

PVK Analysis I

Marco Bertenghi & Lukas Burch, Vorlage gemäss Severin Schraven

January 9, 2020

Die Verweise auf Theoreme und Propositionen beziehen sich auf das Skript der Vorlesung, welches Sie *hier* finden können. Die Verweise auf Serien beziehen sich auf das HS 15. Mit (*) markierte Aufgaben, sind im allgemeinen anspruchsvoller.

1 sup, inf, max, min von Mengen

Aufgabe 1. Berechnen Sie das Supremum (kleinste obere Schranke) der Menge:

$$S := \left\{ \frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots \right\}.$$

Was gilt für das Supremum der Menge $M := S \cup \{1\}$?

Aufgabe 2. Es sei $A \subset \mathbb{R}$ und $A \neq \emptyset$, desweiteren definieren wir $-A := \{x \in \mathbb{R} : -x \in A\}$. Entscheiden Sie für jede Aussage, ob sie wahr oder falsch ist:

- i.) A unbeschränkt $\iff \sup A = \infty$.
- ii.) A ist endlich $\implies \max A = \sup A$.
- iii.) $\min A$ existiert $\implies \min A = -\max(-A)$.
- iv.) $\sup A \notin A$.

Aufgabe 3. Finden Sie das \max , \min , \sup und \inf der folgenden Menge und beweisen Sie ihre Aussage:

$$S := \left\{ \frac{2n+1}{n+1} : n \in \mathbb{N}_{\geq 1} \right\} = \left\{ \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{9}{5}, \frac{11}{6}, \dots \right\}.$$

Aufgabe 4. Es sei $S := (1, 5]$. Beweisen Sie, dass $\inf S = 1$.

2 Vollständige Induktion

Aufgabe 5.

i.) Beweisen Sie die Bernoulli-Ungleichung:

$$\forall x > -1, \forall n \in \mathbb{N} : (1+x)^n \geq 1+nx.$$

mittels Induktion.

ii.) Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und $x_1, \dots, x_n \geq 0$. Zeigen Sie:

$$\prod_{i=1}^n (1+x_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^n x_i.$$

Aufgabe 6. Zeigen Sie, dass:

$$\frac{4^{2n} - 3^n}{13} \in \mathbb{N}.$$

für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.

Aufgabe 7.

- i) Zeigen Sie, dass der kleinste, nicht triviale Teiler einer natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ stets eine Primzahl ist. Hier ist keine vollständige Induktion notwendig, ein Beweis per Widerspruch genügt völlig.
- ii) Zeigen Sie, dass jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ als Produkt von Primzahlen in der kanonischen Form $n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$, wobei $p_1 < p_2 < \cdots < p_k \in \mathbb{P}$ und $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{N}_0$, geschrieben werden kann. Diese Darstellung ist desweiteren eindeutig, dies muss jedoch nicht gezeigt werden.

Aufgabe 8 (★ Trig Heavy). Wir definieren die Chebyshev Polynome für alle $x \in \mathbb{R}$ wie folgt:

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1. \\ P_1(x) &= x. \\ P_{n+1}(x) &= xP_n(x) - P_{n-1}(x), \text{ für } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass gilt:

$$P_n(2 \cos(\theta)) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}, \quad \theta \in (0, \pi).$$

Aufgabe 9. (★) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $a_{jk} \in \mathbb{C}$ für $j = 0, \dots, n+1$, $k = 0, \dots, n$. Zeigen Sie, dass:

$$\sum_{j=0}^{n+1} \sum_{k=0}^n a_{jk} = \sum_{0 \leq j \leq k \leq n} a_{jk} + \sum_{0 \leq k < j \leq n+1} a_{jk}.$$

Aufgabe 10. Zeigen Sie die **Vorwärts-Rückwärts Induktion** (auch bekannt als Cauchy-Induktion): Es sei $P(n)$ eine Aussage für $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Falls $P(2)$ wahr ist und

1. Aus $P(k)$ lässt sich $P(2k)$ folgern (Vorwärts Schritt).
2. Aus $P(k+1)$ lässt sich $P(k)$ folgern (Rückwärts Schritt).

Dann gilt die Aussage $P(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$.

Aufgabe 11. (★) Es seien $0 \leq x_i \leq \pi$ für $i = 1, \dots, n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie folgende Ungleichung für alle $n \in \mathbb{N}$ mit Hilfe der Vorwärts-Rückwärts Induktion:

$$\sin x_1 + \sin x_2 + \dots + \sin x_n \leq n \sin \left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \right).$$

Aufgabe 12. (★) Zeigen Sie mit Hilfe der Cauchy-Induktion die folgende Ungleichung, bekannt als Cauchy's Ungleichung (oder auch arithmetisches Mittel dominiert das geometrische Mittel): Es seien $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, dann gilt

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}.$$

3 Folgen

Aufgabe 13. Seien $(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}$.

- i.) Zeigen Sie, falls jede Teilfolge $(x_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge $(x_{n_{i_j}})_{j \in \mathbb{N}}$ besitzt, die gegen x konvergiert, dann gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.
- ii.) Finden Sie eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ so, dass für jede Teilfolge $(x_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge $(x_{n_{i_j}})_{j \in \mathbb{N}}$ existiert, aber $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht konvergiert.

Aufgabe 14. Sei $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C}$. Entscheiden Sie für jede Aussage, ob sie wahr oder falsch ist:

- i.) $z_n \rightarrow z \iff \operatorname{Re}(z_n) \rightarrow \operatorname{Re}(z) \text{ und } \operatorname{Im}(z_n) \rightarrow \operatorname{Im}(z)$.
- ii.) $|z_n| \rightarrow |z| \implies z_n \rightarrow z$.
- iii.) $z_n \rightarrow z \implies |z_n| \rightarrow |z|$.
- iv.) $z_n \in \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $z_n \rightarrow z \implies z \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 15. Seien $m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^m$ and $\lambda \in \mathbb{R}$. Entscheiden Sie für jede der folgenden Aufgaben, ob sie wahr oder falsch sind (mit Beweis oder Gegenbeispiel):

- i.) $(\|x_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert $\implies (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert.
- ii.) $(x_n \cdot y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert $\implies (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert.
- iii.) $(\lambda x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert $\implies (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert.
- iv.) Jede beschränkte Folge konvergiert.

Aufgabe 16. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

- i.)
$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + n} - n \right).$$
- ii.)
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{5}{n-3} \right)^{(n+\sqrt{n})/2}.$$
- iii.)
$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n} - 5n^3}{n^3 + n(n+1)(n+2)}.$$

Aufgabe 17. Entscheiden Sie für jede Aussage, ob sie wahr oder falsch ist:

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ mit Häufungspunkt $h \in \mathbb{R}$.

- i.) h ist der Grenzwert von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- ii.) h ist der einzige Häufungspunkt in $\mathbb{R} \implies a_n \rightarrow h$.
- iii.) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert $\implies a_n \rightarrow h$.
- iv.) Es existiert eine Teilfolge von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die gegen h konvergiert.
- v.) $\forall \epsilon > 0 \forall N \in \mathbb{N} \exists n > N : |a_n - h| < \epsilon$.

Aufgabe 18. (★)

i.) Berechnen Sie alle Häufungspunkte der Folge:

$$a_n = \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) \left(1 + \frac{3}{n}\right)^{n+1}.$$

ii.) Seien $a_i > 0$ für alle $i = 1, \dots, p$. Zeigen Sie, dass:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1^n + \dots + a_p^n)^{1/n} = \max_{i=1, \dots, p} a_i.$$

Aufgabe 19. (★) Sei eine reelle Folge $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ rekursiv definiert durch:

$$a_0 = 1, \quad a_{k+1} = \sqrt{|a_k|} + \frac{15}{4} \text{ für } k \in \mathbb{N}.$$

i.) Zeigen Sie, dass $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert.

ii.) Berechnen Sie den Grenzwert von $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

Aufgabe 20. (★) Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = \infty.$$

Aufgabe 21. (★)

i.) Berechnen Sie den folgenden Grenzwert:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log \left(\left(\frac{n}{n+1} \right)^n \right).$$

ii.) Berechnen Sie alle Häufungspunkte der komplexen Folge:

$$z_n = (n^4 - n^2 + 2)^{1/n} \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) + i \frac{n+e}{2n+1} (-1)^n.$$

iii.) Zeigen Sie:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[(n+1) \cos\left(\frac{1}{n+1}\right) - n \cos\left(\frac{1}{n}\right) \right] = 1.$$

Aufgabe 22 (★).

i) Es sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle Folge derart, dass für ihre Inkremente gilt $|a_{n+1} - a_n| \leq 2^{-n}$. Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy Folge ist. Bedeutet dies, dass $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert? Warum?

ii) Es sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle Folge, welche rekursiv definiert ist mittels:

$$a_{n+2} = \frac{a_n + a_{n+1}}{2}, \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, dass dies eine Cauchy Folge ist. Verwenden Sie Teil i).

iii) Berechnen Sie den Grenzwert der Folge aus Teil ii).

4 Reihen

Aufgabe 23. Wir wollen den Cauchy'schen Verdichtungssatz (Kondensationssatz von Cauchy) beweisen. Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine nicht-negative Folge von monoton fallenden Termen. Zeige, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} < \infty.$$

Aufgabe 24. Es sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge monoton fallender, nicht-negativer reellen Zahlen. Zeige dass falls $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, dann gilt $na_n \rightarrow 0$ als $n \rightarrow \infty$. Hinweis: Verwende den Cauchy'schen Verdichtungssatz.

Aufgabe 25. Verwenden Sie den Cauchy'schen Verdichtungssatz (Kondensationssatz) um zu zeigen, dass die nachfolgenden Reihen divergieren respektive konvergieren:

i)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

ii)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

iii)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \text{ wobei } s > 1.$$

Aufgabe 26.

i) Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton wachsend, $a_n > 0$. Zeige, die Reihe

$$\sum_n \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1 \right)$$

konvergiert genau dann, wenn $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt ist.

ii) Es sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge. Zeige dass gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1 + na_n} < \infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty.$$

Hinweis: Verwende Aufgabe 24.

Aufgabe 27. (★) Bestimmen Sie für die folgenden Reihen, ob sie konvergent und ob sie absolut konvergent sind:

i.)

$$\sum_{k \geq 0} \frac{2k}{3k^3 + 1}.$$

ii.)

$$\sum_{k \geq 2} \frac{\sin(k\pi/2)}{\log(k)}.$$

iii.)

$$\sum_{k \geq 1} \frac{2^k k!}{k^k}.$$

Aufgabe 28. (★) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

i.)

$$\sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+1}.$$

ii.)

$$\sum_{n \geq 0} \left(\frac{n+5}{3n-2} \right)^{3n}.$$

iii.)

$$\sum_{n \geq 0} \frac{\exp(3n \log(n))}{(n!)^2}.$$

Aufgabe 29. (★) Berechnen Sie:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} \right).$$

Aufgabe 30.

i) Existiert ein $s > 0$ sodass die nachfolgende Reihe konvergiert?

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log^s(n)}.$$

ii) Für welche $s \in \mathbb{R}$ ist die nachfolgende Reihe konvergent?

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^s(n)}.$$

Aufgabe 31. Zeigen Sie, dass die nachfolgende Reihe konvergiert:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k^2 + 2k + 3}{6k^5 + 6}.$$

Aufgabe 32. Zeigen Sie mit Hilfe des Integralkriteriums, dass die folgende Reihe konvergiert:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}.$$

Aufgabe 33. Bestimmen Sie, ob die nachfolgende Reihe konvergiert:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n e^{-n^2}.$$

5 Topologie: Metrische Räume

Aufgabe 34. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Beweise, dass auch (X, d') mit $d' : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ spezifiziert als

$$d'(x, y) := \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

ein metrischer Raum ist.

Aufgabe 35. Sei X eine beliebige nicht leere Menge und definiere $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ als

$$d(x, y) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y \\ 1 & \text{falls } x \neq y. \end{cases}$$

i) Zeige, dass (X, d) ein metrischer Raum ist.

ii) Zeige dass eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X genau dann bezüglich d konvergiert, wenn sie konstant ist ab einem (endlichen) Index $N \in \mathbb{N}$.

iii) Folgere, dass (X, d) vollständig ist.

iv) Welche Teilmengen von X sind offen? Welche sind abgeschlossen? Was ist also die Topologie $\tau \subset \mathcal{P}(X)$ auf X ?

v) Sei (M, d') ein beliebiger metrischer Raum und $f : X \rightarrow M$ eine beliebige Funktion. Zeige, dass f stetig ist.

Aufgabe 36. Zeige, dass für alle $v \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\|v\|_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} \|v\|_p.$$

Aufgabe 37. Beweise die Cauchy-Schwarz Ungleichung, das heisst für alle $v, w \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\sum_{i=1}^n |v_i| |w_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n |v_i|^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n |w_i|^2}.$$

Aufgabe 38. Sei ℓ_2 der Raum der quadratsummierbaren reellen Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, d.h. für welche die Reihe $\sum_{n=1}^\infty a_n^2$ konvergiert. Zeige, dass

$$d((a_n), (b_n)) = \sqrt{\sum_{n=1}^\infty (a_n - b_n)^2}$$

eine Metrik auf ℓ_2 definiert.

Hinweis: Verwende die Cauchy-Schwarz Ungleichung um die Dreiecksungleichung zu beweisen.

Aufgabe 39. Betrachte den \mathbb{R}^n mit der Euklidischen Metrik. Zeige oder widerlege:

i) $X := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 + 2xy = 5\}$ ist abgeschlossen.

ii) $Y := \{\frac{\cos x}{x} \in \mathbb{R} \mid x \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ ist abgeschlossen.

Aufgabe 40. i.) Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie:

(a) die umgekehrte Dreiecksungleichung

$$|d(x, y) - d(y, z)| \leq d(x, z).$$

(b) die verallgemeinerte Dreiecksungleichung

$$d(x_n, x_1) \leq \sum_{i=1}^{n-1} d(x_{i+1}, x_i).$$

(c) die Vierecksungleichung

$$|d(x, y) - d(u, v)| \leq d(x, u) + d(y, v).$$

ii.) Sei $(Y, \|\cdot\|)$ ein normierter \mathbb{R} -Vektorraum. Zeigen Sie:

(a) die umgekehrte Dreiecksungleichung

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|.$$

(b) die verallgemeinerte Dreiecksungleichung

$$\|x_n - x_1\| \leq \sum_{i=1}^{n-1} \|x_{i+1} - x_i\|.$$

Aufgabe 41. Seien $(M_1, d_1), (M_2, d_2)$ metrische Räume. Sei $f : M_1 \rightarrow M_2$ gleichmässig stetig. Zeigen Sie: Ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $M_1 \Rightarrow (f(a_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge in M_2 .

Aufgabe 42. In dieser Aufgabe wollen wir zeigen, dass $\ell_p \subset \ell_q$ für $0 < p \leq q$.

i) Zeige zuerst, dass für $0 < a \leq 1$ folgende Ungleichung gilt:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \right)^a \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^a.$$

ii) Folgere dass $\|a\|_q \leq \|a\|_p$.

Aufgabe 43. Es sei

$$A_n^{(m)} := \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{falls } n \leq m \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Betrachten Sie die Folge $(b^{(m)})_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ mit $b^{(m)} := (A_n^{(m)})_{n \in \mathbb{N}}$.

i) Für welche $p \in [1, \infty]$ gilt $b^{(m)} \in \ell_p$?

ii) Bestimmen Sie die Grenzfolge $b^{(\infty)}$.

iii) Zeigen Sie, dass $(b^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ bezüglich $\|\cdot\|_p$, wobei $p \in (1, \infty]$ konvergiert.

Aufgabe 44. Es sei für $n, m \in \mathbb{N}_{\geq 2}$:

$$A_n^{(m)} := \frac{m}{m + n^{3/4}}.$$

Betrachten Sie die Folge $(b^{(m)})_{m \in \mathbb{N}_{\geq 2}} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ mit $b^{(m)} := A_n^{(m)}$.

i) Zeigen Sie $\|b^{(m)}\|_{\ell_{\infty}} < \infty$ für alle $m \in \mathbb{N}_{\geq 2}$.

ii) Zeigen Sie $\|b^{(m)}\|_{\ell_2} < \infty$ für alle $m \in \mathbb{N}_{\geq 2}$.

iii) Zeigen Sie $b^{(m)} \notin \ell_1$ für alle $m \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Hinweis: Verwenden Sie für alle $a, b \in \mathbb{R}_{\geq 2}$ gilt $\frac{a}{a+b} > \frac{1}{b}$.

6 Stetigkeit und Grenzwerte von Funktionen

Aufgabe 45. Zeigen Sie, mit Hilfe der Definition der Stetigkeit, dass die folgende Funktion in $x = 1$ stetig ist:

$$h : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{-1\} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \frac{x^2+x+1}{x+1}. \end{cases}$$

Aufgabe 46. Sind die 3 nachfolgenden Funktionen Lipschitz-stetig?

i) $f : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \frac{1}{1+x^2}.$

ii) $f : (0, 1) \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \sqrt{x}.$

iii) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \sin x.$

iv) Finden Sie eine Funktion, welche gleichmässig stetig, aber nicht Lipschitz-stetig ist.

v) Finden Sie eine Funktion, die Lipschitz-stetig, aber nicht differenzierbar ist.

Aufgabe 47. Beweisen Sie, falls $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und injektiv ist, dann ist f streng monoton.

Aufgabe 48. (★) Sei $f_n : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktionenfolge und $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$. Entscheiden Sie für jede der folgenden Aussagen, ob sie wahr oder falsch ist:

i.) Alle f_n sind stetig und $f_n \longrightarrow f$ punktweise $\implies f$ ist stetig.

ii.) Alle f_n sind stetig und $f_n \longrightarrow f$ gleichmässig $\implies f$ ist stetig.

iii.) Alle f_n sind differenzierbar auf $(0, 1)$ und $f_n \longrightarrow f$ gleichmässig $\implies f$ ist differenzierbar auf $(0, 1)$.

Aufgabe 49. Beweisen Sie, falls $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und beschränkt ist, dann besitzt f einen Fixpunkt.

Aufgabe 50. (★) Sei $f : (0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ gleichmässig stetig. Zeigen Sie: Es existiert ein $c \in \mathbb{R}$, sodass für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $(0, 1]$ mit $x_n \longrightarrow 0$ gilt:

$$f(x_n) \longrightarrow c \quad \text{für } n \longrightarrow \infty.$$

Bemerkung (nicht Teil der Aufgabe): Das bedeutet, dass $\lim_{x \downarrow 0} f(x) = c$.

Aufgabe 51. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

i)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{x}.$$

ii)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x x^5}{x^x}.$$

iii)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 + 3 - \sqrt{x^4 + 6x^2})x^2.$$

Aufgabe 52. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte (möglicherweise $\pm\infty$):

i)

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

ii)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \cos x}{x + 3}.$$

iii)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(2 + \sin^2 x)}{x + 100}.$$

iv)

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 e^{\sin^3(\frac{1}{x})}.$$

Aufgabe 53. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

i)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\sqrt{x^2 + 1} \right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}.$$

ii)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sqrt{x+4}-2}.$$

Aufgabe 54. Berechnen Sie den folgenden Grenzwert:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^{\tan x} \log(2+t) dt.$$

Aufgabe 55. Berechnen Sie den folgenden Grenzwert: Tipp: Verwenden sie einen Fundamentallimes.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 2x}{x^2 - 3x + 2} \right)^{\frac{x^2+1}{x-3}}.$$

7 Potenzreihen

Aufgabe 56. Sei $f : \mathbb{R}_{>-1} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log(1+x)$.

i.) Bestimmen Sie die Taylorreihe von f um $x_0 = 0$. Bestimmen Sie den Konvergenzradius ρ dieser Reihe.

ii.) Sei $R_2 f(x)$ das Restglied des Taylorpolynoms zweiter Ordnung. Zeigen Sie:

$$R_2 f(x) \geq 0, \quad \forall 0 \leq x < \rho.$$

iii.) Zeigen Sie für alle $n > 1$:

$$1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} \left(1 + \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) \leq \frac{1}{2n^2}.$$

Aufgabe 57. Es sei $f_n : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = 2n \left((2x)^{1/n} - 1 \right)$.

i.) Zeigen Sie, dass $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ punktweise konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$.

Hinweise: Schreiben Sie $(2x)^{1/n} = \exp(1/n \cdot \log(2x))$.

ii.) Zeigen Sie, dass die Konvergenz auf dem Intervall $[1, 2]$ gleichmässig ist.

iii.) Ist die Konvergenz gleichmässig auf $[1, \infty)$?

Aufgabe 58. (★) Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen in $z \in \mathbb{C}$:

i.)

$$\sum_{m \geq 1} \left(\sum_{j=1}^m \frac{1}{j} \right) z^m.$$

ii.)

$$\sum_{k \geq 0} 4k^5 3^k z^{k^2}.$$

iii.)

$$\sum_{n \geq 1} \left(5 - \frac{2}{n} \right)^n z^n.$$

iv.)

$$\sum_{n \geq 0} i^{n-1} n^n z^n.$$

v.)

$$\sum_{n \geq 0} \frac{2^n}{n!} z^n.$$

Aufgabe 59. (★) Entscheiden Sie für die folgenden Aussagen, ob sie wahr oder falsch sind:

i.) Sei $\rho > 0$ der Konvergenzradius von $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$. Dann ist f auf $\{z \in \mathbb{C} : |z| < \rho\}$ stetig.

ii.) Sei $\rho > 0$ der Konvergenzradius von $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$. Dann

$$p_m(z) = \sum_{n=0}^m a_n z^n \rightarrow f(z) \text{ gleichmässig auf } \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\} \text{ für alle } r < \rho.$$

Aufgabe 60. Berechnen Sie den folgenden Grenzwert mit Hilfe der Lagrange'schen Fehlerabschätzung:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \right).$$

8 Differentialrechnung

Aufgabe 61. (★) Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine gerade (d.h. $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$), differenzierbare Funktion. Zeigen Sie, dass $f' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine ungerade Funktion ist, d.h. $f'(-x) = -f'(x)$.

Aufgabe 62. Beweisen Sie die verallgemeinerte Bernoulli-Ungleichung, welche besagt, dass für alle $r \geq 1$, $x \geq 0$ gilt:

$$(1+x)^r \geq 1+rx.$$

Hint: Betrachten Sie die Funktion $h(x) = (1+x)^r - (1+rx)$.

Aufgabe 63. (★) Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

i.) Zeigen Sie, dass f auf ganz \mathbb{R} differenzierbar ist und berechnen Sie $f'(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

ii.) Ist f' an der Stelle $x = 0$ stetig?

Aufgabe 64. Sei $\epsilon > 0$. Wir definieren $f_\epsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_\epsilon(x) = |x|^{1+\epsilon}$. Zeigen Sie, dass f_ϵ auf ganz \mathbb{R} differenzierbar ist.

Aufgabe 65. Bestimmen Sie alle Punkte, in denen:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

i.) stetig ist.

ii.) differenzierbar ist.

Aufgabe 66. (★) Berechnen Sie die Ableitungen $f'(x)$ der folgenden Funktionen:

i.)

$$f(x) = \log\left(\frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{x}\right) \quad \text{für } x \in (0, 1).$$

ii.)

$$f(x) = \sqrt{\frac{a+bx}{a-bx}} \quad \text{für } a, b > 0, \text{ für } x \in \left(\frac{-a}{b}, \frac{a}{b}\right).$$

iii.)

$$f(x) = x^{1/3}(1-x)^{2/3}(1+x)^{1/2} \quad \text{für } x \in (0, 1).$$

iv.)

$$f(x) = x^{\sqrt{x}} \quad \text{für } x > 0.$$

v.)

$$f(x) = \log(\tan(x)^{-1/3}) \quad \text{für } x \neq k\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Aufgabe 67. (★) Seien $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen.

i.) Zeigen Sie, dass in allen Punkten $x \in (a, b)$ mit $f(x) \neq g(x)$ die Funktion $\max(f, g)$ differenzierbar ist.

ii.) Unter welcher Bedingung ist $\max(f, g)$ differenzierbar in einem Punkt $x \in (a, b)$ mit $f(x) = g(x)$.

Aufgabe 68. Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, $f \in C^n([0, 1], \mathbb{R})$ und $b \in \mathbb{R}$. Seien $0 \leq x_1 < \dots < x_{n+1} \leq 1$ sodass $f(x_i) = b$ für alle $i \in \{1, \dots, n+1\}$. Zeigen Sie, es existiert ein $\xi \in (x_1, x_{n+1})$ sodass $f^{(n)}(\xi) = 0$.

Hint: Induktion.

Aufgabe 69. Sei $K > 0$. Wir definieren:

$$f_n : [-K, K] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) := \begin{cases} \frac{n}{2}x^2 + \frac{1}{2n}, & x \in (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \\ |x|, & \text{sonst.} \end{cases}$$

- i.) Zeigen Sie, dass $f_n \in C^1([-K, K], \mathbb{R})$.
- ii.) Berechnen Sie den Limes von $(f_n)_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ in $(C^0([-K, K], \mathbb{R}), \|\cdot\|_{C^0([-K, K], \mathbb{R})})$.
- iii.) Schliessen Sie, dass $(C^1([-K, K], \mathbb{R}), \|\cdot\|_{C^0([-K, K], \mathbb{R})})$ nicht vollständig ist.

Aufgabe 70. (★)

- i.) Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:

(a)

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{3x + 2}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{3}\right\}.$$

(b)

$$g(x) = \log((x + \sin(x))^2), \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

(c)

$$h(x) = x^{\sin(\sqrt{x})}, \quad x > 0.$$

- ii.) Finden Sie alle lokalen Extrema der Funktion $f(x) := (1+x)\sqrt{|x|}$, $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 71. Zeigen Sie, dass die Exponentialabbildung auf \mathbb{R} konvex ist und zeigen Sie $e^x \geq 1+x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 72. (★) Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq y < x$ gilt:

$$ny^{n-1} \leq \frac{x^n - y^n}{x - y} \leq nx^{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Aufgabe 73. (★) Entscheiden Sie für jede der folgenden Aussagen, ob Sie wahr oder falsch ist:

- i.) Als Folge in $C^0([0, 1], \mathbb{R})$ hat $f_n(x) = x^n$ keine gleichmässig konvergente Teilfolge.
- ii.) Die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = x^2 \cos(1/x)$ für $x \neq 0$ und $f(0) = 0$ ist in $x = 0$ differenzierbar.
- iii.) Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ konvex. Dann ist f auf \mathbb{R} differenzierbar.
- iv.) Ist $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ gleichmässig stetig und auf $(0, 1)$ differenzierbar, dann ist f' beschränkt.
- v.) Ist $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und es gibt ein $x_0 \in (0, 1)$ mit $f'(x_0) = 0$, so hat f in x_0 ein lokales Extremum.

Aufgabe 74. Sei im folgenden $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar.

- i) Verwenden Sie den Satz von Rolle um den Mittelwertsatz zu beweisen.
- ii) Sei $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a, b)$, dann gilt: $f(x)$ ist auf (a, b) konstant.
- iii) Es gilt $f'(x) > 0$ für alle $x \in (a, b)$, dann ist f auf (a, b) monoton wachsend.

9 Integrationsrechnung

Aufgabe 75. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind, begründen Sie Ihre Antwort:

i) Es sei $f : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$. Dann gilt: $\int_a^b f(x) \, dx = 0 \iff f \equiv 0$.

ii) Seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sodass $f \leq g$. Dann gilt: $\int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b g(x) \, dx$.

iii) Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Dann impliziert $\int_a^b f(x) \, dx > 0$, dass $f > 0$.

iv) Sei $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$ monoton fallend mit $\int_0^\infty f(x) \, dx < \infty$. Dann gilt: $\sum_{n=0}^\infty f(n) < \infty$.

Aufgabe 76. Es sei $t \in \mathbb{R}_{>1}$. Berechnen Sie die folgenden Integrale:

i)

$$\int_1^t x^2 (\ln(x))^2 \, dx.$$

ii)

$$\int_1^3 \frac{2x+3}{x^2+3x+2} \, dx.$$

iii)

$$\int_0^t \sin(3x) \cos(5x) \, dx.$$

iv)

$$\int_{-2}^3 \frac{56x^7 \cos(\ln(x^8+6))}{x^8+6} \, dx.$$

v)

$$\int_0^3 \frac{\cos(x)}{1+\cos(x)} \, dx.$$

vi)

$$\int_{-1}^1 \sin(3x) \sqrt{x^4+3x^2+4} \, dx.$$

vii)

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}} \, dx.$$

viii)

$$\int_0^1 \ln(1+x^2) \, dx.$$

ix)

$$\int_2^4 \frac{x^4+x^3+x^2+1}{x^2+x-2} \, dx.$$

10 Anhang

Dieser Anhang beinhaltet zusätzliche Aufgaben. Die Aufgaben haben Lösungen, welche jedoch nicht ausführlich sind. Es handelt sich bei allen Aufgaben um *kurze Rechenaufgaben*.

Aufgabe 77. Führen Sie folgende Polynomdivisionen durch, das heisst berechnen Sie $f(x)/g(x)$:

i) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$, $g(x) = x - 1$.

ii) $f(x) = 3x^3 - 10x^2 + 7x - 12$, $g(x) = x - 3$.

iii) $f(x) = x^3 - 6x^2 - x + 6$, $g(x) = x - 1$.

iv) $f(x) = 2x^3 - x^2 - 8x + 4$, $g(x) = x^2 - 4$.

v) $f(x) = x^3 - tx^2 - 2x + 2t$, $g(x) = x^2 - 2$ wobei $t \in \mathbb{R}$.

vi) $f(x) = x^5 + x^4 - 8x^3 + 26x^2 - 29x + 21$, $g(x) = x^2 - 2x + 3$.

vii) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$, $g(x) = x + 1$.

viii) $f(x) = 2x^3 - 3x + 1$, $g(x) = 2x - 1$.

ix) $f(x) = 6a^6 + a^4b + 25b^3$, $g(x) = 3a^2 + 5b$.

x) $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 2x + 6$, $g(x) = x - 2$.

Aufgabe 78. Führen Sie die Partialbruchzerlegung folgender Funktionen durch:

i) $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$.

ii) $f(x) = \frac{x^2}{x^2-2x+1}$.

iii) $f(x) = \frac{5x^2+2x+1}{x^3+x}$.

iv) $f(x) = \frac{4x^2-5x-3}{2x^3+3x^2-1}$.

v) $f(x) = \frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}$.

vi) $f(x) = \frac{6x^2-5x-5}{x^3-2x^2-x+2}$.

vii) $f(x) = \frac{6x^2-4x-7}{x^3-3x-2}$.

viii) $f(x) = \frac{30}{x^3-x}$.