

PVK Analysis I

Marco Bertenghi & Lukas Burch, Vorlage gemäss Severin Schraven

January 7, 2020

Die Verweise auf Theoreme und Propositionen beziehen sich auf das Skript der Vorlesung, welches Sie *hier* finden können. Die Verweise auf Serien beziehen sich auf das HS 15. Mit (*) markierte Aufgaben, sind im allgemeinen anspruchsvoller.

1 sup, inf, max, min von Mengen

Aufgabe 1. Berechnen Sie das Supremum (kleinste obere Schranke) der Menge:

$$S := \left\{ \frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots \right\}.$$

Was gilt für das Supremum der Menge $M := S \cup \{1\}$?

Aufgabe 2. Es sei $A \subset \mathbb{R}$ und $A \neq \emptyset$, desweiteren definieren wir $-A := \{x \in \mathbb{R} : -x \in A\}$. Entscheiden Sie für jede Aussage, ob sie wahr oder falsch ist:

- i.) A unbeschränkt $\iff \sup A = \infty$.
- ii.) A ist endlich $\implies \max A = \sup A$.
- iii.) $\min A$ existiert $\implies \min A = -\max(-A)$.
- iv.) $\sup A \notin A$.

Aufgabe 3. Finden Sie das \max , \min , \sup und \inf der folgenden Menge und beweisen Sie ihre Aussage:

$$S := \left\{ \frac{2n+1}{n+1} : n \in \mathbb{N}_{\geq 1} \right\} = \left\{ \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{9}{5}, \frac{11}{6}, \dots \right\}.$$

Aufgabe 4. Es sei $S := (1, 5]$. Beweisen Sie, dass $\inf S = 1$.

2 Vollständige Induktion

Aufgabe 5.

i.) Beweisen Sie die Bernoulli-Ungleichung:

$$\forall x > -1, \forall n \in \mathbb{N} : (1+x)^n \geq 1+nx.$$

mittels Induktion.

ii.) Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und $x_1, \dots, x_n \geq 0$. Zeigen Sie:

$$\prod_{i=1}^n (1+x_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^n x_i.$$

Aufgabe 6. Zeigen Sie, dass:

$$\frac{4^{2n} - 3^n}{13} \in \mathbb{N}.$$

für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.

Aufgabe 7.

- i) Zeigen Sie, dass der kleinste, nicht triviale Teiler einer natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ stets eine Primzahl ist. Hier ist keine vollständige Induktion notwendig, ein Beweis per Widerspruch genügt völlig.
- ii) Zeigen Sie, dass jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ als Produkt von Primzahlen in der kanonischen Form $n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$, wobei $p_1 < p_2 < \cdots < p_k \in \mathbb{P}$ und $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{N}_0$, geschrieben werden kann. Diese Darstellung ist desweiteren eindeutig, dies muss jedoch nicht gezeigt werden.

Aufgabe 8 (★ Trig Heavy). Wir definieren die Chebyshev Polynome für alle $x \in \mathbb{R}$ wie folgt:

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1. \\ P_1(x) &= x. \\ P_{n+1}(x) &= xP_n(x) - P_{n-1}(x), \text{ für } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass gilt:

$$P_n(2 \cos(\theta)) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}, \quad \theta \in (0, \pi).$$

Aufgabe 9. (★) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $a_{jk} \in \mathbb{C}$ für $j = 0, \dots, n+1$, $k = 0, \dots, n$. Zeigen Sie, dass:

$$\sum_{j=0}^{n+1} \sum_{k=0}^n a_{jk} = \sum_{0 \leq j \leq k \leq n} a_{jk} + \sum_{0 \leq k < j \leq n+1} a_{jk}.$$

Aufgabe 10. Zeigen Sie die **Vorwärts-Rückwärts Induktion** (auch bekannt als Cauchy-Induktion): Es sei $P(n)$ eine Aussage für $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Falls $P(2)$ wahr ist und

1. Aus $P(k)$ lässt sich $P(2k)$ folgern (Vorwärts Schritt).
2. Aus $P(k+1)$ lässt sich $P(k)$ folgern (Rückwärts Schritt).

Dann gilt die Aussage $P(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$.

Aufgabe 11. (★) Es seien $0 \leq x_i \leq \pi$ für $i = 1, \dots, n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie folgende Ungleichung für alle $n \in \mathbb{N}$ mit Hilfe der Vorwärts-Rückwärts Induktion:

$$\sin x_1 + \sin x_2 + \dots + \sin x_n \leq n \sin \left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \right).$$

Aufgabe 12. (★) Zeigen Sie mit Hilfe der Cauchy-Induktion die folgende Ungleichung, bekannt als Cauchy's Ungleichung (oder auch arithmetisches Mittel dominiert das geometrische Mittel): Es seien $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, dann gilt

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}.$$

3 Folgen

Aufgabe 13. Seien $(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}$.

- i.) Zeigen Sie, falls jede Teilfolge $(x_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge $(x_{n_{i_j}})_{j \in \mathbb{N}}$ besitzt, die gegen x konvergiert, dann gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.
- ii.) Finden Sie eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ so, dass für jede Teilfolge $(x_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge $(x_{n_{i_j}})_{j \in \mathbb{N}}$ existiert, aber $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht konvergiert.

Aufgabe 14. Sei $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C}$. Entscheiden Sie für jede Aussage, ob sie wahr oder falsch ist:

- i.) $z_n \rightarrow z \iff \operatorname{Re}(z_n) \rightarrow \operatorname{Re}(z) \text{ und } \operatorname{Im}(z_n) \rightarrow \operatorname{Im}(z)$.
- ii.) $|z_n| \rightarrow |z| \implies z_n \rightarrow z$.
- iii.) $z_n \rightarrow z \implies |z_n| \rightarrow |z|$.
- iv.) $z_n \in \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $z_n \rightarrow z \implies z \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 15. Seien $m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^m$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Entscheiden Sie für jede der folgenden Aufgaben, ob sie wahr oder falsch sind (mit Beweis oder Gegenbeispiel):

- i.) $(\|x_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert $\implies (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert.
- ii.) $(x_n \cdot y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert $\implies (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert.
- iii.) $(\lambda x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert $\implies (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert.
- iv.) Jede beschränkte Folge konvergiert.

Aufgabe 16. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

- i.)
$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + n} - n \right).$$
- ii.)
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{5}{n-3} \right)^{(n+\sqrt{n})/2}.$$
- iii.)
$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n} - 5n^3}{n^3 + n(n+1)(n+2)}.$$

Aufgabe 17. Entscheiden Sie für jede Aussage, ob sie wahr oder falsch ist:

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ mit Häufungspunkt $h \in \mathbb{R}$.

- i.) h ist der Grenzwert von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- ii.) h ist der einzige Häufungspunkt in $\mathbb{R} \implies a_n \rightarrow h$.
- iii.) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert $\implies a_n \rightarrow h$.
- iv.) Es existiert eine Teilfolge von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die gegen h konvergiert.
- v.) $\forall \epsilon > 0 \forall N \in \mathbb{N} \exists n > N : |a_n - h| < \epsilon$.

Aufgabe 18. (★)

i.) Berechnen Sie alle Häufungspunkte der Folge:

$$a_n = \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) \left(1 + \frac{3}{n}\right)^{n+1}.$$

ii.) Seien $a_i > 0$ für alle $i = 1, \dots, p$. Zeigen Sie, dass:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1^n + \dots + a_p^n)^{1/n} = \max_{i=1, \dots, p} a_i.$$

Aufgabe 19. (★) Sei eine reelle Folge $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ rekursiv definiert durch:

$$a_0 = 1, \quad a_{k+1} = \sqrt{|a_k|} + \frac{15}{4} \text{ für } k \in \mathbb{N}.$$

i.) Zeigen Sie, dass $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert.

ii.) Berechnen Sie den Grenzwert von $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

Aufgabe 20. (★) Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = \infty.$$

Aufgabe 21. (★)

i.) Berechnen Sie den folgenden Grenzwert:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log \left(\left(\frac{n}{n+1} \right)^n \right).$$

ii.) Berechnen Sie alle Häufungspunkte der komplexen Folge:

$$z_n = (n^4 - n^2 + 2)^{1/n} \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) + i \frac{n+e}{2n+1} (-1)^n.$$

iii.) Zeigen Sie:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[(n+1) \cos\left(\frac{1}{n+1}\right) - n \cos\left(\frac{1}{n}\right) \right] = 1.$$

Aufgabe 22 (★).

i) Es sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle Folge derart, dass für ihre Inkremente gilt $|a_{n+1} - a_n| \leq 2^{-n}$. Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy Folge ist. Bedeutet dies, dass $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert? Warum?

ii) Es sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle Folge, welche rekursiv definiert ist mittels:

$$a_{n+2} = \frac{a_n + a_{n+1}}{2}, \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, dass dies eine Cauchy Folge ist. Verwenden Sie Teil i).

iii) Berechnen Sie den Grenzwert der Folge aus Teil ii).

4 Reihen

Aufgabe 23. Wir wollen den Cauchy'schen Verdichtungssatz (Kondensationssatz von Cauchy) beweisen. Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine nicht-negative Folge von monoton fallenden Termen. Zeige, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} 2^n f(2^n) < \infty.$$

Aufgabe 24. Es sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge monoton fallender, nicht-negativer reellen Zahlen. Zeige dass falls $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, dann gilt $na_n \rightarrow 0$ als $n \rightarrow \infty$. Hinweis: Verwende den Cauchy'schen Verdichtungssatz.

Aufgabe 25. Verwenden Sie den Cauchy'schen Verdichtungssatz (Kondensationssatz) um zu zeigen, dass die nachfolgenden Reihen divergieren respektive konvergieren:

i)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

ii)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

iii)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \text{ wobei } s > 1.$$

Aufgabe 26.

i) Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton wachsend, $a_n > 0$. Zeige, die Reihe

$$\sum_n \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1 \right)$$

konvergiert genau dann, wenn $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt ist.

ii) Es sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge. Zeige dass gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1 + na_n} < \infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty.$$

Hinweis: Verwende Aufgabe 24.

Aufgabe 27. (★) Bestimmen Sie für die folgenden Reihen, ob sie konvergent und ob sie absolut konvergent sind:

i.)

$$\sum_{k \geq 0} \frac{2k}{3k^3 + 1}.$$

ii.)

$$\sum_{k \geq 2} \frac{\sin(k\pi/2)}{\log(k)}.$$

iii.)

$$\sum_{k \geq 1} \frac{2^k k!}{k^k}.$$

Aufgabe 28. (★) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

i.)

$$\sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+1}.$$

ii.)

$$\sum_{n \geq 0} \left(\frac{n+5}{3n-2} \right)^{3n}.$$

iii.)

$$\sum_{n \geq 0} \frac{\exp(3n \log(n))}{(n!)^2}.$$

Aufgabe 29. (★) Berechnen Sie:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} \right).$$

Aufgabe 30.

i) Existiert ein $s > 0$ sodass die nachfolgende Reihe konvergiert?

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log^s(n)}.$$

ii) Für welche $s \in \mathbb{R}$ ist die nachfolgende Reihe konvergent?

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^s(n)}.$$

Aufgabe 31. Zeigen Sie, dass die nachfolgende Reihe konvergiert:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k^2 + 2k + 3}{6k^5 + 6}.$$

Aufgabe 32. Zeigen Sie mit Hilfe des Integralkriteriums, dass die folgende Reihe konvergiert:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}.$$

Aufgabe 33. Bestimmen Sie, ob die nachfolgende Reihe konvergiert:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n e^{-n^2}.$$