MT 461 : Méthodes numériques et modèles déterministes

TP N°2 : intégration numérique des équations différentielles ordinaires

Le TP est divisé en trois parties : l'exercice 1 illustre les méthodes à un pas de type Runge-Kutta et leur ordre de convergence. l'exercice 2 se rapporte à la question de la stabilité numérique des méthodes à un pas et l'exercice 3 traite un exemple simple de système d'équations différentielles ordinaires.

1 Equation différentielle non linéaire : convergence et ordre

Exercice 1 (Méthodes de Runge-Kutta)

1. Avec une discrétisation uniforme de pas $h = 0.1$ et pour $y_0 = 1$, résoudre à l'aide de la méthode de Euler explicite le problème de Cauchy :
$$\left\{ \begin{array}{ll} y'(x) = 2xy(x) - x\left(y(x)\right)^2, & \forall x \in [0,5] \\ y(0) = y_0 & 0 < y_0 < 2 \end{array} \right. . \tag{1}$$
Représenter sur un même graphique la solution approchée obtenue et la solution exacte
$$y(x) = \frac{2y_0}{y_0 + (2 - y_0)e^{-x^2}}$$
Répéter l'opération avec $h = 0.01$. Que remarquez-vous ? Sur un second graphique représenter les solutions approchées obtenues en faisant varier y_0 de 0 à 2.
2. Pour $y_0 = 1$, représenter la courbe à l'échelle logarithmique de l'erreur globale
$$e_h = \max_{0 \leqslant i \leqslant n} |y(x_i) - y_i|$$
en fonction du pas de discrétisation h pour h variant de 10^{-6} à 10^{-1} (y_i est la solution approchée au point x_i de la discrétisation). Expliquer les résultats.
3. Pour $h = 0.01$ et pour $y_0 = 1$, reprendre la résolution de l'équation différentielle (1) à l'aide des méthodes du point milieu et de Runge-Kutta d'ordre 4. Comparer les résultats avec ceux de la question 1.1. Sur le même exemple, retrouver numériquement l'ordre des trois méthodes que vous venez d'utiliser.

2 Stabilité, stabilité absolue

Exercice 2 (Méthode des trapèzes)

1. Avec une discrétisation uniforme de pas $h = 0.5$ et pour $\lambda = -0.5$, résoudre à l'aide de la méthode de Euler explicite l'équation :
$$\begin{cases} y'(x) = \lambda y(x), & \forall x \in [0, 50] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$
et représenter sur un même graphique la solution approchée obtenue et la solution exacte. Répéter l'opération pour $h = 5$. Commenter les résultats.
2. Expliquer pourquoi la condition de stabilité numérique dans ce cas est donnée par :
$$|1 + h\lambda| < 1\,.$$
3. Reprendre la question 2.1 avec la méthode de Euler implicite. Montrez que cette dernière est numériquement stable quel que soit le pas h (on parle de méthode inconditionnellement stable).
4. La méthode des trapèzes est une méthode d'ordre 2. En intégrant l'équation différentielle $y'(x) = f(x, y(x))$ sur l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, on a :
$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t, y(t))dt\,.$$
La méthode est alors obtenue en faisant l'approximation
$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t, y(t))dt \approx \frac{h}{2}\left(f(x_i, y(x_i)) + f(x_{i+1}, y(x_{i+1}))\right)\,.$$
Ce qui conduit au schéma
$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left(f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})\right)\,, \quad i = 0, \ldots, n-1\,.$$
Reprendre la question 2.1 avec la méthode des trapèzes. Montrez que cette dernière est inconditionnellement stable. Retrouver numériquement l'ordre de la méthode.

3 Système d'équations différentielles ordinaires

Exercice 3 (Oscillateur harmonique) Le système du pendule simple est constitué d'un objet attaché à un fil de masse négligeable devant celle de l'objet. L'angle q que fait le pendule avec la verticale au temps t est la solution de l'équation de l'oscillateur harmonique :
$$q''(t) = -\sin q(t) \tag{2}$$
où l'on a supposé que la masse de l'objet, la longueur du fil et l'accélération de la pesanteur sont données respectivement par $m = 1$, $\ell = 1$ et $g = 1$.

1. En posant $y(t) = (q(t), p(t))$ où $p(t) = q'(t)$, réduire (2) à une équation différentielle du premier ordre de la forme
$$\begin{cases} y'(t) = f(y(t)), & \forall t \in [0, 4\pi] \\ y(0) = y_0 \end{cases} . \tag{3}$$
2. Avec une discrétisation uniforme de pas $h = 0.001$ et pour les conditions initiales $y_0 = (0, 1)$ et $y_0 = (0, 2)$, résoudre l'équation (3) à l'aide de la méthode de Euler explicite et représenter la trajectoire obtenue dans l'espace des phases (q, p). Donner l'interprétation physique des résultats.
3. Représenter sur un même graphique les trajectoires obtenues en reprenant la question 3.2 avec pour conditions initiales $y_0 = (0, p_0)$ pour différentes valeurs de p_0 comprises entre 0 et 3.