MT 461 : Méthodes numériques et modèles déterministes

TP N°1 : erreurs d'arrondis, méthodes itératives

Le TP est divisé en deux parties : les exercices 1 et 2 se rapportent au chapitre 1 du cours (représentation des nombres en virgule flottante, erreurs d'arrondi, stabilité numérique et conditionnement), tandis que les exercices 3 à 5 se rapportent au chapitre 2 (méthodes itératives, vitesse et accélération de convergence, méthode de Newton).

1 erreurs d'arrondi & stabilité numérique

Exercice 1 (Calcul de π par la méthode d'Archimède) Le principe de cette méthode consiste à évaluer le périmètre d'un demi-cercle de rayon 1, en approchant ce cercle par un polygone régulier à $n = 2^k$ côtés, inscrit dans le cercle. En appelant y_k le demi-périmètre de ce polygone, on montre :

$$y_{k+1} = 2^k \sqrt{2\left(1 - \sqrt{1 - (2^{-k} y_k)^2}\right)}\ ,\ \forall k \geqslant 1$$

avec $y_1 = 2$.

(i) Calculer y_{20} et y_{100}. Pourquoi cette approximation, fournit-elle un résultat médiocre ?

(ii) Améliorer le résultat obtenu en utilisant l'identité remarquable :

$$1 - X = \frac{1 - X^2}{1 + X} \text{ avec } X = \sqrt{1 - (2^{-k} y_k)^2}$$

Remarque 1 Bien que numériquement stable, les performances de cette méthode de calcul sont peu impressionnantes. Aujourd'hui, d'autres formules sont utilisées pour le calcul de π, comme par exemple différentes variantes d'une formule initialement due à Srinivasa Ramanujan (1910) :

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4k)!(1103 + 26390k)}{(k!)^4 396^{4k}}$$

Cette approche a permis de calculer en 2022 cent billions de décimales de π en 157 jours. De manière plus courante, pour obtenir rapidement des approximations de π avec une précision donnée (par exemple en double précision), d'autres approches utilisent la propriété de convergence quadratique (doublement du nombre de chiffres significatifs corrects à chaque itération) de la moyenne arithmético-géométrique de Gauss.

Exercice 2 (stabilité numérique, schémas forward et backward) On souhaite évaluer les intégrales :

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{a+x}dx \quad \text{où} \quad a > 0\,.$$

1. Montrer que :

$$\begin{aligned} I_0 &= \ln\left(\frac{1+a}{a}\right) \\ I_n &= \frac{1}{n} - aI_{n-1} \end{aligned} \tag{1}$$

   pour $n \geqslant 1$, et que :

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$$

2. Calculer, pour $a = 10$, les premiers itérés de la formule (1). Expliquer le comportement observé (appuyez-vous sur la propagation à travers les itérations successives d'une erreur initiale sur l'évaluation en machine de I_0, avant d'étendre le raisonnement aux erreurs engendrées dans chacune des itérations).

3. Pour résoudre ce problème d'instabilité numérique, nous allons construire un nouvel algorithme basé sur le retournement de l'itération (1) :

$$I_{n-1} = \frac{1}{a}\Big(\frac{1}{n} - I_n\Big) \tag{2}$$

   pour tout $n \geqslant 1$. On peut par exemple démarrer le calcul d'une estimation notée $I_n^{(m)}$ de l'intégrale I_n, à l'aide de la formule (2), en démarrant avec l'approximation $I_m^{(m)} = 0$ (valable pour $m \gg n$) de la valeur exacte I_m. Ceci donne lieu au schéma backward suivant :

$$\begin{aligned} I_m^{(m)} &= 0 \\ I_{n-1}^{(m)} &= \frac{1}{a}\left(\frac{1}{n} - I_n^{(m)}\right) \quad \text{pour } 1 \leqslant n \leqslant m\,. \end{aligned} \tag{3}$$

   Montrer que l'erreur d'approximation $d_n^{(m)} := I_n^{(m)} - I_n$ satisfait :

$$d_n^{(m)} = -\left(-\frac{1}{a}\right)^{m-n} I_m\,.$$

En utilisant l'encadrement

$$0 \leqslant I_n \leqslant \int_0^1 \frac{x^n}{a} dx$$

donner une borne supérieure pour l'erreur théorique $|d_n^{(m)}|$. Montrer que l'algorithme backward est numériquement stable (en montrant que toute erreur engendrée à une itération est atténuée dans les itérations ultérieures) pour $a > 1$. Calculer une estimation de I_{20} à la précision machine (double précision).

2 Méthodes itératives, ordre et accélération de convergence

Exercice 3 (Itération de type point fixe) On cherche à résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$\cos x = x\,. \tag{4}$$

(i) Justifier la convergence de la suite

$$x_{n+1} = \cos(x_n) \tag{5}$$

pour $n \geqslant 0$ vers l'unique solution de l'équation (4), quelle que soit la condition initiale $x_0 \in \mathbb{R}$ (vous vous réfèrerez au théorème de point fixe de Banach vu en cours).

(ii) Retrouver numériquement l'ordre et la vitesse (asymptotique) de convergence de la méthode de point fixe (5).

(iii) Reprendre la question précédente avec la méthode de Newton.

(iv) Evaluer les premières itérations de type point fixe pour résoudre :

$$x = 10\cos x \tag{6}$$

Expliquer les résultats observés.

(v) Appliquer le procédé d'accélération Δ^2 d'Aitken aux itérations point fixe obtenues précédemment pour résoudre les équations (4) et (6). Commenter les résultats obtenus (convergence, ordre de convergence, vitesse de convergence).

(vi) Appliquer le procédé d'accélération d'Aitken-Steffensen aux itérations point fixe obtenues précédemment pour résoudre les équations (4) et (6). Commenter les résultats obtenus (convergence, ordre de convergence).

Remarque 2 la méthode d'Aitken-Steffensen appliquée à une suite convergente de type point fixe définie par l'itération $x_{n+1} = f(x_n)$, approche la limite $\lim_{n\to\infty} x_n$ par les estimations successives y_n définies par :

$$y_{n+1} = y_n - \frac{(f(y_n) - y_n)^2}{f(f(y_n)) - 2f(y_n) + y_n}, \quad n \geqslant 0\,.$$

avec $y_0 := x_0 \in \mathbb{R}$

Exercice 4 (Newton-Raphson)

(i) Déterminer graphiquement le nombre et la localisation approximative des solutions du système de deux équations à deux inconnues

$$\begin{cases} x_1^2 - x_2^2 + 2x_1 = 0 \\ x_1^2 x_2 + x_2 - 1 = 0 \end{cases} \tag{7}$$

(ii) Calculer toutes les solutions de (7) à l'aide de la méthode de Newton. Que peut-on dire à priori de l'ordre de convergence de cette méthode ? Retrouver empiriquement l'ordre de convergence à partir des résultats numériques obtenus

Exercice 5 (Calcul de racines q-ièmes) Etant donné le réel $\alpha > 0$ et l'entier $q \geqslant 2$, on cherche la solution positive de $F(x) = x^q - \alpha = 0$, c'est-à-dire la racine q-ième positive de α, notée parfois $x = \sqrt[q]{\alpha}$.

(i) Montrer que l'itération de Newton pour résoudre ce problème peut s'écrire comme une itération de type point fixe $x_{n+1} = f(x_n)$. Etudier la convergence de la méthode directement à partir de la fonction de point fixe f.

(ii) Utiliser la méthode de Newton pour calculer $\sqrt[3]{5}$ et observer l'évolution du nombre de décimales significatives. Justifier cette observation.

(iii) Appliquer la méthode de la sécante pour le calcul de $\sqrt[3]{5}$ et comparer l'évolution du nombre de décimales significatives avec les résultats obtenus par la méthode de Newton.