

# PVK Analysis - Lösungen

MB & LB, Vorlage gemäss SeSc

January 6, 2018

Die Verweise auf Theoreme und Propositionen beziehen sich auf das Skript der Vorlesung, welches Sie *hier* finden können. Die Verweise auf Serien beziehen sich auf das HS 15.

## 1 sup, inf, max, min von Mengen

**Aufgabe 1.** Berechnen Sie das Supremum (kleinste obere Schranke) der Menge:

$$S := \left\{ \frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots \right\}.$$

Was gilt für das Supremum der Menge  $M := S \cup \{1\}$ ?

**Aufgabe 2.** Es sei  $A \subset \mathbb{R}$  und  $A \neq \emptyset$ , desweiteren definieren wir  $-A := \{x \in \mathbb{R} : -x \in A\}$ . Entscheiden Sie für jede Aussage, ob sie wahr oder falsch ist:

- i.)  $A$  unbeschränkt  $\iff \sup A = \infty$ .
- ii.)  $A$  ist endlich  $\implies \max A = \sup A$ .
- iii.)  $\min A$  existiert  $\implies \min A = -\max(-A)$ .
- iv.)  $\sup A \notin A$ .

**Aufgabe 3.** Finden Sie das  $\max$ ,  $\min$ ,  $\sup$  und  $\inf$  der folgenden Menge und beweisen Sie ihre Aussage:

$$S := \left\{ \frac{2n+1}{n+1} : n \in \mathbb{N}_{\geq 1} \right\} = \left\{ \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{9}{5}, \frac{11}{6}, \dots \right\}.$$

**Aufgabe 4.** Es sei  $S := (1, 5]$ . Beweisen Sie, dass  $\inf S = 1$ .

## 2 Vollständige Induktion

### Aufgabe 5.

i.) Beweisen Sie die Bernoulli-Ungleichung:

$$\forall x > -1, \forall n \in \mathbb{N} : (1+x)^n \geq 1+nx.$$

mittels Induktion.

ii.) Seien  $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$  und  $x_1, \dots, x_n \geq 0$ . Zeigen Sie:

$$\prod_{i=1}^n (1+x_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^n x_i.$$

### Aufgabe 6. Zeigen Sie, dass:

$$\frac{4^{2n} - 3^n}{13} \in \mathbb{N}.$$

für alle  $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ .

### Aufgabe 7.

- i) Zeigen Sie, dass der kleinste, nicht triviale Teiler einer natürlichen Zahl  $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$  stets eine Primzahl ist. Hier ist keine vollständige Induktion notwendig, ein Beweis per Widerspruch genügt völlig.
- ii) Zeigen Sie, dass jede natürliche Zahl  $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$  als Produkt von Primzahlen in der kanonischen Form  $n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$ , wobei  $p_1 < p_2 < \cdots < p_k \in \mathbb{P}$  und  $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{N}_0$ , geschrieben werden kann. Diese Darstellung ist desweiteren eindeutig, dies muss jedoch nicht gezeigt werden.

### Aufgabe 8 (★ Trig Heavy). Wir definieren die Chebyshev Polynome für alle $x \in \mathbb{R}$ wie folgt:

$$P_0(x) = 1.$$

$$P_1(x) = x.$$

$$P_{n+1}(x) = xP_n(x) - P_{n-1}(x), \text{ für } n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, dass gilt:

$$P_n(2 \cos(\theta)) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}, \quad \theta \in (0, \pi).$$

### Aufgabe 9. (★) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $a_{jk} \in \mathbb{C}$ für $j = 0, \dots, n+1$ , $k = 0, \dots, n$ . Zeigen Sie, dass:

$$\sum_{j=0}^{n+1} \sum_{k=0}^n a_{jk} = \sum_{0 \leq j \leq k \leq n} a_{jk} + \sum_{0 \leq k < j \leq n+1} a_{jk}.$$

### 3 Folgen

**Aufgabe 10.** Seien  $(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$  und  $x \in \mathbb{R}$ .

- i.) Zeigen Sie, falls jede Teilfolge  $(x_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$  eine Teilfolge  $(x_{n_{i_j}})_{j \in \mathbb{N}}$  besitzt, die gegen  $x$  konvergiert, dann gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ .
- ii.) Finden Sie eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  so, dass für jede Teilfolge  $(x_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$  eine konvergente Teilfolge  $(x_{n_{i_j}})_{j \in \mathbb{N}}$  existiert, aber  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  nicht konvergiert.

**Aufgabe 11.** Sei  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$ ,  $z \in \mathbb{C}$ . Entscheiden Sie für jede Aussage, ob sie wahr oder falsch ist:

- i.)  $z_n \rightarrow z \iff \operatorname{Re}(z_n) \rightarrow \operatorname{Re}(z) \text{ und } \operatorname{Im}(z_n) \rightarrow \operatorname{Im}(z)$ .
- ii.)  $|z_n| \rightarrow |z| \implies z_n \rightarrow z$ .
- iii.)  $z_n \rightarrow z \implies |z_n| \rightarrow |z|$ .
- iv.)  $z_n \in \mathbb{R}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $z_n \rightarrow z \implies z \in \mathbb{R}$ .

**Aufgabe 12.** Seien  $m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ ,  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^m$  and  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Entscheiden Sie für jede der folgenden Aufgaben, ob sie wahr oder falsch sind (mit Beweis oder Gegenbeispiel):

- i.)  $(\|x_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert  $\implies (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert.
- ii.)  $(x_n \cdot y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert  $\implies (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert.
- iii.)  $(\lambda x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert  $\implies (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert.
- iv.) Jede beschränkte Folge konvergiert.

**Aufgabe 13.** Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

- i.)
$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n} - n).$$
- ii.)
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{5}{n-3}\right)^{(n+\sqrt{n})/2}.$$
- iii.)
$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n} - 5n^3}{n^3 + n(n+1)(n+2)}.$$

**Aufgabe 14.** Entscheiden Sie für jede Aussage, ob sie wahr oder falsch ist:

Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$  mit Häufungspunkt  $h \in \mathbb{R}$ .

- i.)  $h$  ist der Grenzwert von  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
- ii.)  $h$  ist der einzige Häufungspunkt in  $\mathbb{R} \implies a_n \rightarrow h$ .
- iii.)  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert  $\implies a_n \rightarrow h$ .
- iv.) Es existiert eine Teilfolge von  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , die gegen  $h$  konvergiert.
- v.)  $\forall \epsilon > 0 \forall N \in \mathbb{N} \exists n > N : |a_n - h| < \epsilon$ .

**Aufgabe 15. (★)**

i.) Berechnen Sie alle Häufungspunkte der Folge:

$$a_n = \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) \left(1 + \frac{3}{n}\right)^{n+1}.$$

ii.) Seien  $a_i > 0$  für alle  $i = 1, \dots, p$ . Zeigen Sie, dass:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1^n + \dots + a_p^n)^{1/n} = \max_{i=1, \dots, p} a_i.$$

**Aufgabe 16. (★)** Sei eine reelle Folge  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  rekursiv definiert durch:

$$a_0 = 1, \quad a_{k+1} = \sqrt{|a_k|} + \frac{15}{4} \text{ für } k \in \mathbb{N}.$$

i.) Zeigen Sie, dass  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  konvergiert.

ii.) Berechnen Sie den Grenzwert von  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ .

**Aufgabe 17. (★)**

i.) Berechnen Sie den folgenden Grenzwert:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log \left( \left( \frac{n}{n+1} \right)^n \right).$$

ii.) Berechnen Sie alle Häufungspunkte der komplexen Folge:

$$z_n = (n^4 - n^2 + 2)^{1/n} \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) + i \frac{n+e}{2n+1} (-1)^n.$$

iii.) Zeigen Sie:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ (n+1) \cos\left(\frac{1}{n+1}\right) - n \cos\left(\frac{1}{n}\right) \right] = 1.$$

**Aufgabe 18 (★).**

i) Es sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine reelle Folge derart, dass für ihre Inkremente gilt  $|a_{n+1} - a_n| \leq 2^{-n}$ . Zeigen Sie, dass  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy Folge ist. Bedeutet dies, dass  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert? Warum?

ii) Es sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine reelle Folge, welche rekursiv definiert ist mittels:

$$a_{n+2} = \frac{a_n + a_{n+1}}{2}, \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, dass dies eine Cauchy Folge ist. Verwenden Sie Teil i).

iii) Berechnen Sie den Grenzwert der Folge aus Teil ii).

## 4 Reihen

**Aufgabe 19.** Verwenden Sie den Cauchy'schen Verdichtungssatz (Kondensationssatz) um zu zeigen, dass die nachfolgenden Reihen divergieren respektive konvergieren:

i)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

ii)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

iii)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \text{ wobei } s > 1.$$

**Aufgabe 20.** (★) Bestimmen Sie für die folgenden Reihen, ob sie konvergent und ob sie absolut konvergent sind:

i.)

$$\sum_{k \geq 0} \frac{2k}{3k^3 + 1}.$$

ii.)

$$\sum_{k \geq 2} \frac{\sin(k\pi/2)}{\log(k)}.$$

iii.)

$$\sum_{k \geq 1} \frac{2^k k!}{k^k}.$$

**Aufgabe 21.** (★) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

i.)

$$\sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+1}.$$

ii.)

$$\sum_{n \geq 0} \left( \frac{n+5}{3n-2} \right)^{3n}.$$

iii.)

$$\sum_{n \geq 0} \frac{\exp(3n \log(n))}{(n!)^2}.$$

**Aufgabe 22.** (★) Berechnen Sie:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} \right).$$

**Aufgabe 23.**

i) Existiert ein  $s > 0$  sodass die nachfolgende Reihe konvergiert?

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log(n)^s}.$$

ii) Für welche  $s \in \mathbb{R}$  ist die nachfolgende Reihe konvergent?

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^s(n)}.$$

**Aufgabe 24.** Zeigen Sie, dass die nachfolgende Reihe konvergiert:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k^2 + 2k + 3}{6k^5 + 6}.$$

**Aufgabe 25.** Zeigen Sie, dass die folgende Reihe konvergiert:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}.$$

**Aufgabe 26.** Bestimmen Sie, ob die nachfolgende Reihe konvergiert:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n e^{-n^2}.$$

## 5 Stetigkeit und Grenzwerte von Funktionen

**Aufgabe 27.** Zeigen Sie, mit Hilfe der Definition der Stetigkeit, dass die folgende Funktion in  $x = 1$  stetig ist:

$$h : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{-1\} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \frac{x^2+x+1}{x+1}. \end{cases}$$

**Aufgabe 28.** Sind die 3 nachfolgenden Funktionen Lipschitz-stetig?

i)  $f : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \frac{1}{1+x^2}.$

ii)  $f : [0, 1) \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \sqrt{x}.$

iii)  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \sin x.$

iv) Finden Sie eine Funktion, welche gleichmässig stetig, aber nicht Lipschitz-stetig ist.

v) Finden Sie eine Funktion, die Lipschitz-stetig, aber nicht differenzierbar ist.

**Aufgabe 29.** Beweisen Sie, falls  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  stetig und injektiv ist, dann ist  $f$  streng monoton.

**Aufgabe 30.** (★) Sei  $f_n : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$  eine Funktionenfolge und  $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ . Entscheiden Sie für jede der folgenden Aussagen, ob sie wahr oder falsch ist:

i.) Alle  $f_n$  sind stetig und  $f_n \longrightarrow f$  punktweise  $\implies f$  ist stetig.

ii.) Alle  $f_n$  sind stetig und  $f_n \longrightarrow f$  gleichmässig  $\implies f$  ist stetig.

iii.) Alle  $f_n$  sind differenzierbar auf  $(0, 1)$  und  $f_n \longrightarrow f$  gleichmässig  $\implies f$  ist differenzierbar auf  $(0, 1)$ .

**Aufgabe 31.** Beweisen Sie, falls  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  stetig und beschränkt ist, dann besitzt  $f$  einen Fixpunkt.

**Aufgabe 32.** (★) Sei  $f : (0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$  gleichmässig stetig. Zeigen Sie: Es existiert ein  $c \in \mathbb{R}$ , sodass für jede Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $(0, 1]$  mit  $x_n \longrightarrow 0$  gilt:

$$f(x_n) \longrightarrow c \quad \text{für } n \longrightarrow \infty.$$

Bemerkung (nicht Teil der Aufgabe): Das bedeutet, dass  $\lim_{x \downarrow 0} f(x) = c$ .

**Aufgabe 33.** Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

i)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{x}.$$

ii)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x x^5}{x^x}.$$

iii)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 + 3 - \sqrt{x^4 + 6x^2})x^2.$$

**Aufgabe 34.** Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte (möglicherweise  $\pm\infty$ ):

i)

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

ii)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \cos x}{x + 3}.$$

iii)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(2 + \sin^2 x)}{x + 100}.$$

iv)

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 e^{\sin^3(\frac{1}{x})}.$$

**Aufgabe 35.** Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

i)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \sqrt{x^2 + 1} \right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}.$$

ii)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sqrt{x+4}-2}.$$

**Aufgabe 36.** Berechnen Sie den folgenden Grenzwert:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^{\tan x} \log(2+t) dt.$$

**Aufgabe 37.** Berechnen Sie den folgenden Grenzwert: Tipp: Verwenden sie einen Fundamentallimes.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 3x + 2} \right)^{\frac{x^2+1}{x-3}}.$$



## 6 Potenzreihen

**Aufgabe 38.** Sei  $f : \mathbb{R}_{>-1} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \log(1+x)$ .

i.) Bestimmen Sie die Taylorreihe von  $f$  um  $x_0 = 0$ . Bestimmen Sie den Konvergenzradius  $\rho$  dieser Reihe.

ii.) Sei  $R_2 f(x)$  das Restglied des Taylorpolynoms zweiter Ordnung. Zeigen Sie:

$$R_2 f(x) \geq 0, \quad \forall 0 \leq x < \rho.$$

iii.) Zeigen Sie für alle  $n > 1$ :

$$1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} \left(1 + \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) \leq \frac{1}{2n^2}.$$

**Aufgabe 39.** Es sei  $f_n : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_n(x) = 2n \left( (2x)^{1/n} - 1 \right)$ .

i.) Zeigen Sie, dass  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  punktweise konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert  $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ .

Hinweise: Schreiben Sie  $(2x)^{1/n} = \exp(1/n \cdot \log(2x))$ .

ii.) Zeigen Sie, dass die Konvergenz auf dem Intervall  $[1, 2]$  gleichmässig ist.

iii.) Ist die Konvergenz gleichmässig auf  $[1, \infty)$ ?

**Aufgabe 40.** (★) Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen in  $z \in \mathbb{C}$ :

i.)

$$\sum_{m \geq 1} \left( \sum_{j=1}^m \frac{1}{j} \right) z^m.$$

ii.)

$$\sum_{k \geq 0} 4k^5 3^k z^{k^2}.$$

iii.)

$$\sum_{n \geq 1} \left( 5 - \frac{2}{n} \right)^n z^n.$$

iv.)

$$\sum_{n \geq 0} i^{n-1} n^n z^n.$$

v.)

$$\sum_{n \geq 0} \frac{2^n}{n!} z^n.$$

**Aufgabe 41.** (★) Entscheiden Sie für die folgenden Aussagen, ob sie wahr oder falsch sind:

i.) Sei  $\rho > 0$  der Konvergenzradius von  $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ . Dann ist  $f$  auf  $\{z \in \mathbb{C} : |z| < \rho\}$  stetig.

ii.) Sei  $\rho > 0$  der Konvergenzradius von  $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ . Dann

$p_m(z) = \sum_{n=0}^m a_n z^n \rightarrow f(z)$  gleichmässig auf  $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$  für alle  $r < \rho$ .

**Aufgabe 42.** Berechnen Sie den folgenden Grenzwert mit Hilfe der Lagrange'schen Fehlerabschätzung:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \right).$$

## 7 Differentialrechnung

**Aufgabe 43.** (★) Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine gerade (d.h.  $f(x) = f(-x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ ), differenzierbare Funktion. Zeigen Sie, dass  $f' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine ungerade Funktion ist, d.h.  $f'(-x) = -f'(x)$ .

**Aufgabe 44.** Beweisen Sie die verallgemeinerte Bernoulli-Ungleichung, welche besagt, dass für alle  $r \geq 1$ ,  $x \geq 0$  gilt:

$$(1+x)^r \geq 1+rx.$$

Hint: Betrachten Sie die Funktion  $h(x) = (1+x)^r - (1+rx)$ .

**Aufgabe 45.** (★) Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

i.) Zeigen Sie, dass  $f$  auf ganz  $\mathbb{R}$  differenzierbar ist und berechnen Sie  $f'(x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ .

ii.) Ist  $f'$  an der Stelle  $x = 0$  stetig?

**Aufgabe 46.** Sei  $\epsilon > 0$ . Wir definieren  $f_\epsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_\epsilon(x) = |x|^{1+\epsilon}$ . Zeigen Sie, dass  $f_\epsilon$  auf ganz  $\mathbb{R}$  differenzierbar ist.

**Aufgabe 47.** Bestimmen Sie alle Punkte, in denen:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

i.) stetig ist.

ii.) differenzierbar ist.

**Aufgabe 48.** (★) Berechnen Sie die Ableitungen  $f'(x)$  der folgenden Funktionen:

i.)

$$f(x) = \log\left(\frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{x}\right) \quad \text{für } x \in (0, 1).$$

ii.)

$$f(x) = \sqrt{\frac{a+bx}{a-bx}} \quad \text{für } a, b > 0, \text{ für } x \in \left(\frac{-a}{b}, \frac{a}{b}\right).$$

iii.)

$$f(x) = x^{1/3}(1-x)^{2/3}(1+x)^{1/2} \quad \text{für } x \in (0, 1).$$

iv.)

$$f(x) = x^{\sqrt{x}} \quad \text{für } x > 0.$$

v.)

$$f(x) = \log(\tan(x)^{-1/3}) \quad \text{für } x \neq k\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

**Aufgabe 49.** (★) Seien  $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbare Funktionen.

i.) Zeigen Sie, dass in allen Punkten  $x \in (a, b)$  mit  $f(x) \neq g(x)$  die Funktion  $\max(f, g)$  differenzierbar ist.

ii.) Unter welcher Bedingung ist  $\max(f, g)$  differenzierbar in einem Punkt  $x \in (a, b)$  mit  $f(x) = g(x)$ .

**Aufgabe 50.** Seien  $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ ,  $f \in C^n([0, 1], \mathbb{R})$  und  $b \in \mathbb{R}$ . Seien  $0 \leq x_1 < \dots < x_{n+1} \leq 1$  sodass  $f(x_i) = b$  für alle  $i \in \{1, \dots, n+1\}$ . Zeigen Sie, es existiert ein  $\xi \in (x_1, x_{n+1})$  sodass  $f^{(n)}(\xi) = 0$ .

*Hint: Induktion.*

**Aufgabe 51.** Sei  $K > 0$ . Wir definieren:

$$f_n : [-K, K] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) := \begin{cases} \frac{n}{2}x^2 + \frac{1}{2n}, & x \in (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \\ |x|, & \text{sonst.} \end{cases}$$

- i.) Zeigen Sie, dass  $f_n \in C^1([-K, K], \mathbb{R})$ .
- ii.) Berechnen Sie den Limes von  $(f_n)_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$  in  $(C^0([-K, K], \mathbb{R}), \|\cdot\|_{C^0([-K, K], \mathbb{R})})$ .
- iii.) Schliessen Sie, dass  $(C^1([-K, K], \mathbb{R}), \|\cdot\|_{C^0([-K, K], \mathbb{R})})$  nicht vollständig ist.

**Aufgabe 52. (★)**

i.) Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:

(a)

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{3x + 2}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{3}\right\}.$$

(b)

$$g(x) = \log((x + \sin(x))^2), \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

(c)

$$h(x) = x^{\sin(\sqrt{x})}, \quad x > 0.$$

ii.) Finden Sie alle lokalen Extrema der Funktion  $f(x) := (1+x)\sqrt{|x|}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

**Aufgabe 53.** Zeigen Sie, dass die Exponentialabbildung auf  $\mathbb{R}$  konvex ist und zeigen Sie  $e^x \geq 1+x$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ .

**Aufgabe 54. (★)** Zeigen Sie, dass für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  mit  $0 \leq y < x$  gilt:

$$ny^{n-1} \leq \frac{x^n - y^n}{x - y} \leq nx^{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

**Aufgabe 55. (★)** Entscheiden Sie für jede der folgenden Aussagen, ob Sie wahr oder falsch ist:

- i.) Als Folge in  $C^0([0, 1], \mathbb{R})$  hat  $f_n(x) = x^n$  keine gleichmässig konvergente Teilfolge.
- ii.) Die Funktion  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  definiert durch  $f(x) = x^2 \cos(1/x)$  für  $x \neq 0$  und  $f(0) = 0$  ist in  $x = 0$  differenzierbar.
- iii.) Sei  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  konvex. Dann ist  $f$  auf  $\mathbb{R}$  differenzierbar.
- iv.) Ist  $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$  gleichmässig stetig und auf  $(0, 1)$  differenzierbar, dann ist  $f'$  beschränkt.
- v.) Ist  $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar und es gibt ein  $x_0 \in (0, 1)$  mit  $f'(x_0) = 0$ , so hat  $f$  in  $x_0$  ein lokales Extremum.

**Aufgabe 56.** Sei im folgenden  $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$  stetig und auf  $(a, b)$  differenzierbar.

- i.) Verwenden Sie den Satz von Rolle um den Mittelwertsatz zu beweisen.
- ii.) Sei  $f'(x) = 0$  für alle  $x \in (a, b)$ , dann gilt:  $f(x)$  ist auf  $(a, b)$  konstant.
- iii.) Beweisen Sie die folgende Identität

$$\arctan(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}.$$

iv.) Es gilt  $f'(x) > 0$  für alle  $x \in (a, b)$ , dann ist  $f$  auf  $(a, b)$  monoton wachsend.

## 8 Integrationsrechnung

**Aufgabe 57.** Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind, begründen Sie Ihre Antwort:

i) Es sei  $f : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$ . Dann gilt:  $\int_a^b f(x) \, dx = 0 \iff f \equiv 0$ .

ii) Seien  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sodass  $f \leq g$ . Dann gilt:  $\int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b g(x) \, dx$ .

iii) Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann impliziert  $\int_a^b f(x) \, dx > 0$ , dass  $f > 0$ .

iv) Sei  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$  monoton fallend mit  $\int_0^\infty f(x) \, dx < \infty$ . Dann gilt:  $\sum_{n=0}^\infty f(n) < \infty$ .

**Aufgabe 58.** Es sei  $t \in \mathbb{R}_{>1}$ . Berechnen Sie die folgenden Integrale:

i)

$$\int_1^t x^2 (\ln(x))^2 \, dx.$$

ii)

$$\int_1^3 \frac{2x+3}{x^2+3x+2} \, dx.$$

iii)

$$\int_0^t \sin(3x) \cos(5x) \, dx.$$

iv)

$$\int_{-2}^3 \frac{56x^7 \cos(\ln(x^8+6))}{x^8+6} \, dx.$$

v)

$$\int_0^3 \frac{\cos(x)}{1+\cos(x)} \, dx.$$

vi)

$$\int_{-1}^1 \cos(3x) \sqrt{x^4+3x^2+4} \, dx.$$

vii)

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}} \, dx.$$

viii)

$$\int_0^1 \ln(1+x^2) \, dx.$$

ix)

$$\int_2^4 \frac{x^4+x^3+x^2+1}{x^2+x-2} \, dx.$$