Algebra I

Ezequiel Remus

Resumen

La idea de este apunte es ordenar y reorganizar tanto definiciones como ejercicios resueltos de la materia **Algebra I** correspondiente a una de las materias obligatorias para las carreras de Matematicas y Computación de la **UBA**.

Índice

1. Conjuntos

Nota:

A partir de acá, deberíamos sobreentender que notaremos con letras mayúsculas (A,B,C,...) como conjuntos. El conjunto U esta definido como el *conjunto universal*, el cual contiene a todos los demás conjuntos.

1.1. Teoremas, Definiciones básicas sobre Conjuntos

1.1.1. ¿Que es un conjunto?

Definición 1.1.1 (informal de conjuntos) *:*

Un conjunto es una colección ordenada o desordenada de elementos. Se le otorgara a cada elemento la propiedad de ***pertenecer o no*** *a un dado conjunto.*

Definición 1.1.2 (subconjunto e inclusión) *:*

Dados dos conjuntos A y B, tenemos que B es subconjunto de A si es que todo elemento de B pertenece al conjunto A. A su vez, se dice que B esta contenido en A lo cual se nota: $B \subseteq A$

Observación 1.1.1 (Igualdad entre conjuntos) *:*

Dos conjuntos A y B son iguales si tienen exactamente los mismo elementos. Esto es que A este contenido en B y que B este contenido en A. En notación matematica, esto es:

$$A{=}B \iff B \subseteq A \wedge A \subseteq B$$

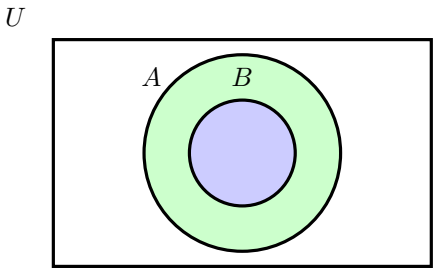


Figura 1: Diagrama de B $\subseteq$ A

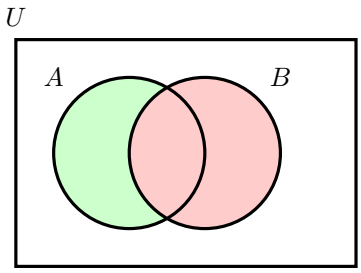


Figura 2: Diagrama de A $\not\subseteq$ B

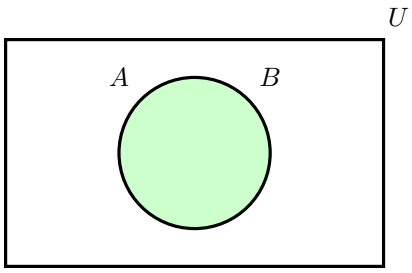


Figura 3: Diagrama de A $=$ B

Definición 1.1.3 (Conjunto de Partes) *:*

Dado un conjunto A. El Conjunto de Partes de A, es un conjunto $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ *el cual esta formado por todos los subconjuntos de A posibles. Es decir, los elementos del conjunto* $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ *son subconjuntos del conjunto A.*

1.1.2. Operaciones entre conjuntos

Definición 1.1.4 (Complemento) *:*

Sea A un subconjunto de un conjunto universal U. El complemento de A en U se nota A^c *o A'. Es decir:*

$$A^c = \{x \in U : x \notin A\}$$

Definición 1.1.5 (Unión) *:*

Sean A y B subconjuntos de un conjunto referencial U . La unión de A y B es el conjunto $A \cap B$ *de los elementos de U que pertenecen a A o a B . Es decir:*

$$A \cup B = \{x \in U : (x \in A) \vee (x \in B)\}$$

Definición 1.1.6 (Intersección) :

Sean A y B subconjuntos de un conjunto referencial U . La intersección de A y B es el conjunto A∪B de los elementos de U que pertenecen tanto a A como a B . Es decir:

$$\boxed{A \cap B = \{x \in U : (x \in A) \wedge (x \in B)\}}$$

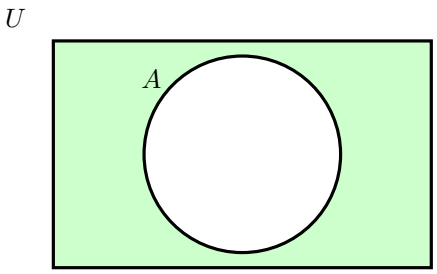


Figura 4: Diagrama de A^c

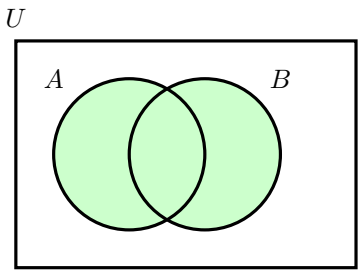


Figura 5: Diagrama de A ∪ B

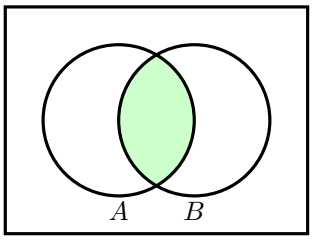


Figura 6: Diagrama de A ∩ B

Observación 1.1.2 *Notemos que a diferencia de el complemento la unión y la intersección no dependen del conjunto universal.*

Proposición 1.1.1 (Leyes de De Morgan y Distributivas) :

Dados los conjuntos A,B,C:

Leyes de De Morgan

i) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

ii) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

Leyes de Distributivas

i) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

ii) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Definición 1.1.7 (Diferencia) :

$$\boxed{A - B := A \cap B^c}$$

Por lo que :

$$\boxed{x \in (A - B) \leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in B^c) \leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \notin B)}$$

Definición 1.1.8 (Diferencia Simétrica) :

A △ B es el conjunto de los elementos de U que pertenecen a A o a B pero no a los dos a la vez. Es decir:

$$\boxed{A \triangle B = \{x \in U : (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\}}$$

Vale

$$\boxed{A \triangle B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) = (A \cup B) - (A \cap B)}$$

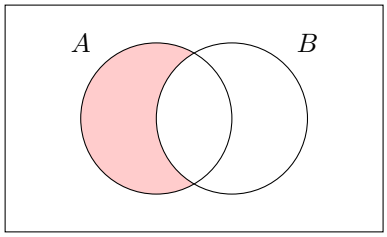


Figura 7: Diferencia Comun

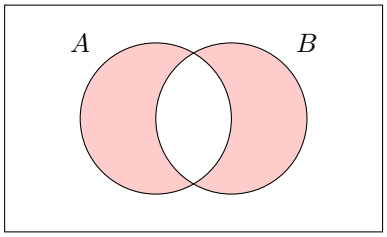


Figura 8: Diferencia Simétrica

1.2. Tablas de Verdad de la lógica proposicional

Las tablas de verdad son otra forma de visualizar la falsedad o verasidad de una proposición. Por como están definidas las operaciones entre conjuntos, las tablas de verdad son de fácil aplicación.

1.2.1. Tablas de verdad y conectores logicos

Sean p y q proposiciones, tenemos que:

Not

p	$\neg p$
V	F
F	V

p	q	$p \vee q$ (or)	$p \veebar q$ (xor)	$p \wedge q$ (and)	$p \Rightarrow q$ (implica)	$p \Leftrightarrow q$ (si y solo si)
V	V	V	F	V	V	V
V	F	V	V	F	F	F
F	V	V	V	F	V	F
F	F	F	F	F	V	V

Los conectores lógicos coinciden con las definiciones de las tablas de operaciones de conjuntos. Teniendo en cuenta que dados dos conjuntos A y B contenidos en un conjunto referencial U nuestras proposiciones serian algo como:

$$\left[\ p : (x \in A) \quad y \quad q : (x \in B)\ \right] \tag{1}$$

Estas proposiciones así definidas tienen 4 posibilidades de verasidad para cualquier $x \in U$

Vemos, que las operaciones se reducen a las siguientes analogías respercto de las tablas de verdad para conectores lógicos :

1. Complemento: Se corresponde con el **NOT**
2. Unión: La unión entre dos conjuntos se corresponde con el **OR**
3. Intersección : Se corresponde con un **AND**
4. Diferencia Simétrica: Se corresponde con un **XOR**
5. Inclusión : Se corresponde con la **implicación**
6. Igualdad: Se corresponde con un **si y solo si**.
7. Diferencia: $A - B$ se obtiene de la definición $A - B = A \cap B^c$

1.3. Producto Cartesiano

Definición 1.3.1 *(Producto Cartesiano) Sean A, B conjuntos. El producto cartesiano de A con B , que se nota AXB , es el conjunto de pares ordenados:*

$$AXB := (x, y) : x \in A, y \in B$$

2. Relaciones

Definición 2.0.1 *(Relación) Sean A, B conjuntos . Una Relación $\mathcal{R}$ de A en B es un subconjunto cualquiera $\mathcal{R}$ del producto cartesiano $A \times B$. Es decir, $\mathcal{R}$ es una relación de A en B.*

Dados $x \in A$, $y \in B$ y una relación $\mathcal{R}$ de A en B, se dice que *x esta relacionado con y por la relación* $\mathcal{R}$, lo cual lo notamos $x\mathcal{R}y$ y esto se da si $(x, y) \in \mathcal{R}$. Caso contrario la notación es $x\not\mathcal{R}y$

2.1. Relaciones en un conjunto

Las relaciones en un conjunto son relaciones de un conjunto en si mismo.

Definición 2.1.1 *(Relación en un conjunto)*
Sea un conjunto A, se dice que $\mathcal{R}$ es una relación en A si: $\mathcal{R} \subseteq A \times A$

Definición 2.1.2 *(Reflexividad, simetría, antisimetria y transitividad) Sean un conjunto A y $\mathcal{R}$ una relación en A, entonces:*

- ***Reflexividad**: $\mathcal{R}$ se dice **reflexiva** si $(x, x) \in \mathcal{R}, \forall x \in A$ (Es decir: $x\mathcal{R}x, \forall x \in A$). En grafos es un bucle en el mismo elemento.*
- ***Simetría**: $\mathcal{R}$ se dice **simétrica** si: $\forall (x, y) \in A, x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$. Lo que es la doble flecha entre nodos en un grafo.*
- ***Antisimetria**: $\mathcal{R}$ se dice **antisimetrica** si: $\forall (x, y) \in A, x\mathcal{R}y$ e $y\mathcal{R}x \Rightarrow x = y$*
- ***Transitividad**: $\mathcal{R}$ se dice **transitiva** si: $\forall x, y, z \in A, x\mathcal{R}y$ e $y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$*

Definición 2.1.3 *(Relación de equivalencia y de orden) Sea A un conjunto y $\mathcal{R}$ una relación en A.*

- *Relación de equivalencia: Cuando la relacion cumple con ser reflexiva, simetrica y transitiva.*
- *Relación de orden: Cuando la relacion cumple con ser reflexiva, antisimetrica y transitiva.*

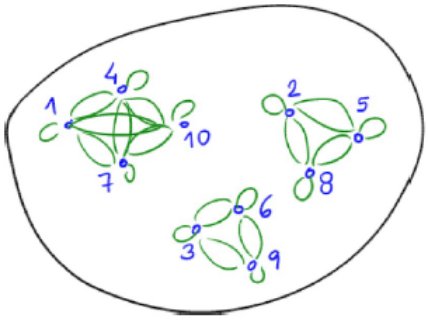
Definición 2.1.4 *(Clase de equivalencia (definición informal))*
La clase de equivalencia de $x \in A$ es el subconjunto de A formado por todos los elementos y de A relacionados con x, y se nota $\overline{x}$

Ejemplo de Clase de equivalencia:

Dado un conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, se puede definir la relación de equivalencia "$\sim$" talque x x esta relacionado con y ($x \sim y$) si y solo si al dividir x e y por 3 resultan tener ambos elementos el mismo resto.

Entonces, podemos ver que:

Si dividimos a $x = 1$ por 3 y $y = 4$ por 3 se obtiene que ambos tienen resto 1, por lo tanto $1 \sim 4$.
También que $3 \sim 6$ y que $6 \sim 9$ y por propiedad transitiva, como es una relación de equivalencia $3 \sim 9$,
lo cual es cierto ya que todos son múltiplos de 3. Esto nos permite "separar" los números que
están relacionados unos con los otros de los que no según la misma relación de equivalencia como sigue:



En la figura se ve claramente que:
$\overline{1} = \overline{4} = \overline{7} = \overline{10} = \{1, 4, 7, 10\}$
$\overline{2} = \overline{5} = \overline{8} = \{2, 5, 8\}$
$\overline{3} = \overline{6} = \overline{9} = \{3, 6, 9\}$
Esto nos da que un conjunto de clases de equivalencia:
$\{\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\}$
Siendo estos conjuntos **Disjuntos dos a dos** o **Disjuntos por pares**. Por lo que, lo que se hizo fue dividir el conjunto A en tres subconjuntos disjuntos entre si cuya únion de dichos conjuntos nos da A.

Definición 2.1.5 *(Definición formal de Clase de Equivalencia) Sean A un conjunto y $\sim$ una Relación de equivalencia en A. Para cada $x \in A$, la clase de equivalencia de x es el conjunto:*

$$\overline{x} = \{y \in A : y \sim x\} \subseteq A$$

Proposición 2.1.1 *(Propiedad Fundamental de las clases de equivalencia) Sean A un conjunto y $\sim$ una Relación de equivalencia en A. Sean $x, y \in A$, entonces o bien $\overline{x} \cap \overline{y}$, o bien $\overline{x} = \overline{y}$*

Proposición 2.1.2 *(Relaciones de equivalencia y particiones) Sea A un conjunto. Hay una manera natural de asociarle a una relación de equivalencia en A una partición de A. Recíprocamente, a toda partición se le puede asociar una relación de equivalencia y estas asociaciones son inversas una de la otra.*

3. Funciones

3.1. ¿Que es una función?

Definición 3.1.1 *(Función) Sean A y B conjuntos, y sea $\mathcal{R}$ una relación de A en B. Se dice que $\mathcal{R}$ es una función cuando todo elemento $x \in A$ esta relacionado con algún $y \in B$, y este elemento y es único. Es decir:*

$$\forall x \in A,\, \exists! \, y \in B : \, x\mathcal{R}y$$

Observación 3.1.1 *Los elementos del conjunto A (el dominio) deben estar todos relacionados con un elemento del conjunto B (denomindado codiminio). Ademas, si un mismo elemento del conjunto A apunta a dos elementos diferentes del conjunto B, entonces esta relación no es función.*

Por otro lado, el primer problema puede solucionarse ***restringiendo el dominio****.*

Definición 3.1.2 *(Igualdad de Funciones) Sean $f, g : A \to B$ funciones. Se tiene:*

$$f = g \Leftrightarrow f(x) = g(x), \forall x \in A$$

Definición 3.1.3 *(Imagen) Sea $f : A \to B$ función. La* ***imagen*** *de f, que se nota $Im(f)$, es el subconjunto de elementos de B que estan relacionados con algún elemento de A. Es decir:*

$$Im(f) = \{y \in B : \exists x \in A \, tal que \, f(x) = y\}$$

3.2. Funciónes inyectivas, sobreyectivas y biyectivas

Definición 3.2.1 *(Funciones Inyectivas, sobreyectivas y biyectivas) Sea $f : A \to B$ una función. Se dice que:*

- *f es* ***inyectiva*** *si para todo elemento $y \in B$ existe a lo sumo un elemneto $x \in A$ para el cual $f(x) = y$. Dicho de otra forma, f es inyectiva si para todo $x, x' \in A$ tales que $f(x) = f(x')$ se tiene que $x = x'$.*
- *f es* ***sobreyectiva*** *si para todo elemento $y \in B$ existe al menos un elemento $x \in A$ para el cual $f(x) = y$. Dicho de otra manera, f es sobreyectiva si $Im(f) = B$.*
- *f es* ***biyectiva*** *si es a la vez inyectiva y sobreyectiva, es decir para todo elemento $y \in B$ existe exactamente un elemento $x \in A$ para el cual $f(x) = y$.*

Definición 3.2.2 *(Composición de funciones) Sean A, B, C conjuntos, y $f : A \to B$, $g : B \to C$ funciones. Entonces la composición de f con g, que se nota $g \circ f$, definida por*

$$g \circ f(x) = g\left(f(x)\right), \forall x \in A$$

Definición 3.2.3 *(Función inversa) Sea $f : A \to B$ biyectiva, entonces $f^{-1} : B \to A$ se llama* ***función inversa*** *y es una función que satisface que $\forall y \in B \, f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$*

Proposición 3.2.1 *(Biyectividad y Función inversa) Sea $f : A \to B$ una función:*

- *Si f es biyectiva, entonces $f^{-1} \circ f = id_A$ y $f \circ f^{-1} = id_B$*
- *Si existe una función $g : B \to A$ tal que $g \circ f = id_A$ y $f \circ g = id_B$ Entonces f es biyectiva y $f^{-1} = g$*

4. Números Naturales

4.1. ¿Qué son los números naturales ($\mathbb{N}$)?

Los naturales son, informalmente el conjunto:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots, 1001, 1002, \cdots, \}$$

En este conjunto se puede sumar y multiplicar (No existen los numeros negativos):

$$si\, m, n \in \mathbb{N} \Rightarrow m + n \in \mathbb{N} \wedge m \cdot n \in \mathbb{N}$$

Propiedades que se satisfacen en este conjunto de números son:

- Conmutatividad: $m + n = n + m$ y $m \cdot n = n \cdot m \, \forall \, m, n \in \mathbb{N}$
- Asociatividad:
- Distributividad del producto sobre la suma:

4.2. La suma de Gauss y la serie Geométrica

4.2.1. La suma de Gauss

Supongamos que queremos sumar una cierta cantidad n de números, de manera que:

$$r = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n$$

Este procedimiento se puede generalizar como sigue:

$$\forall\, n \in \mathbb{N} : \; 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Notar que este siempre sera un numero natural y que $n(n+1)$ siempre es un numero **par**.

4.2.2. La serie Geométrica

Sea un número q cualquiera, queremos sumar las $n + 1$ primeras potencias de q:

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} + q^n$$

Esto resulta en:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \; 1 + q + \cdots + q^n = \begin{cases} n+1 & \text{si q=1} \\ \frac{q^{n+1}-1}{q-1} & \text{si q} \neq 1 \end{cases}$$

4.3. Sumatoria

Definición 4.3.1 *(Sumatoria) Sea $n \in \mathbb{N}$. La notación $\sum_{i=1}^{n} a_i$ que se lee **la sumatoria para** i **de 1 a n de** a_i, la cual representa la suma de los primeros n términos de la sucesión $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$:*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + \cdots + a_n$$

La cual por recurrencia se define de la siguiente forma:

$$\sum_{i=1}^{1} a_i = a_1 \quad y \quad \sum_{i=1}^{n+1} a_i = a_i + a_{n+1}\,, \; \forall n \in \mathbb{N}$$

Propiedad 4.3.1 *(Propiedades de sumatorias)*

- $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right) = \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)$
- $c \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} c \cdot a_i$

4.4. Productoria

Definición 4.4.1 *Sea $n \in \mathbb{N}$. La notación $\prod_{i=1}^{n} a_i$, que se lee **la productoria para** i **de 1 a** n **de** a_i, representa el producto de los n primeros términos de la sucesión $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$:*

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdots a_n$$

Siendo por recursión:

$$\prod_{i=1}^{1} a_i = a_1 \, y \prod_{i=1}^{n+1} a_i = \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right) \cdot a_{n+1} \, , \forall n \in \mathbb{N}$$

Propiedad 4.4.1 *(Propiedad de la productoria)*

$$\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right) \cdot \left(\prod_{i=1}^{n} b_i\right) = \prod_{i=1}^{n} (a_i \cdot b_i)$$

4.5. El conjunto inductivo $\mathbb{N}$ y el principio de inducción

Definición 4.5.1 *(Conjunto Inductivo) Sea $\mathbf{H} \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto. Se dice que $\mathbf{H}$ es un conjunto inductivo si se cumplen las dos condiciónes siguientes:*

- $1 \in \mathbf{H}$
- $\forall x, \, x \in \mathbf{H} \Rightarrow x + 1 \in \mathbf{H}$

Teorema 4.5.1 *(Principio de Inducción)*
Sea $p(n)$, $n \in \mathbb{N}$, una afirmación sobre los numeros naturales. Si p satisface

- *Caso Base: $p(1)$ es verdadera*
- *Paso Inductivo: $\forall h \in \mathbb{N}$, $p(h)$ Verdadera $\Rightarrow$ $p(h+1)$ Verdadera*

Entonces, $p(n)$ es Verdadero, $\forall n \in \mathbb{N}$(h := Hipotesis $\Rightarrow p(h) :=$ Hipotesis Inductiva (HI))

Teorema 4.5.2 *(Principio de Induccion Corrido) Sea $n_0 \in \mathbb{Z}$ y sea $p(n)$, $n \leq n_0$, una afirmación sobre $\mathbb{Z}_{n_0}$. Si p satisface :*

- *Caso Base: $p(n_0)$ es Verdadera*
- *Paso Inductivo: $\forall h \leq n_0$, $p(h)$ Es Verdadera $\Rightarrow$ $p(h+1)$ esVerdadera y entonces $p(n)$ es Verdadera $\forall n \in \mathbb{N}$*

4.6. Inducción Completa

Teorema 4.6.1 *(Princiío de inducción -* **II***)*
Sea $p(n)$, $n \in \mathbb{N}$, una afirmación sobre los números naturales. Si p satisface

- *Caso Base: $p(1)$ y $p(2)$ son Verdaderas*
- *Paso Inductivo: $\forall h \in \mathbb{N}, p(h) \, y \, p(h+1) \, Verdaderas \Rightarrow p(h+2) \, Verdadera$*

entonces, $p(n)$ es verdadera, $\forall n \in \mathbb{N}$

Teorema 4.6.2 *(Princiío de inducción -* **II** *corrido)*
Sea $n_0 \in \mathbb{Z}$ y sea $p(n) n \leq n_0$, una afirmación sobre los $\mathbb{Z}_{\leq n_0}$. Si p satisface:

- *i Base: $p(n_0)$ y $p(n_0+1)$ son Verdaderas*
- *Paso Inductivo: $\forall h \leq n_0, p(h) \, y \, p(h+1) \, Verdaderas \Rightarrow p(h+2) \, Verdadera$*

entonces, $p(n)$ es verdadera, $\forall n \in \leq n_0$

4.7. Sucesión de Fibonacci

Fibonacci presento el siguiente problema: Imaginemos que colocamos una pareja de conejos bebes en un área cerrada ¿Cuantos conejos habra despues de n meses si:

1. Los conejos nunca mueren.
2. Cada pareja de conejos produce una nueva pareja de conejos cada mes
3. Comienzan a tener parejitas luego de dos meses de nacida

Dadas estas condiciones se obtiene la sucesión de Fibonacci $(F_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$:

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}_0$$

Proposición 4.7.1 *(Termino General de la Sucesión de Fibonacci)*

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^n - \overline{\phi^n})$$

Donde:

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1,61803 \quad \wedge \quad \overline{\phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$$

4.8. Sucesión de Lucas

Una sucesión de Lucas es una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ definida recursivamente por:

$$a_0 = a,\ a_1 = b,\ \ a_{n+2} = ca_{n+1} + da_n,\ \forall n \in \mathbb{N}_0$$

Con $a,\ b,\ c,\ d,\ \in \mathbb{C}$

Si consideramos la ecuación $\mathbf{X}^2 - c\mathbf{X} - d = 0$ asociada a la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Suponiendo que esta tiene dos raíces, tales que:

$$r^2 = cr + d \, y \, \overline{r}^2 = c\overline{r} + d$$

Se dan las siguientes afirmaciones:

1. Las sucesiones $(r^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $(\overline{r}^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ y cualquier combinación de la forma:

   $$(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}_0} = (\alpha r^n + \beta\overline{r}^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$$

   Satisfacen la misma recurrencia que la sucesión de Lucas $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ siendo la recurrencia la siguiente:

   $$\lambda_{n+2} = c\lambda_{n+1} + d\lambda_n\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

2. $\exists!(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}_0} = (\alpha r^n + \beta\overline{r}^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ que satisface las **condiciones iniciales** $\lambda_0 = a\ ,\ \lambda_1 = b$

   Resultado del cual sale de resolver:

   $$\begin{cases} \alpha + \beta = a & \Rightarrow \quad \alpha = \dfrac{b - a\overline{r}}{r - \overline{r}} \\ \alpha r + \beta\overline{r} = b & \Rightarrow \quad \beta = \dfrac{ar - b}{r - \overline{r}} \end{cases}$$

   Concluyendo que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}_0} = (\alpha r^n + \beta\overline{r}^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$

3. Dada la ecuación asociada $\mathbf{X}^2 - c\mathbf{X} - d = 0$ con solo una raíz ($\mathbf{X}^2 - c\mathbf{X} - d = (\mathbf{X} - r)^2$). En este caso, las sucesiónes $(r^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ y $(nr^{n-1})_{n\in\mathbb{N}_0}$ satisfacen la misma recurrencia y tamien cualquier combinación lineal con **las condiciones iniciales** $\lambda_0 = a\ ,\ \lambda_1 = b$, se tiene que el termino general para a_n cuando $r \neq 0$, es:

   $$a_n = ar^n + (b - ar)nr^{n-1}\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}_0$$

4.9. Inducción Completa

Teorema 4.9.1 *(Principio de Inducción Completa) Sea $p(n)$, $n \in \mathbb{N}$ una afirmación en los numeros naturales. Si p satisface:*

- *Caso Base: p(1) es Verdadera*
- *Paso Inductivo: $\forall\, h \in \mathbb{N}$, $p(1) \cdots p(h)$ es Verdadera $\Rightarrow p(h+1)$ es verdadera*

entonces $p(n)$ es Verdadera, $\forall n \in \mathbb{N}$

5. Combinatoria

5.1. Cardinal

Definición 5.1.1 *(Cardinal)*
Dado el conjunto A, el cardinal de A ($\#A$) a la cantidad de elementos distintos que tiene A.

Observación 5.1.1 *(Cardinal de un Subconjunto)*
Sea A un conjunto finito y $B \subseteq A$, entonces $\#B \leq \#A$

Propiedad 5.1.1 *(Cardinales de Union, Interseccion, Complemento y otros)*

1. *$A \wedge B$ conjuntos disjuntos (sin ningun elemento en comun), entonces: $\#(A \cup B) = \#A + \#B$*
2. *Si $A \wedge B$ no son disjuntos (tienen al menos un elemento en comun), enconces: $\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$*
3. *Si U es un conjunto finito, entonces: $\#(A^c) = \#U - \#A$*
4. $\#(A - B) = \#A - \#(A \cap B)$
5. $\#(A \triangle B) = \#A + \#B - 2\#(A \cap B)$
6. $\#(AxB) = \#A \cdot \#B$
7. $\#(\mathcal{P}(A)) = 2^{\#A}$
8. $\#(A^n) = (\#A^n)$

5.2. Cantidad de relaciones y funciones

Propiedad 5.2.1 *(Cantidad de Relaciones)*
Sean A_m y B_n conjuntos finitos, con m y n elementos respectivamente. Entonces, la cantidad de relaciones que hay de A_m en B_m es igual a 2^{mn}

Propiedad 5.2.2 *(Cantidad de Funciones)*
Sean A_m y B_n conjuntos finitos, con m y n elementos respectivamente. Entonces, la cantidad de funciones que hay de A_m en B_m ($\#(f : A \to B)$) es igual a n^m.

Propiedad 5.2.3 *(Cardinal de Conjuntos y Funciones)*
Sean A y B Conjuntos finitos:

- *$f : A \to B$ inyectiva $\Rightarrow \#A \leq \#B$*
- *$f : A \to B$ sobreyectiva $\Rightarrow \#A \geq \#B$*
- *$f : A \to B$ biyectiva $\Rightarrow \#A = \#B$*

Definición 5.2.1 *(Cantidad de Funciones Inyectivas)*
Sean A_m y B_n conjuntos finitos, con m y n elementos respectivamente, donde $m \leq n$. Entonces, la cantidad de funciones inyectivas de $f : A_m \to B_n$ que hay son:

$$n \cdot (n-1) \cdots (n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Definición 5.2.2 *(Cantidad de Biyecciones (Permutaciones))*
Sea $n \in \mathbb{N}$. La cantidad de funciones biyectivas que hay entre dos conjuntos de n elementos o cantidad de permutaciones esta dado por el factorial de los n elementos de los conjuntos:

$$\#(f : A_n \to B_n) = n! = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1 = \prod_{i=1}^{n} i$$

Definicion por recurrencia del factorial:

$$0! = 1 \quad \wedge \quad n! = n \cdot (n-1)!, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Teorema 5.2.1 *(Numero Combinatorio)*

Sean $n \in \mathbb{N}$ y sea A_n un conjunto de n elementos. Para $0 \leq k \leq n$, la cantidad de subconjuntos con k elementos del conjunto A_n

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

`(Formas de elegir k elementos de un conjunto de n)`

Observación 5.2.1 *(Recordar)*

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
- $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- $2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$

Teorema 5.2.2 *(Binomio de Newton)*

$$(x-y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

6. Enteros

6.1. Divisibilidad

Definición 6.1.1 *Divisivilidad Sean $a, d \in \mathbb{Z}$ con $d \neq 0$. Se dice que d divide a a y se nota $d|a$ si se cumple:*

$$d|a \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \therefore a = k \cdot d$$

Propiedad 6.1.1 *De la divisibilidad*

(i) $d \neq 0 \Rightarrow d|0$, *pues* $k = 0$ *cumple* $0 = k \cdot d$

(ii) $d|a \Leftrightarrow -d|a$. *Se concluye* $d|a \Leftrightarrow |d| \mid |a|$

(iii) $a \neq 0$, $d|a \Rightarrow |d| \leq |a|$

(iv) Los únicos inversibles en $\mathbb{Z}$ *son el* 1 *y el* -1.

(v) $d|a$ *y* $a|d \Leftrightarrow a = \pm d$

(vi) $d|a$ *y* $d|b \Rightarrow d|a+b$ *(no vale la vuelta)*

(vii) $d|a$ *y* $d|b \Rightarrow d|a-b$ *(no vale la vuelta)*

(viii) $d|a$ $c \in \mathbb{Z} \Rightarrow d|c \cdot b$

(ix) $d|a \Rightarrow d^n|a^n$, $\forall n \in \natural$

(x) $d|a \cdot b \not\Rightarrow d|a$ *y* $d|b$ *(esto solo se cumplira cuando* d *es primo)*

Definición 6.1.2 *Primos y Compuestos Se dice que $a \in \mathbb{Z}$ es un número primo si $a \neq 0, \pm 1$ y tiene unicamente 4 divisores $(\pm 1, \pm a)$.*

Luego, se dice compuesto cuando no es primo

6.2. Congruencia

Definición 6.2.1 *Congruencia Sea $d \in \mathbb{Z}$, $d \neq 0$. Dados $a, b \in \mathbb{Z}$, se dice que a es congruente a b modulo d si se tiene que $d|a-b$*

$$a \equiv b\ (d) \Leftrightarrow \quad d \mid a-b$$

Proposición 6.2.1 *La congruencia es una relacion de equivalencia Sea $d \in \mathbb{Z}$, $d \neq 0$. Sea $\mathcal{R}$ la relación en $\mathbb{Z}$ dada por:*

$$a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a \equiv b\ (d), \quad \forall a, b \in \mathbb{Z}$$

Entonces $\mathcal{R}$ es relación de equivalencia.

Propiedad 6.2.1 *De la congruencia Sea $d \in \mathbb{Z}$, $d \neq 0$. Entonces:*

1. $\forall\ a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Z}$
$$a_1 \equiv b_1\ (d)\ \ y\ \ a_2 \equiv b_2\ (d) \quad \Rightarrow \quad a_1 + a_2 \equiv b_1 + b_2\ (d)$$
2. $\forall\ a, b, c \in \mathbb{Z}$
$$a \equiv b\ (d) \quad \Rightarrow \quad ca \equiv cb\ (d)$$
3. $\forall\ a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Z}$
$$a_1 \equiv b_1\ (d)\ \ y\ \ a_2 \equiv b_2\ (d) \quad \Rightarrow \quad a_1 a_2 \equiv b_1 b_2\ (d)$$
4. $\forall\ a, b \in \mathbb{Z}$ *y* $n \in natural$
$$a \equiv b\ (d) \quad \Rightarrow \quad a^n \equiv b^n\ (d)$$

6.3. Algoritmo de División

Teorema 6.3.1 *Algoritmo de División Dados, $a, d \in \mathbb{Z}$ con $d \neq 0$, $k, r \in \mathbb{Z}$ que satisfacen:*

$$a = k \cdot d + r \ \ con \ \ 0 \leq r < d$$

A k se le da el nombre de conciente y a r el nombre de resto.

Observación 6.3.1 *Si $0 \leq a < |d|$, entonces $a = 0 \cdot d + a$ implica que $k = 0$ y el resto $r = r_d(a) = a$, pues a cumple la condicion que tiene que cumplir el resto (se aplica la unicidad del cociente y el resto).*

Observación 6.3.2 *Divisibilidad y Resto Sean $a, d \in entero$, $d \neq 0$. Entonces:*

$$r_d(a) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad d \mid a \quad \Leftrightarrow \quad a \equiv 0\ (d)$$

Propiedad 6.3.1 *Congruencia y Resto Sea $d \in entero$, $d \neq 0$. Entonces:*

(α) $a \equiv r_d(a)\ (mod\ d)$, $\forall a \in \mathbb{Z}$

(β) $a \equiv r\ (mod\ d)$ *con* $0 \leq r < d$, *entonces* $r = r_d(a)$

(γ) $r_1 \equiv r_2\ (d)$ *con* $0 \leq r_1, r_2 < d$, *entonces* $r_1 = r_2$

(δ) $a \equiv b\ (d) \Leftrightarrow r_d(a) = r_d(b)$

Corolario 6.3.1 *Tablas de Restos Sean $a, b, d \in \mathbb{Z}$, $d \neq 0$. Entonces:*

- $r_d(a+b) = r_d(r_d(a) + r_d(b))$
- $r_d(a \cdot b) = r_d(r_d(a) \cdot r_d(b))$
- $r_d(a^n) = r_d(r_d(a^n))$

6.4. Maximo Comun Divisor

Definición 6.4.1 *Maximo Común Divisor Sean $a, b \in \mathbb{Z}$, no ambos nulos. El maximo comun divisor (mcd) entre a y b, se nota $(a : b)$, es el mayor de los divisores comunes de a y b. Es decir:*

$$(a : b)|a,\ (a : b)|b\ \ y\ si\ \ d\,|\,a\ \ y\ \ d\,|\,b\ \ \Rightarrow\ \ d \leq (a : b)$$

Proposición 6.4.1 *Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ no ambos nulos, y sea $k \in \mathbb{Z}$, entonces:*

$$DivCom(\{a, b\}) = DivCom(\{b, a - k \cdot b\})$$

$$DivCom_+(\{a, b\}) = DivCom(\{b, a - k \cdot b\})$$

En particular, $\forall k \in \mathbb{Z}$, $(a : b) = (b, a - k \cdot b)$
Aplicando esto a $r_b(a) = a - k \cdot b$, se obtiene que $(a : b) = (b, r_b(a))$

Teorema 6.4.1 *Algoritmo de Euclides Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ no ambos nulos. Existe $l \in \natural$ tal que en una sucesión finita de $l + 1$ divisiones:*

$$\begin{aligned}
a &= k_1 \cdot b + r_1 \quad con\ \ 0 \leq r < |b| \\
b &= k_2 \cdot r_1 + r_2 \quad con\ \ 0 \leq r_2 < r_1 \\
r_1 &= k_3 \cdot r_2 + r_3 \quad con\ \ 0 \leq r_3 < r_2\,. \\
&\ \ \vdots \\
r_{l-2} &= k_l \cdot r_{l-1} + r_l \quad con\ \ 0 \leq r_l < r_{l-1} \\
r_{l-1} &= k_{l+1} \cdot r_l + r_{l+1} \quad con\ \ 0 \leq r_{l+1} < r_l
\end{aligned}$$

Se llega por primera vez al resto nulo r_{l+1}. Entonces $(a : b) = r_l$, el ultimo resto no nulo.

Observación 6.4.1 *Si $a, b \in \mathbb{Z}$ son tales que $a = 0$ y $b \neq 0$, ya sabemos que $(a : b) = |b|$. Por lo tanto, el Algoritmo de Euclides permite calcular el mcd de aualquier par de $\mathbb{Z}$ no ambos nulos.*

Teorema 6.4.2 *MCD y Combinación Entera Sean $a, b \in \mathbb{Z}$, no ambos nulos. Entonces existen $s, t \in \mathbb{Z}$ tales que:*

$$(a : b) = s \cdot a + t \cdot b$$

Observación 6.4.2 *Combinaciones enteras de a y b Si $a, b \in \mathbb{Z}$ no ambos nulos, y $c \in \mathbb{Z}$.*

$$c = s' \cdot a + t' \cdot b \text{ para } s', t' \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow (a : b) = c$$

Proposición 6.4.2 *MCD y Divisores Comunes Si $a, b \in \mathbb{Z}$ no ambos nulos, y sea $d \in \mathbb{Z}$, con $d \neq 0$. Entonces*

$$d\,|\,a\ \ y\ \ d\,|\,b\quad \Leftrightarrow\quad d\,|\,(a : b)$$

Proposición 6.4.3 *MCD de múltiplo comun de dos números Si $a, b \in \mathbb{Z}$ no ambos nulos, y sea $k \in \mathbb{Z}/\{0\}$. Entonces:*

$$(k \cdot a : k \cdot b) = |k|(a : b)$$

Teorema 6.4.3 *Equivalencias del mcd Si $a, b \in \mathbb{Z}$ no ambos nulos, y sea $d \in \natural$. Son equivalentes:*

1. *$d\,|\,a$, $d\,|\,b$ y si $c\,|\,a$ y $c\,|\,b$, entonces $c \leq d$*
2. *$d\,|\,a$, $d\,|\,b$ y existen $s, t \in \mathbb{Z}$ tales que $d = sa + tb$*
3. *$d\,|\,a$, $d\,|\,b$ y si $c\,|\,b$, entonces $c\,|\,d$*

Un numero $d \in \natural$ que cumple cualquiera de esas 3 propiedades es el máximo comun divisor $(a : b)$.

6.5. Números Coprimos

Definición 6.5.1 *Números Coprimos Se dice que $a, b \in \mathbb{Z}$ no ambos nulos son coprimos, si y solo si $(a : b) = 1$. Es decir, si y solo si los únicos divisores comunes de a y b son ± 1.*

Observación 6.5.1 *Coprimos y Combinación Entera Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ no ambos nulos. Entonces*

$$(a : b) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, s, t \in \mathbb{Z} \ : \ 1 = sa + tb$$

Propiedad 6.5.1 *Escenciales de divisibilidad con coprimalidad Sean $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ con $c \neq 0$ y $d \neq 0$. Entonces*

1. $c \mid a$, $d \mid a$ y $(c : d) = 1 \Rightarrow cd \mid a$
2. $d \mid ab$ y $(d : a) = 1 \Rightarrow d \mid b$

Proposición 6.5.1 *Coprimizando Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ no ambos nulos. Entonces:*

$$\left(\frac{a}{(a : b)} : \frac{b}{(a : b)} \right) = 1$$

Por lo tanto

$$a = (a : b)a' \quad b = (a : b)b'$$

Donde los numeros $a' = \frac{a}{(a:b)}$ y $b' = \frac{b}{(a:b)}$ son coprimos.

6.6. Primos y Factorización

Proposición 6.6.1 *Todo número entero distindo de 0 y 1 es divisible por algún primo Sea $a \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0, \pm 1$. Entonces, existe un numero primo positivo p, tal que $p \mid a$*

Corolario 6.6.1 *Cantidad de Primos Existen infinitos primos positivos distintos.*

Teorema 6.6.1 *Propiedad Funcamental de los números primos Sea p un primo y sean $a, b \in \mathbb{Z}$. Entonces:*

$$p \mid a \cdot b \quad p \mid a \quad o \quad p \mid b$$

Proposición 6.6.2 *Sea p un número primo y sean $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{Z}$, con $n \geq 2$. Entonces:*

$$p \mid a_1 \cdots c_n \quad \Rightarrow \quad p \mid a_i \ \ para\ algun\ i, \ \ 1 \leq i \leq n$$

En particular, dado $a \in \mathbb{Z}$, si $p \mid a^n$ entonces $p \mid a$

Teorema 6.6.2 *Teorema fundamental de la Aritmetica Sea $a \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0, \pm 1$. Entonces a se escribe en forma única como producto de primos positivos (factorización única), es decir:*

$$a = \pm p_1^{m_1} \cdot \pm p_1^{m_1} \cdots \pm p_r^{m_r}$$

Esta escritura es única salvo permutación de primos.

Observación 6.6.1 *Primos de productos y potencias Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ no nulos de la forma*

$$a = \pm p_1^{m_1} \cdot \pm p_2^{m_2} \cdots \pm p_r^{m_r}, \text{ con } m_i \in \natural_0 \; b = \pm p_1^{n_1} \cdot \pm p_2^{n_2} \cdots \pm p_r^{n_r}, \text{ con } n_i \in \natural_0$$

Entonces:

- $a \cdot b = (\pm p_1^{m_1} \cdots \pm p_r^{m_r}) \cdot (\pm p_1^{b_1} \cdots \pm p_r^{n_r}) = \pm p_1^{m_1+n_1} \cdots \pm p_r^{m_r+n_r}$
  Es decir, $a \cdot b$ tiene exactamente los primos de a y b en su factorización y los exponentes se suman.
- $a^n = (\pm p_1^{m_1} \cdots \pm p_r^{m_r})^n = (\pm 1)^n \cdot \pm p_1^{m_1 n} \cdots \pm p_r^{m_r n}$
  Es decir, a^n tiene exactamente los mismos primos que a en su factorización y los exponentes van multiplicados por n.

Proposición 6.6.3 *Divisores de un número y cantidad Sea $a \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0 \pm 1$, y sea $a = \pm p_1^{m_1} \cdots p_r^{m_r}$ la factorización en primos de a. Entonces*

1. $d \mid a \Leftrightarrow d = \pm p_1^{n_1} \cdots p_r^{n_r}$ *con* $0 \leq n_i \leq m_i$

2. $\#Div_+(a) = (m_1+1)\cdots(m_r+1)$ y $\#Div(a) = 2(m_1+1)\cdots(m_r+1)$

Proposición 6.6.4 *Divisores y Potencias Sean $a, d \in \mathbb{Z}$ con d no nulo, y sea $n \in \natural$. Entonces:*

$$d \mid a \Leftrightarrow d^n \mid a^n$$

Proposición 6.6.5 *MCD y factorización Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ no nulos de la forma:*

$$a = \pm p_1^{m_1} \cdot \pm p_2^{m_2} \cdots \pm p_r^{m_r}, \text{ con } m_i \in \natural_0 \; b = \pm p_1^{n_1} \cdot \pm p_2^{n_2} \cdots \pm p_r^{n_r}, \text{ con } n_i \in \natural_0$$

Entonces

$$(a:b) = p_1^{min\{m_1,n_1\}} \cdot p_2^{min\{m_2,n_2\}} \cdots p_r^{min\{m_r,n_r\}}$$

Corolario 6.6.2 *MCD de potencias Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ no nulos.*

1. *Seam $a, b \neq 0, \pm 1$, con su factorizacion en primos $a = \pm p_1^{m_1} \cdots \pm p_r^{m_r}$, con $m_i \in \natural_0$ $b = \pm q_1^{n_1} \cdots \pm q_s^{n_s}$, con $n_i \in \natural_0$ entonces:*
$$(a:b) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad p_i \neq q_i, \forall i, j$$
2. $(a:b) = 1$, $(a:c) = 1 \Leftrightarrow (a:bc) = 1$
3. $(a:b) = 1 \Leftrightarrow (a^m : b^n) = 1$, $\forall m, n \in \natural$
4. $(a^n : b^n) = (a:b)^n$, $n \in \natural$

Definición 6.6.1 *minimo comun multiplo Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ no nulos. El minimo comun multiplo entre a y b, que se nota $[a:b]$, es el menor numero natural que es un multiplo comun de a y de b*

Proposición 6.6.6 *mcm y factorizacion Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ no nulos de la forma*

$$a = \pm p_1^{m_1} \cdot \pm p_2^{m_2} \cdots \pm p_r^{m_r}, \text{ con } m_i \in \natural_0 \; b = \pm p_1^{n_1} \cdot \pm p_2^{n_2} \cdots \pm p_r^{n_r}, \text{ con } n_i \in \natural_0$$

Entonces

$$[a:b] = p_1^{max\{m_1,n_1\}} \cdots p_r^{max\{m_r,n_r\}}$$

Corolario 6.6.3 *Mcm y multiplos comunes Sean $a, b \in \mathbb{Z}$, no ambos nulos y sea $m \in \mathbb{Z}$, con $m \neq 0$. Entonces*

$$a \mid m \text{ y } b \mid m \quad \Leftrightarrow \quad [a:b] \mid m$$

Proposición 6.6.7 *Producto mcd y mcm Sean $a, b \in \mathbb{Z}$, no nulos entonces $|a \cdot b| = (a:b)[a:b]$*
En particular, si a y b son coprimosm entonces $[a:b] = |a \cdot b|$

6.7. Ecuaciones Lineales Diofanticas

Proposición 6.7.1 *Ecuación diofantica y mcd Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$ con $a, b \neq 0$. La ec. diofantica:*

$$aX + bY = c$$

admite soluciones enteras si y solo si $(a:b) = c$. Es decir:

$$\exists\, (x_0, y_0) \in \mathbb{Z}^2 : ax_0 + by_0 = c \Leftrightarrow (a:b) \mid c$$

Corolario 6.7.1 *Ecuación diofantica con a y b Coprimos Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$ con $a, b \neq 0$. $(a:b) = 1$. Entonces la ecuación diofantica*

$$aX + bY = c$$

tiene soluciones enteras $\forall c \in \mathbb{Z}$

Definición 6.7.1 *Eciaciones Diofanticas Equivalentes Sean $aX + bY = c$ y $a'X + b'Y = c'$ dos ecuaciónes diofanticas.*
Decimos que son $equivalentes$ si tienen exactamente las mismas soluciones $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$. En este caso adoptamos la notacion:

$$aX + bY = c \leftrightsquigarrow a'X + b'Y = c'$$

Observación 6.7.1 *Ec. Diofantica y ec. coprimizada Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$ con $a, b \neq 0$ tales que $(a:b) \mid c$*
Definamos $a' = \dfrac{a}{(a:b)}$, $b' = \dfrac{b}{(a:b)}$, $c' = \dfrac{c}{(a:b)}$. Entonces

$$aX + bY = c \leftrightsquigarrow a'X + b'Y = c'$$

Proposición 6.7.2 *La ecuación diofantica nula (Homogenea) Sean $a, b \in \mathbb{Z}$, no nulos.*
El conjunto S_0 de soluciones diofanticas $aX + bY = 0$ es

$$S_0 = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : x = b'k, y = -a'k\} \ \ con \ \ a' = \frac{a}{(a : b)}, \ \ b' = \frac{b}{(a : b)}$$

Teorema 6.7.1 *La ecuación diofantica general Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$ con $a, b \neq 0$*
El conjunto S de soluciones enteras de la ecuación diofantica $aX + bY = c$, es:

- *$S = \varnothing$ cuando $(a : b) \not| c$*
- *$S = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : x = x_0 + b'k, y = y_0 - a'k, k \in \mathbb{Z}\}$, donde (x_0, y_0) es una solución particular cualquiera de la ecuación y $a' = \frac{a}{(a : b)}, \quad b' = \frac{b}{(a : b)}$ cuando $(a : b) \mid c$*

6.8. Ecuaciones Lineales de Congruencia

Definición 6.8.1 *Ecuaciónes de Congruencia equivalentes Sean $aX \equiv c\ (m)$ y $a'X \equiv c'\ (m')$ dos ecuaciones de congruencia. Decimos que son equivalentes si tienen exactamente las mismas soluciones $x \in \mathbb{Z}$. en ese caso adoptamos la notación.*

$$aX \equiv c\ (m) \leftrightsquigarrow a'X \equiv c'\ (m')$$

Cabe notar que $aX \equiv c\ (m)$ tiene al menos una solucion $x_0 \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$ la ec. diof $aX - mY = c$ admite almenos una solución $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z}^2$ lo cual se da $\Leftrightarrow (a : m) = (a : -m) = c$

Proposición 6.8.1 *Ec. de Congruencia, mcd y ecuacion coprimizada Sea $m \in \natural$. Dados $a, c \in \mathbb{Z}$, la ecuación de congruencia $aX \equiv c\ (m)$ tiene soluciones enteras $\Leftrightarrow (a : m) \mid c$*
Si ese es el caso, sean $a' = \frac{a}{(a : m)}$, $c' = \frac{c}{(a : m)}$, $m' = \frac{m}{(a : m)}$ Entonces

$$aX + bY = c \leftrightsquigarrow a'X + b'Y = c'$$

Observación 6.8.1 *Simplificando factores comunes en ecuaciónes de congruencia-I Sean $m' \in \natural$ y $a', c', d \in \mathbb{Z}$ no nulos. Entonces*

$$\forall x \in \mathbb{Z}, (da')x \equiv dc'\ (dm') \Leftrightarrow a'x \equiv c'\ (m')$$

Corolario 6.8.1 *Ecuación de congruencia con a y m coprimos Sean $m \in \natural$ y $a \in \mathbb{Z}$ tal que a y m son coprimos. Entonces, la ecuación de congruencia $aX \equiv c\ (m)$ tiene soluciones enteras cualquiera sea $c \in \mathbb{Z}$*

Teorema 6.8.1 *La ecuación de Congruencia Sean $m \in \natural$ y sean $a, c \in \mathbb{Z}$ con $a \neq 0$*
El conjunto S de soluciones enteras de la ecuación de congruencia

$$aX \equiv c\ (m)$$

es

- *$S = \varnothing$, cuando $(a : m) \not| c$*
- *$S = \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv x_0\ (m')\}$ donde $x_0 \in \mathbb{Z}$ es una solución particular cualquiera de la ecuación $aX \equiv c\ (m)$ o de la ecuación equivalente $a'X \equiv c'\ (m')$ donde $a' = \frac{a}{(a : m)}$, $c' = \frac{c}{(a : m)}$ y $m' = \frac{m}{(a : m)}$, cuando $(a : m) \mid c$, ya que*

$$aX \equiv c\ (m) \leftrightsquigarrow X \equiv x_0\ (m')$$

Mas aún, existe una unica solución $x_0 \in \mathbb{Z}$ que satisface $0 \leq x_0 < m'$

Observación 6.8.2 *Simplificando factores comunes en ec. de congruencia-II Sean $m \in \natural$ y $a, c, d \in \mathbb{Z}$ con a, d no nulos.*
Si d y m son coprimos, entonces se tiene la sigfuiente equivalencia de ecuaciónes de congruencia:

$$(da)X \equiv dc\ (m) \leftrightsquigarrow (a)X \equiv c\ (m)$$

6.9. Teorema Chino del Resto

Proposición 6.9.1 *Sistemas Equivalentes*

1. *Sean* $m_1, \cdots, m_n \in \natural$ *coprimos dos a dos, es decir* $(m_i : m_j) = 1$ *para todo* $i \neq j$. *Entonces,* $\forall c \in \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} X \equiv c\ (m_1) \\ X \equiv c\ (m_2) \\ \vdots \\ X \equiv c\ (m_n) \end{cases} \leftrightsquigarrow X \equiv c\ (m_1 \cdot m_2 \cdots m_n)$$

2. *Sean* $m, m' \in \natural$ *tales que* $m' \mid m$. *Entonces,* $\forall c, c' \in \mathbb{Z}$

   - *Si* $c \not\equiv x'\ (m')$, $\begin{cases} X \equiv c'\ (m') \\ X \equiv c\ (m) \end{cases}$ *es incompatible.*
   - *Si* $c \equiv c'\ (m')$, $\begin{cases} X \equiv c'\ (m') \\ X \equiv c\ (m) \end{cases} \leftrightsquigarrow X \equiv c\ (m)$

Teorema 6.9.1 *Teorema Chino del Resto Sean* $m_1, \cdots, m_n \in \natural$ *coprimos dos a dos, es decir* $(m_i : m_j) = 1$ *para todo* $i \neq j$. *Entonces,* $\forall c_1, \cdots, c_n \in \mathbb{Z}$, *el sistema de ecuaciónes de congruencia*

$$\begin{cases} X \equiv c_1\ (m_1) \\ X \equiv c_2\ (m_2) \\ \vdots \\ X \equiv c_n\ (m_n) \end{cases}$$

tiene soluciónes enteras

Mas aún,

$$\begin{cases} X \equiv c\ (m_1) \\ X \equiv c\ (m_2) \\ \vdots \\ X \equiv c\ (m_n) \end{cases} \leftrightsquigarrow X \equiv x_0\ (m_1 \cdots m_n)$$

donde $x_0 \in \mathbb{Z}$ *es una solución particular cualquiera del sistema, y se tiene*

$$S = \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv x_0\ (x_0) m_1 \cdots m_n\}$$

En particular, existe una única solución $x_0 \in \mathbb{Z}$ *que satisface* $0 \leq x_0 < m_1 \cdots m_n$

6.10. Pequeño Teorema de Fermat

Teorema 6.10.1 *Pequeño Teorema de Fermat Sea* p *un primo positivo. entonces* $\forall a \in \mathbb{Z}$

1. $a^p \equiv a\ (p)$
2. $p \not| a \Rightarrow a^{p-1} \equiv 1\ (p)$

Corolario 6.10.1 *Congruencia y Potencias Sea* p *un primo positivo. Entonces,* $\forall a \in \mathbb{Z}$ *talque* $p \not| a$ *y* $n \in \natural$, *se tiene*

$$n \equiv r\ (p-1) \quad \Rightarrow \quad a^n \equiv a^r\ (p)$$

En particular, $p \not| a \Rightarrow a^n \equiv a^{r_{p-1}(n)}\ (p)$

7. Números Complejos

7.1. Motivación y Definiciones Iniciales

Se nos presenta el siguiente problema:

Problema: $\nexists\, r \in \mathbb{R} : r^2 = -1$, pues $r^2 > 0, \forall r \in \mathbb{R}$

Y a este problema, se propone la siguiente solución:

Solución: Se define el cuerpo $\mathbb{C} := \begin{cases} (a, b \in \mathbb{R}) \subseteq \mathbb{C} \\ i = \sqrt{-1} \in \mathbb{C} \end{cases}$. Donde, $\{z = a + ib; a, b \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{C}$

Donde el cuerpo cumple con las operaciones:

- $z + w = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$
- $z \cdot w = (a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$

Importante!: $i = \sqrt{-1}, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1.$ $\rightarrow$ General:$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} i^{4n} = 1 \\ i^{4n+1} = i \\ i^{4n+2} = -1 \\ i^{4n+3} = -i \end{cases}$

7.2. Forma Binomial. Inverso. Modulo. Conjugado

Definición 7.2.1 *Forma Binomial $a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow$ se dice que un $z \in \mathbb{C}$ esta escrito en Forma Binomial, cuando esta escrito de la forma: $z = a + bi$. Se dice que: a es la parte real de z $(\mathfrak{Re}(z) = a)$ y que b es la parte imaginaria de z $(\mathfrak{Im}(z) = b)$*

Definición 7.2.2 *Conjugado El conjugado en forma binomial se define como: $\overline{z} = a - bi$*

Propiedad 7.2.1

1. $\overline{\overline{z}} = z$
2. $z \cdot \overline{z} = |z|^2$
3. $z + \overline{z} = 2\mathfrak{Re}(z)$
4. $z - \overline{z} = 2\mathfrak{Im}(z)$
5. $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$
6. $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$
7. $\overline{z^{-1}} = \overline{z}^{-1}$
8. $\overline{z^k} = \overline{z}^k$

7.3. Modulo

El modulo de un complejo se define como: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, donde $\mathfrak{Re}(z) = a$ y $\mathfrak{Im}(z) = b$

Propiedad 7.3.1

1. $|\mathfrak{Re}(z)| \leq |z| \quad \wedge \quad |\mathfrak{Im}(z)| \leq |z|$
2. $|z + w| \leq |z| + |w|$
3. $|z \cdot w| \leq |z| \cdot |w|$
4. $|z^{-1}| = |z|^{-1}$
5. $|z^k| = |z|^k$

7.4. Inverso

El inverso de un complejo se calcula como: $\boxed{z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}}$

Propiedad 7.4.1

1. $z^{-1}z = 1$
2. $\overline{z^{-1}} = \overline{z}^{-1}$
3. $|z^{-1}| = |z|^{-1}$

7.5. Forma Trigonometrica

La forma trigonometrica de un complejo o forma polar se define como: $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$.
Por otro lado, se tiene que: $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta) \Rightarrow z = re^{i\theta}$

Donde, en ambos casos: $\begin{cases} r = |z| \\ \cos(\theta) = \frac{\mathfrak{Re}(z)}{|z|} \\ \sin(\theta) = \frac{\mathfrak{Im}(z)}{|z|} \\ 0 \leq \theta < 2\pi \end{cases}$

Grados	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Radianes	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
Seno	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	−1	0
Coseno	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	−1	0	1
Tangente	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	no definida	0	no definida	0

7.6. Resultados obtenidos a través del Teorema de De Moivre

Conjugado:	$\overline{z} = r(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)) = re^{-\theta i}$
Inverso:	$z^{-1} = r^{-1}(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)) = r^{-1}e^{-\theta i}$
Producto:	$z \cdot w = rs(\cos(\theta + \varphi) + i\sin(\theta + \varphi)) = rse^{(\theta+\varphi)i}$
Cociente:	$\frac{z}{w} = \frac{r}{s}(\cos(\theta - \varphi) + i\sin(\theta - \varphi)) = \frac{r}{s}e^{(\theta-\varphi)i}$
Potencias:	$z^n = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)) = r^n e^{n\theta i}$

7.7. Raices n-ésimas de un numero $\mathbb{C}$

Teorema 7.7.1 *$n \in \mathbb{N}$, $z = se^{i\varphi} \in \mathbb{C}^x$, $s \in \mathbb{R}_{>0} \wedge 0 \leq \varphi < 2\pi \Rightarrow z$ tiene n raices $w_i \in \mathbb{C}$. Donde:* $\begin{cases} w_k = s^{1/n}e^{\theta_k i} \\ \theta_k = \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \\ 0 \leq k < n \end{cases}$

7.8. El Grupo G_n de raices n-ésimas de la Unidad

Definición 7.8.1 $G_n = \{w \in \mathbb{C} : w^n = 1\} = \{w_k = e^{\frac{2\pi k i}{n}}; 0 \leq k \leq n-1\} \subseteq \mathbb{C}^x$

Propiedad 7.8.1 *($(G_n, \cdot)$ Es grupo Abeliano) Sea $n \in \mathbb{N} \Rightarrow$* $\begin{cases} (1) & \forall w, z \in G_n \Rightarrow w \cdot z \in G_n \\ (2) & 1 \in G_n \\ (3) & \forall w \in G_n \exists w^{-1} \in G_n \end{cases}$

Propiedad 7.8.2 $n \in \mathbb{N} \wedge w \in G_n$

1. $|w| = 1$
2. $m \in \mathbb{Z} : n|m \Rightarrow w^m = 1$
3. $m, m' \in \mathbb{Z} / \ m \equiv m'(n) \Rightarrow w^m = w^{m'}$ *(En particular,* $w^m = w^{r_n(m)}$*)*
4. $w^{-1} = \overline{w} = w^{n-1}$

Propiedad 7.8.3 $\left(G_n \cap G_m = G_{(n:m)}\right)$

1. $n|m \Rightarrow G_n \subset G_m$
2. $G_n \cap G_m = G_{(n:m)}$
3. $G_n \subset G_m \Rightarrow n|m$

Propiedad 7.8.4 *(G_n es ciclico)*
$n \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists w \in G_n \ / \ G_n = \{1, w, w^2, \cdots, w^{n-1}\}$. *Notar que no todo* $w \in G_n$ *cumple dicha consigna.*

Definición 7.8.2 *(Raiz n-ésima primitiva de la unidad)*
Sea $n \in \mathbb{N}$. $w \in \mathbb{C}$ *es n-esima primitiva de la unidad, sii* $G_n = \{1, w, w^2, \cdots, w^{n-1}\} = \{w^k; 0 \leq k \leq n-1\}$

Observación 7.8.1 $w \in G_n^*$ *(*w *es primitiva)* $\Rightarrow 0 \leq k \not= j \leq n-1$*;* $w^k \not= w^j$*, pues* G_n *tiene* n *elemnentos distintos y por esto dos potencias de* w *no pueden coincidir.*

Proposición 7.8.1 w *es primitiva si* $\forall\ m \in \mathbb{Z}$*;* $w^m = 1 \Leftrightarrow n | m$

Corolario 7.8.1 *(Raices Primitivas y Potencias)*
$n, k \in \mathbb{N} \wedge w \in \mathbb{C}$*;* $w \in G_n^* \Rightarrow w^k$ *es primitiva* $\Leftrightarrow (n : k) = 1$

Corolario 7.8.2 *(Raices Primitivas en* G_n*)*
$n \in \mathbb{N} \wedge w_k = e^{\frac{2k\pi}{n} i}$*;* $0 \leq k \leq n-1 \Rightarrow w_k \in G_n* \Leftrightarrow (n : k) = 1$

Corolario 7.8.3 *(Raices Primitivas en* G_p*)*
$p :=$ *primo* $\Rightarrow k : 1 \leq k \leq p-1$ *(es decir, para cualquier* k *distinto de* 0*)* $\Rightarrow w_k = e^{\frac{2k\pi}{p} i}$ *es primitiva de* G_p*. Es decir,* $\forall\ w \in G_p$*;* $w \not= 1$ *se tiene que* w *es p-esima primitiva de la unidad.*

Propiedad 7.8.5 *(Suma y producto de los elementos de* G_n*)*

$$n \in \mathbb{N}: \quad (i) \sum_{w \in G_n} w = 0 \qquad (ii) \prod_{w \in G_n} w = \begin{cases} 1 & n\ impar \\ -1 & n\ par \end{cases}$$