frs est remboursable par un seul paiement de 110 000 frs au bout de 4 ans. Déterminer le taux annuel d'intérêt utilisé.

2 [Emprunt particulier] Un emprunt de 60 000 frs à 5% est amortissable à raison de 2/3 la première année et de 1/3 l'année suivante. Établir le tableau d'amortissement complet correspondant à cet emprunt.

3 [Écriture comptable] Une entreprise souhaite acquérir une machine d'un montant de 60 000 frs. Pour cela, elle fait un emprunt par amortissement constant sur 8 ans à 6%. Déterminer l'écriture comptable relative à la part d'amortissement et d'intérêt concernant la troisième annuité.

4 [Cinquième ligne] Établir la 5$^{\text{ème}}$ ligne du tableau d'amortissement d'un emprunt de 12 000 frs à amortissement constant durant 5 ans, dont l'intérêt trimestriel est de 2,5%. Les remboursements sont également trimestriels.

5 [Amortissement constant] Soit un emprunt de 16 000 frs à amortissement constant sur 5 ans dont la troisième annuité est de 4 016 frs.

(a) Déterminer le taux d'intérêt de l'emprunt.

(b) Établir le tableau complet d'amortissement.

6 [Mensualités constantes] Établir la 12$^{\text{ème}}$ ligne d'un tableau d'amortissement d'un emprunt de 35 000 frs, remboursable par mensualités constantes durant 5 ans. Taux d'intérêt annuel de l'emprunt : 9,5%.

7 [Amortissements variables] Établir le tableau d'amortissement complet d'un emprunt amortissable sur 5 ans de 19 375 frs à 10% d'intérêt dont les amortissements sont fixés comme suit :

$$R_{k+1} = \frac{1}{2} R_k$$

8 [Progression géométrique] Montrer que les remboursements d'un emprunt à annuité constante représentent une progression géométrique de raison $r = 1 + i$.

9 [Mensualités] Pour diminuer ses coûts de production, une entreprise investit dans du matériel plus performant et emprunte pour cela la somme de 140 000 frs. Cet emprunt est consenti à un taux mensuel de 0,7% sur 60 mensualités constantes.

(a) Déterminer la mensualité constante

(b) À partir de quelle mensualité l'entreprise aura-t-elle remboursé au moins la moitié du capital emprunté ?

10 [Impayés] Un client a obtenu le 10.04.09 un petit crédit sur 4 ans d'un montant de 30 000 frs à 9,2% et remboursable par mensualités constantes. Les mensualités de janvier, février et mars 2012 restent toujours impayées malgré plusieurs rappels. D'entente avec le banquier, il est convenu que ce client s'acquitte à partir du 10.04.12 d'une nouvelle mensualité basée sur le solde de la dette à cette date et pour une nouvelle durée de 2 ans.

(a) Déterminer la mensualité initiale

(b) Déterminer l'état de la dette au 10.04.12

(c) Déterminer la nouvelle mensualité, payable la première fois le 10.04.12

11 [Amortissement variable] Établir le tableau d'amortissement d'un emprunt de 60 000 frs à 10% sur 4 ans, sachant que les remboursements ont doublé à chaque période.

12 [Taux d'intérêt] Un emprunt de 11 000 frs est remboursé par 2 annuités de 8 000 frs et 4 000 frs.

(a) Calculer l'intérêt annuel de l'emprunt.

(b) Établir le tableau d'amortissement complet.

13 [3ème ligne du tableau] Une dette doit être remboursée en 10 ans par annuités constantes à raison d'une annuité tous les 2 ans. Déterminer la $3^{\text{ème}}$ ligne du tableau d'amortissement, si le taux d'intérêt utilisé est de 8% annuel et la dette de 15 000 frs.

14 [Recherche de période] Dans un emprunt à annuité constante, à partir de quelle période le montant total remboursé dépasse la moitié du capital emprunté ?

15 [TAEG] Un institut de crédit a fait passer l'annonce suivante :

BEST - CREDIT
Taux moyen: 5%*
Annuités constantes
Durée du crédit : 6 ans

*10% les 2 premières années,
4% les 2 suivantes,
1% les deux dernières

(a) Établir l'équation d'équilibre permettant de déterminer l'annuité pour un crédit de 75 000 frs.

(b) Déterminer la valeur de cette annuité.

(c) En supposant cette opération dégagée de tout frais, quel est le TAEG de cet emprunt ?

16 [Économie d'intérêts] Pour un emprunt de 50 000 frs, une entreprise s'est engagé à amortir sa dette de 15% par an durant les deux premières années, 20% par an durant les deux années suivantes et le solde (30%) la dernière année. Taux d'intérêt annuel pratiqué : 10%.

(a) Établir le tableau d'amortissement complet

(b) Quelle économie d'intérêt aurait-elle bénéficié si elle avait travaillé sur la même durée mais sur la base d'un emprunt à annuité constante ?

17 [Durée de l'emprunt] D'un emprunt de 120 000 frs, remboursable par amortissement constant, on sait que l'état de la dette au début de la $7^{\text{ème}}$ période est de 60 000 frs et que la $10^{\text{ème}}$ annuité est de 12 400 frs.

(a) Quelle est la durée de l'emprunt ?

(b) Quelle est le montant de la dernière annuité payée ?

18 [Nouvelle annuité] Un prêt de 100 000 frs à 9% est remboursable en 15 ans par des annuités constantes. Après le paiement de la $6^{\text{ème}}$ annuité, le créancier décide de baisser le taux d'intérêt à 8% pour le solde de la dette. Quelle sera la nouvelle annuité constante ?

19 [Nouvelle mensualité] Un client n'arrive pas à payer la $15^{\text{ème}}$ mensualité d'un emprunt de 30 000 frs (mensualités constantes durant 5 ans). Il souhaite étaler maintenant le paiement du solde de sa dette sur 10 ans. Calculer la nouvelle mensualité à payer si le taux d'intérêt annuel est de 9,5%.

20 [Ré-échelonnement] Le 6 août 2017, Patrick emprunte 20 000 frs à un institut de crédit. Il s'engage à rembourser son prêt au moyen de mensualités constantes sur 3 ans. Le 17 octobre 2018, après 2 mensualités impayées, l'institut de crédit est d'accord de ré-échelonner la dette restante sur une nouvelle période de 3 ans. Le crédit initial est consenti au taux annuel de 8,75% et le nouveau au taux annuel de 9,6%.

- **(a)** Quel est le montant de la mensualité initiale du crédit ?
- **(b)** Quel est l'état de la dette le 17 octobre 2018 ?
- **(c)** Quel est le montant de la nouvelle mensualité payable à terme échu ?

21 [Nombre d'annuités] La septième annuité d'un emprunt à annuité constante au taux de 6% se décompose comme suit : Amortissement : 810 frs, intérêt : 481 frs

- **(a)** Déterminer le nombre d'annuités de cet emprunt.
- **(b)** Calculer, en arrondissant à l'unité, le capital emprunté.

22 [TAEG] Un particulier emprunte 200 000 frs pour un achat immobilier au taux de 3% sur une durée de 15 ans. Les frais de dossier se montent à 450 frs et l'assurance qui s'ajoute à l'annuité payée (posnumerando) est de 0,025% du capital emprunté.

- **(a)** Quelle est l'annuité payée ?
- **(b)** Calculer le TAEG de cet emprunt.

23 [Durée du crédit] À la fin de la 5^{e} année Martin avait remboursé au total 41 658 frs sur son crédit et à la fin de la 7^{e} année 61 383 frs. Sachant qu'il paie des annuités de 13 539 frs et que le taux d'intérêt utilisé par la banque est de 5%, calculer :

- **(a)** la durée du crédit.
- **(b)** le capital emprunté. (arrondi au franc)

33.2 Les emprunts obligataires

Contrairement à l'emprunt indivis, l'emprunt obligataire fait appel à de nombreux prêteurs, appelés **souscripteurs**, qui reçoivent, en échange des sommes prêtées, des titres appelés **obligations**. Chaque obligation est donc représentative d'une part d'emprunt et fait l'objet d'une cotation en bourse. [1] L'émission de tels emprunts est évidemment réservée aux grandes sociétés et permet de réunir des fonds importants.

Une obligation est un titre de créance négociable représentant une fraction d'un emprunt à long terme émis par une collectivité (état, organisme de droit public ou privé) et donnant à son possesseur le droit de percevoir un intérêt annuel et d'être remboursé de son titre à l'échéance (ou **maturité**).

Principales caractéristiques d'une obligation

- C La **valeur nominale**, appelée aussi **pair**, désigne la valeur servant au calcul des intérêts.
- N Nombre d'obligations émises
- n Durée de l'emprunt obligataire
- i **Taux nominal** ou **taux facial**. Taux appliqué sur la valeur nominale d'une obligation.
- k **Coupon** ($k = iC$) ou montant d'intérêt versé périodiquement au souscripteur.
- E **Prix d'émission** ou **prix de souscription**. C'est le prix réellement payé par le souscripteur pour devenir propriétaire d'une obligation. En général une obligation est émise au pair ou au-dessous.
- R Prix de remboursement (en principe le remboursement a lieu au pair, dans ce cas $R = C$). **Le remboursement** est effectué dans la plupart des cas **in fine**, c'est-à-dire que toutes les obligations sont remboursées en bloc à la fin de l'emprunt. Cela s'apparente à un emprunt à échéance fixe. Chaque année, seuls les coupons sont payés. Pour des raisons de complexité administrative, le remboursement par amortissement constant ou annuité constante n'est guère plus pratiqué et nous ne l'étudierons pas ici.
- x Taux de rendement actuariel
- P Prix d'une obligation sur le marché.
- Cours Le **cours** de l'obligation correspond au prix auquel s'échange l'obligation sur le marché secondaire. Il est généralement exprimé en pourcentage du nominal de façon à faciliter la comparaison entre différentes obligations qui présenteraient des caractéristiques différentes.

1. L'émission d'un emprunt obligataire est émis sur le **marché primaire**. Dès que les obligations sont en circulation, ces dernières sont négociées sur le **marché secondaire**.

Exemple 33.4

Considérons un emprunt obligataire de 3 000 000 frs divisé en 300 obligations de 10 000 frs nominal émis en juin 2020 pour une durée de 10 ans. Souscription : 99,5. Remboursement au pair à l'échéance. Intérêt annuel : 4,5%. Trouver les notations relatives.

Solution

Les valeurs s'expriment ainsi :

$C = 10\,000 \quad N = 300 \quad CN = 3\,000\,000 \quad n = 10 \quad i = 0,045$

$E = 0,995 \times 10\,000 = 9\,950 \quad R = C = 10\,000 \quad k = 450$

33.2.1 Prix d'une obligation

Prix d'une obligation à une date d'échéance

À tout moment, le prix d'une obligation est égal à la valeur actuelle des coupons et du remboursement auxquels elle donne droit. La valeur actuelle est calculée au taux du marché obligataire en vigueur pour des obligations de même type et de même durée. Ainsi, s'il reste n années à courir, le prix P d'une obligation au taux du marché i_* sera égale à la valeur actuelle des coupons futurs ainsi que la valeur actuelle du remboursement in fine :

$$P = k \cdot a_{\overline{n|}i_*} + \frac{R}{(1+i_*)^n} \qquad \text{avec } i_* = \text{Taux du marché}$$

Exemple 33.5

Calculer le prix actuel de l'obligation, connaissant les informations suivantes : Taux du marché : 4%, coupons annuels de 450 frs, remboursement de l'obligation au pair dans 5 ans : 10 000 frs.

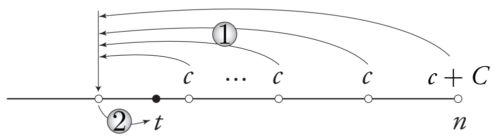
Solution

Le prix est donné par :

$$P = 450 \times a_{\overline{5|}} + 10\,000v^5 \simeq 10\,222,60 \text{ frs.}$$

Prix d'une obligation à une date quelconque

Si l'on recherche le prix d'une obligation à une date différente de celle du paiement d'un coupon, la méthode la plus simple consiste à escompter le prix de cette obligation un an avant le prochain coupon ① et ensuite capitaliser la valeur obtenue jusqu'à la date du paiement du coupon ②. Le schéma ci-après, illustre cette méthode :



Exemple 33.6

Calculer le prix actuel de l'obligation, connaissant les informations suivantes : Taux du marché : 7%, coupons annuels de 400 frs pour une valeur nominale de 5 000 frs. Il reste 6 coupons sur l'obligation et le prochain est échu dans trois mois.

Solution

On commence par calculer :

① $400\, a_{\overline{6}|} + 5\,000\, v^6 = 5\,238{,}33$

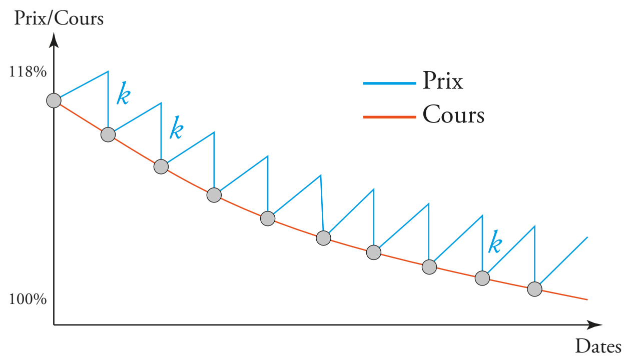
② On capitalise cette valeur 9 mois : $5\,238{,}33 \times 1{,}07^{9/12} \simeq 5\,511$ frs.

Note Le calcul suivant conduit à une réponse identique :

$$P = (400\, \ddot{a}_{\overline{6}|} + 5000\, v^5) \times 1{,}07^{-3/12} \simeq 5\,511 \text{ frs.}$$

33.2.2 Cours d'une obligation

Le prix d'une obligation en fonction du temps varie de la manière suivante : [2]



On constate une croissance du prix entre deux versements de coupons, puis une chute du prix au moment de l'encaissement des coupons. Ce comportement discontinu du prix d'une obligation a des effets clairement indésirables auprès des investisseurs. C'est pourquoi on préfère parler de **cours** d'une obligation. [3]

Le cours, permet de décrire une évolution régulière du prix de l'obligation. Le cours est défini par la relation suivante, en fonction de la fraction f d'année déjà accomplie : $0 \leq f \leq 1$

2. Simulation du prix d'une obligation de taux nominal 5%, durée 10 ans tout au long de sa durée de vie.
3. Le cours est aussi appelé **prix pied de coupon** ou **clean price**.

$$\text{Cours} = P - f \times k$$

Le terme $f \times k$ représente les **intérêts courus**.

Le cours s'exprime le plus souvent en % du montant nominal C d'une obligation, ce qui peut se traduire par :

$$\text{Cours en } \% = \frac{\text{Cours}}{C} \times 100$$

Exemple 33.7

Calculer le cours d'une obligation de valeur nominale de 2 000 frs et dont les coupons annuels sont de 150 frs. Le prix actuel de cette obligation est de 2 180 frs et le prochain coupon est payable dans 2 mois.

Solution

Il y a 10 mois qui se sont écoulés depuis le dernier paiement de coupon. On peut donc écrire :

$$\text{Cours} = 2\,180 - \frac{10}{12} \times 150 = 2\,055\text{frs.}$$

Exprimé en % du capital nominal cela donne :

$$\text{Cours} = \frac{2055}{2000} \times 100 = 102{,}75\%$$

33.2.3 Taux de rendement annuel d'une obligation

Il existe plusieurs façons de définir le taux de rendement annuel d'une obligation.

Taux de rendement courant

Le **taux rendement courant** ou **direct** indique combien rapporte une obligation dans l'immédiat. Le rendement courant d'une obligation consiste à prendre son taux d'intérêt nominal et à le diviser par son dernier cours boursier :

$$\text{Rendement} = \frac{i}{\text{Cours}} \times 100$$

Donc, dès que le cours monte, le rendement baisse et inversement. [4]

4. Cette formule simple n'est cependant pas applicable lorsqu'on veut investir dans les obligations car elle ne tient compte ni de la valeur de remboursement du titre, ni du réinvestissement des coupons, ni de l'éloignement de l'échéance.

Exemple 33.8

Monsieur Dupont a acheté 4 obligations de la société ALPHA, valeur nominale de 1 000 frs chacune, intérêt 3,25%, cours 97. Calculer son taux de rendement annuel.

Solution

$$\text{Rendement annuel} = \frac{3,25\%}{97} \times 100 \simeq 3,35\%$$

33.2.4 Taux de rendement actuariel

Le taux de rendement actuariel x se définit comme étant l'intérêt qui permet de satisfaire la relation suivante, en fonction de la durée restante à courir n.

▶ **À l'émission :**

$$E = k \cdot a_{\overline{n}|x} + \frac{R}{(1+x)^n}$$

Exprimé d'un manière développée, cela donne :

$$E = \underbrace{\frac{k}{1+x} + \frac{k}{(1+x)^2} + \frac{k}{(1+x)^3} + \cdots + \frac{k}{(1+x)^n}}_{\text{Valeur actuelle des coupons futurs}} + \underbrace{\frac{R}{(1+x)^n}}_{\substack{\text{val.act.}\\ \text{remb.}\\ \text{in fine}}}$$

Exemple 33.9

Calculer le taux de rendement actuariel à l'émission d'une obligation, connaissant les informations suivantes : Coupons annuels de 450 frs, valeur nominale 10 000 frs, prix d'émission 9 950 frs et remboursable dans 10 ans au pair.

Solution

L'équation d'équilibre est la suivante :

$$9\,950 = 450 \times a_{\overline{10}|x} + \frac{10\,000}{(1+x)^{10}}$$

Utilisation d'Excel

Pour résoudre cette équation il suffit d'utiliser Valeur cible pour obtenir : $x \simeq 4,56\%$

▶ **À une date quelconque :** (avec f la fraction d'année écoulée depuis le dernier coupon)

$$P = (1+x)^f \left[k \cdot a_{\overline{n}|x} + \frac{R}{(1+x)^n} \right]$$

Exemple 33.10

Le prix actuel d'une obligation est de 5 500 frs. Calculer le taux de rendement de cette obligation connaissant les informations suivantes : Coupons annuels de 400 frs ; Valeur nominale de 5 000 frs. Il reste 6 coupons sur l'obligation et le prochain est échu dans trois mois.

Solution

L'équation d'équilibre est la suivante :

$$5\,500 = (1+x)^{9/12}\left[400 \times a_{\overline{6}|x} + \frac{5\,000}{(1+x)^6}\right]$$

Utilisation d'Excel

Pour résoudre cette équation il suffit d'utiliser Valeur cible pour obtenir : $x \simeq 7,05\%$

Taux de rendement relatif à une possession d'obligations

Si des obligations ont été possédées durant un certain laps de temps, le taux de rendement annuel peut être obtenu de façon approximative ou précise.

Formule approximative :

$$\text{Rendement annuel} = \frac{\text{Revenu annuel moyen}}{\text{Capital engagé}} \times 100$$

avec :

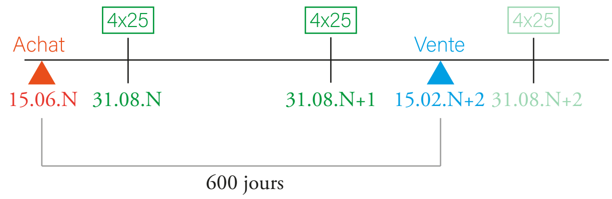
- Capital engagé : valeur cotée + frais d'achat
- Capital récupéré : valeur cotée − frais de vente

Exemple 33.11

Le 15.06.N un investisseur a acheté 4 obligations de valeur nominale 1 000 frs chacune au cours de 98. Frais d'achat 80 frs. Échéance des coupons le 31.08. Il revend ses titres le 15.02.N+2 au cours de 102. Frais de vente : 60 frs. Calculer le taux de rendement annuel obtenu si le taux facial est de 2,5%.

Solution

L'historique du placement se présente comme suit :



- Capital engagé : $4 \times 1\,000 \times 0,98+80 = 4\,000$ frs.
- Capital récupéré : $4 \times 1\,000 \times 1,02-60 = 4\,020$ frs.
- Gain à la revente : $4020 - 4000 = 20$ frs
- Gain annualisé : $20 \times 360/600 = 12$ frs
- Intérêt annuel : $4 \times 1\,000 \times 2,5\% = 100$ frs
- Revenu annuel moyen : $100 + 12 = 112$ frs

$$\text{Rendement annuel} = \left(\frac{112}{4\,000} \times 100\right) = 2,8\%$$

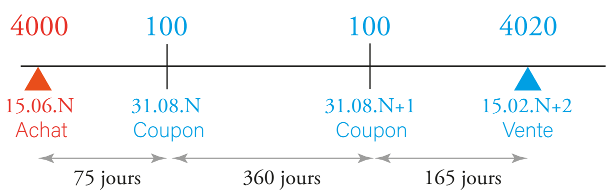
Formule précise : utilisation du taux actuariel sur la période considérée.

Exemple 33.12

(Même exemple que pour la méthode approximative). Le 15.06.N un investisseur a acheté 4 obligations de valeur nominale 1 000 frs chacune au cours de 98. Frais d'achat 80 frs. Échéance des coupons le 31.08. Il revend ses titres le 15.02.N+2 au cours de 102. Frais de vente : 60 frs. Calculer le taux de rendement annuel obtenu si le taux facial est de 2,5%.

Solution

Ce placement peut se présenter comme une SORTIE suivie de 3 ENTRÉES :



Le taux de rendement x doit satisfaire l'équation d'équilibre suivante :

Valeur actuelle des sorties = Valeur actuelle des entrées

$$4\,000 = \frac{100}{(1+x)^{75/360}} + \frac{100}{(1+x)^{435/360}} + \frac{4\,020}{(1+x)^{600/360}}$$

$x \simeq 3,36\%$ obtenu avec valeur cible d'Excel

33.2.5 Usufruit et nue-propriété

On appelle **usufruit**, la valeur actuelle des intérêts futurs, calculée au taux du marché. On appelle **nue-propriété**, la valeur actuelle du remboursement futur de l'obligation. La somme de la nue-propriété et de l'usufruit forme la valeur actuelle ou prix de l'obligation.

Exemple 33.13

Calculer le prix actuel de l'obligation et sa décomposition en nue-propriété et usufruit, connaissant les informations suivantes : Taux du marché : 4%, coupons annuels de 450 frs, remboursement de l'obligation au pair dans 5 ans : 10 000 frs.

Solution

Le prix est donné par la formule :

$$P = 450\, a_{\overline{5}|} + 10\,000\, v^5 \simeq 10\,222{,}60 \text{ frs.}$$

- La nue-propriété est donnée par :

$$10\,000\, v^5 \simeq 8\,219{,}27 \text{ frs.}$$

- L'usufruit est donné par :

$$450\, a_{\overline{5}|} \simeq 2\,003{,}32 \text{ frs.}$$

L'usufruit et la nue-propriété trouvent une application intéressante dans le domaine du notariat, particulièrement dans les partages d'héritages.

Ainsi, tout bien ou capital peut être séparé en 2 : la nue propriété et l'usufruit. La nue-propriété représente un droit de propriété sans usage, et l'usufruit est le droit d'user, d'un bien ou d'un capital et d'en percevoir les revenus. Au décès de l'usufruitier, le nue-propriétaire récupère l'intégralité de ses droits. Par exemple, dans un logement, celui qui bénéficie de l'usufruit a le droit d'habiter et d'en tirer des revenus, alors que le nue-propriétaire en est seulement le détenteur. [5]

Exemple 33.14

Une mère de 70 ans (avec une espérance de vie de 15 ans) et son fils sont respectivement usufruitière et nue-propriétaire d'une villa qu'ils vendent au prix de 800 000 frs. Sachant que la valeur locative est estimée à 5%, quelle part de la vente échoit à la mère, respectivement au fils si l'on tient compte d'un intérêt de 3% ?

5. En Suisse, les notaires font usage des tables de capitalisation de Stauffer & Schaetzle pour les calculs de l'espérance de vie et des droits d'usufruit.

Solution

Soit X, la part de la nue-propriété du fils. On peut établir l'équation suivante :

$$800\,000 = 40\,000\, a_{\overline{15|}} + X\, v^{15}$$

Ainsi : $X \simeq 502\,417{,}38$. On peut alors écrire :

- Part revenant au fils :

$$502\,417{,}38\, v^{15} = 322\,482{,}60 \text{ frs.}$$

- Part revenant à la mère :

$$40\,000\, a_{\overline{15|}} = 477\,517{,}40 \text{ frs.}$$

Exercices d'application de la section 33.2

24 [Rendement courant] Une obligation offre un coupon de 4,8%. Son cours boursier est de 96. Calculer le rendement courant de cette obligation.

25 [Rendement courant] Un investisseur achète une obligation qui cote 102,5% et qui offre un coupon de 4,5% en 2020. Le remboursement de l'obligation interviendra en 2028. Quel est le taux de rendement courant de cette obligation ?

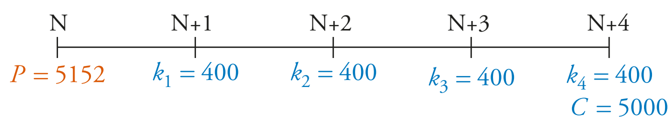
26 [Taux de rendement] Le 25 mars 2018, Marc a acheté 40 obligations de valeur nominale 1 000 frs au cours de 99,5. Frais d'achat : 100 frs. Taux facial : 3%. Échéance des coupons : 20 mai. Les obligations sont revendues le 15 octobre 2020 au cours de 100,1 avec des frais de vente de 80 frs. Calculer le taux de rendement lié à la possession de ces obligations.

(a) Faire le calcul au moyen de la formule approximative.

(b) Faire le calcul au moyen de la formule précise.

27 [Rendement] Le 15.05.N, Sophie a acheté 22 obligations de valeur nominale 5 000 frs au cours de 101. Frais d'achat : 570 frs. Taux facial : 3,5%. Échéance des coupons : 10 août. Les obligations sont revendues le 20.02.N+3 au pair avec des frais de vente de 80 frs. Calculer le taux de rendement approximatif lié à la possession de ces obligations.

28 [Rendement à l'échéance] Quel est le rendement à l'échéance de cette obligation ?



29 [Rendement actuariel] Un emprunt de 600 obligations est émis le 1.10.N. Nominal 1 000 frs. Prix de remboursement 1 010 frs. Taux facial 4%. Remboursement dans 5 ans. Calculer le taux de rendement actuariel à l'émission.

30 [Prix de l'obligation] Le détenteur d'une obligation recevra des paiements de 80 frs à la fin des années 2016, 2017, 2018, 2019, 2020 et un paiement final de 2 080 frs à la fin 2021. Quel est le prix de cette obligation au 1.1.2016 permettant de réaliser un taux de rendement de 6% ?

31 [Rendement] Une obligation de nominal 5 000 frs porte un intérêt annuel de 7%. Elle est remboursable au pair dans 4 ans. Son prix actuel est de 5 220 frs. Calculer son taux de rendement.

32 [Cours] Le 20 mars 2018, Marc a acheté 8 obligations de valeur nominale 5 000 frs au taux facial de 4%. Ces obligations viennent à échéance le 10 octobre 2025. Si Marc garde ces obligations jusqu'à leur terme, il aura réalisé un rendement de 7%. À quel cours Marc a-t-il acheté ces obligations ?

33 [Prix de l'obligation] Julien a acheté une obligation d'une valeur de 1 000 frs. L'obligation comporte 6 coupons de 40 frs dont le premier échoit dans 1 an. Le prix d'achat lui aurait permis d'obtenir un rendement à l'échéance de 5,18%. Juste après avoir encaissé le second coupon, il revend son obligation au pair.

(a) Combien a-t-il payé son obligation ?

(b) Quel est le taux de rendement de cette opération financière ?

33.3 Problèmes et exercices de synthèse

34 [Tableau d'amortissement] Établir le tableau d'amortissement d'un emprunt de 40 000 frs à 10% sur 4 ans, sachant que les remboursements se font au moyen de la formule ci après :

$$R_k = \frac{2C}{n^2 + n}(n - k + 1)$$

35 [Divers calculs] Un emprunt à annuité constante est remboursable en 20 ans. De cet emprunt, on connaît le douzième amortissement : 1293 frs et le dix-septième amortissement : 1596 frs.

(a) Quel est le taux d'intérêt annuel de l'emprunt ?

(b) Quel est le capital emprunté, arrondi à l'unité, si l'annuité est de 1888,74 frs ?

(c) Quel est le montant du dernier amortissement ?

36 [Divers calculs] Soit un emprunt à annuité constante, dont on connaît :

$$n = 10$$
$$R_1 + R_2 = 1258,5$$
$$R_2 + R_3 = 1346,6$$

(a) Calculer le taux d'intérêt annuel i.

(b) Calculer l'annuité constante A.

(c) Calculer le capital C arrondi à l'unité.

37 [Durée] D'un emprunt à remboursement constant on connaît la $5^{\text{ème}}$ annuité : 222 frs, la $6^{\text{ème}}$ annuité : 210 frs, ainsi que le taux d'intérêt de l'emprunt : 8%. Calculer la durée ainsi que le capital emprunté.

38 [Emprunt maximum] Un indépendant gagne 8 500 frs par mois et ne prévoit pas de modification de son revenu dans l'avenir. Il souhaite effectuer un emprunt immobilier sur 15 ans. Sachant que le banquier accepte un ratio mensualité/revenu de 30% et qu'il lui propose un financement à 7% d'intérêt annuel, quel montant peut-il emprunter ?

39 [Équation d'équilibre] Une dette de 40 000 frs est remboursée par 10 annuités constantes d'un montant X. La première annuité est due dans 10 ans.

(a) Déterminer l'équation d'équilibre actuarielle.

(b) Déterminer X, si le taux d'intérêt annuel est de 7%.

40 [Nombre d'annuités] Un client n'arrive pas à payer la $15^{\text{ème}}$ mensualité d'un emprunt de 30 000 frs (mensualités constantes durant 5 ans). Il arriverait cependant à payer le 60% de ce qu'il paie aujourd'hui. Le banquier est d'accord de ré-échelonner sa dette en lui accordant un délai de paiement plus long. Taux d'intérêt annuel utilisé : 9,5%. Calculer le nombre d'annuités ainsi que le montant de la dernière annuité partielle.

41 [Taux de rendement] On paie 9 900 frs une obligation de 10 000 frs d'un emprunt à 4,5% remboursable à échéance fixe dans 5 ans. L'intérêt nominal est payé par fractions semestrielles. Quel est le taux de rendement de cette obligation ?

42 [Prix de l'obligation] Une obligation de 5 000 frs avec des coupons annuels de 6% est achetée 15 jours après la date de l'encaissement d'un coupon à un cours de 92,50. Déterminer le prix de cette obligation.

43 [Cours] Soit une obligation d'une valeur nominale de 1 000 frs avec 8 coupons restants de 3%. Déterminer le cours de l'obligation, au taux d'évaluation de 5% :

(a) 5 ans avant l'échéance.

(b) 4 ans et 2 mois avant l'échéance.

(c) 3 ans et 3 mois avant l'échéance.

44 [Usufruit] Une propriété d'une valeur de 500 000 frs a une valeur locative annuelle de 5%. Quelle est la part de l'usufruit reposant sur la tête de Madame Martin, âgée de 77 ans et dont l'espérance de vie peut être estimée à 11 ans. Taux d'intérêt annuel utilisé : 3%.

45 [Emprunt sous Excel] On souhaite établir rapidement un tableau d'amortissement concernant un petit crédit de 40 000 frs à mensualités constantes. Taux annuel : 6%. Durée du crédit : 48 mois. Complétez les cases jaunes du tableau ci-après en indiquant uniquement les formules utilisées.

	A	B	C	D	E	F
1	Crédit	40000		Taux mensuel		
2	Taux annuel	6%				
3	Durée	48	mois			
4						
5	k	Ck	Rk	Sk	Ik	Ak
6						
7						

46 [Défi] Nicolas et Sébastien ont vu un jour l'annonce suivante : «Banque de crédit Grossous vous propose un crédit sur 4 ans au taux de 9,85% annuel à annuité ou amortissement constant». Ils ont alors emprunté en même temps, la même somme auprès de cette banque. Nicolas a choisi le système de l'amortissement constant et Sébastien celui de l'annuité constante. Quelque temps plus tard, Nicolas dit à Sébastien : «Je viens de payer la même mensualité que toi». Pouvez-vous dire quand nos amis ont emprunté leur montant auprès de la banque Grossous?

47 [Défi] Un gentil banquier a prêté à Célia une somme qu'il lui demande de lui rendre en 10 ans sans intérêt, et de la manière suivante :

- à la fin de la $1^{\text{ère}}$ année, elle rendra la moitié
- à la fin de la $2^{\text{ème}}$ année, elle rendra le tiers de ce qui reste dû
- à la fin de la $3^{\text{ème}}$ année, elle rendra le quart de ce qui reste dû
- ....
- à la fin de la $9^{\text{ème}}$ année, elle rendra le dixième de ce qui reste dû
- à la fin de la $10^{\text{ème}}$ année, elle rendra le solde dû, soit un montant de moins de 300 frs.

Sachant que toutes ces opérations se font en nombre entiers de francs, quelle somme le banquier a-t-il prêté à Célia?

Chapitre 34

Biens d'équipement

Objectifs du chapitre

- connaitre les différentes méthodes d'amortissement utilisées en Suisse.
- connaitre l'amortissement dégressif arithmétique.
- connaitre les 4 méthodes classiques liées à un choix d'investissement (VAN, TRI, Délai de récupération et indice de profitabilité).

34.1 Les amortissements

Les installations et les biens d'équipement subissent une dépréciation progressive due à l'usure ou à l'obsolescence. Cette baisse de valeur, enregistrée comme une charge en comptabilité, est appelée amortissement comptable. Il ne faut pas confondre l'amortissement financier qui correspond au remboursement d'une dette et l'amortissement comptable qui est une diminution de valeur des moyens de production.

Certains types de biens ont une perte de valeur assez uniforme dans le temps contrairement à d'autres qui se déprécient plus rapidement les premières années. Nous verrons donc ici les méthodes utilisées en pratique qui décrivent l'un ou l'autre de ces phénomènes.

Les formules présentées ci-après existent pour Microsoft Excel. Nous en présenterons brièvement la syntaxe. Pour tout complément d'information, il est préférable de consulter l'aide du logiciel au sujet de ces fonctions.

Notations :

V_0 Valeur initiale ou d'acquisition du bien d'équipement
V_k Valeur résiduelle du bien après le $k^{\text{ème}}$ amortissement
V_n Valeur du bien après le $n^{\text{ème}}$ amortissement (**valeur résiduelle** finale)
A_k Montant du $k^{\text{ème}}$ amortissement $k \in \{1; 2; \cdots, n\}$
n Nombre d'années d'amortissement
i Taux d'amortissement

En Suisse, il existe deux méthodes d'amortissement : l'amortissement linéaire ou l'amortissement dégressif géométrique. L'entreprise peut choisir l'une ou l'autre de ces méthodes mais le système d'amortissement choisi doit être normalement conservé par la suite.

34.1.1 L'amortissement linéaire

Dans l'amortissement linéaire, la valeur de l'immobilisation est diminuée d'un montant annuel constant durant toute sa durée de vie. Avec un taux d'amortissement calculé sur la **valeur d'acquisition** de l'immobilisation, on obtient :

$$A_k = A = V_0 \times i \qquad \text{pour } k = 1, 2, 3, \ldots, n$$

Selon ce principe [1], la valeur du bien au cours du temps évolue donc de la façon suivante :

Valeur du bien après 1 an : $V_1 = V_0 - A$
Valeur du bien après 2 ans : $V_2 = V_1 - A = V_0 - 2A$
Valeur du bien après 3 ans : $V_3 = V_2 - A = V_0 - 3A$, etc...
....
Valeur du bien après n années : $V_n = V_0 - nA$

Cette dernière relation permet de déterminer l'amortissement comme suit :

$$A = \frac{V_0 - V_n}{n}$$

Exemple 34.1

Une machine valant initialement 1 000 frs perd 90% de sa valeur en 5 ans.

(a) Quel amortissement annuel faut-il enregistrer selon la méthode de l'amortissement linéaire ?

(b) Quel est le taux d'amortissement utilisé ?

(c) Établir le tableau complet d'amortissement.

1. L'amortissement linéaire n'est rien d'autre qu'une capitalisation à intérêt simple négatif : $V_n = V_0(1 - ni)$

Solution

(a) On a les valeurs suivantes : $V_0 = 1000$, $V_n = 100$ et $n = 5$, donc :

$$A = \frac{1000 - 100}{5} = \frac{900}{5} = 180 \text{ frs.}$$

(b) Taux d'amortissement :

$$i = \frac{A}{V_0} = \frac{180}{1000} = 18\%$$

(c) Tableau d'amortissement :

Date	Valeur	Amortissement
0	1000	—
1	820	**180**
2	640	**180**
3	460	**180**
4	280	**180**
5	100	**180**

Remarque

Sous Excel, la fonction suivante renvoie l'amortissement constant A : AMORLIN(V_0; V_n; n)
Pour l'exemple précédent cela donne : $A =$ AMORLIN(1000; 100; 5) $= 180$ frs.

34.1.2 L'amortissement géométrique dégressif

Dans l'amortissement géométrique dégressif, appelé aussi **amortissement sur la valeur comptable**, on applique à la valeur résiduelle un taux d'amortissement constant. C'est le mode d'amortissement le plus utilisé en pratique. L'année k, le bien est donc amorti de :

$$A_k = V_{k-1} \cdot i$$

Dès lors on obtient :
Valeur du bien après 1 an : $V_1 = V_0 - V_0 \cdot i = V_0(1-i)$
Valeur du bien après 2 ans : $V_2 = V_1 - V_1 \cdot i = V_1(1-i) = V_0(1-i)^2$
....
Ainsi, la valeur du bien après n années s'écrit : [2]

$$V_n = V_0(1-i)^n$$

2. Comme on le voit, l'amortissement dégressif géométrique n'est qu'une capitalisation à intérêt composé négatif.

Cette dernière formule permet de calculer i, c'est-à-dire le taux d'amortissement à appliquer d'années en années à la valeur résiduelle du bien :

$$i = 1 - \sqrt[n]{\frac{V_n}{V_0}}$$

Sachant que $A_k = V_{k-1} i$ et que $V_{k-1} = V_0(1-i)^{k-1}$, on peut exprimer l'amortissement à la date k comme suit :

$$A_k = V_0 (1-i)^{k-1}\, i$$

Cette méthode ne conduit jamais à une valeur résiduelle nulle ($V_n \neq 0$).

Exemple 34.2

Un bien d'une valeur initiale de 5 000 frs doit être amorti en 4 ans selon l'amortissement géométrique dégressif. Valeur résiduelle : 2 048 frs. Établir le tableau d'amortissement.

Solution

On détermine au préalable le taux d'amortissement i :

$$i = 1 - \sqrt[4]{\frac{2048}{5000}} = 20\%$$

On applique ensuite pour chaque année ce taux d'amortissement à la valeur comptable, ce qui permet à l'aide d'un tableur d'établir très simplement le tableau d'amortissement ci-après :

Date	Valeur	Amortissement
0	5 000	—
1	4 000	**1 000**
2	3 200	**800**
3	2 560	**640**
4	2 048	**512**

Remarques

- Sous Excel, la fonction suivante renvoie le $k$ème amortissement A_k : DB(V_0; V_n; n; k)
  Pour l'exemple précédent on trouve par exemple : A_3 = DB(5000; 2048; 4; 3) = 640 frs.
- Contrairement à l'amortissement linéaire, l'amortissement géométrique dégressif convient particulièrement aux biens ayant une très forte dépréciation les premières années, comme des ordinateurs par exemple.

► Si l'entreprise peut estimer raisonnablement la valeur résiduelle ainsi que la durée de vie de son investissement, elle pourra justifier auprès des autorités fiscales du taux d'amortissement choisi. Dans le cas contraire elle pourra toujours se référer à la notice fiscale en vigueur, qui propose d'office un taux d'amortissement maximal en fonction de certains types d'actifs, [3] comme par exemple :

Type de bien	Taux
Bâtiments commerciaux	4%
Mobilier	25%
Machines de production	30%

Type de bien	Taux
Ordinateurs et autres	40%
Outillage / Véhicules	40%
Vaisselle de restaurant	45%

34.1.3 L'amortissement arithmétique dégressif

Dans l'amortissement arithmétique dégressif, la valeur de l'immobilisation décroît inversement à l'ordre des années. Par exemple, un bien d'une durée de vie de 4 ans, sera amortissable à raison de **4**/10 la première année, **3**/10 la seconde, **2**/10 la troisième et **1**/10 la dernière. La base commune «**10**» étant égale à la somme arithmétique $1+2+3+4$.

Cette méthode d'amortissement, connue aussi sous le nom de méthode SOFTY [4], se traduit mathématiquement comme suit :

$$A_k = \frac{V_0 - V_n}{S_n}(n-k+1)$$

avec S_n = somme des n premiers nombres entiers.

$$S_n = 1+2+3+4+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Cela permet d'écrire A_k de façon plus synthétique, $\forall k \in \{1;2;\cdots,n\}$

$$A_k = \frac{2(V_0 - V_n)}{n(n+1)}(n-k+1)$$

3. Voir sur le site de l'administration fédérale des contributions : Notice A 1995 - Entreprises commerciales.
4. En anglais : **S**um **O**f **T**he **Y**ears ou encore SYD (Sum Years Digits)

Exemple 34.3

Un bien d'une valeur initiale de 75 000 frs doit être complètement amorti en 5 ans selon l'amortissement arithmétique dégressif. Établir le tableau d'amortissement.

Solution

Solution 1 : Méthode usuelle

On détermine au préalable $S_5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$. Ainsi, les amortissements peuvent être calculés comme suit :

$$A_1 = 5/15 \times 75\,000 = 25\,000 \text{ frs.}$$
$$A_2 = 4/15 \times 75\,000 = 20\,000 \text{ frs.}$$
$$A_3 = 3/15 \times 75\,000 = 15\,000 \text{ frs.}$$
$$A_4 = 2/15 \times 75\,000 = 10\,000 \text{ frs.}$$
$$A_5 = 1/15 \times 75\,000 = 5\,000 \text{ frs.}$$

Tableau d'amortissement

Date	Valeur	Amortissement
0	75 000	—
1	50 000	**25 000**
2	30 000	**20 000**
3	15 000	**15 000**
4	5 000	**10 000**
5	0	**5 000**

Solution 2 : Utilisation de la formule

Pour chaque valeur de $\forall k \in \{1; 2; \cdots, n\}$, on calcule tous les A_k, ce qui donne par exemple pour $k = 3$:

$$A_3 = \frac{2(75\,000 - 0)}{5 \times 6}(5 - 3 + 1) = 15\,000 \text{ frs.}$$

Solution 3 : Utilisation d'Excel

Sous Excel, il faut utiliser la fonction intégrée $\mathsf{SYD}(V_0; V_n; n; k)$

$$A_k = \mathsf{SYD}(75000; 0; 5; 3) = 15\,000 \text{ frs.}$$

Remarques

- Ce type d'amortissement n'est pas toujours admis.
- En modifiant le compteur $n - k + 1$ par k, cette méthode pourrait servir à des amortissements progressifs pour des biens qui perdent peu de valeur en début de vie et beaucoup à la fin.

Exercices d'application de la section 34.1

1 [Amortissement linéaire] Établir le tableau d'amortissement d'un bien d'équipement de 1500 frs amortissable sur 4 ans et dont la valeur résiduelle est de 500 frs. Méthode à utiliser : Amortissement linéaire.

2 [Dégressif arithmétique] Une machine de 3000 frs doit être complètement amortie en 5 ans. Quel est le montant du dernier amortissement effectué en utilisant l'amortissement dégressif arithmétique ?

3 [Dégressif géométrique] Un bien d'une valeur de 40 000 frs perd 80% de sa valeur en 10 ans. Quel est le montant du 5$^{\text{ème}}$ amortissement, sous l'hypothèse d'un amortissement dégressif géométrique ?

4 [Dégressif géométrique] Établir le tableau d'amortissement d'un bien d'équipement de 5 000 frs amortissable sur 4 ans et dont la valeur résiduelle est de 500 frs. Méthode à utiliser : Amortissement dégressif géométrique.

5 [Diverses méthodes] Un bien d'une valeur de 20 000 frs est complètement amorti en 4 ans par des amortissements semestriels. Calculer le montant du 5$^{\text{ème}}$ amortissement sous l'hypothèse d'un :

(a) amortissement linéaire

(b) amortissement dégressif arithmétique

(c) amortissement dégressif géométrique

6 [Valeur d'un terrain] La dépréciation annuelle d'un terrain est estimée à 2,5% de sa valeur en début d'année.

(a) Calculer la valeur de ce terrain après 30 ans si celui-ci a été acheté initialement au prix de 300 000 frs.

(b) Quel amortissement annuel constant conduirait à la même valeur après 30 ans ?

7 [Dégressif arithmétique] Une machine dont la valeur d'achat était de 75 000 frs doit être amortie complètement en n années selon la méthode de l'amortissement dégressif arithmétique. Calculer n sachant que le 3$^{\text{ème}}$ amortissement est de 15 000 frs.

8 [Arithmétique progressif] La formule suivante permet d'exprimer le $k^{\text{ème}}$ amortissement selon la méthode de l'amortissement arithmétique dégressif.

$$A_k = \frac{2(V_0 - V_n)}{n(n+1)}(n-k+1)$$

Quelle formule permet d'exprimer le $k^{\text{ème}}$ amortissement selon la méthode de l'amortissement arithmétique progressif ?

9 [Tableau d'amortissement] Un bien d'une valeur initiale de 80 000 frs vaudra encore 5 000 frs dans 5 ans. Ne perdant que très peu de valeur les deux premières années, on souhaite l'amortir au moyen d'un amortissement arithmétique progressif. Établir le tableau d'amortissement de ce bien sur 5 ans.

10 [Tableau d'amortissement] Un bien est amorti de 90% en 6 ans selon la méthode de l'amortissement dégressif arithmétique. Compléter le tableau d'amortissement ci-après :

k	V_k	A_k
0		xxxxxxxxx
1		
2		
3		
4		9 000
5		
6		

11 [Valeur d'une cellule] À propos de l'amortissement d'une machine, on trouve dans une cellule Excel, la valeur SFr. 6'000. En éditant cette cellule, on obtient :

= SYD(86000 ;30000 ;B1 ;5)

Quelle est alors la valeur contenue dans la cellule B1 ?

34.2 Les choix d'investissement

Un investissement est l'acquisition d'un bien de production par l'entreprise. Un investissement implique une dépense immédiate, payable en une ou plusieurs fois suivie d'entrées futures appelées **cash-flows**. Comme nous l'avons vu avec les amortissements, les biens peuvent aussi avoir en fin de vie une **valeur résiduelle**.

Il existe plusieurs critères, présentés ci-après, permettant d'opter pour un investissement ou choisir entre plusieurs projets : celui de la **valeur actuelle nette** (**VAN**), celui du **taux interne de rentabilité** (**TRI**) ou encore celui du **délai de récupération**.

Notations :

V_0 Valeur initiale ou d'acquisition du bien d'équipement
V_n Valeur finale ou résiduelle du bien d'équipement
C_k Cash-flow ou entrée de l'année k avec $k \in \{1; 2; \cdots, n\}$
i Taux d'actualisation ou d'évaluation (ou **coût du capital**)

34.2.1 La valeur actuelle nette

La valeur actuelle nette (VAN) est la différence en valeur actuelle entre les dépenses et entrées futures. Elle s'écrit très simplement par :

$$\text{VAN} = \underbrace{\text{Valeur actuelle des entrées}}_{\text{y compris la valeur résiduelle}} - \text{Valeur actuelle des sorties}$$

Les calculs les plus fréquents relatifs à la VAN suggèrent une dépense initiale unique V_0, suivie d'entrées annuelles chaque année C_1, C_2, … C_n et V_n. Mathématiquement cela se traduit par :

$$\text{VAN} = \frac{C_1}{1+i} + \frac{C_2}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{C_n}{(1+i)^n} + \frac{V_n}{(1+i)^n} - V_0$$

ou encore :

$$\text{VAN} = \sum_{k=1}^{n} \frac{C_k}{(1+i)^k} + \frac{V_n}{(1+i)^n} - V_0$$

Remarques

- Si les cash-flows sont constants ($C_k = C$), on fait simplement usage de la rente certaine postnumerando :

$$\text{VAN} = C \cdot a_{\overline{n}|} + \frac{V_n}{(1+i)^n} - V_0$$

- L'investissement est dit rentable si la VAN est positive. D'un point de vue purement financier, l'investissement mérite donc d'être entrepris.
- Dans le cas de plusieurs investissements, on choisira celui dont la VAN est la plus grande.

Exemple 34.4

Une entreprise souhaite acquérir une nouvelle machine valant 6000 frs, ce qui devrait permettre d'abaisser les coûts de production de 1000 frs par an durant 5 ans. Elle estime que dans 5 ans, la valeur résiduelle de cette machine sera de 3000 frs. Doit-elle acheter cette machine si cet investissement peut être financé par un emprunt à 10% ?

Solution

Solution 1 : En calculant la VAN, on trouve, avec $i = 0,1$:

$$\text{VAN} = 1000 a_{\overline{5}|} + 3000\, v^5 - 6000 \simeq -346,4 \text{ frs.}$$

La VAN étant négative, on n'a pas intérêt, selon ce critère, à acheter cette machine.

Solution 2 : Utilisation d'Excel

Dans Excel, on peut utiliser VAN$(i; C_1; C_2; \cdots)$ ou VAN$(i;$ plage des $c_i)$ avec $i = 1$à n. Il faut être prudent avec son utilisation, car elle ne tient pas compte de la valeur initiale V_0. On écrira alors la formule ainsi :

	A	B	C	D
1	=-6000+VAN(0.1;1000;1000;1000;1000;4000)			

Exemple 34.5

Une entreprise pharmaceutique veut développer un nouveau médicament. Elle opte pour 2 stratégies :

(a) Investir 1 milliard de frs et vendre le médicament immédiatement. Dans ce cas, l'entreprise estime recevoir 500 millions de frs à la fin de l'année, 400 dans 2 ans et 300 millions dans 3 ans.

(b) Développer le médicament plus lentement, c'est-à-dire investir 200 millions maintenant, 200 millions dans 1 an et recevoir 300 millions à la fin des années 2 et 3.

Quelle stratégie est à envisager si l'entreprise peut se financer à 5% l'an ?

Solution

Solution 1

On calcule la VAN du projet A, au moyen des valeurs suivantes :

$$i = 0,05 \qquad V_0 = 1000 \qquad C_1 = 500 \qquad C_2 = 400 \qquad C_3 = 300$$

$$\text{VAN}_A = \frac{500}{1,05} + \frac{400}{(1,05)^2} + \frac{300}{(1,05)^3} - 1000 \simeq 98,15 \text{ mios de frs.}$$

La VAN du projet B se calcule comme suit :

$$\text{VAN}_B = \underbrace{\frac{300}{(1,05)^2} + \frac{300}{(1,05)^3}}_{\text{Entrées}} \underbrace{-200 - \frac{200}{1,05}}_{\text{Sorties}} \simeq 140,78 \text{ mios de frs.}$$

Selon ce critère, le projet B est financièrement plus intéressant.

Solution 2 : Utilisation d'Excel

Il suffit d'écrire la fonction suivante :

	A	B	C
1	=-200+VAN(0.05;-200;300;300)		

ce qui donnera le résultat suivant : VAN = 140,78 mios de frs

34.2.2 Le taux de rentabilité interne

Le taux de rentabilité interne (**TRI**) est le taux d'actualisation pour lequel la VAN du projet est nulle.

> Le TRI est le taux i pour lequel :
>
> $$\text{Valeur actuelle des entrées} = \text{Valeur actuelle des sorties}$$

Ce qui peut se traduire par exemple par :

$$V_0 = \frac{C_1}{1+i} + \frac{C_2}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{C_n}{(1+i)^n} + \frac{V_n}{(1+i)^n}$$

ou encore, si les cash-flows annuels sont constants :

$$V_0 = C \cdot a_{\overline{n}|} + \frac{V_n}{(1+i)^n}$$

Remarques

- La résolution de cette équation (i étant l'inconnue) s'effectue au moyen d'un solveur (Excel ou TI) ou par une méthode de résolution numérique.
- Si le TRI d'un projet est inférieur au taux d'intérêt pratiqué sur le marché, l'investisseur à intérêt à placer son argent et renoncer à son investissement.
- Entre deux investissements, on choisit celui dont le TRI est le plus élevé.
- Cette équation peut conduire à plusieurs solutions sauf dans le cas d'une dépense suivie de cash-flows positifs (Règle des signes de Descartes).

Règle des signes de Descartes.
Utilisation dans le cadre du TRI.

Exemple 34.6

Calculer le TRI, connaissant les flux financiers suivants d'un projet :

Années	0	1	2	3	4
Flux	−960	950	1 000	−500	−500

Solution

On peut exprimer ces valeurs comme suit :

$$V_0 = 960 \qquad C_1 = 950 \qquad C_2 = 1\,000 \qquad C_3 = -500 \qquad C_4 = -500\,,$$

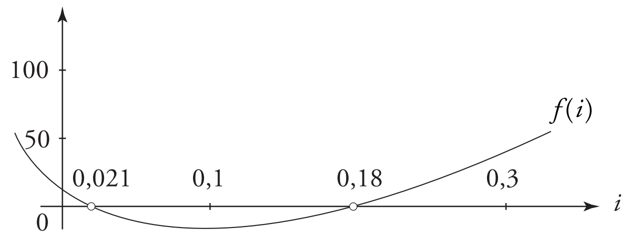
On cherche alors à résoudre l'équation suivante :

$$960 = \frac{950}{1+i} + \frac{1\,000}{(1+i)^2} - \frac{500}{(1+i)^3} - \frac{500}{(1+i)^4}$$

ou encore :

$$f(i) = 960 - \frac{950}{1+i} - \frac{1\,000}{(1+i)^2} + \frac{500}{(1+i)^3} + \frac{500}{(1+i)^4} = 0$$

Cette équation possède deux racines distinctes $i \simeq 2,15\%$ et $i \simeq 18,4\%$ comme le montre le graphe ci-après :



Variante : Utilisation d'Excel

Dans Excel, il existe la fonction TRI(plage des c_i;[estimation]) avec $i = 0$ à n. On écrira alors la formule ainsi, si l'on souhaite par exemple une valeur estimée proche de la première racine $i = 2,137\%$:

	A	B	C	D
1	-960			
2	950			
3	1000		=TRI(A1:A5;0.01)	
4	-500			
5	-500			

ce qui donnera la solution : $i \simeq 2,1\%$.

Le TRIM.
Une alternative aux taux de rendements multiples.

Exemple 34.7

Une machine coûte 10 000 frs. Elle permet de générer un profit net de 1 500 frs par an durant 14 ans avec une valeur résiduelle nulle. Calculer le TRI de cet investissement.

Solution

On cherche i tel que :

$$\text{VAN} = 1500 \cdot a_{\overline{14}|} - 10000 = 0$$

ce que l'on peut écrire :

$$a_{\overline{14}|} = \frac{10000}{1500} = 6,666666$$

ou encore :

$$f(i) = \frac{1 - \left(\frac{1}{1+i}\right)^{14}}{i} - 6,666666 = 0$$

En faisant usage du solver de la calculatrice ou au moyen de l'outil valeur cible d'Excel, on obtient : $i \simeq 11,89\%$.

En conséquence, si le taux des placements sur le marché est inférieur à 11,89%, on devrait, selon ce critère, acheter cette machine.

34.2.3 Le délai de récupération et d'amortissement

Le **délai de récupération** (p) est le nombre d'années nécessaires pour que la somme des cash-flows couvre l'investissement initial. Cela revient à chercher le plus petit entier p tel que :

$$V_0 \leq C_1 + C_2 + \cdots + C_p$$

ou encore :

$$\text{Valeur de } p \text{ telle que :} \qquad V_0 \leq \sum_{k=1}^{p} C_k$$

Le **délai d'amortissement** (q) améliore sensiblement le résultat, puisqu'il tient compte des cash-flows actualisés. Ainsi, on cherche le plus petit entier q tel que :

$$V_0 \leq \frac{C_1}{1+i} + \frac{C_2}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{C_q}{(1+i)^q}$$

ou encore :

$$V_0 \leq \sum_{k=1}^{q} \frac{C_k}{(1+i)^k}$$

Lorsque l'on compare 2 projets selon ce critère, le délai de récupération le plus court correspond au projet le plus intéressant.

Exemple 34.8

Analyser selon le critère du délai de récupération les 2 projets suivants.

Montants	V_0	C_1	C_2	C_3	C_4
Projet A	40	15	15	15	15
Projet B	60	15	20	20	20

Solution

Dans le projet A, il faut 3 ans pour récupérer l'investissement, car :

$$15 + 15 < 40 \qquad \text{mais} \qquad 15 + 15 + 15 > 40$$

Dans le projet B, 4 ans sont nécessaires pour récupérer l'investissement, en effet :

$$15 + 20 + 20 < 60 \qquad \text{mais} \qquad 15 + 20 + 20 + 20 > 60$$

Selon ce critère, le projet A est préférable au projet B.

34.2.4 L'indice de profitabilité

Si 2 projets nécessitent des investissements différents, il faut en tenir compte pour l'analyse. L'**indice de profitabilité** (π) consiste à mesurer la valeur actuelle des cash-flows d'un projet par rapport à l'investissement initial V_0. Cela permet alors une comparaison possible entre différents projets. Le meilleur projet est celui qui a l'indice de profitabilité le plus élevé. Celui-ci se calcule ainsi :

$$\pi = \frac{\text{Valeur actuelle des entrées}}{V_0}$$

Sachant que VAN=Valeur actuelle des entrées$-V_0$, l'indice de profitabilité peut également être exprimé comme suit :

$$\pi = \frac{\text{VAN}}{V_0} + 1$$

Exemple 34.9

En utilisant un taux d'actualisation de 5%, calculer l'indice de profitabilité des 2 projets suivants :

Montants	V_0	C_1	C_2	C_3	V_3
Projet A	50	20	20	20	0
Projet B	80	30	30	30	0

Solution

Projet A : VAN $= \frac{20}{1{,}05} + \frac{20}{(1{,}05)^2} + \frac{20}{(1{,}05)^3} - 50 \simeq 4{,}46$ donc :

$$\pi_A = \frac{4{,}46}{50} + 1 \simeq 1{,}089$$

Projet B : VAN $= \frac{30}{1{,}05} + \frac{30}{(1{,}05)^2} + \frac{30}{(1{,}05)^3} - 80 \simeq 1{,}69$ donc :

$$\pi_B = \frac{1{,}69}{80} + 1 \simeq 1{,}02$$

Sur la base de ce seul critère, il est préférable d'opter pour le projet A.

Remarque

L'étude du choix d'un investissement combine souvent ces différentes méthodes d'analyse ainsi que d'autres critères qui dépassent le cadre de cet ouvrage.

Exercices d'application de la section 34.2

12 [VAN et TRI] Une PME doit choisir entre deux projets A et B. L'investissement initial ainsi que les cash-flows annuels sont estimés comme suit :

	V_0	C_1	C_2	C_3
Projet A	1000	600	600	600
Projet B	1000	100	500	1500

Cette PME souhaite un rendement de 10%. Pour quel projet va-t-elle opter si elle se réfère :

(a) au critère de la VAN ?

(b) au critère du TRI ?

13 [VAN et TRI] Une machine achetée 75 000 frs permet de générer un excédent de recettes de 12 000 frs par an durant 14 ans, après quoi elle sera complètement amortie et sans valeur résiduelle. Sous l'hypothèse d'un taux d'actualisation de 10%, calculer :

(a) la VAN de cet investissement

(b) le TRI

14 [Taux de rendement] Un investissement de 823 000 frs a rapporté 500 000 frs après deux ans et 600 000 après 4 ans. À l'aide du calcul algébrique uniquement, déterminer le taux de rendement de cet investissement.

15 [TRI algébrique] Soit trois projets d'investissement A,B et C de 20 000 frs pour lesquels les flux nets de trésorerie sont les suivants :

	A	B	C
Année 1	20 000	20 000	11 344
Année 2	0	2200	11 344

Calculez algébriquement le TRI de ces différents projets.

16 [TRI] Calculer le TRI relatif à la suite de cash-flows suivants :

Date	0	1	1,5	2	3
Flux net	−5900 frs	1500 frs	1200 frs	1300 frs	2100 frs

17 [TRI] Un projet nécessite un investissement de 56 000 frs. Sa durée de vie est de deux ans. Il génère les cash-flows suivants :

Année 1	Année 2
155 000 frs	−100 000 frs

(a) Déterminer le TRI de ce projet.

(b) Doit-on accepter ce projet si le taux de rendement exigé est de 12% ?

18 [Règle des signes] On donne sous Excel les flux financiers suivants :

	A	B	C	D
1	C_0	C_1	C_2	C_3
2	−100 000	350 000	−407 750	158 125

(a) Selon la règle des signes de Descartes, combien de taux de rendements sont possibles dans cette situation ?

(b) Déterminer les différents TRI en utilisant plusieurs estimations de taux.

(c) Si les cash-flows positifs peuvent être placés à 5% et les cash-flows négatifs empruntés à 8%, quel taux de rendement (TRIM) correspond alors à ces flux financiers ?

19 [Règle des signes] Pour quels projets ci-après, dont les cash-flows sont donnés, est-on certain de n'obtenir qu'un seul taux de rendement ?

	2017	2018	2019	2020
Projet A	−2000	1000	1000	500
Projet B	−2000	1000	1500	−200
Projet C	2000	−1000	−400	−200
Projet D	1000	−600	100	−600

20 [Rentabilité] On donne les flux financiers des deux projets suivants :

	V_0	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7
Projet A	100	0	0	0	0	0	0	300
Projet B	100	0	150	0	0	0	0	0

(a) Lequel paraît le plus rentable à première vue ?

(b) Calculer algébriquement le TRI de ces deux projets.

21 [Choix de projet] Soit deux projets A et B qui se caractérisent par les cash-flows suivants :

Période	Projet A	Projet B
0	−10	−10
1	6	4
2	6	4
3	0	4,75

Selon les critères étudiés, lequel des deux projets est le meilleur sachant que le taux du marché financier est égal à 10% ?

22 [Délai de récupération] Un projet d'investissement sans valeur résiduelle est défini comme suit :

V_0	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
18 000	4 200	4 200	4 200	4 200	3 200	2 500

(a) Calculer le délai de récupération.

(b) Calculer le délai d'amortissement en tenant compte d'un taux de rendement espéré de 7%.

23 [Date de rentabilité] Un investissement s'élève à 170 000 frs. On espère qu'il rapportera annuellement 25 000 frs. À partir de quelle année cet investissement sera-il rentable compte tenu d'un taux d'évaluation de 11% ?

24 [VAN et TRI] L'entreprise Béta souhaite investir dans une nouvelle machine payable à raison de 40 000 frs à la livraison et le solde en 3 annuités de 20 000 frs chacune. Cette machine permettrait selon l'entreprise de générer un profit mensuel net d'environ 1800 frs durant 6 ans. Au terme de cette période, l'entreprise estime que cette machine sera complètement amortie et sans valeur résiduelle. Compte tenu d'un taux d'évaluation de 5% :

(a) Établir l'équation d'équilibre actuarielle permettant de calculer la VAN.

(b) Déterminer la VAN de ce projet.

(c) Déterminer le TRI.

34.3 Problèmes et exercices de synthèse

25 [Arithmétique progressif] Une machine d'une valeur d'achat de 150 000 frs perd 70% de sa valeur en 12 ans. Quelle est la valeur du 9ème amortissement sachant que cette machine est amortie selon le principe de l'amortissement arithmétique progressif?

26 [Géométrique dégressif] Une machine valant 34 500 frs doit être complètement amortie au moyen de l'amortissement géométrique dégressif sur 4 ans. Déterminer le deuxième amortissement.

27 [Recherche de la période] Déterminer la valeur de k et n à partir du système suivant :

$$\begin{cases} \text{SYD}(100; 10; n; k) = 18 \\ \text{SYD}(100; 10; n; k+1) = 12 \end{cases}$$

28 [Taux double] La méthode d'amortissement dégressif à **taux double** consiste à :

1. déterminer le taux d'amortissement linéaire, soit $1/n$
2. prendre le double de ce taux, soit $2/n$
3. à l'appliquer à la valeur résiduelle encore à amortir V_{k-1}

Cette méthode permet donc d'exprimer le $k^{\text{ème}}$ amortissement comme suit :

$$A_k = V_{k-1} \cdot \frac{2}{n} \qquad \text{avec } k = 1, 2, 3, \ldots, n$$

(a) Déterminer la formule permettant d'exprimer V_k en fonction de V_0

(b) Déterminer la formule permettant d'exprimer A_k en fonction de V_0

29 [Formule DDB] Sous Excel, la fonction DDB renvoie l'amortissement d'un actif suivant la méthode de l'amortissement dégressif à taux double. Cette fonction est définie comme suit pour les valeurs de k allant de 1 à n :

$$\begin{aligned} A_k &= \text{DDB}(V_0; V_n; n; k) \\ &= \min\left(V_{k-1} \cdot \frac{2}{n}\,;\; V_{k-1} - V_n\right) \end{aligned}$$

Calculer manuellement pour $k = 1$ à 5 les valeurs DDB(12000;3000;5;k)

30 [Arithmétique dégressif] Dans la méthode de l'amortissement arithmétique dégressif, montrer que :

$$V_k = V_0 - \frac{k(V_0 - V_n)}{n(n+1)}(2n - k + 1)$$

31 [Tableau à compléter] Un bien est amorti de 90% en 4 ans selon la méthode de l'amortissement dégressif géométrique. Compléter le tableau d'amortissement ci-après :

k	V_k	A_k
0		xxxxxxxxx
1		
2		
3		553,60
4		

32 [Durée de vie estimée] On estime que si un bien perd environ 90% de sa valeur, il est quasiment amorti. Selon cette estimation, quelle est la durée de vie estimée du mobilier selon l'administration fiscale fédérale ?

33 [Économie d'impôts] Vous achetez en début d'année des véhicules pour 100 000 frs. En supposant que vous vous référiez à la notice de l'administration fiscale et que le taux d'imposition des bénéfices soit de 30%, quelle économie d'impôt pouvez-vous réaliser sur 5 ans en optant pour l'amortissement dégressif géométrique au lieu de l'amortissement linéaire ?

34 [Rentabilité] Une machine vaut au comptant 35 000 frs. Elle est financée à raison de 30% au comptant et le reste par 5 annuités de 7 500 frs. Avec cette machine, l'entrepreneur espère faire des recettes de 6 000 frs par an pendant 12 ans. Cet investissement est-il rentable compte tenu d'un taux d'évaluation de 10% ?

35 [Modes de financement] Pour l'achat d'un véhicule de chantier, une entreprise a le choix entre deux modes de financement :

1. Un emprunt sur 13 ans, remboursable par annuités constantes de 16 500 frs.
2. Un leasing sur 15 ans avec des annuités de 12 000 frs et au moment de la dernière annuité la possibilité d'acheter le véhicule pour un prix de 120 000 frs.

Quel est le mode de financement le plus avantageux compte tenu d'un taux d'actualisation de 9,7% ?

36 [Indice de profitabilité] Un projet qui a nécessité un investissement initial de 500 000 frs a rapporté un certain cash-flow la première année, le double la deuxième année et le triple la 3$^{\text{ème}}$ année. Sachant que ce projet est sans valeur résiduelle et que l'indice de profitabilité se monte à 1,04845 au taux d'évaluation de 6%, calculez les cash-flows des années 1, 2 et 3.

37 [Contrat] Un joueur de football européen négocie un contrat de 5 années. Son conseiller financier offre aux dirigeants du club deux choix : soit lui payer 200 000 frs par année pour les 5 années du contrat ; soit lui payer 105 000 frs par année durant 10 années ce qui pourrait avantager le joueur pour des raisons fiscales. Si le club de football peut actuellement investir son capital à 10%, quelle offre devrait-il accepter ?

38 [Achat versus location] Vous souhaitez acheter une nouvelle machine au coût de 20 000 frs ayant une vie probable de 15 ans et aucune valeur de revente. Il en coûtera 7 000 frs par année pour l'entretien. Le fabricant vous offre une option de location. Plutôt que de vous vendre la machine, il vous offre de la louer pour une somme de 1 000 frs par semestre payable à terme échu. Vous payez vous-même les coûts de la main d'oeuvre et d'entretien. Quelle option recommanderez-vous (achat ou location) et selon quel critère ?

39 [Durée d'utilisation] Il est envisagé d'installer un système spécial de manutention dans un petit atelier à un coût total de 10 000 frs. Il est estimé que ce système permettra d'économiser 800 frs la première année, 1 000 frs la deuxième année et 1 500 frs par année par la suite. Combien, en nombre entier d'années, le système devrait-il durer afin de justifier son investissement ? Le propriétaire de l'atelier désire un taux de rendement d'au moins 8% par année.

40 [Projet d'investissement] Une société a un projet d'investissement d'un coût initial de 10 000 frs et a une durée de 4 ans. Pour ce projet, l'amortissement est linéaire. Le taux d'impôt sur les bénéfices est de 50%. Les dépenses d'exploitation prévues sont de 1500 frs la première année, 1500 frs la deuxième, 1000 frs la troisième ainsi que la quatrième année. On suppose qu'il n'y a pas de revente possible de l'investissement. Enfin, les recettes d'exploitation (en frs) prévues sont les suivantes :

Année	1	2	3	4
Recettes	4 000	4 000	5 000	5 000

(a) Calculer la VAN à 5% de ce projet.

(b) Calculer le TRI.

41 [Projet d'investissement] D'un investissement effectué en 2018, on retient les informations suivantes :

- Capital investi : 13 000 frs en matériel amortissable linéairement en 5 ans sans valeur résiduelle
- Durée de vie : 5 ans
- Impôt sur le bénéfice : 30%

Les prévisions d'exploitation sont données par le tableau ci-après :

Années	2019	De 2020 à 2023
Chiffre d'affaires HT	9 000 frs	12 000 frs
Charges d'exploitation variables	3 600 frs	4 800 frs
Charges d'exploitation fixes (hors amortissements)	3 000 frs	3 000 frs

(a) Déterminer le tableau des flux de ce projet

(b) Déterminer la VAN de ce projet au taux de 8%

(c) Calculer le TRI de ce projet.

42 [Vente de Kebab] Célia souhaite créer une start-up qui vendrait des Kebab à la sortie de son école. Elle estime que le projet a une durée de vie de 3 ans et nécessite un investissement initial de 20 000 frs. Elle pense pouvoir vendre environ 100 Kebabs à 6 frs par jour durant 180 jours par an la première année. Mais son chiffre d'affaires devrait pouvoir augmenter de 10% par an. Les frais d'exploitation annuels sont estimés à 40% du chiffre d'affaires. La location de la place ainsi que d'un petit cabanon lui coûtera 950 frs par mois. Par ailleurs, elle table sur une imposition d'environ 15% de ses bénéfices. Elle souhaite également amortir son équipement de manière géométrique dégressive avec un taux de 20% par an. Son salaire sera pour l'instant de 4000 frs par mois. On considère également qu'il n'y a pas d'imposition sur la valeur résiduelle.

Remarque : Par mesure de simplification, on considérera une actualisation annuelle.

43 [Défi] On donne le projet suivant :

	A	B
1	C_0	−1 000
2	C_1	600
3	C_2	500

Sans utiliser Excel, calculer la valeur de :

`B1+VAN(TRI(B1 : B3) ;B2 : B3)`

Chapitre 35

Mathématiques financières pour l'assurance-vie

Objectifs du chapitre

- connaître les principales fonctions biométriques qui définissent le risque.
- connaître les principales rentes viagères.
- connaître les principales assurances de capitaux.
- construire et utiliser les nombres de commutation.
- savoir calculer une prime d'assurance en y intégrant les frais.

Les concepts de rentes ou de capitaux développés précédemment trouvent toute leur application dans le domaine de l'assurance-vie. Dans ce chapitre, les paiements ne seront plus certains, mais vont dépendre de la survie ou non d'un assuré. Les **versements deviennent ici des variables aléatoires** et les **valeurs actuelles des espérances mathématiques**.

35.1 Fonctions biométriques

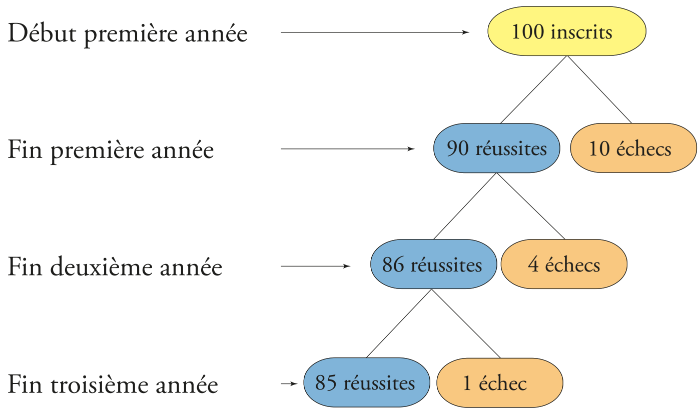
Les fonctions biométriques concernent les probabilités de décès ou de survie des personnes ou des assurés. Ces probabilités sont calculées sur la base de statistiques brutes de décès et ajustées au moyens de fonctions mathématiques plus ou moins complexes.

35.1.1 Probabilités de décès et de survie

Les principales probabilités intervenant dans le calcul sur l'assurance-vie peuvent être comparées à la situation suivante :

Supposons une école comportant 100 élèves inscrits en première année. L'établissement, qui n'autorise pas aux élèves de redoubler, a enregistré durant trois ans les résultats suivants : 10 échecs en première année, 4 échecs en deuxième année et un seul échec en troisième année.

Cette situation peut être représentée par le schéma suivant :

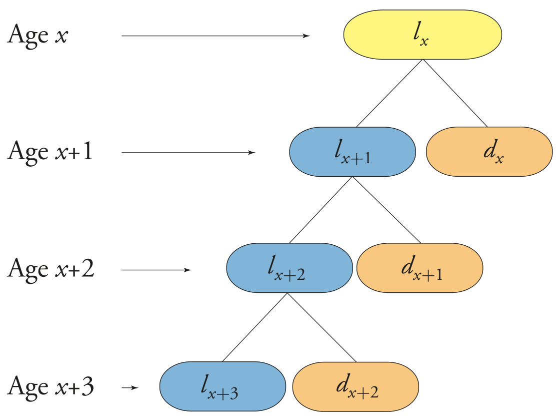


À partir de ce schéma, on peut tirer les probabilités suivantes pour des futurs étudiants inscrits en première année :

- Probabilité de réussir la 1ère année : $\frac{90}{100}$
- Probabilité de louper la 1ère année : $\frac{10}{100}$
- Probabilité de réussir la 3ème année : $\frac{85}{100}$
- Probabilité de louper la 3ème année : $\frac{1}{100}$
- Probabilité d'échec au cours des trois ans : $\frac{10+4+1}{100} = \frac{100-85}{100} = \frac{15}{100}$

En transposant ce modèle au monde de l'assurance, on obtient :

x	Âge d'un homme (respectivement y, âge d'une femme)
l_x	Nombre de vivants à l'âge x
d_x	Nombre de personnes décédées entre l'âge x et l'âge $x+1$



On a immédiatement la relation suivante :

$$d_x = l_x - l_{x+1}$$

Par analogie au schéma précédent, les probabilités suivantes peuvent être définies :

- Probabilité annuelle de survie à l'âge x :

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}$$

- Probabilité annuelle de décès à l'âge x :

$$q_x = \frac{d_x}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} = 1 - p_x$$

- Probabilité pour une personne d'âge x d'être en vie à l'âge $x + n$:

$${}_np_x = p_x \times p_{x+1} \times \cdots = \frac{l_{x+n}}{l_x}$$

- Probabilité pour une personne d'âge x de décéder entre l'âge $x + n$ et $x + n + 1$:

$${}_{n|}q_x = {}_np_x \times q_{x+n} = \frac{d_{x+n}}{l_x}$$

- Probabilité pour une personne d'âge x de décéder durant les n prochaines années : [1]

$${}_nq_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x} = 1 - {}_np_x$$

Remarques

— Les valeurs q_x, p_x, l_x et d_x constituent les éléments clés d'une **table de mortalité**.

— Toutes ces valeurs sont définies pour lesquelles une probabilité de survie non nulle existe. Le dernier âge observé dans une telle table sera alors noté ω. Ainsi : $l_{\omega+1} = 0$.

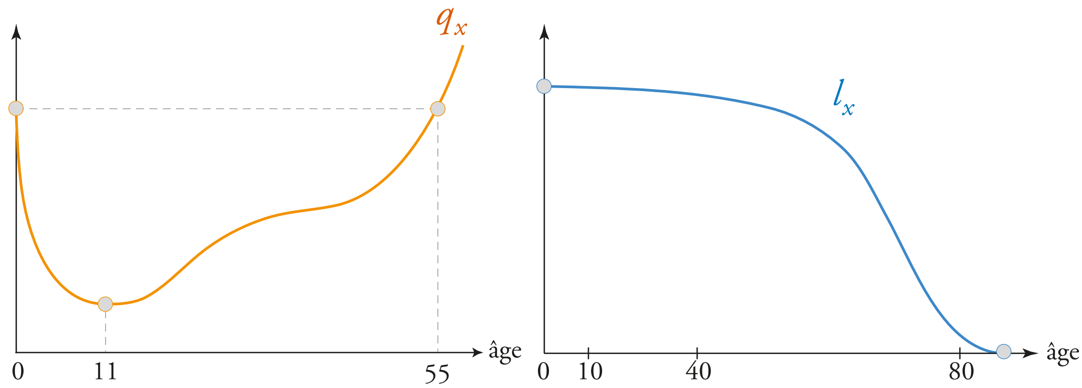
— Le nombre de survivants à chaque âge l_x se calcule en principe sur la base d'une cohorte fictive de 100 000 hommes ou femmes selon la formule :

$$l_{x+1} = l_x(1 - q_x)$$

Les tables de mortalité.
Comment sont-elles construites ?

Les graphiques ci-après montrent l'allure générale que prennent les probabilités annuelles de décès (q_x) ainsi que le nombre de survivants l_x en fonction de l'âge des individus.

1. Ne pas confondre ${}_{n|}q_x$ la probabilité annuelle de décès différée de n années (ce qui explique le symbole du différé $n|$) avec ${}_nq_x$ la probabilité temporaire de décès.



Exemple 35.1

Calculer au moyen de la table de mortalité en annexe les probabilités suivantes :

(a) Probabilité qu'un homme de 20 ans soit encore en vie à 60 ans ?

Solution

$$_{40}p_{20} = \frac{l_{60}}{l_{20}} = \frac{92\,412}{99\,272} \simeq 0,93$$

(b) Probabilité qu'une femme de 20 ans décède avant 60 ans ?

Solution

$$_{40}q_{20} = \frac{l_{20} - l_{60}}{l_{20}} = \frac{99\,431 - 95\,390}{99\,431} \simeq 0,04$$

35.1.2 Espérance de vie

Considérons un homme en vie lors de son $x^{\text{ème}}$ anniversaire. Le nombre d'années qui lui reste à vivre est une variable aléatoire dont on peut calculer l'espérance mathématique :

$$e_x = \sum_{t=0}^{\omega - x} t \cdot {}_{t|}\, q_x$$

ou si l'on considère que les décès ont lieu mi-année :

$$e_x = \sum_{t=0}^{\omega - x} \left(t + \frac{1}{2} \right) \cdot {}_{t|}\, q_x$$

Cette formule porte le nom d'**espérance moyenne de vie** et peut être simplifiée en faisant usage des l_x :

$$e_x = \frac{1}{l_x}\sum_{t=x}^{\omega} l_t - \frac{1}{2}$$

Espérance moyenne de vie.
Comment la calculer ?

Le tableau ci-après donne pour 2015 l'espérance de vie moyenne à la naissance de quelques pays :

Pays	Homme	Femme
Japon	82	87
Suisse	80	85
Australie	80	84
France	79	85
Royaume-Uni	79	83
États-Unis	77	82
Chine	75	78
Brésil	71	79
Égypte	69	73
Inde	67	70
Sierra Leone	49	51

Source : Rapport de l'OMS 2015

Exercices d'application de la section 35.1

1 [Symbole] Quel symbole peut remplacer l'expression suivante : $\dfrac{l_{65} - l_{75}}{l_{65}}$?

2 [Compléter une table] On donne la table de mortalité suivante avec $l_0 = 100\,000$. Compléter cette table avec les colonnes l_x et d_x.

x	q_x
0	0,05
1	0,02
2	0,01

3 [Compléter une table] Compléter la table de mortalité suivante définie pour $\omega = 4$.

x	q_x	p_x	l_x	d_x	e_x
0	0,2				
1		0,625			
2			500	100	
3				390	
4					0,5

4 [Espérance de vie] Calculer l'espérance de vie moyenne à 90 ans à partir des informations suivantes :

x	90	91	92	93	94	95	96	97	98
l_x	21	15	12	9	7	5	3	1	0

5 [Table de mortalité] Compléter la table de mortalité suivante :

âge x	l_x	d_x	p_x	q_x
0	1 000	100		
1				
2	750		0,8	
3				
4	300			0,6
5				
6	0			

6 [Divers calculs] En utilisant la formule suivante : $l_x = 1\,000\left(1 - \dfrac{x}{120}\right)$, calculer les valeurs suivantes :

(a) l_0 **(b)** l_{120} **(c)** d_{33} **(d)** ${}_{30}q_{20}$

7 [Diverses probabilités] On donne : $l_x = \dfrac{20\,000 - 100x - x^2}{20\,000}$. Calculer :

(a) ω

(b) la probabilité pour un nouveau-né d'atteindre l'âge de 20 ans.

(c) la probabilité pour un individu de 20 ans de vivre jusqu'à 40 ans.

(d) la probabilité pour un individu de 20 ans de décéder entre 30 et 40 ans.

8 [Probabilités] On donne : $l_x = \dfrac{\sqrt{100 - x}}{10}$

(a) Quelle est la probabilité pour un nouveau-né de décéder entre 19 et 36 ans ?

(b) Quelle est la probabilité pour un individu de 19 ans de décéder avant l'âge de 36 ans ?

9 [Nombre d'assurés] Une assurance comporte 800 assurés **masculins** de 35 ans qui devront tous toucher un capital en cas de vie à 65 ans. Selon la table de mortalité en annexe, combien d'assurés recevront probablement ce capital à 65 ans ?

10 [De Moivre] De Moivre (mathématicien français 1667-1754) avait posé la formule suivante pour le calcul de l'ordre des vivants : $l_x = 86 - x$, définissant ainsi l'âge ω à 85 ans.

(a) Calculer, selon cette formule d_x et d_{x+t}. Que constatez-vous ?

(b) Calculer l'espérance moyenne de vie pour une personne de 25 ans.

35.2 Principaux types d'assurances

35.2.1 Assurances de rentes

En assurance-vie, une rente n'est plus versée d'une manière certaine mais d'une manière **viagère**, c'est-à-dire qui dépend de la survie de l'assuré. La valeur actuelle d'une rente viagère ou certaine correspond à la **prime unique** (**PU**), c'est-à-dire du prix à payer pour recevoir cette rente. Mathématiquement, on peut également considérer la prime unique comme une espérance mathématique.

Remarque

Dans ce chapitre on traitera uniquement :

- de rentes annuelles.
- de rentes versées de façon praenumerando.

Pour calculer la valeur actuelle d'une rente viagère, on multiplie chaque terme de rente actualisé par la probabilité qu'il soit versé.

Exemple 35.2

On souhaite verser une rente praenumerando de 1 000 durant 3 ans à un homme de 40 ans. Calculer la prime unique à payer pour chacune des situations suivantes :

(a) Ni l'intérêt, ni la mortalité n'interviennent dans les calculs :

Solution

$\mathrm{PU} = 1\,000 + 1\,000 + 1\,000 = 1\,000 \times 3$

(b) Seul l'intérêt est considéré dans les calculs :

Solution

$\mathrm{PU} = 1\,000 + 1\,000 \cdot v + 1\,000 \cdot v^2 = 1\,000 \times \ddot{a}_{\overline{3}|}$

(c) Intérêt et mortalité sont pris en considération dans les calculs :

Solution

$\mathrm{PU} = 1\,000 + 1\,000 \cdot v \cdot {}_1\,p_{40} + 1\,000 \cdot v^2 \cdot {}_2\,p_{40} = 1\,000 \times \ddot{a}_{40:\overline{3}|}$

Rente viagère immédiate

Notation :

$\ddot{a}_x$ Valeur actuelle (ou PU) d'une rente viagère unitaire payable jusqu'au décès de l'assuré.

$$\ddot{a}_x = 1 + v \cdot {}_1p_x + v^2 \cdot {}_2p_x + v^3 \cdot {}_3p_x + \cdots + v^{\omega-x} \cdot {}_{\omega-x}p_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} v^t \cdot {}_tp_x$$

Exemple 35.3

Monsieur Martin vient d'avoir 65 ans. Il a accumulé toute sa vie un capital C, montant qu'il souhaite utiliser comme PU pour convertir ce capital en rente viagère immédiate annuelle d'un montant R. Que vaut R ?

Solution

L'équation d'équivalence actuarielle s'écrit :

$$\text{VA. des primes} = \text{VA. des prestations}$$
$$\mathrm{C} = R \times \ddot{a}_{65}$$
$$R = \frac{C}{\ddot{a}_{65}}$$

Rente viagère différée

Notation :

$_{k|}\ddot{a}_x$ Valeur actuelle (ou PU) d'une rente viagère unitaire différée de k années et payable praenumerando jusqu'au décès de l'assuré.

Les rentes viagères différées constituent la majorité des contrats d'assurances de rentes. L'assuré s'acquitte d'une prime unique (voir périodique comme on le verra plus loin), pour recevoir en contrepartie une rente s'il est en vie à un certain âge (à l'âge de sa retraite par exemple).

$$_{k|}\ddot{a}_x = v^k \cdot {}_kp_x + v^{k+1} \cdot {}_{k+1}p_x + \cdots + v^{\omega-x} \cdot {}_{\omega-x}p_x = \sum_{t=k}^{\omega-x} v^t \cdot {}_tp_x$$

Exemple 35.4

Robert a 44 ans. Il estime qu'à 65 ans sa rente de retraite ne sera pas suffisante compte tenu de lacunes de cotisation dans l'AVS. Il aimerait savoir ce que lui coûterait pour financer une rente annuelle de 8 000 frs qui lui sera versée dès sa 65e année.

Solution

$$\text{PU} = 8\,000 \times {}_{21|}\ddot{a}_{44}$$

Rente viagère temporaire

Une rente viagère temporaire consiste à verser des termes de rentes, tant que l'assuré est en vie mais au maximum durant n années. On utilise donc principalement la rente viagère temporaire pour actualiser les primes d'un contrat d'assurance.

Notation :

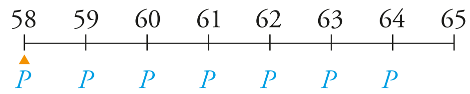
$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ Valeur actuelle (ou PU) d'une rente viagère unitaire payable praenumerando tant que l'assuré est en vie mais au maximum pendant n années.

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = 1 + v \cdot {}_1p_x + v^2 \cdot {}_2p_x + v^3 \cdot {}_3p_x + \cdots + v^{n-1} \cdot {}_{n-1}p_x = \sum_{t=0}^{n-1} v^t \cdot {}_tp_x$$

Exemple 35.5

Des primes annuelles P payables d'avance sont dues par un assuré de 58 ans tant qu'il est en vie avant l'âge de sa retraite à 65 ans. Modéliser cette situation et exprimer la valeur actuelle de ces primes.

Solution



La valeur actuelle est donnée par la formule suivante :

$$\mathrm{VA} = P \times \ddot{a}_{58:\overline{65-58}|} = P \times \ddot{a}_{58:\overline{7}|}$$

35.2.2 Assurances de capitaux

On parle d'assurance de capitaux lorsqu'une seule prestation est versée au bénéficiaire. Il s'agit en général des assurances au décès mais également de l'assurance en cas de vie, où un capital est versé si l'assuré est en vie à une certaine date.

Le calcul du prix de cette prestation (la prime unique PU) se calcule, comme pour les rentes, selon le principe de l'espérance mathématique.

Dans le cas d'une durée fixée d'avance, l'assurance est dite **temporaire**. Si la garantie ne prend effet qu'après une période d'attente, l'assurance est dite **différée**. En principe, l'assureur verse le capital à la fin de l'année du décès de l'assuré. On en tient compte dans le calcul des valeurs actuelles.

Exemple 35.6

Un contrat d'assurance prévoit le versement d'un capital de 500 frs en cas de décès d'un assuré d'âge x durant les 3 prochaines années. Quelle prime unique l'assuré devra-t-il payer pour cette couverture ?

Solution

Comme il s'agit d'une variable aléatoire, la PU s'écrit ainsi :

$$\begin{aligned}\mathrm{PU} &= 500 \cdot v \cdot q_x + 500 \cdot v^2 \cdot {}_{1|}\,q_x + 500 \cdot v^3 \cdot {}_{2|}\,q_x \\ &= 500 \sum_{t=0}^{2} v^{t+1} \cdot {}_{t|}\,q_x\end{aligned}$$

Remarque sur les notations

- Les valeurs actuelles de capitaux s'écrivent avec un **A** majuscule. Par exemple A_x , $A_{x:\overline{n}|}$. On verra plus loin les différents symboles utilisés en fonction des types de couverture d'assurance.
- Dans le calcul des valeurs actuelles de capitaux, les paiements sont postnumerando puisque le versement du capital se fait en principe à la fin de l'année du décès.

Capital au décès vie entière

Le capital est versé au moment du décès de l'assuré tout au long de sa vie. Le capital est donc toujours versé.

Notation :

A_x Valeur actuelle (ou PU) d'un capital unitaire payable au décès de l'assuré.

$$A_x = v \cdot q_x + v^2 \cdot {}_{1|}\, q_x + \cdots + v^{\omega-x+1} \cdot {}_{\omega-x|}\, q_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} v^{t+1} \cdot {}_{t|}\, q_x$$

Exemple 35.7

Quelle est la PU d'un capital au décès vie entière de 100 000 frs pour un assuré de 35 ans ?

Solution

$$\mathrm{PU} = 100\,000 \times A_{35}$$

Capital temporaire au décès

Le capital n'est versé que s'il a lieu durant les n prochaines années.

Notation :

${}_{|n}A_x$ Valeur actuelle (ou PU) d'un capital unitaire payable au décès de l'assuré, s'il se produit durant les n prochaines années.

$${}_{|n}A_x = v \cdot q_x + v^2 \cdot {}_{1|}\, q_x + \cdots + v^n \cdot {}_{n-1|}\, q_x = \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1} \cdot {}_{t|}\, q_x$$

Exemple 35.8

Un contrat d'assurance prévoit le versement d'un capital de 35 000 frs en cas de décès durant les 20 prochaines années pour un assuré âgé aujourd'hui de 40 ans. Quelle prime unique l'assuré devra-t-il payer pour cette couverture ?

Solution

$$\text{PU} = 35\,000 \times {}_{|20}A_{40}$$

Capital en cas de vie

Le capital en cas de vie s'apparente à une rente viagère différée d'un seul paiement.

Notation :

${}_nE_x$ Valeur actuelle (ou PU) d'un capital unitaire payable en cas de vie de l'assuré dans n années.

$$ {}_nE_x = v^n \cdot {}_np_x = v^n \frac{l_{x+n}}{l_x} $$

Exemple 35.9

Un contrat prévoit le versement d'un capital de 100 000 frs en cas de vie à 65 ans à un assuré qui a aujourd'hui 40 ans. Exprimer à l'aide d'un symbole actuariel la prime unique d'un tel contrat.

Solution

$$\text{PU} = 100\,000 \times {}_{25}E_{40}$$

Assurance mixte

C'est la combinaison d'assurance la plus classique. Elle combine à la fois l'assurance temporaire au décès et l'assurance d'un capital en cas de vie. En pratique, il se peut cependant que le capital en cas de vie soit différent que le capital en cas de décès. [2]

Notation :

$A_{x:\overline{n}|}$ Valeur actuelle (ou PU) d'un capital unitaire payable en cas de décès de l'assuré durant les n prochaines années ou en cas de vie de l'assuré à l'échéance.

$$A_{x:\overline{n}|} = {}_{|n}A_x + {}_nE_x$$

2. L'assurance mixte est considérée comme un moyen d'épargne complet puisqu'elle comprend à la fois une garantie en cas de décès et en cas de survie. Le capital garanti peut également servir à rembourser à l'échéance ou en cas de décès un prêt bancaire. On parle dans ce cas de **nantissement**.

Exercices d'application de la section 35.2

11 [Capital au décès] Une assurance prévoit le versement d'un capital de 15 000 frs au moment du décès de l'assuré. Quel est le coût de cette prestation ?

12 [Rente viagère] Écrire l'expression actuarielle représentant la valeur actuelle d'une rente viagère praenumerando annuelle de 250 frs, versée durant 25 ans à une assurée âgée de 18 ans.

13 [Capital en cas de vie] Un capital de 100 000 frs sera versé à un assuré de 35 ans s'il sera en vie à 65 ans. Quelle est la prime unique de cette couverture d'assurance si l'on tient compte d'un intérêt de **2%** et de la table de mortalité en annexe.

14 [Rente viagère différée] Écrire l'expression actuarielle de la valeur actuelle d'une rente annuelle **postnumerando** de 5 000 frs, versée à un assuré dès sa 65ème année. L'assuré est âgé aujourd'hui de 18 ans.

15 [Capital décès] Une assurance prévoit le versement d'un capital de 15 000 frs si l'assuré âgé de 28 ans décède avant ses 65 ans. Exprimer la prime unique de ce contrat.

16 [Notation actuarielle] Exprimer à l'aide des symboles actuariels, la valeur actuelle de la rente vie entière ci-après. L'assuré a 40 ans.

	100	**100**	**100**	…	…	**500**	**500**	…	…
40	41	42	43			65	66		

17 [Prime unique] Émilie a 22 ans. Elle souhaite recevoir un capital de 50 000 frs en cas de vie à 50 ans. Quel est le coût de cette prestation en faisant usage de la table de mortalité en annexe au taux de 0% ?

18 [Coût d'une rente viagère] En utilisant la table de mortalité en annexe, calculer la valeur actuelle d'une rente viagère praenumerando de 600 frs versée à un assuré de 40 ans durant 4 ans tant qu'il est en vie. Taux d'intérêt utilisé 8%.

19 [Capital décès variable] Une assurance prévoit le versement d'un capital de 10 000 frs si un assuré âgé de 30 ans décède avant 40 ans, 20 000 frs s'il décède entre 40 et 50, ainsi que 15 000 frs s'il est vivant à 50 ans. Exprimer la prime unique de ce contrat.

20 [Valeur actuelle] Sachant que $l_x = 1\,000\left(1 - \frac{x}{120}\right)$, calculer au taux de 5% la valeur $\ddot{a}_{30:\overline{3}|}$.

35.3 Les nombres de commutation

Les nombres de commutation sont des nombres auxiliaires permettant de simplifier les calculs de valeurs actuelles. Très utilisés à l'époque où l'informatique n'avait pas cours, on les utilise aujourd'hui principalement dans un cadre d'apprentissage. Sans l'utilisation de ces nombres, on est contraint à calculer, à l'aide d'un tableur par exemple, toutes les sommations qui composent les valeurs actuelles de rentes ou de capitaux viagers.

35.3.1 Commutations vie

Ils permettent de transcrire les valeurs actuelles relatives aux rentes et aux assurances en cas de vie. On distingue comme notation les lettres **D**, **N** dont la signification mnémotechnique est la suivante :

D Pour indiquer qu'il s'agit d'un nombre se trouvant le plus souvent au **Dénominateur**

N Pour indiquer qu'il s'agit d'un nombre se trouvant le plus souvent au **Numérateur**

Ces nombres sont définis de la manière suivante :

$$D_x = l_x \cdot v^x$$

$$N_x = D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \cdots + D_\omega = \sum_{t=0}^{\omega-x} D_{x+t}$$

On peut alors exprimer toute valeur actuelle de rente à l'aide des commutations.

Exemple 35.10

Exprimer la valeur actuelle $\ddot{a}_x$ au moyen des nombres de commutation :

Solution

$$\begin{aligned}
\ddot{a}_x &= \sum_{t=0}^{\omega-x} v^t \cdot {}_t p_x && \text{définition de } \ddot{a}_x \\
&= \sum_{t=0}^{\omega-x} v^t \cdot \frac{l_{x+t}}{l_x} && {}_t p_x \text{ exprimé en termes de } l_x \\
&= \sum_{t=0}^{\omega-x} \frac{v^x}{v^x} v^t \cdot \frac{l_{x+t}}{l_x} && \text{multiplication par } v^x \text{ num. et dén.} \\
&= \frac{1}{v^x \cdot l_x} \sum_{t=0}^{\omega-x} v^{x+t} \cdot l_{x+t} && \text{mise en évidence} \\
&= \frac{N_x}{D_x} && \text{utilisation des commutations}
\end{aligned}$$

En appliquant ce genre de transformation, on peut exprimer les principales valeurs actuelles de rentes suivantes :

- Rente immédiate praenumerando : $\ddot{a}_x = \dfrac{N_x}{D_x}$
- Rente temporaire praenumerando : $\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \dfrac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$
- Rente différée praenumerando : ${}_{k|}\ddot{a}_x = \dfrac{N_{x+k}}{D_x}$

Exemple 35.11

Quelle prime unique un assuré de 36 ans doit-il payer pour financer une rente de retraite de 12 000 frs par an payable praenumerando à l'âge de 65 ans ? Utiliser la table des nombres de commutation en annexe.

Solution

La prime unique de cette prestation s'exprime ainsi :

$$\mathrm{PU} = 12\,000 \times {}_{29|}\ddot{a}_{36} = 12\,000 \times \frac{N_{65}}{D_{36}}$$

ce qui donne finalement :

$$12\,000 \times \frac{186\,656{,}54}{33\,951{,}54} = 65\,972{,}8 \text{ frs.}$$

35.3.2 Commutations décès

Ils permettent de transcrire les valeurs actuelles relatives aux capitaux, c'est-à-dire qu'ils s'appliquent plus particulièrement aux assurances en cas de décès. On distingue comme notation deux lettres principales, **C** et **M** définies par :

$$C_x = d_x \cdot v^{x+1}$$

$$M_x = C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \cdots + C_\omega = \sum_{t=0}^{\omega - x} C_{x+t}$$

Les valeurs actuelles de capitaux exprimées à l'aide des commutations s'obtiennent par des transformations de formules identiques à celles décrites précédemment. Ainsi, les principales valeurs actuelles de capitaux exprimées en commutations s'écrivent :

- Capital vie entière : $A_x = \dfrac{M_x}{D_x}$
- Capital temporaire au décès : ${}_{|n}A_x = \dfrac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$
- Capital en cas de vie : ${}_nE_x = \dfrac{D_{x+n}}{D_x}$
- Assurance mixte : $A_{x:\overline{n}|} = \dfrac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}$

Exemple 35.12

Calculer la prime unique d'une assurance mixte de 15 000 frs pour **une** assurée de 50 ans. Durée de l'assurance : 12 ans. Bases techniques : Nombres de commutation en annexe à 3%.

Solution

La prime unique de cette prestation s'exprime ainsi :

$$PU = 15\,000 \times A_{50:\overline{12}|} = 15\,000 \times \frac{M_{50} - M_{62} + D_{62}}{D_{50}}$$

ce qui donne finalement :

$$15\,000 \times \frac{8\,052{,}8 - 7\,439{,}4 + 15\,130{,}9}{22\,335{,}6} \simeq 10\,573{,}50 \text{ frs}$$

35.3.3 Construction d'une table de commutations

Il est d'usage de commencer une table de commutations en prenant un effectif initial de 100 000 personnes d'âge 0.

Au taux technique de 3%, le principe de construction de la table en annexe est le suivant :

Commutations vie

	A	B	C	D
1	âge (x)	lx	Dx	Nx
2	0	100000	=B2*1.03^-A2	=SOMME(C2:$C$110)
3	1	99587	=B3*1.03^-A3	=SOMME(C3:$C$110)
4	2	99571	=B4*1.03^-A4	=SOMME(C4:$C$110)

Commutations décès

	A	B	C	D
1	âge (x)	dx	Cx	Mx
2	0	413	=B2*1.03^-(A2+1)	=SOMME(C2:$C$110)
3	1	16	=B3*1.03^-(A3+1)	=SOMME(C3:$C$110)
4	2	13	=B4*1.03^-(A4+1)	=SOMME(C4:$C$110)

Exercices d'application de la section 35.3

21 [Prime unique] Écrire et calculer, en utilisant les nombres de commutation en annexe, la PU d'une assurance en cas de décès vie entière pour un assuré de 20 ans. Capital assuré : 15 000 frs.

22 [Prime unique] Écrire et calculer, en utilisant les nombres de commutation en annexe, la PU d'une assurance en cas de décès durant l'année pour un assuré de 20 ans. Capital assuré : 80 000 frs.

23 [Prime unique] En utilisant la table de commutations en annexe, calculer la valeur actuelle d'une rente annuelle viagère praenumerando de 48 000 frs versée à une assurée de 45 ans tant qu'elle est en vie.

24 [Prime unique] Une assurance prévoit le versement d'un capital de 15 000 frs si l'assurée âgé de 28 ans décède avant ses 62 ans ou si elle est en vie à 62 ans. Exprimer et calculer la PU de ce contrat en utilisant les nombres de commutation en annexe.

25 [Prime unique] En utilisant la table de commutations en annexe, calculer la valeur actuelle d'une rente viagère annuelle praenumerando de 4 000 frs versée à un assuré de 40 ans durant 4 ans.

26 [Combinaison] Une assurance prévoit le versement d'un capital de 10 000 frs si un assuré âgé de 30 ans décède avant 40 ans, 20 000 frs s'il décède entre 40 et 50, ainsi que 15 000 frs s'il est vivant à 50 ans. Calculer la PU de ce contrat en utilisant les nombres de commutation en annexe.

27 [Type de couverture] Décrire le type de couverture représenté par chacune des expressions suivantes :

(a) $1\,000\left(\dfrac{C_{43}}{D_{43}}\right)$

(b) $1\,000\left(\dfrac{C_{43}+C_{44}+C_{45}+C_{46}}{D_{43}}\right)$

(c) $2\,000\left(\dfrac{N_{65}-N_{75}}{D_{20}}\right)$

(d) $2\,000\left(\dfrac{N_{65}}{D_{20}}\right)$

(e) $5\,000\left(\dfrac{M_{65}}{D_{20}}\right)$

(f) $15\,000\left(\dfrac{M_{25}-M_{50}+D_{50}}{D_{25}}\right)$

28 [Commutations] Exprimer, sans effectuer de calculs, les expressions suivantes au moyen des nombres de commutation :

(a) $\ddot{a}_{55}$ (c) $\ddot{a}_{75:\overline{15}|}$ (e) $A_{25:\overline{40}|}$

(b) $_{|8}A_{20}$ (d) $_{15|}\ddot{a}_{40}$ (f) $A_{25:\overline{1}|}$

29 [Capital assuré] Un assuré de 30 ans a conclu une assurance temporaire au décès jusqu'à 65 ans. Il a payé une prime unique de 6 552 frs. Quel est le capital assuré (arrondi au franc) si l'on utilise les nombres de commutation en annexe ?

30 [Probabilité] En supposant que $N_x = 53$, $N_{x+1} = 50$, $N_{x+2} = 48$ et $i = 4\%$, calculer la valeur de q_x.

35.4 Les primes d'assurances

Les primes d'assurance sont fixées à l'aide de 3 éléments de calcul : intérêt, risque mais aussi le coût relatif à la gestion du contrat par l'assureur. Les **primes pures** sont établies sur la base des intérêts et du risque. Les **primes brutes** appelées aussi primes tarifaires ou **primes commerciales** se calculent en y ajoutant les suppléments pour frais.

Il est assez rare qu'une prime soit payée en une fois (PU). En principe, les contrats prévoient le paiement de **primes périodiques** praenumerando.

35.4.1 Assurance individuelle

Dans l'assurance individuelle, le principe fondamental pour calculer les primes s'écrit :

Valeur actuelle des prestations = Valeur actuelle des primes

On parle alors du principe d'**équivalence individuel**.

Primes pures

La prime pure ne tient compte uniquement que de l'intérêt et du risque.

Exemple 35.13

Un homme d'âge x désire recevoir dans 10 ans un capital de 1 000 frs s'il est en vie. En contrepartie, il s'engage à verser des primes annuelles payables d'avance durant 5 ans. Calculer la prime annuelle pure P à payer :

Solution

$$\mathrm{P} \times \ddot{a}_{x:\overline{5}|} = 1\,000 \times {}_{10}E_x \quad \text{Principe d'équivalence}$$
$$\mathrm{P} = \frac{1\,000 \times {}_{10}E_x}{\ddot{a}_{x:\overline{5}|}} \quad \text{Diviser par } \ddot{a}_{x:\overline{5}|}$$

Exemple 35.14

Une femme de 40 ans désire recevoir à 62 ans une rente viagère de 2 500 frs par an. calculer la prime pure P qu'elle devra payer jusqu'à 62 ans.

Solution

$$\mathrm{P} \times \ddot{a}_{40:\overline{22}|} = 2\,500 \times {}_{22|}\ddot{a}_{40} \quad \text{Principe d'équivalence}$$
$$\mathrm{P} = \frac{2\,500 \times {}_{22|}\ddot{a}_{40}}{\ddot{a}_{40:\overline{22}|}} \quad \text{Diviser par } \ddot{a}_{40:\overline{22}|}$$

Primes commerciales

La prime commerciale est égale à la prime pure augmentée des frais de l'assureur :
Les frais peuvent se répartir de la manière suivante :

- α Frais uniques proportionnels au capital assuré (p.ex. commission d'acquisition)
- β Frais périodiques proportionnels à la prime commerciale (p.ex. frais d'encaissement)
- γ Frais périodiques proportionnels au capital assuré (p.ex. frais de gestion)

Exemple 35.15

Une assurance mixte à primes annuelles comporte : Une commission d'acquisition $\alpha = 2\%$, des frais d'encaissement $\beta = 2\%$, ainsi que des frais de gestion $\gamma = 0,2\%$. Déterminer la prime commerciale P de cette assurance pour un assuré d'âge x.

Solution

Selon le principe d'équivalence individuel, on peut écrire :

$$\mathrm{P}\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = A_{x:\overline{n}|} + \alpha + \beta \mathrm{P}\ddot{a}_{x:\overline{n}|} + \gamma \ddot{a}_{x:\overline{n}|} \quad \text{Principe d'équivalence}$$
$$\mathrm{P}(\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \beta \ddot{a}_{x:\overline{n}|}) = A_{x:\overline{n}|} + \alpha + \gamma \ddot{a}_{x:\overline{n}|} \quad \text{Mise en évidence}$$
$$\mathrm{P} = \frac{A_{x:\overline{n}|} + \alpha + \gamma \ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|} \times (1-\beta)} \quad \text{Simplifier}$$

En remplaçant par les taux de frais, on obtient :

$$P = \frac{A_{x:\overline{n}|} + 0,02 + 0,002 \times \ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{0,98 \times \ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$$

35.4.2 Assurance collective

En assurance collective et dans les caisses de pensions par exemple, c'est au niveau global d'un collectif d'assurés que cette équivalence doit être respectée. Dans ce cas, on parle du principe d'**équivalence collectif** dont l'équation d'équilibre s'écrit :

$$\sum_{i=1}^{\text{nb. d'assurés}} \textbf{Valeur actuelle des prestations} = \sum_{i=1}^{\text{nb. d'assurés}} \textbf{Valeur actuelle des primes}$$

Pour ce type d'assurance, on calcule généralement un taux de prime identique pour tous les assurés. Par exemple, une prime équivalant à 8% du salaire de chaque employé peut être nécessaire au financement de la rente de retraite. Pour déterminer la prime moyenne applicable à l'effectif, on applique donc le principe d'équivalence collective.

Exemple 35.16

On considère 2 assurés masculins de 20 et 30 ans avec retraite prévue à 60 ans. La rente sera 60% du salaire. Le financement est garanti par des primes annuelles tant que les assurés sont en vie et au maximum jusqu'à l'âge de la retraite. Calculer en fonction du tableau ci-après, et au moyen des nombres de commutation en annexe, la prime annuelle moyenne pour l'effectif ainsi que pour chaque assuré.

Assuré	Salaire annuel	Âge	Durée assurance	Rente annuelle
x_1	80 000	20	40 ans	48 000
x_2	120 000	30	30 ans	72 000
$\sum$	200 000			

Solution

Assuré	Prime	Prestation	x	n	$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$	Val. act. primes	${}_{n|}\ddot{a}_x$	Val. act. prest.
x_1	P	48 000	20	40	23,499	23,499 P	4,722	226 656
x_2	P	72 000	30	30	19,903	19,903 P	6,379	459 288
					$\sum$	43,402 P		685 944

Donc :

$$P = \frac{685\,944}{43,402} = 15\,804,4 \text{ frs.}$$

Cette prime annuelle est payable pour l'ensemble du collectif et pour une base salariale de 200 000 frs. On peut alors définir le taux de prime unique pour le collectif :

$$\text{Taux de prime} = \frac{15\,804{,}4}{200\,000} \simeq 0,079 = 7,9\%$$

La prime annuelle du premier assuré est donc de :

$$80\,000 \times 7,9\% = 6\,320 \text{ frs.}$$

et celle du second assuré :

$$120\,000 \times 7,9\% = 9\,480 \text{ frs.}$$

Exemple 35.17

(suite de l'exemple précédent) Deux nouveaux assurés rejoignent l'effectif. Le premier qui a 20 ans a un salaire annuel de 80 000 frs. Le second, qui a 30 ans a 120 000 frs de salaire annuel. Quelles seront leur contribution en entrant dans l'effectif?

Solution

Les deux assurés paieront le même taux de prime que les autres assurés c'est-à-dire 7,9% de leur salaire. Cependant, afin de ne pas modifier l'équilibre financier du collectif, ces deux assurés devront financer par une prime unique supplémentaire leur entrée dans le collectif. Ainsi :

Le premier assuré :

	Val. actuelle des prestations	226 656 frs.
–	Val. actuelle des primes $80\,000 \times 7,9\% \times 23,499$	148 513,7 frs.
	Contribution supplémentaire :	78 142,3 frs.

Le second assuré :

	Val. actuelle des prestations	459 288 frs.
–	Val. actuelle des primes $120\,000 \times 7,9\% \times 19,903$	188 680,4 frs.
	Contribution supplémentaire :	270 607,6 frs.

Exercices d'application de la section 35.4

31 [Prime annuelle] Un homme de 42 ans désire recevoir dans 10 ans un capital de 8 000 frs s'il est en vie. En contrepartie, il s'engage à verser des primes annuelles payables d'avance durant 5 ans. Calculer la prime annuelle à payer en fonction des hypothèses suivantes :

(a) Ni l'intérêt, ni la mortalité n'interviennent dans les calculs.

(b) Seul l'intérêt de 3% est considéré dans les calculs.

(c) Intérêt (3%) et mortalité (table en annexe) sont pris en considération.

32 [Montant de rente] Jules, 30 ans, souhaite cotiser 600 frs par an afin de pouvoir bénéficier à sa retraite (65 ans), d'une rente viagère. À quel montant de rente peut-il prétendre en faisant usage des nombres de commutations en annexe ?

33 [Prime annuelle] Quelle est la prime annuelle P payable par un assuré de 43 ans jusqu'à 65 ans en contre partie d'une assurance en cas de décès de 300 000 frs avant 65 ans ou d'un montant de 100 000 frs en cas de vie à 65 ans ? (utilisation des commutations en annexe)

34 [Prime annuelle] Quelle est la prime annuelle P payable par un assuré d'âge x jusqu'à l'âge s en contre partie d'une assurance en cas de décès d'un montant M avant l'âge s ou d'un montant Z en cas de vie à l'âge s ?

35 [Assurance mixte] Donner la prime annuelle d'une assurance mixte de 150 000 frs [100 000 frs en cas de décès et 50 000 frs en cas de vie] pour un assuré de 30 ans et pour une durée de 35 ans. Les primes sont dues jusqu'à 60 ans. Utiliser les bases techniques en annexe.

36 [Assurance décès] Amélie (44 ans) conclut une assurance au décès de 250 000 frs pour une durée de 20 ans. En faisant usage des bases techniques en annexe, calculer :

(a) la prime unique de cette prestation.

(b) la prime annuelle payable au maximum durant 10 ans.

37 [Rente viagère différée] Julien (48 ans) conclut une assurance de rente viagère différée de 12 000 frs par an à partir de 65 ans. En faisant usage des bases techniques en annexe, calculer :

(a) la prime unique de cette prestation.

(b) la prime annuelle payable jusqu'à 60 ans.

38 [Primes] Un assuré de 50 ans prévoit de prendre sa retraite anticipée à 62 ans au lieu de 65 ans. Comme il ne souhaite pas demander une rentre de retraite anticipée, il estime son manque de couverture à environ 30 000 frs par an entre 62 et 65 ans. Il aimerait donc recevoir durant cette période une rente d'un montant équivalent. En utilisant les bases techniques en annexe, calculer :

(a) la prime unique de cette prestation.

(b) la prime annuelle payable jusqu'à 62 ans.

39 [Prime commerciale] Exprimer au moyen de valeurs actuelles la prime annuelle commerciale d'un capital en cas de vie de 100 000 frs à 60 ans pour un assuré âgé de 33 ans. Les primes sont dues jusqu'à l'âge de 40 ans au maximum. Les chargements sont les suivants :

- Commission d'acquisition : 2 000 frs payable à l'agent d'assurance en début de contrat.

- Frais d'encaissement et de gestion : 3% de la prime commerciale annuelle durant toute la durée de la couverture.

40 [Prime unique commerciale] Un contrat prévoit une rente viagère différée d'un montant annuel de 12 000 frs. L'assuré est âgé de 50 ans et la rente sera versée à 65 ans. Les chargements sont les suivants :

- Commission d'acquisition : 3% de la PU.
- Frais de gestion : 2% du montant de la rente durant le différé et 2,5% du montant de la rente durant le service de la rente.

(a) Établir l'équation d'équilibre actuariel.

(b) Déterminer la PU de ce contrat au moyen des bases techniques en annexe.

35.5 Problèmes et exercices de synthèse

41 [Valeurs actuelles] Des primes de 4 000 frs sont dues pour 2 ans praenumerando tant que l'assuré, âgé de 30 ans, est en vie.

(a) Calculer la valeur actuelle de ces primes en ne tenant compte ni de l'intérêt, ni de la mortalité

(b) Calculer la valeur actuelle de ces primes en tenant compte uniquement d'un intérêt de 3%

(c) Calculer la valeur actuelle de ces primes en tenant compte d'un intérêt de 3% et de la table de mortalité en annexe

42 [Capital décès variable] Une assurance prévoit le versement d'un capital de 100 000 frs si un assuré âgé de 30 ans décède avant 40 ans et 500 000 frs s'il décède entre 40 et 60.

(a) Exprimer la prime unique de ce contrat.

(b) Exprimer la prime annuelle de ce contrat en supposant que les primes sont payables praenumerando durant 10 ans tant que l'assuré est en vie.

43 [Assurance mixte] Une assurance prévoit le versement d'un capital de 10 000 frs si un assuré âgé de 30 ans décède avant 40 ans ainsi que 15 000 frs s'il est vivant à 50 ans. Calculer la prime annuelle de ce contrat payable jusqu'à 50 ans en utilisant les nombres de commutation en annexe.

44 [Prime annuelle] Calculer la prime annuelle d'une assurance mixte de 50 000 frs pour un assuré âgé de 50 ans et pour une durée de 15 ans. Les primes sont payables au maximum durant 10 ans. Utiliser les nombres de commutation en annexe.

45 [Prime annuelle] Calculer la prime annuelle d'un capital en cas de vie de 100 000 frs à 60 ans pour un assuré âgé de 25 ans. Les primes sont dues jusqu'à l'âge de 40 ans au maximum. Utiliser les nombres de commutation en annexe.

46 [Prime commerciale] Calculer, en utilisant les commutations en annexe, la prime commerciale annuelle d'une assurance mixte de 50 000 frs pour un assuré âgé de 50 ans et pour une durée de 15 ans. Les primes sont payables au maximum durant 10 ans et les chargements sont les suivants :

- Commission d'acquisition : 3% du capital assuré
- Frais d'encaissement : 2% de la prime commerciale annuelle
- Frais de gestion : 0,25% du capital assuré payable durant toute la couverture d'assurance.

47 [Prime commerciale] Un assuré de 30 ans a conclu une assurance mixte de 40 000 frs d'une durée de 25 ans. Quelle prime unique devra-t-il payer si l'assureur lui compte encore 2% du capital assuré comme frais de gestion annuels tant que l'assuré est en vie pendant la durée du contrat ? Utiliser les nombres de commutation en annexe. Les frais de gestion sont calculés praenumerando.

48 [Prime commerciale] Calculer, en utilisant les commutations en annexe, la prime commerciale unique d'une rente viagère différée d'un montant annuel de 12 000 frs. L'**assurée** est âgée de 50 ans et la rente est versée à 65 ans. Les chargements sont les suivants :

- Commission d'acquisition : 3% de la prime unique commerciale
- Frais de gestion : 2% du montant de la rente durant le différé et 2,5% du montant de la rente durant le service de la rente.

49 [Prime commerciale] Calculer la prime annuelle commerciale praenumerando d'un capital en cas de vie de 100 000 frs à 60 ans pour un assuré âgé de 33 ans. Les primes sont dues jusqu'à l'âge de 40 ans au maximum. Utiliser les nombres de commutation en annexe et les chargements suivants :

- Commission d'acquisition : 2 000 frs payable à l'agent d'assurance en début de contrat.
- Frais d'encaissement et de gestion : 3% de la prime commerciale annuelle durant toute la durée de la couverture.

50 [Prime moyenne] Calculer la prime annuelle moyenne en % du salaire pour l'effectif féminin ci-après en utilisant les nombres de commutation en annexe. La rente de vieillesse assurée versée praenumerando dès 62 ans représente 60% du salaire. Les primes sont payables d'avance jusqu'à l'âge de 62 ans.

Âge d'entrée y	Nombre d'employés	Salaire annuel total
27	32	672 000 frs
32	39	1 872 000 frs
40	29	1 566 000 frs
Total	100	4 110 000 frs

Une assurée de 50 ans rejoint l'effectif avec un salaire assuré de 33 000 frs. Quelle prime unique (finance d'entrée) doit-elle verser pour que l'équilibre financier reste intact ?

51 [Assurance mixte] Un assuré de 30 ans a conclu une assurance mixte de 40 000 frs d'une durée de 25 ans. Quelle prime annuelle devra-t-il payer durant toute la durée du contrat si l'assureur lui compte encore 2% du capital assuré comme frais de gestion annuels pendant la durée du contrat ? Utiliser les bases techniques en annexe.

52 [Taux de conversion] En Suisse, la loi sur la prévoyance professionnelle (LPP), prévoit que le capital de retraite C accumulé par un assuré à 65 ans est converti en rente de retraite au moyen d'un taux de conversion fixé à 6,8% [3]. Concrètement, le capital de retraite accumulé par l'assuré à 65 ans devrait permettre de financer :

- Une rentre annuelle de vieillesse R.
- Une rentre annuelle de veuve de $0,6R$ pour son épouse s'il devait venir à décéder.
- Une rente annuelle de $0,2R$ à ses enfants pour autant qu'ils soient mineurs ou encore aux études.

(a) Si l'on désigne par $\ddot{a}^V_{65}$, la valeur actuelle de la rente future de veuve et par $\ddot{a}^E_{65}$, celle pour enfant de retraité, établir l'équation d'équilibre actuarielle à 65 ans.

(b) Si au taux de 3,5% on estime $\ddot{a}^V_{65} \simeq 3,75$, $\ddot{a}^E_{65} \simeq 0,22$ ainsi que $\ddot{a}_{65} \simeq 13,8$, calculer le taux de conversion qu'il faudrait réellement appliquer pour convertir le capital de retraite en rente.

(c) Quel est l'impact sur le taux de conversion de l'allongement de la durée de vie ?

(d) Quel est l'impact sur le taux de conversion de la baisse des taux d'intérêts sur le marché ?

53 [Taux technique] Dans un contrat pour une assurance mixte, on peut lire :

$$\text{Prime annuelle} = 120\,000 \times \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = 120\,000 \times \frac{0,69}{11,36} = 7288,7$$

Sachant que $A_{x:\overline{n}|} = 1 - d \cdot \ddot{a}_{x:\overline{x}|}$, à quel taux technique travaille l'assureur ?

54 [Assurance mixte] Soit $l_x = 100 - x$ pour $0 \leq x \leq 100$ et $i = 0,05$. Calculer $A_{40:\overline{25}|}$

55 [Rente fractionnée] Lorsqu'une rente annuelle unitaire est payée m fois l'an à raison de $1/m$, les valeurs actuelles de rentes sont calculées au moyen d'autres formules. En utilisant la table de commutations en annexe, calculer la valeur actuelle d'une rente viagère praenumerando de 4 000 frs par mois versée à une assurée de 45 ans tant qu'elle est en vie.

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{N_x - \frac{m-1}{2m} D_x}{D_x}$$

3. Valeur en vigueur en 2020.

56 [Taux nul] Au taux de 0%, que vaut l'expression $\dfrac{N_x}{D_x} - 0,5$?

57 [Taux technique] JFK a 40 ans. Pour son mandat présidentiel qui doit durer 2 ans, il s'est assuré en cas de décès pour 1 000 000 frs en payant une prime unique de 2025 frs. À quel taux technique travaille la compagnie d'assurance si elle fait usage des tables de mortalité en annexe ?

Les exercices 58 à 60 nécessitent des connaissances de calcul différentiel et intégral.

58 [Taux instantané de mortalité] On donne : $l_x = 1\,000\sqrt{100 - x}$. Calculer μ_{51} sachant que le taux instantané μ_x se calcule comme suit :

$$\mu_x = -\frac{l'_x}{l x}$$

59 [Vivants] Trouver l'expression mathématique de l_x si $\mu_x = \dfrac{1}{100 - x}$ et $l_0 = 1\,000$.

60 [Nombre d'individus] Une certaine table de mortalité est définie par son taux instantané de mortalité μ_x ci-après. Si $l_0 = 10\,000$, combien restera-t-il d'individus à 11 ans ?

$$\mu_x = \frac{2}{x+1} + \frac{2}{100 - x}$$

61 [Probabilité de survie] Pierre (33 ans) se marie avec Aline (25 ans). En faisant usage de la table de mortalité en annexe,

(a) quelle est la probabilité qu'ils soient tous les deux vivants dans 17 ans ?

(b) quelle est la probabilité qu'un seul des deux soit en vie dans 17 ans ?

62 [Espérance de vie] Exprimer e_{x+1} en fonction de e_x.

63 [Héritage] Le fils Martin est âgé de 55 ans. Ses parents, Gustave et Josette ont respectivement 80 et 77 ans. Si dans 10 ans ses parents sont décédés, il touchera l'héritage de 1 000 000 frs. Quelle est la probabilité qu'il touche cet héritage ? (utiliser la table de mortalité en annexe)

64 [Défi] Écrire plus simplement l'expression :

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{\omega} \prod_{i=0}^{k} p_i$$

65 [Défi] Résumer l'expression mathématique suivante par une phrase courte :

$$l_x = \sum_{t=x}^{\omega} d_t$$