PVK Analysis I

Marco Bertenghi & Lukas Burch, Vorlage gemäss Severin Schraven

January 7, 2020

Die Verweise auf Theoreme und Propositionen beziehen sich auf das Skript der Vorlesung, welches Sie *hier* finden können. Die Verweise auf Serien beziehen sich auf das HS 15. Mit (*) markierte Aufgaben, sind im allgemeinen anspruchsvoller.

1 sup, inf, max, min von Mengen

Aufgabe 1. *Berechnen Sie das Supremum (kleinste obere Schranke) der Menge:*

$$S := \left\{ \frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots \right\}.$$

Was gilt für das Supremum der Menge $M := S \cup \{1\}$*?*

Solution:
Um zu zeigen, dass eine reelle Zahl M die kleinste obere Schranke einer Menge S ist, geht man normalerweise in 2 Schritten vor.

1. Zeige, dass M eine obere Schranke von S ist, i.e. zeige, dass $M \geq s$ für alle $s \in S$.
2. Zeige, dass M die kleinste obere Schranke von S ist. Meist geschieht dies per Widerspruch, man nimmt an, dass ein $\epsilon > 0$ existiert, sodass $M - \epsilon$ nach wie vor eine obere Schranke von S ist. Man findet dann ein Element $s \in S$ mit $s > M - \epsilon$, was zeigt, dass $M - \epsilon$ keine obere Schranke von S ist.

Wir stellen nun fest, dass jedes Element $s \in S$ kleiner als 1 ist, da $\frac{n}{n+1} < 1$. Wir behaupten, dass 1 das Supremum der Menge ist. Nehme zum Widerspruch an, dass 1 nicht die kleinste obere Schranke von S ist, d.h. es existiert $\epsilon > 0$ sodass $1 - \epsilon$ auch eine obere Schranke von S ist.

Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ sodass $n_0 > \frac{1}{\epsilon} - 1$, dann gilt $1 - \epsilon < \frac{n_0}{n_0+1}$ was zeigt, dass $1 - \epsilon$ keine obere Schranke von S ist, da $\epsilon > 0$ beliebig war, muss 1 die kleinste obere Schranke von S sein.

Unsere Bemühungen lassen nun schliessen, dass $\sup M = \max M = 1$ gelten muss, da 1 das Supremum der Menge S ist und insbesondere gilt $1 \in M$.

Aufgabe 2. *Es sei* $A \subset \mathbb{R}$ *und* $A \neq \emptyset$*, desweiteren definieren wir* $-A := \{x \in \mathbb{R} : -x \in A\}$*. Entscheiden Sie für jede Aussage, ob sie wahr oder falsch ist:*

i.) A *unbeschränkt* $\iff \sup A = \infty$.

ii.) A *ist endlich* $\implies \max A = \sup A$.

iii.) $\min A$ *existiert* $\implies \min A = -\max(-A)$.

iv.) $\sup A \notin A$.

Solution:

i.) Falsch, Gegenbeispiel $A = (-\infty, 0]$ ist unbeschränkt, aber $supA = 0$.

ii.) Wahr.

iii.) Wahr. Sei $x \in A$, dann gilt $-x \in -A$. Damit $x = -(-x) \geq -\max(-A)$. Da $-\max(-A) \in A$, folgt die Aussage.

iv.) Falsch. $A = \{42\}$. Dann ist $\sup A = 42 \in A$.

Aufgabe 3. *Finden Sie das max, min, sup und inf der folgenden Menge und beweisen Sie ihre Aussage:*

$$S := \left\{ \frac{2n+1}{n+1} : n \in \mathbb{N}_{\geq 1} \right\} = \left\{ \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{9}{5}, \frac{11}{6}, \dots \right\}.$$

Solution:
Der kleinste Term scheint $\frac{3}{2}$ zu sein und es scheint kein kleineres Element zu geben, aber alle Elemente sind kleiner als 2 und da $\lim \frac{2n+1}{n+1} = 2$ behaupten wir folgende Aussagen:
a) Es gibt kein Maximum, b) $\sup S = 2$ und c) $\min S = \inf S = \frac{3}{2}$.

Wir beginnen mit dem Supremum, können wir nähmlich zeigen, dass $\sup S = 2$ dann kann S kein Maximum besitzen, da $2 \notin S$. Es gilt offensichtlich:

$$\frac{2n+1}{n+1} < 2 \iff 2n+1 < 2n+2 \iff 1 < 2.$$

Da diese Aussage immer wahr ist, folgern wir, dass 2 in der Tat eine obere Schranke von S ist. Nun zeigen wir, dass 2 die kleinste obere Schranke von S ist. Falls 2 nicht die kleinste obere Schranke von S wäre, so würde $\epsilon > 0$ existieren sodass $2 - \epsilon$ eine obere Schranke von S ist. Wir behaupten, es existiert eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ sodass:

$$2 - \epsilon < \frac{2n+1}{n+1}.$$

gilt und somit $2 - \epsilon$ keine obere Schranke von S ist. Es gilt jedoch offensichtlich:

$$2 - \epsilon < \frac{2n+1}{n+1} \iff -\epsilon < \frac{2n+1}{n+1} - 2 \iff \epsilon > \frac{1}{n+1} \iff n > \frac{1}{\epsilon} - 1.$$

Wählen wir also $n \in \mathbb{N}$ sodass $n > \frac{1}{\epsilon} - 1$, dann gilt $2 - \epsilon < \frac{2n+1}{n+1}$, somit haben wir gezeigt, dass $\sup S = 2$. Um etwas präziser zu zeigen, dass $2 \notin S$ gilt, nehmen wir an, dass eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ existiert sodass:

$$2 = \frac{2n+1}{n+1} \iff 2(n+1) = 2n+1 \iff 2 = 1.$$

was natürlich ein Widerspruch ist, also $2 \notin S$ und somit existiert kein Maximum.

Schliesslich zeigen wir, dass $\min S = \frac{3}{2}$. Offensichtlich gilt $\frac{3}{2} \in S$. Es genügt also zu zeigen, dass $\frac{3}{2}$ eine untere Schranke von S ist, wir haben aber offensichtlich

$$\frac{2n+1}{n+1} \geq \frac{3}{2} \iff 2(2n+1) \geq 3(n+1) \iff n \geq 1.$$

Was natürlich wahr ist für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ wie in der Menge von S spezifiert, also gilt $\min S = \frac{3}{2}$.

Aufgabe 4. *Es sei* $S := (1, 5]$. *Beweisen Sie, dass* $\inf S = 1$.

Solution:
Per Definition von S erfüllt jedes $x \in S$ die Ungleichung $1 < x \leq 5$ und somit ist 1 natürlich eine untere Schranke von S. Wir wollen zeigen, dass 1 die grösste untere Schranke von S ist, insbesondere bedeutet dies das Wort "offensichtlich" möglichst zu vermeiden.

Wir nehmen also an, dass 1 nicht die grösste untere Schranke von S ist, dann existiert ein $\epsilon > 0$ sodass $1+\epsilon$ eine untere Schranke von S ist. Um ein Widerspruch zu erhalten finden wir ein Element $x \in S$, sodass $1 < x < 1+\epsilon$, was zeigt, dass $1+\epsilon$ keine untere Schranke von S sein kann.

Wir wählen $x = 1 + \frac{\epsilon}{2}$, dann gilt offensichtlich:

$$1 < x < 1 + \epsilon \leq 5.$$

da per Annahme $1+\epsilon$ eine untere Schranke von S war. Also ist $1+\epsilon$ keine untere Schranke von S und somit haben wir gezeigt, dass 1 die grösste untere Schranke von S ist.

2 Vollständige Induktion

Aufgabe 5.

i.) *Beweisen Sie die Bernoulli-Ungleichung:*

$$\forall x > -1 \ , \ \forall n \in \mathbb{N} : (1+x)^n \geq 1 + nx.$$

mittels Induktion.

ii.) *Seien* $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ *und* $x_1, \ldots, x_n \geq 0$. *Zeigen Sie:*

$$\prod_{i=1}^{n} (1 + x_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Solution:

i.) Sei $x > -1$. Zuerst zeigen wir den Fall $n = 0$:

$$(1+x)^0 = 1 = 1 + 0 \cdot x.$$

Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig, aber fix, sodass $(1+x)^n \geq 1 + nx$ (IA).
Dann berechnen wir

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \overset{\text{IA, } x>-1}{\geq} (1+x)(1+nx) = 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x.$$

ii.) Zuerst zeigen wir den Fall $n = 2$. Seien $x_1, x_2 \geq 0$, dann

$$\prod_{i=1}^{2} (1 + x_i) = 1 + (x_1 + x_2) + x_1 \cdot x_2 \overset{x_1, x_1 \geq 0}{\geq} 1 + (x_1 + x_2) = 1 + \sum_{i=1}^{2} x_i.$$

Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ beliebig, aber fix, sodass $\prod_{i=1}^{n}(1 + x_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^{n} x_i$ für alle $x_1, \ldots, x_n \geq 0$ (IA).
Dann berechnen wir für $x_1, \ldots, x_{n+1} \geq 0$:

$$\prod_{i=1}^{n+1} (1 + x_i) = (1 + x_{n+1}) \cdot \prod_{i=1}^{n} (1 + x_i) \overset{\text{IA}}{\geq} (1 + x_{n+1})(1 + \sum_{i=1}^{n} x_i)$$

$$= 1 + \sum_{i=1}^{n+1} x_i + x_{n+1} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \overset{x_i \geq 0}{\geq} 1 + \sum_{i=1}^{n+1} x_i.$$

Aufgabe 6. *Zeigen Sie, dass:*

$$\frac{4^{2n} - 3^n}{13} \in \mathbb{N}.$$

für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.

Solution:
Zuerst zeigen wir den Fall $n = 1$:

$$\frac{4^2 - 3^1}{13} = \frac{13}{13} = 1 \in \mathbb{N}.$$

Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ beliebig, aber fix, sodass $\frac{4^{2n}-3^n}{13} \in \mathbb{N}$.
Dann berechnen wir:

$$\frac{4^{2(n+1)} - 3^{(n+1)}}{13} = \frac{4^2(4^{2n} - 3^n)}{13} + \frac{(4^2 - 3)3^n}{13} = 4^2 \underbrace{\frac{4^{2n} - 3^n}{13}}_{\in \mathbb{N} \text{ nach IA}} + 3^n \in \mathbb{N}.$$

Aufgabe 7.

i) *Zeigen Sie, dass der kleinste, nicht triviale Teiler einer natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ stets eine Primzahl ist. Hier ist keine vollständige Induktion notwendig, ein Beweis per Widerspruch genügt völlig.*

ii) *Zeigen Sie, dass jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ als Produkt von Primzahlen in der kanonischen Form $n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$, wobei $p_1 < p_2 < \cdots < p_k \in \mathbb{P}$ und $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{N}_0$, geschrieben werden kann. Diese Darstellung ist desweiteren eindeutig, dies muss jedoch nicht gezeigt werden.*

Solution:

i) Zum Widerspruch sei d_0 der kleinste, nicht triviale Teiler von $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ ohne dabei eine Primzahl zu sein. Da nun d_0 keine Primzahl ist, existiert per Definition eine Zahl v wobei $1 < v < d_0$ sodass $v \mid d_0$, per Transitivität gilt dann aber auch $v \mid n$ da bereits $d_0 \mid n$. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme, dass d_0 der kleinste, nicht triviale Teiler von n war.

ii) Für $n = 2$ ist n eine Primzahl und die Aussage somit trivial Wahr. Für den Induktionsschritt nehmen wir an, dass wir für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ die Darstellung $n = p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k}$ wie in der Aufgabenstellung haben. Falls nun $n+1$ eine Primzahl ist, so gibt es nichts zu zeigen, ist $n+1$ jedoch keine Primzahl so muss gelten $n + 1 = mq$ wobei $1 < m \leq q \leq n$, aber für solche Zahlen haben wir per Induktionsannahme kanonische Darstellungen der Form $m = p_1^{b_1} \cdots p_k^{b_k}$ und $q = s_1^{c_1} \cdots s_l^{c_l}$ haben wobei $p_1 < \cdots < p_k$ und $s_1 < \cdots < s_l$ alles Primzahlen sind und die Exponenten natürliche Zahlen. Zusammenfassen der Primzahlen und Neuanordnung/Neubeschriftung liefert dann die Aussage.

Aufgabe 8 ($\star$ Trig Heavy)**.** *Wir definieren die Chebyshev Polynome für alle $x \in \mathbb{R}$ wie folgt:*

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1. \\ P_1(x) &= x. \\ P_{n+1}(x) &= xP_n(x) - P_{n-1}(x), \text{ für } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass gilt:

$$P_n(2\cos(\theta)) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}, \ \theta \in (0, \pi).$$

Solution:
Wir zeigen die beiden Fälle $n = 0$ und $n = 1$, da wir in dem Induktionsschritt sowohl $k = n$ und $k = n - 1$ benötigen werden. Für $n = 0$ haben wir die triviale Aussage:

$$1 = P_0(2\cos\theta) = \frac{\sin\theta}{\sin\theta} = 1.$$

Für $n = 1$ haben wir die Aussage:

$$2\cos\theta = P_1(2\cos\theta) = \frac{\sin 2\theta}{\sin\theta} = \frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta} = 2\cos\theta.$$

Nehmen wir nun an, dass die Aussage für $n = k$ und $n = k-1$ für $k > 0$ wahr ist, i.e. wir haben die beiden Gleichungen:

$$P_k(2\cos\theta) = \frac{\sin((k+1)\theta)}{\sin\theta}, \text{ und } P_{k-1}(2\cos\theta) = \frac{\sin(k\theta)}{\sin\theta}.$$

Per Definition von P_{k+1} haben wir nun:

$$\begin{aligned} P_{k+1}(2\cos\theta) &= 2\cos\theta P_k(2\cos\theta) - P_{k-1}(2\cos\theta) \\ &= 2\cos\theta\frac{\sin((k+1)\theta)}{\sin\theta} - \frac{\sin(k\theta)}{\sin\theta}. \end{aligned}$$

Wir schreiben $k\theta = (k+1)\theta - \theta$ und erhalten:

$$\begin{aligned} P_{k+1}(2\cos\theta) &= \frac{2\cos\theta\sin((k+1)\theta) - \sin((k+1)\theta - \theta)}{\sin\theta} \\ &= \frac{2\cos\theta\sin((k+1)\theta) - \cos\theta\sin((k+1)\theta) + \cos((k+1)\theta)\sin\theta}{\sin\theta} \\ &= \frac{\cos\theta\sin((k+1)\theta) + \cos((k+1)\theta)\sin\theta}{\sin\theta} \\ &= \frac{\sin((k+2)\theta}{\sin\theta}. \end{aligned}$$

Aufgabe 9. $(\star)$ *Sei $n \in \mathbb{N}$ und $a_{jk} \in \mathbb{C}$ für $j = 0, \ldots, n+1$, $k = 0, \ldots, n$. Zeigen Sie, dass:*

$$\sum_{j=0}^{n+1}\sum_{k=0}^{n} a_{jk} = \sum_{0\le j\le k\le n} a_{jk} + \sum_{0\le k<j\le n+1} a_{jk}.$$

Solution:
Sei zuerst $n = 0$. Dann erhalten wir einfach:

$$\sum_{j=0}^{n+1}\sum_{k=0}^{n} a_{jk} = a_{00} + a_{10} = \sum_{0\le j\le k\le n} a_{jk} + \sum_{0\le k<j\le n+1} a_{jk}.$$

Nehmen wir nun an, dass die Formel für ein $n \in \mathbb{N}$ gültig ist. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n+2}\sum_{k=0}^{n+1} a_{jk} &= \sum_{j=0}^{n+2}\left(\sum_{k=0}^{n} a_{jk} + a_{j,n+1}\right) \\ &= \sum_{j=0}^{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n} a_{jk} + a_{j,n+1}\right) + \left(\sum_{k=0}^{n} a_{n+2,k} + a_{n+2,n+1}\right) \\ &= \sum_{j=0}^{n+1}\sum_{k=0}^{n} a_{jk} + \sum_{j=0}^{n+1} a_{j,n+1} + \sum_{k=0}^{n+1} a_{n+2,k} \\ &= \sum_{0\le j\le k\le n} a_{jk} + \sum_{0\le k<j\le n+1} a_{jk} + \sum_{j=0}^{n+1} a_{j,n+1} + \sum_{k=0}^{n+1} a_{n+2,k} \\ &= \sum_{0\le j\le k\le n+1} a_{jk} + \sum_{0\le k<j\le n+2} a_{jk}. \end{aligned}$$

womit der Induktionsschritt gezeigt wäre.

Aufgabe 10. *Zeigen Sie die* ***Vorwärts-Rückwärts Induktion*** *(auch bekannt als Cauchy-Induktion): Es sei $P(n)$ eine Aussage für $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Falls $P(2)$ wahr ist und*

1. *Aus $P(k)$ lässt sich $P(2k)$ folgern (Vorwärts Schritt).*
2. *Aus $P(k+1)$ lässt sich $P(k)$ folgern (Rückwärts Schritt).*

Dann gilt die Aussage $P(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$.

Solution:
Da $P(2) = P(2^1)$ wahr ist, folgt aus der Eigenschaft 1 (E1) für $k = 2$, dass $P(2 \cdot 2) = P(2^2)$ wahr ist. Durch wiederholte Anwendung von (E1) erhalten wir, dass aus $P(2^k)$ stets $P(2^{k+1})$ folgt für $k \in \mathbb{N}$. Mit Hilfe der (standard) vollständigen Induktion erhalten wir dann die Aussage,

$$P(2^r) \text{ ist wahr für all } r \in \mathbb{N}. \tag{*}$$

Wenden wir nur die Eigenschaft 2 (E2) auf (*) an, erhalten wir zuerst, dass $P(2^r - 1)$ wahr ist für all $r \in \mathbb{N}$, und erneut durch sukzessive Anwendung von (E2) dass $P(2^r - m)$ wahr ist, also auch $P(2^r - (m+1))$ für alle $r, m \in \mathbb{N}$ mit $m < 2^r$. Wir haben also

$$P(2^r - (m+1)) \text{ ist wahr für alle } r, m \in \mathbb{N} \text{ sodass } m < 2^r. \tag{**}$$

Es ist jedoch offensichtlich, dass für all $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ $r, m \in \mathbb{N}$ existieren, sodass $n = 2^r - (m+1)$ mit $m < 2^r$. Also erhalten wir dank (**), dass

$$P(n) \text{ ist wahr für alle } n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$$

was zu zeigen war.

Aufgabe 11. *($\star$) Es seien $0 \leq x_i \leq \pi$ für $i = 1, \dots, n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie folgende Ungleichung für alle $n \in \mathbb{N}$ mit Hilfe der Vorwärts-Rückwärts Induktion:*

$$\sin x_1 + \sin x_2 + \cdots + \sin x_n \leq n \sin\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right).$$

Solution:
Wir verwenden die Vorwärts-Rückwärts Induktion. Da wir die Aussage jedoch für alle $n \in \mathbb{N}$ (inklusive $n = 1$) zeigen wollen, müssen wir den Fall $n = 1$ zusätzlich analysieren, dieser ist jedoch trivial.

• Für $n = 2$ erhalten wir

$$\sin x_1 + \sin x_2 = 2 \sin\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \underbrace{\cos\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)}_{\leq 1} \leq 2 \sin\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$$

womit die Aussage $P(2)$ verifiziert wurde.

• Um den Vorwärts Schritt zu verifizieren nehmen wir an, dass wir für $k \in \mathbb{N}$ folgende Ungleichung haben:

$$\sin x_1 + \cdots + \sin x_k \leq k \sin\left(\frac{x_1 + \cdots + x_k}{k}\right) \tag{*}$$

falls wir diese Aussagen mit $P(k)$ bezeichnen, müssen wir zeigen, dass sich aus dieser $P(2k)$ herleiten lässt, also dass gilt:

$$\sin x_1 + \cdots + \sin x_k + \sin x_{k+1} + \cdots + \sin x_{2k} \leq 2k \sin\left(\frac{x_1 + \cdots + x_{2k}}{2k}\right).$$

Wir verwenden (*) für die k Zahlen $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_{2k}$ und erhalten per Annahme

$$\sin x_{k+1} + \cdots + \sin x_{2k} \leq k \sin\left(\frac{x_{k+1} + \cdots + x_{2k}}{k}\right). \tag{**}$$

Kombinieren wir (*) und (**) erhalten wir

$$\sin x_1 + \cdots + \sin x_{2k} \leq k\left[\sin\left(\frac{x_1 + \cdots + x_k}{k}\right) + \sin\left(\frac{x_{k+1} + \cdots + x_{2k}}{k}\right)\right]. \tag{***}$$

Es gilt jedoch, dass

$$\frac{x_1 + \cdots + x_k}{k}, \frac{x_{k+1} + \cdots + x_{2k}}{k} \in [0, \pi]$$

also können wir auf den geklammerten Term in (***) oben die Induktionsannahme für $n = 2$ anwenden und erhalten

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{x_1 + \cdots + x_k}{k}\right) + \sin\left(\frac{x_{k+1} + \cdots + x_{2k}}{k}\right) &\overset{P(2)}{\leq} 2\sin\left(\frac{\frac{x_1+\cdots+x_k}{k} + \frac{x_{k+1}+\cdots+x_{2k}}{k}}{2}\right)\\ &= 2\sin\left(\frac{x_1 + \cdots + x_{2k}}{2k}\right).\end{aligned}$$

Aus obiger Überlegung und (***) erhalten wir also schliesslich:

$$\sin x_1 + \cdots + \sin x_{2k} \leq 2k \sin\left(\frac{x_1 + \cdots + x_{2k}}{2k}\right),$$

also $P(k) \rightsquigarrow P(2k)$.

• Um den Rückwärts Schritt zu verifizieren nehmen wir an, dass wir für $k \in \mathbb{N}$ folgende Ungleichung haben:

$$\sin x_1 + \cdots + \sin x_{k+1} \leq (k+1)\sin\left(\frac{x_1 + \cdots + x_{k+1}}{k+1}\right). \tag{$\bigstar$}$$

Wir wollen $P(k+1) \rightsquigarrow P(k)$ nachweisen. Wir verwenden ($\bigstar$) für die spezielle Wahl

$$x_{k+1} := \frac{x_1 + \cdots + x_k}{k} \in [0, \pi]$$

und erhalten:

$$\begin{aligned}\sin x_1 + \cdots + \sin x_k + \sin\left(\frac{x_1 + \cdots + x_k}{k}\right) &\leq (k+1)\sin\left(\frac{x_1 + \cdots + x_k + \frac{x_1+\cdots+x_k}{k}}{k+1}\right)\\ &= (k+1)\sin\left(\frac{x_1 + \cdots + x_k}{k}\right)\\ &= k\sin\left(\frac{x_1 + \cdots + x_k}{k}\right) + \sin\left(\frac{x_1 + \cdots + x_k}{k}\right),\end{aligned}$$

kürzen wir auf beiden Seiten der Ungleichung den letzten Term erhalten wir schliesslich

$$\sin x_1 + \cdots + \sin x_k \leq k \sin\left(\frac{x_1 + \cdots + x_k}{k}\right)$$

also $P(k+1) \rightsquigarrow P(k)$. Gemäss dem Prinzip der Cauchy-Induktion ist die Aussage somit für alle $n \in \mathbb{N}$ vollständig bewiesen.

Aufgabe 12. ($\star$) *Zeigen Sie mit Hilfe der Cauchy-Induktion die folgende Ungleichung, bekannt als Cauchy's Ungleichung (oder auch arithmetisches Mittel dominiert das geometrische Mittel): Es seien* $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, *dann gilt*

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}.$$

Solution:
Wir folgen dem selben Rezept wie in der vorherigen Aufgabe.

- $n = 1$ ist trivial.

- $n = 2$ wir haben:

$$\begin{aligned}\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 - a_1 a_2 &= \frac{1}{4}(a_1^2 + 2a_1a_2 + a_2^2) - a_1a_2 \\ &= \frac{1}{4}(a_1^2 - 2a_1a_2 + a_2^2) = \left(\frac{a_1 - a_2}{2}\right)^2 \geq 0,\end{aligned}$$

oder äquivalent dazu

$$\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right) \geq \sqrt{a_1 a_2}.$$

- $P(n) \rightsquigarrow P(2n)$:

$$\begin{aligned}\frac{a_1 + \cdots + a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{2n}}{2n} &= \frac{\frac{a_1+\cdots+a_n}{n} + \frac{a_{n+1}+\cdots+a_{2n}}{n}}{2} \\ &\overset{P(n)}{\geq} \frac{\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} + \sqrt[n]{a_{n+1} \cdot \ldots \cdot a_{2n}}}{2} \\ &\overset{P(2)}{\geq} \sqrt{\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} \cdot \sqrt[n]{a_{n+1} \cdot \ldots \cdot a_{2n}}} \\ &= \sqrt[2n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n \cdot a_{n+1} \cdot \ldots \cdot a_{2n}}.\end{aligned}$$

- $P(n+1) \rightsquigarrow P(n)$: Wir nehmen $P(n+1)$ an, d.h. es gilt

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n + a_{n+1}}{n+1} \geq \sqrt[n+1]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n \cdot a_{n+1}}. \tag{*}$$

Wir treffen in (*) die spezielle Wahl

$$a_{n+1} = \frac{a_1 \cdots + a_n}{n},$$

und erhalten:

$$\begin{aligned}\frac{a_1 + \cdots + a_n + \frac{a_1+\cdots+a_n}{n}}{n+1} = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} &\geq \sqrt[n+1]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n \cdot \left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right)} \\ \implies \left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right)^{n+1} &\geq a_1 \cdot \ldots \cdot a_n \cdot \left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right) \\ \implies \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} &\geq \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}.\end{aligned}$$

Gemäss dem Prinzip der Cauchy-Induktion gilt die Aussage somit für alle $n \in \mathbb{N}$.

3 Folgen

Aufgabe 13. *Seien* $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ *und* $x \in \mathbb{R}$.

i.) *Zeigen Sie, falls jede Teilfolge* $(x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ *eine Teilfolge* $(x_{n_{i_j}})_{j\in\mathbb{N}}$ *besitzt, die gegen* x *konvergiert, dann gilt* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

ii.) *Finden Sie eine Folge* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *so, dass für jede Teilfolge* $(x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ *eine konvergente Teilfolge* $(x_{n_{i_j}})_{j\in\mathbb{N}}$ *existiert, aber* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *nicht konvergiert.*

Solution:

i.) Version 1

Seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $x \in \mathbb{R}$ wie in der Aufgabenstellung. Wir nehmen an, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gegen x konvergiert, d.h.

$$\exists \epsilon > 0\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n \geq N : |x_n - x| \geq \epsilon.$$

Wir wählen ein $\epsilon > 0$ und eine Teilfolge $(x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$, sodass für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt $|x_{n_i} - x| \geq \epsilon$. Dies ist ein Widerspruch dazu, dass eine Teilfolge $(x_{n_{i_j}})_{j\in\mathbb{N}}$ existiert mit $\lim_{j\to\infty} x_{n_{i_j}}$.

Version 2

Wir wissen, es gibt Teilfolgen $(x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$, $(x_{m_i})_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$, sodass $\lim_{i\to\infty} x_{n_i} = \liminf_{n\to\infty} x_n$ und $\lim_{i\to\infty} x_{m_i} = \limsup_{n\to\infty} x_n$. Da jeweils eine Teilfolge von den obigen Reihen gegen x konvergiert und der Limes konvergenter Folgen gleich der Limes seiner Teilfolgen ist (Prop. 3.19), gilt $\liminf_{n\to\infty} x_n = x = \limsup_{n\to\infty} x_n$. Aus Satz 3.13 folgt $\lim_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n = x$.

ii.) $x_n = (-1)^n$ konvergiert nicht. Sei $(x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dann ist $A_1 := \{n_i \in \mathbb{N} : n_i \text{ ist ungerade }\}$ oder $A_2 := \{n_i \in \mathbb{N} : n_i \text{ ist gerade }\}$ abzählbar unendlich. Wähle $i \in \{1, 2\}$ sodass A_i unendlich ist, dann ist $(x_l)_{l\in A_i}$ eine konvergente Teilfolge von $(x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ (mit Grenzwert $(-1)^i$).

Aufgabe 14. *Sei* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C}$. *Entscheiden Sie für jede Aussage, ob sie wahr oder falsch ist:*

i.) $z_n \longrightarrow z \iff Re(z_n) \longrightarrow Re(z)$ *und* $Im(z_n) \longrightarrow Im(z)$.

ii.) $|z_n| \longrightarrow |z| \Longrightarrow z_n \longrightarrow z$.

iii.) $z_n \longrightarrow z \Longrightarrow |z_n| \longrightarrow |z|$.

iv.) $z_n \in \mathbb{R}$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *und* $z_n \longrightarrow z \Longrightarrow z \in \mathbb{R}$.

Solution:

i.) Wahr, siehe Seite 53.

ii.) Falsch, Gegenbeispiel $z_n = (-1)^n, z = i$.

iii.) Wahr, folgt aus der umgekehrten Dreiecksungleichung und dem Sandwichsatz:
$0 \leq \big|\, |z_n| - |z| \,\big| \leq |z_n - z| \longrightarrow 0$.

iv.) Wahr, folgt aus der ersten Aussage.

Aufgabe 15. *Seien* $m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^m$ *and* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Entscheiden Sie für jede der folgenden Aufgaben, ob sie wahr oder falsch sind (mit Beweis oder Gegenbeispiel):*

i.) $(\|x_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert* $\Longrightarrow$ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert.*

ii.) $(x_n \cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert* $\Longrightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert.*

iii.) $(\lambda x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert* $\Longrightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert.*

iv.) *Jede beschränkte Folge konvergiert.*

Solution:

i.) Falsch, Gegenbeispiel $x_n = (-1)^n$.

ii.) Falsch, Gegenbeispiel $x_n = n, y_n = \frac{1}{n}$. Alternativ $x_n = (-1)^n, y_n = 0$.

iii.) Falsch, Gegenbeispiel $\lambda = 0, x_n = (-1)^n$.

iv.) Falsch, Gegenbeispiel $x_n = (-1)^n$.

Aufgabe 16. *Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:*

i.)

$$\limsup_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right).$$

ii.)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{5}{n-3}\right)^{(n+\sqrt{n})/2}.$$

iii.)

$$\liminf_{n\to\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}-5n^3}{n^3+n(n+1)(n+2)}.$$

Solution:

i.) Für $n > 0$ haben wir:

$$\sqrt{n^2+n}-n = \frac{(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}+n)}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}.$$

Damit haben wir:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right) = \frac{1}{2}.$$

Also insbesondere:

$$\limsup_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right) = \frac{1}{2}.$$

ii.) Wir schreiben:

$$\left(1-\frac{5}{n-3}\right)^{(n+\sqrt{n})/2} = \underbrace{\sqrt{\left(1-\frac{5}{n-3}\right)^{n-3}}}_{\Longrightarrow\sqrt{e^{-5}}=e^{-5/2}}\cdot\underbrace{\sqrt{\left(1-\frac{5}{n-3}\right)^{3}}}_{\Longrightarrow\sqrt{1^3}=1}\cdot\sqrt{\left(1-\frac{5}{n-3}\right)^{\sqrt{n}}}.$$

Behauptung 1.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{5}{n-3}\right)^{\sqrt{n}} = 1.$$

Proof.

$$\log\left(\left[1-\frac{5}{n-3}\right]^{\sqrt{n}}\right) = \frac{\sqrt{n}}{n-3}\log\left(\left[1-\frac{5}{n-3}\right]^{n-3}\right) \Longrightarrow 0\cdot\log(e^{-5}) = 0.$$

Damit erhalten wir:

$$\left(1-\frac{5}{n-3}\right)^{\sqrt{n}} = e^{\log\left((1-\frac{5}{n-3})^{\sqrt{n}}\right)} \Longrightarrow e^0 = 1.$$

$\square$

Wenn wir alles zusammensetzen, erhalten wir:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{5}{n-3}\right)^{(n+\sqrt{n})/2} = e^{-5/2}\cdot 1\cdot\sqrt{1} = e^{-5/2}.$$

iii.) Zuerst zeigen wir:

Behauptung 2.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}-5n^3}{n^3+n(n+1)(n+2)} = -\frac{5}{2}.$$

Proof. Wir berechnen

$$\frac{\sqrt{n}-5n^3}{n^3+n(n+1)(n+2)} = \frac{\frac{\sqrt{n}}{n^3}-5}{1+1(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})} \longrightarrow -\frac{5}{2}, \quad \text{für } n\longrightarrow\infty.$$

$\square$

Der Faktor $(-1)^n$ oszilliert zwischen $+1$ und -1. Teilfolgen mit geraden Gliedern (bis auf endlich viele Glieder) liefern Häufungspunkt $-5/2$. Teilfolgen mit ungeraden Gliedern (bis auf endlich viele Glieder) liefern Häufungspunkt $5/2$. Alle anderen Teilfolgen (unendlich viele gerade und unendlich viele ungerade Glieder) können nicht konvergieren. Da der Limes Inferior der kleinste Häufungspunkt ist, folgt:

$$\liminf_{n\to\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}-5n^3}{n^3+n(n+1)(n+2)} = -\frac{5}{2}.$$

Aufgabe 17. *Entscheiden Sie für jede Aussage, ob sie wahr oder falsch ist:*
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\mathbb{R}$ mit Häufungspunkt $h\in\mathbb{R}$.

i.) *h ist der Grenzwert von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

ii.) *h ist der einzige Häufungspunkt in $\mathbb{R}\Longrightarrow a_n\longrightarrow h$.*

iii.) *$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert $\Longrightarrow a_n\longrightarrow h$.*

iv.) *Es existiert eine Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegen h konvergiert.*

v.) *$\forall\,\epsilon>0\;\forall N\in\mathbb{N}\;\exists n>N : |a_n-h|<\epsilon$.*

Solution:

i.) Falsch, Gegenbeispiel $(-1)^n$ und $h = 1$.

ii.) Falsch, Gegenbeispiel $a_{2n} = 0,\ a_{2n+1} = n$ und $h = 0$.

iii.) Wahr, Kor. 3.17.

iv.) Wahr, Prop. 3.20.

v.) Wahr, das ist die Definition eines Häufungspunktes.

Aufgabe 18. ($\star$)

i.) Berechnen Sie alle Häufungspunkte der Folge:

$$a_n = \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)\left(1 + \frac{3}{n}\right)^{n+1}.$$

ii.) Seien $a_i > 0$ für alle $i = 1, \dots, p$. Zeigen Sie, dass:

$$\lim_{n\to\infty} (a_1^n + \dots + a_p^n)^{1/n} = \max_{i=1,\dots,p} a_i.$$

Solution:

i.) Zuerst beobachten wir:

$$\left(1 + \frac{3}{n}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{3}{n}\right)^{n}\left(1 + \frac{3}{n}\right) \longrightarrow e^3 \cdot 1 = e^3, \qquad \text{für } n \longrightarrow \infty.$$

Für $k \in \mathbb{N}$ und $j \in \{1, 3\}$ gilt:

$$\sin\left(\frac{2k\pi}{2}\right) = 0 \text{ und } \sin\left(\frac{(4k+j)\pi}{2}\right) = \begin{cases} 1, & \text{für } j = 1 \\ -1, & \text{für } j = 3 \end{cases}.$$

Damit sind $0, -e^3$ und e^3 die Häufungspunkte von $\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)\left(1 + \frac{3}{n}\right)^{n+1}$.

ii.) Wir berechnen:

$$\max_{i\in\{1,\dots,p\}} a_i = \left(\max_{i\in\{1,\dots,p\}} a_i^n\right)^{1/n} \leq (a_1^n + \dots + a_p^n)^{1/n} \leq \left(p \cdot \max_{i\in\{1,\dots,p\}} a_i^n\right)^{1/n}$$

$$= p^{1/n} \max_{i\in\{1,\dots,p\}} a_i \longrightarrow \max_{i\in\{1,\dots,p\}} a_i, \qquad \text{für } n \longrightarrow \infty.$$

Aus dem Sandwichsatz (Prop. 3.8) folgt $\lim_{n\to\infty}(a_1^n + \dots + a_p^n)^{1/n} = \max_{i=1,\dots,p} a_i$.

Aufgabe 19. ($\star$) *Sei eine reelle Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ rekursiv definiert durch:*

$$a_0 = 1, \quad a_{k+1} = \sqrt{|a_k|} + \frac{15}{4} \text{ für } k \in \mathbb{N}.$$

i.) Zeigen Sie, dass $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

ii.) Berechnen Sie den Grenzwert von $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Solution:

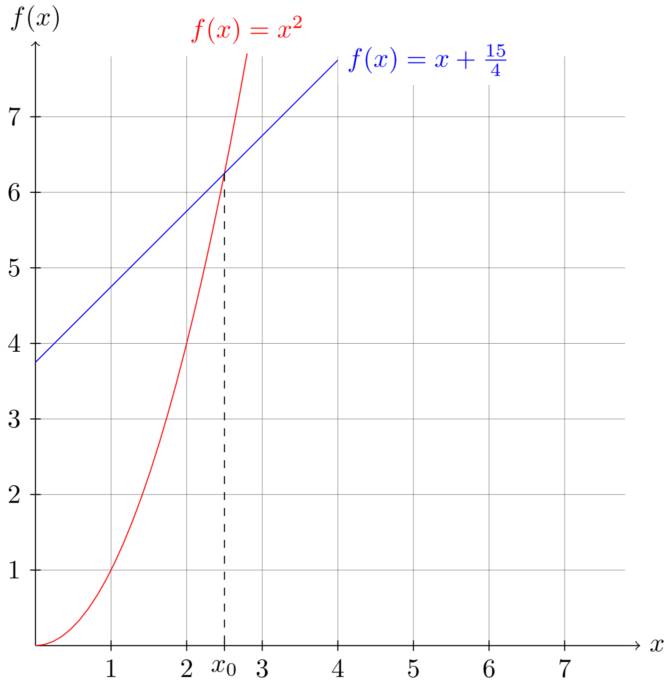
i.) Die Idee ist, dass wir zeigen, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton steigend und beschränkt ist (Prop. 3.11 erledigt den Rest). Zuerst beobachten wir, dass $a_0 = 1 > 0$ und für $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ gilt $a_n \geq \frac{15}{4} > 0$. Damit gilt für alle $n \in \mathbb{N}$: $a_n > 0$. Wir wollen nun, die Monotonie zeigen, d.h. wir versuchen zu zeigen, dass:

$$1 \leq \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{1}{\sqrt{a_k}} + \frac{15}{4} \cdot \frac{1}{a_k} \overset{a_k>0}{\Longleftrightarrow} a_k \leq \sqrt{a_k} + \frac{15}{4}. \tag{1}$$

Wir versuchen nun zu erraten, welche Art von Abschätzung wir zeigen müssen. Da $a_k > 0$ können wir (für ein beliebiges, aber festes k) schreiben $a_k = x^2$ für ein $x > 0$. Dann gilt:

$$(1) \Longleftrightarrow x + \frac{15}{4} \geq x^2.$$

Geometrisch sieht dies so aus:



Also gilt (1) solange $x \leq x_0$. Für x_0 gilt $x_0^2 = x_0 + \frac{15}{4}$. Wir müssen also $x_0^2 - x_0 - \frac{15}{4} = 0$ lösen. Mittels der Lösungsformel für quadratische Gleichungen erhalten wir :

$$x_0 = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(-\frac{15}{4})}}{2} = \frac{1 \pm 4}{2}.$$

Da $x_0 > 0$ folgt $x_0 = \frac{5}{2}$.

D.h. für $a_k \leq x_0^2 = \frac{25}{4}$ ist (1) erfüllt, die Folge also monoton wachsend. Wir zeigen nun die

Behauptung 3.

$$\forall k \in \mathbb{N} : a_k \leq \frac{25}{4}.$$

Proof. Induktion über k. Der Induktionsanfang $k = 0$ ist einfach $a_0 = 1 < \frac{25}{4}$. Wir nehmen nun an, dass für ein beliebiges, aber festes $k \in \mathbb{N}$ gilt $a_k \leq \frac{25}{4}$. Dann berechnen wir:

$$a_{k+1} = \sqrt{a_k} + \frac{15}{4} \leq \sqrt{\frac{25}{4}} + \frac{15}{4} = \frac{5}{2} + \frac{15}{4} = \frac{25}{4}.$$

Damit haben wir gezeigt, dass (1) immer erfüllt ist, d.h. $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend. Weiter haben wir gezeigt, dass $0 < a_k \leq 25/4$. Also ist $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ monoton und beschränkt, also konvergent. $\square$

ii.) Wir haben in *i.)* gezeigt, dass $a := \lim_{n\to\infty} a_n \geq 0$. Es gilt:

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} + \frac{15}{4} \overset{\sqrt{\cdot}\text{ stetig}}{=} \sqrt{\lim_{n\to\infty} a_n} + \frac{15}{4} = \sqrt{a} + \frac{15}{4}.$$

Wir setzen $x = \sqrt{a}$, dann gilt

$$x^2 = x + \frac{15}{4} \Longrightarrow x^2 - x - \frac{15}{4} = 0 \overset{x=\sqrt{a}\geq 0}{\Longrightarrow} x = \frac{1 + \sqrt{1 - 4\cdot(-\frac{15}{4})}}{2} = \frac{5}{2}.$$

Damit gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = a = x^2 = \frac{25}{4}$.

Aufgabe 20. ($\star$) *Zeigen Sie, dass*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty.$$

Solution:
Per Definition ist die Exponential gegeben als

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Es gilt dementsprechend für alle $x \in \mathbb{R}$, dass

$$e^x \geq \frac{x^n}{n!},$$

insbesondere also für $x = n \in \mathbb{N}$ auch das

$$e^n \geq \frac{n^n}{n!} \implies n! \geq \left(\frac{n}{e}\right)^n \implies \sqrt[n]{n!} \geq \frac{n}{e} \xrightarrow{n\to\infty} \infty.$$

Aufgabe 21. ($\star$)

i.) Berechnen Sie den folgenden Grenzwert:

$$\lim_{n\to\infty} \log\left(\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right).$$

ii.) Berechnen Sie alle Häufungspunkte der komplexen Folge:

$$z_n = (n^4 - n^2 + 2)^{1/n} \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) + i\frac{n+e}{2n+1}(-1)^n.$$

iii.) Zeigen Sie:

$$\lim_{n\to\infty} \left[(n+1)\cos\left(\frac{1}{n+1}\right) - n\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right] = 1.$$

Solution:

i.) Wir berechnen:

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n = \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{n+1}} \longrightarrow e^{-1}\cdot\frac{1}{1} = e^{-1}, \quad \text{für } n \longrightarrow \infty.$$

Aus der Stetigkeit des Logarithmus folgt:

$$\lim_{n\to\infty} \log\left(\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right) = \log\left(\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right) = \log(e^{-1}) = -1.$$

ii.) Wir berechnen:

$$(n^4-n^2+2)^{1/n} = (n^{1/n})^4 \cdot \left(1-\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^4}\right)^{1/n} \longrightarrow 1^4 \cdot 1 = 1, \quad \text{für } n \longrightarrow \infty.$$

wobei wir verwendet haben, dass

$$\left(1-\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^4}\right)^{1/n} = \exp\left(\frac{1}{n}\log\left[1-\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^4}\right]\right) \xrightarrow{n\to\infty} \exp(0) = 1.$$

Desweiteren

$$\frac{n+e}{2n+1} = \frac{n}{2n+1} + \frac{e}{2n+1} = \frac{1}{2+\frac{1}{n}} + \frac{e}{2n+1} \longrightarrow \frac{1}{2}, \quad \text{für } n \longrightarrow \infty.$$

Wir erinnern uns daran, dass gilt:

$$\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) = \begin{cases} 0, & \text{für } n = 2k,\ k\in\mathbb{N} \\ 1, & \text{für } n = 4k+1,\ k\in\mathbb{N} \\ -1, & \text{für } n = 4k+3,\ k\in\mathbb{N}. \end{cases}$$

Daraus folgt:

$$z_{2k} \longrightarrow \frac{i}{2}, \quad \text{für } k \longrightarrow \infty,$$

$$z_{4k+1} \longrightarrow 1-\frac{i}{2}, \quad \text{für } k \longrightarrow \infty,$$

$$z_{4k+3} \longrightarrow -1-\frac{i}{2}, \quad \text{für } k \longrightarrow \infty,$$

Da diese drei Teilfolgen die ganze Folge überdecken, kann es keine anderen Häufungspunkte geben. Damit sind die Häufungspunkte von $((n^4-n^2+2)^{1/n}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) + i\frac{n+e}{2n+1}(-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ gerade die Elemente von $\{\frac{i}{2}, 1-\frac{i}{2}, -1-\frac{i}{2}\}$.

iii.) Wir berechnen:

$$(n+1)\cos\left(\frac{1}{n+1}\right) - n\cos\left(\frac{1}{n}\right) = \cos\left(\frac{1}{n+1}\right) + n\left(\cos\left(\frac{1}{n+1}\right) - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Wir kümmern uns zuerst um den zweiten Term. Der Mittelwertsatz (Satz 8.9) sagt uns, dass ein $\xi \in (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})$ existiert, sodass:

$$\cos\left(\frac{1}{n}\right) - \cos\left(\frac{1}{n+1}\right) = -\sin(\xi)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = -\sin(\xi)\left(\frac{1}{n\cdot(n+1)}\right).$$

Also gilt:

$$0 \le \left| n\left(\cos\left(\frac{1}{n+1}\right) - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right| = \left| -\sin(\xi) \cdot \frac{1}{n+1}\right| \le \frac{1}{n+1} \longrightarrow 0, \qquad \text{für } n \longrightarrow \infty.$$

Damit gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \left[(n+1)\cos\left(\frac{1}{n+1}\right) - n\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right] = \lim_{n\to\infty} \cos\left(\frac{1}{n+1}\right) + \lim_{n\to\infty} n\left(\cos\left(\frac{1}{n+1}\right) - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$= \cos(0) + 0 = 1.$$

Aufgabe 22 ($\star$)**.**

i) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge derart, dass für ihre Inkremente gilt $|a_{n+1} - a_n| \le 2^{-n}$. Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy Folge ist. Bedeutet dies, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert? Warum?

ii) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge, welche rekursiv definiert ist mittels:

$$a_{n+2} = \frac{a_n + a_{n+1}}{2}, \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, dass dies eine Cauchy Folge ist. Verwenden Sie Teil i).

iii) Berechnen Sie den Grenzwert der Folge aus Teil ii).

Solution:

i) Sei $\epsilon > 0$ fest aber beliebig. Seien $m \le n$ beliebige natürliche Zahlen, wir setzen $k = n - m \ge 0$ und betrachten den Ausdruck $|a_m - a_{m+k}|$, falls $k = 1$ dann wissen wir bereits, dass $|a_m - a_{m+k}| \le 2^{-m}$. Verwenden wir nun sukzessive die Dreiecksungleichung erhalten wir:

$$\begin{aligned} |a_m - a_{m+k}| &= |(a_m - a_{m+1}) + (a_{m+1} - a_{m+2}) + \cdots + (a_{m+k-1} - a_{m+k})| \\ &\le |a_m - a_{m+1}| + |a_{m+1} - a_{m+2}| + \cdots + |a_{m+k-1} - a_{m+k}| \\ &\le 2^{-m} + 2^{-(m+1)} + \cdots + 2^{-(m+k-1)} < \sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{m-1}}. \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass falls $m, n \ge n_0$ dann haben wir stets die Ungleichung:

$$|a_m - a_n| < \frac{1}{2^{m-1}} \le \frac{1}{2^{n_0-1}}.$$

Wir wählen also $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass $\frac{1}{2^{n_0-1}} \le \epsilon$ oder äquivalent $n_0 \ge \log_2 \frac{2}{\epsilon}$. Wir wissen nun, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy Folge in $\mathbb{R}$ ist, da $\mathbb{R}$ vollständig ist konvergiert diese Cauchy Folge auch.

ii) Wir bemerken, dass per Definition gilt:

$$a_{n+2} - a_{n+1} = -\frac{a_{n+1} - a_n}{2} = \cdots = (-1)^n \frac{a_2 - a_1}{2^n}.$$

Folglich gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ für die Inkremente:

$$|a_{n+2} - a_{n+1}| \le |a_2 - a_1| 2^{-n}.$$

Die Behauptung folgt also dank Teil i).

iii) Es sei $c := a_2 - a_1$. Wir verwenden die Darstellung von a_n als Teleskopische Summe. Wir betrachten also:

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1} - a_k) = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}\frac{c}{2^{k-1}} \\ &= a_1 + c\sum_{k=0}^{n-2}\left(\frac{-1}{2}\right)^k. \end{aligned}$$

Lassen wir nun $n \longrightarrow \infty$ streben und verwenden die Geometrische Reihe mit $r = -1/2$ erhalten wir:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a_1 + c\frac{1}{1-(-1/2)} = a_1 + c\frac{2}{3} = a_1 + \frac{2}{3}(a_2 - a_1) = \frac{a_1 + 2a_2}{3}.$$

4 Reihen

Aufgabe 23. *Wir wollen den Cauchy'schen Verdichtungssatz (Kondensationssatz von Cauchy) beweisen. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine nicht-negative Folge von monoton fallenden Termen. Zeige, dass*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} 2^n f(2^n) < \infty.$$

Solution:
Es sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent. Dann gilt, weil $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht-negativ und monoton fallend ist:

$$\begin{aligned} a_1 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{K} 2^n a_{2^n} &= a_1 + a_2 + 2a_4 + 4a_8 + \cdots + 2^{K-1}a_{2^K} \\ &\leq a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{2^{K-1}+1} + \cdots + a_{2^K-1} + a_{2^K} \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty. \end{aligned}$$

Um obige Ungleichung besser zu verstehen, bemerke dass $2a_4 = a_4 + a_4 \leq a_3 + a_4$, analog $4a_8 = a_8 + a_8 + a_8 + a_8 \leq a_5 + a_6 + a_7 + a_8$ usw. Für $K \to \infty$ zeigt dies, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} < \infty.$$

Nehme nun an, dass $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ konvergent ist. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N} a_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_N \\ &\leq a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \cdots + (a_{2^N} + \cdots + a_{2^{N+1}-1}) \\ &\leq a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \cdots + 2^N a_{2^N} \\ &\leq a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} < \infty. \end{aligned}$$

Lassen wir nun $N \to \infty$ so folgt die Behauptung.

Aufgabe 24. *Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge monoton fallender, nicht-negativer reellen Zahlen. Zeige dass falls $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, dann gilt $na_n \to 0$ als $n \to \infty$. Hinweis: Verwende den Cauchy'schen Verdichtungssatz.*

Solution:
Da $\sum a_n$ konvergiert, gilt gemäss dem Cauchy'schen Verdichtungssatz auch, dass $\sum 2^n a_{2^n}$ konvergiert. Also muss $2^n a_{2^n}$ eine Nullfolge sein, das heisst

$$2^n a_{2^n} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Sei nun $k \in \mathbb{N}$ sodass $2^n < k < 2^{n+1}$, da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend ist folgt dann

$$2^n a_{2^{n+1}} \leq k a_k \leq 2^{n+1} a_{2^n}.$$

Für $k \to \infty$ gilt automatisch $2^n, 2^{n+1} \to \infty$ und die Aussage folgt dank dem Sandwich-Lemma.

Aufgabe 25. *Verwenden Sie den Cauchy'schen Verdichtungssatz (Kondensationssatz) um zu zeigen, dass die nachfolgenden Reihen divergieren respektive konvergieren:*

i)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

ii)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

iii)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \ \textit{wobei } s > 1.$$

Solution:
Dank dem Cauchy'schen Kondensationssatz wissen wir, dass für eine nicht-negative, nicht-wachsende Folge $f(n)$ von reellen Zahlen gilt $\sum f(n) < \infty \iff \sum 2^n f(2^n) < \infty$ also erhalten wir:

i)

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty.$$

da $a_n = 1$ keine Nullfolge ist.

ii)

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{(2^n)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \infty.$$

da geometrische Reihe mit $r = \frac{1}{2} < 1$.

iii) Wir erhalten durch den Cauchy'schen Kondensationssatz die Reihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{(2^n)^s} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^{ns}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{s-1}}\right)^n < \infty.$$

Da $s > 1$ und wir erneut eine geometrische Reihe erhalten mit $0 \leq r = 2^{1-s} < 1$.

Aufgabe 26.

i) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend, $a_n > 0$. Zeige, die Reihe

$$\sum_n \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right)$$

konvergiert genau dann, wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist.

ii) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge. Zeige dass gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1 + na_n} < \infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty.$$

Hinweis: Verwende Aufgabe **??**.

Solution:

i) Nehme zum Widerspruch an, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt ist. Da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wächst, gilt für $m > n$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=n}^{m}\left(\frac{a_{k+1}}{a_k}-1\right) &= \frac{a_{m+1}-a_m}{a_m}+\cdots+\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n}\\ &\geq \frac{1}{a_m}[(a_{m+1}-a_m)+\cdots+(a_{n+1}-a_n)]\\ &= \frac{1}{a_m}(a_{m+1}-a_n) \geq 1-\frac{a_n}{a_m}.\end{aligned}$$

Da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt ist, gibt es zu jedem a_n ein $m > n$ mit $a_m > 2a_n$, also mit $1-\frac{a_n}{a_m} > \frac{1}{2}$. Also gibt es zu jedem n ein $m > n$ mit der Eigenschaft

$$\sum_{k=n}^{m}\left(\frac{a_{k+1}}{a_k}-1\right) > \frac{1}{2}.$$

Mit dem Cauchy-Kriterium folgt, dass die Divergenz der Reihe

$$\sum_{n}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right)$$

was ein Widerspruch ist.

Sei nun andererseits $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend und beschränkt. Dann ist $\sum(a_{n+1}-a_n)$ eine konvergente Teleskop-Reihe. Wegen

$$0 \leq \frac{a_{n+1}}{a_n}-1 = \frac{a_{n+1}-a_n}{a_n} \leq \frac{1}{a_1}(a_{n+1}-a_n)$$

folgt die Konvergenz der Reihe $\sum\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right)$ aus dem Majoranten-Kriterium.

ii) Es konvergiere $\sum_n a_n$. Wegen $0 \leq \frac{a_n}{1+na_n} \leq a_n$ $(a_n \geq 0)$ folgt also die "$\Longleftarrow$" Implikation aus dem Majorantenkriterium.

Es gelte andererseits, dass $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+na_n}$ konvergiere. Sobald ein $a_{n_0}=0$ ist, so sind von dort an alle $a_n = 0$ und die Behauptung ist trivial, es seien also alle $a_n > 0$. Da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend ist, ist $1/a_n$ monoton wachsend und wir schliessen dass

$$\frac{a_n}{1+na_n} = \frac{1}{n+1/a_n}$$

monoton fallend ist. Dank Aufgabe **??** gilt also $b_n := n\frac{a_n}{1+a_n} \to 0$ als $n\to\infty$ und da

$$na_n = \frac{b_n}{1-b_n}$$

folgt auch $na_n \to 0$ für $n\to\infty$. Also gilt $0 < na_n < 1$ ab einem Index n_0 und daher für alle $n \geq n_0$

$$\frac{a_n}{1+na_n} \geq \frac{a_n}{2}$$

Nach dem Majorantenkriterium folgt nun, dass die Reihe $\sum\frac{a_n}{2}$ und damit auch die Reihe $\sum a_n$ konvergent ist.

Aufgabe 27. $(\star)$ *Bestimmen Sie für die folgenden Reihen, ob sie konvergent und ob sie absolut konver-*

gent sind:

i.)

$$\sum_{k\geq 0} \frac{2k}{3k^3+1}.$$

ii.)

$$\sum_{k\geq 2} \frac{\sin(k\pi/2)}{\log(k)}.$$

iii.)

$$\sum_{k\geq 1} \frac{2^k k!}{k^k}.$$

Solution:

i.) Wir berechnen für $k \geq 1$:

$$\left|\frac{2k}{3k^3+1}\right| = \frac{2k}{3k^3+1} \leq \frac{2k}{3k^3} \leq \frac{1}{k^2}.$$

Wir wissen, dass $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^2}$ konvergiert (siehe Seite 43, Anwendung des Cauchy Verdichtungskriterium), folgt mit dem Majorantenkriterium (Prop. 4.8), dass $\sum_{k\geq 0} \frac{2k}{3k^3+1}$ absolut konvergiert.

ii.) Es gilt für $k \in \mathbb{N}$ gilt $\sin(k\pi) = 0$ und $\sin((2k+1)\pi/2) = (-1)^k$. Damit gilt:

$$\sum_{k\geq 2} \frac{\sin(k\pi/2)}{\log(k)} = \sum_{k\geq 1} \frac{\sin((2k+1)\pi/2)}{\log(2k+1)} = \sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^k}{\log(2k+1)}.$$

Da $\frac{1}{\log(2k+1)} > 0$ und die Folge $\frac{1}{\log(2k+1)}$ monoton fallend ist mit $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\log(2k+1)} = 0$, folgt aus dem Leibnizkriterium (Prop. 4.15), dass $\sum_{k\geq 2} \frac{\sin(k\pi/2)}{\log(k)}$ konvergiert.

Wir zeigen, dass $\sum_{k\geq 2} \frac{\sin(k\pi/2)}{\log(k)}$ nicht absolut konvergiert. Dazu brauchen wir die folgende

Behauptung 4.

$$\forall j \in \mathbb{N} : 2j+1 > \log(2j+1).$$

Proof. Wir definieren $h : \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}$ als $h(x) = 2x+1-\log(2x+1)$.
Dann gilt $h(0) = 1$ und $h'(x) = 2 - \frac{2}{2x+1} > 0$. $\square$

Damit erhalten wir:

$$\sum_{k\geq 2} \left|\frac{\sin(k\pi/2)}{\log(k)}\right| = \sum_{k\geq 1} \left|\frac{(-1)^k}{\log(2k+1)}\right| = \sum_{k\geq 1} \frac{1}{\log(2k+1)} > \sum_{k\geq 1} \frac{1}{2k+1}.$$

Da die harmonische Reihe divergiert, divergiert $\sum_{k\geq 2} \left|\frac{\sin(k\pi/2)}{\log(k)}\right|$, d.h. $\sum_{k\geq 2} \frac{\sin(k\pi/2)}{\log(k)}$ konvergiert nicht absolut.

iii.) Sei $a_n = \frac{2^k k!}{k^k}$. Wir berechnen:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{2^{k+1}(k+1)!}{(k+1)^{k+1}} \cdot \frac{k^k}{2^k k!} = 2(k+1)\frac{k^k}{(k+1)^{k+1}} = 2\left(\frac{k}{k+1}\right)^k = 2\left(1-\frac{1}{k+1}\right)^k$$

$$= 2\left(1-\frac{1}{k+1}\right)^{k+1} \frac{1}{1-\frac{1}{k+1}} \longrightarrow 2e^{-1} = \frac{2}{e}, \quad \text{für } k \longrightarrow \infty.$$

Aus dem Quotientenkriterium (Satz 4.12) folgt, dass $\sum_{k\geq 1} \frac{2^k k!}{k^k}$ absolut konvergiert.

Aufgabe 28. ($\star$) *Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:*

i.)

$$\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n+1}.$$

ii.)

$$\sum_{n\geq 0}\left(\frac{n+5}{3n-2}\right)^{3n}.$$

iii.)

$$\sum_{n\geq 0}\frac{\exp(3n\log(n))}{(n!)^2}.$$

Solution:

i.) Wir berechnen für $n\in\mathbb{N}$:

$$\frac{\sqrt{n+1}}{n+2}<\frac{\sqrt{n}}{n+1}\iff\frac{n+1}{(n+2)^2}<\frac{n}{(n+1)^2}$$

$$\iff n^3+3n^2+3n+1=(n+1)^3<(n+2)^2n=n^3+4n^2+4n\iff 0<n^2+n-1.$$

Also ist $(\frac{\sqrt{n}}{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend. Damit können wir das Leibnizkriterium (Prop. 4.15) anwenden, und damit konvergiert $\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n+1}$.

Wir zeigen, dass $\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n+1}$ nicht absolut konvergiert. Dazu berechnen wir für $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$:

$$\left|(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n+1}\right|=\frac{\sqrt{n}}{n+1}\geq\frac{\sqrt{n}}{2n}=\frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

Wir wissen (Anwendung des Verdichtungskriteriums, S. 43), dass $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ divergiert, damit divergiert auch $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{2\sqrt{n}}$. Und schliesslich divergiert deswegen $\sum_{n\geq 0}\left|(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n+1}\right|$. Also ist $\sum_{n\geq 0}\left|(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n+1}\right|$ nicht absolut konvergent.

ii.) Wir berechnen:

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\left(\frac{n+5}{3n-2}\right)^{3n}\right|^{1/n}=\limsup_{n\to\infty}\left(\frac{n+5}{3n-2}\right)^3=\limsup_{n\to\infty}\left(\frac{1+\frac{5}{n}}{3-\frac{2}{n}}\right)^3=\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}<1.$$

Aus dem Wurzelkriterium (Satz 4.11) folgt, dass $\sum_{n\geq 0}\left(\frac{n+5}{3n-2}\right)^{3n}$ absolut konvergiert.

iii.) Zuerst bemerken wir, dass $\frac{e^{3n\log(n)}}{(n!)^2}=\frac{n^{3n}}{(n!)^2}$. Es gibt verschiedene Arten, um zu zeigen, dass die Reihe divergiert. Hier sind zwei Möglichkeiten:

<u>Möglichkeit 1 : Nullfolgenkriterium</u>

$$\frac{e^{3n\log(n)}}{(n!)^2}=\frac{n^{3n}}{(n!)^2}=n^n\cdot\left(\frac{n^n}{n!}\right)^2=n^n\cdot\left(\frac{n^n}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}\right)^2\geq n^n\cdot 1^2\geq 1.$$

Damit ist $(\frac{e^{3n\log(n)}}{(n!)^2})_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge und mit dem Nullfolgenkriterium (Prop. 4.2) folgt, dass $\sum_{n\geq 0}\frac{\exp(3n\log(n))}{(n!)^2}$ divergiert.

Möglichkeit 2 : Quotientenkriterium

Wir berechnen:

$$\frac{\left(\frac{(n+1)^{3n+3}}{((n+1)!)^2}\right)}{\left(\frac{n^{3n}}{(n!)^2}\right)} = \frac{(n+1)^{3n+3}}{n^{3n}} \cdot \frac{(n!)^2}{((n+1)!)^2} = \frac{(n+1)^{3n}}{n^{3n}} \cdot (n+1)^3 \cdot \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$= \underbrace{\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^3}_{\longrightarrow e^3, \text{ für } n\longrightarrow\infty} \cdot \underbrace{(n+1)}_{\longrightarrow\infty, \text{ für } n\longrightarrow\infty} \longrightarrow \infty.$$

Aus dem Quotientenkriterium (Satz 4.12) folgt, dass $\sum_{n\geq 0} \frac{\exp(3n\log(n))}{(n!)^2}$ nicht absolut konvergiert. Da alle Terme nichtnegativ sind (dann ist absolute Konvergenz und Konvergenz das gleiche), folgt, dass $\sum_{n\geq 0} \frac{\exp(3n\log(n))}{(k!)^2}$ nicht konvergiert.

Aufgabe 29. ($\star$) *Berechnen Sie:*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}\right).$$

Solution:
Wir berechnen:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k\cdot(k+1)} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1}+\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{k}-\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{k}-\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right) = 1.$$

Aufgabe 30.

i) Existiert ein $s>0$ sodass die nachfolgende Reihe konvergiert?

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\log^s(n)}.$$

ii) Für welche $s\in\mathbb{R}$ ist die nachfolgende Reihe konvergent?

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\log^s(n)}.$$

Solution:
Wir verwenden das Cauchy Kondensationsverfahren:

i)

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\log^s(n)}<\infty \iff \sum_{n=2}^{\infty}2^n\frac{1}{\log^s(2^n)}<\infty$$

$$\iff \frac{1}{\log^s(2)}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^n}{n^s}<\infty.$$

Jedoch konvergiert die letzte Reihe nicht, da $\lim \frac{2^n}{n^s} = \infty$ keine Nullfolge ist für alle $s > 0$ (da die exponential Funktion $2^n = \exp(n \log(2))$ schneller wächst als jedes Polynom beliebigen Grades). Also existiert kein $s > 0$ sodass die Reihe konvergiert.

ii)

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^s(n)} < \infty &\iff \sum_{n=2}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n \log^s(2^n)} < \infty \\ &\iff C \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^s} < \infty, \text{ wobei } C := \frac{1}{\log^s(2)}. \end{aligned}$$

Die letzte Reihe konvergiert genau dann wenn $s > 1$.

Aufgabe 31. *Zeigen Sie, dass die nachfolgende Reihe konvergiert:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k^2 + 2k + 3}{6k^5 + 6}.$$

Solution:
Für $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Partialsumme:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2k^2 + 2k + 3}{6k^5 + 6} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{k^5 + 1} + \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^5 + 1} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^5 + 1}.$$

Offensichtlich gilt, dass $k^5 + 1 \geq k^5$ und somit $\frac{1}{k^5+1} \leq \frac{1}{k^5}$, wir erhalten also die Abschätzung:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2k^2 + 2k + 3}{6k^5 + 6} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^4} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^5}.$$

Lassen wir nun $n \longrightarrow \infty$, dann erkennen wir die konvergenten Reihen, wir schliessen dass die Reihe konvergiert.

Alternativ können wir auch das Vergleichskriterium verwenden, denn es gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 + 2n + 3}{6n^5 + 6} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}.$$

Wir berechnen hierfür:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n^2+2n+3}{6n^5+6}}{\frac{1}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3(2n^2 + 2n + 3)}{6n^5 + 6} = \frac{1}{3} \in (0, \infty).$$

Wobei wir verwendet haben, dass die dominanten Terme die der Ordnung n^5 sind, somit verhält sich die Reihe vergleichbar mit der konvergenten Reihe $\sum \frac{1}{n^3}$.

Aufgabe 32. *Zeigen Sie mit Hilfe des Integralkriteriums, dass die folgende Reihe konvergiert:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}.$$

Solution:
Wir verwenden das Integralkriterium, d.h. wir betrachten das Integral:

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^2+1} dx = \tan^{-1}(x)\Big|_{x=0}^{x=\infty} = \frac{\pi}{2} < \infty.$$

Also konvergiert die Reihe, was zu zeigen war.

Aufgabe 33. *Bestimmen Sie, ob die nachfolgende Reihe konvergiert:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} ne^{-n^2}.$$

Solution:
Wir verwenden den Integraltest und erhalten:

$$\int_0^\infty xe^{-x^2}\ dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_{x=0}^{x=\infty} = \frac{1}{2} < \infty.$$

und folglich konvergiert die Reihe.