PVK Analysis I

Marco Bertenghi & Lukas Burch, Vorlage gemäss Severin Schraven

January 8, 2020

Die Verweise auf Theoreme und Propositionen beziehen sich auf das Skript der Vorlesung, welches Sie *hier* finden können. Die Verweise auf Serien beziehen sich auf das HS 15. Mit (*) markierte Aufgaben, sind im allgemeinen anspruchsvoller.

1 Topologie: Metrische Räume

Aufgabe 1. *Sei (X, d) ein metrischer Raum. Beweise, dass auch (X, d') mit $d' : X \times X \to \mathbb{R}$ spezifiziert als*

$$d'(x, y) := \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

ein metrischer Raum ist.

Aufgabe 2. *Sei X eine beliebige nicht leere Menge und definierne $d : X \times X \to \mathbb{R}$ als*

$$d(x, y) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y \\ 1 & \text{falls } x \neq y. \end{cases}$$

i) Zeige, dass (X, d) ein metrischer Raum ist.

ii) Zeige dass eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X genau dann bezgülich d konvergiert, wenn sie konstakt ist ab einem (endlichen) Index $N \in \mathbb{N}$.

iii) Folgere, dass (X, d) vollständig ist

iv) Welche Teilmengen von X sind offen? Welche sind abgeschlossen? Was ist also die Topologie $\tau \subset \mathcal{P}(X)$ auf X?

v) Sei (M, d') ein beliebiger metrischer Raum und $f : X \to M$ eine beliebige Funktion. Zeige, dass f stetig ist.

vi) Zeige dass $K \subset X$ ist kompakt, genau dann wenn K endlich ist.

Aufgabe 3. *Zeige, dass für alle $v \in \mathbb{R}^n$ gilt:*

$$\|v\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|v\|_p.$$

Aufgabe 4. *Beweise die Cauchy-Schwarz Ungleichung, das heisst für alle $v, w \in \mathbb{R}^n$ gilt*

$$\sum_{i=1}^{n} |v_i||w_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |v_i|^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} |w_i|^2}.$$

Aufgabe 5. *Sei Q der Raum der quadratsummierbaren reellen Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, d.h. für welche die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ konvergiert. Zeige, dass*

$$d((a_n),(b_n)) = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n)^2}$$

eine Metrik auf Q definiert.
Hinweis: Verwende die Cauchy-Schwarz Ungleichung um die Dreiecksungleichung zu beweisen.

Aufgabe 6. *Betrachte den $\mathbb{R}^n$ mit der Euklidischen Metrik. Zeige oder widerlege:*

i) $X := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 + 2xy = 5\}$ *ist abgeschlossen. Hinweis: Urbilder abgeschlossener Mengen unter stetigen Funktionen sind abgeschlossen.*

ii) $Y := \{\frac{\cos x}{x} \in \mathbb{R} \mid x \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ *ist abgeschlossen.*

Aufgabe 7. *i.) Sei (X,d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie:*

(a) die umgekehrte Dreiecksungleichung

$$|d(x,y) - d(y,z)| \leq d(x,z).$$

(b) die verallgemeinerte Dreicksungleichung

$$d(x_n, x_1) \leq \sum_{i=1}^{n-1} d(x_{i+1}, x_i).$$

(c) die Vierecksungleichung

$$|d(x,y) - d(u,v)| \leq d(x,u) + d(y,v).$$

ii.) Sei $(Y, \|\cdot\|)$ ein normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum. Zeigen Sie:

(a) die umgekehrte Dreiecksungleichung

$$\big|\, \|x\| - \|y\| \,\big| \leq \|x - y\|.$$

(b) die verallgemeinerte Dreiecksungleichung

$$\|x_n - x_1\| \leq \sum_{i=1}^{n-1} \|x_{i+1} - x_i\|.$$

Aufgabe 8. *Seien $(M_1,d_1),(M_2,d_2)$ metrische Räume. Sei $f: M_1 \to M_2$ gleichmässig stetig. Zeigen Sie: Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $M_1 \Rightarrow (f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge in M_2.*

Aufgabe 9. *In dieser Aufgabe wollen wir zeigen, dass $\ell_p \subset \ell_q$ für $0 < p \leq q$.*

i) Zeige zuerst, dass für $0 < a \leq 1$ folgende Ungleichung gilt:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|\right)^a \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^a.$$

ii) Folgere dass $\|a\|_q \leq \|a\|_p$.

Aufgabe 10. *Es sei*

$$A_n^{(m)} := \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{falls } n \leq m \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Betrachten Sie die Folge $(b^{(m)})_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ mit $b^{(m)} := (A_n^m)_{n\in\mathbb{N}}$.

i) Für welche $p \in [1, \infty]$ gilt $b^{(m)} \in \ell_p$?

ii) Bestimmen Sie die Grenzfolge $b^{(\infty)}$.

iii) Zeigen Sie, dass $(b^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ bezüglich $\| \cdot \|_p$, wobei $p \in (1, \infty]$ konvergiert.

Aufgabe 11. *Es sei für $n, m \in \mathbb{N}_{\geq 2}$:*

$$A_n^{(m)} := \frac{m}{m + n^{3/4}}.$$

Betrachten Sie die Folge $(b^{(m)})_{m \in \mathbb{N}_{\geq 2}} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ mit $b^{(m)} := A_n^{(m)}$.

i) Zeigen Sie $\|b^{(m)}\|_{\ell_\infty} < \infty$ für alle $m \in \mathbb{N}_{\geq 2}$.

ii) Zeigen Sie $\|b^{(m)}\|_{\ell_2} < \infty$ für alle $m \in \mathbb{N}_{\geq 2}$.

iii) Zeigen Sie $b^{(m)} \notin \ell_1$ für alle $m \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Hinweis: Verwenden Sie für alle $a, b \in \mathbb{R}_{\geq 1}$ gilt $\frac{a}{a+b} > \frac{1}{b}$.

2 Stetigkeit und Grenzwerte von Funktionen

Aufgabe 12. *Zeigen Sie, mit Hilfe der Definition der Stetigkeit, dass die folgende Funktion in* $x = 1$ *stetig ist:*

$$h : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{-1\} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \frac{x^2+x+1}{x+1}. \end{cases}$$

Aufgabe 13. *Sind die 3 nachfolgenden Funktionen Lipschitz-stetig?*

i) $f : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \frac{1}{1+x^2}$.

ii) $f : (0, 1) \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \sqrt{x}$.

iii) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \sin x$.

iv) Finden Sie eine Funktion, welche gleichmässig stetig, aber nicht Lipschitz-stetig ist.

v) Finden Sie eine Funktion, die Lipschitz-stetig, aber nicht differenzierbar ist.

Aufgabe 14. *Beweisen Sie, falls* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *stetig und injektiv ist, dann ist* f *streng monoton.*

Aufgabe 15. $(\star)$ *Sei* $f_n : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *eine Funktionenfolge und* $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$. *Entscheiden Sie für jede der folgenden Aussagen, ob sie wahr oder falsch ist:*

i.) Alle f_n *sind stetig und* $f_n \longrightarrow f$ *punktweise* $\Longrightarrow f$ *ist stetig.*

ii.) Alle f_n *sind stetig und* $f_n \longrightarrow f$ *gleichmässig* $\Longrightarrow f$ *ist stetig.*

iii.) Alle f_n *sind differenzierbar auf* $(0, 1)$ *und* $f_n \longrightarrow f$ *gleichmässig* $\Longrightarrow f$ *ist differenzierbar auf* $(0, 1)$.

Aufgabe 16. *Beweisen Sie, falls* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *stetig und beschränkt ist, dann besitzt* f *einen Fixpunkt.*

Aufgabe 17. $(\star)$ *Sei* $f : (0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *gleichmässig stetig. Zeigen Sie: Es existiert ein* $c \in \mathbb{R}$, *sodass für jede Folge* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *in* $(0, 1]$ *mit* $x_n \longrightarrow 0$ *gilt:*

$$f(x_n) \longrightarrow c \quad \text{für } n \longrightarrow \infty.$$

Bemerkung (nicht Teil der Aufgabe): Das bedeutet, dass $\lim_{x\downarrow 0} f(x) = c$.

Aufgabe 18. *Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:*

i)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{x}.$$

ii)

$$\lim_{x\to \infty} \frac{e^x x^5}{x^x}.$$

iii)

$$\lim_{x\to \infty} \left(x^2 + 3 - \sqrt{x^4 + 6x^2}\right)x^2.$$

Aufgabe 19. *Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte (möglicherweise* $\pm\infty$*):*

i)

$$\lim_{x\to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

ii)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2-\cos x}{x+3}.$$

iii)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2(2+\sin^2 x)}{x+100}.$$

iv)

$$\lim_{x\to 0} x^2 e^{\sin^3\left(\frac{1}{x}\right)}.$$

Aufgabe 20. *Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:*

i)

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\sqrt{x^2+1}\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}.$$

ii)

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\sqrt{x+4}-2}.$$

Aufgabe 21. *Berechnen Sie den folgenden Grenzwert:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\int_0^{\tan x} \log(2+t)dt.$$

Aufgabe 22. *Berechnen Sie den folgenden Grenzwert: Tipp: Verwenden sie einen Fundamentallimes.*

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+2x}{x^2-3x+2}\right)^{\frac{x^2+1}{x-3}}.$$

3 Potenzreihen

Aufgabe 23. *Sei* $f : \mathbb{R}_{>-1} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = \log(1+x)$.

i.) *Bestimmen Sie die Taylorreihe von* f *um* $x_0 = 0$. *Bestimmen Sie den Konvergenzradius* ρ *dieser Reihe.*

ii.) *Sei* $R_2 f(x)$ *das Restglied des Taylorpolynoms zweiter Ordnung. Zeigen Sie:*

$$R_2 f(x) \geq 0, \quad \forall\ 0 \leq x < \rho.$$

iii.) *Zeigen Sie für alle* $n > 1$*:*

$$1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} \left(1 + \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) \leq \frac{1}{2n^2}.$$

Aufgabe 24. *Es sei* $f_n : [1, \infty) \longrightarrow \mathbb{R},\ f_n(x) = 2n\left((2x)^{1/n} - 1\right)$.

i.) *Zeigen Sie, dass* $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *punktweise konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert* $f : [1, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$.
Hinweise: Schreiben Sie $(2x)^{1/n} = \exp(1/n \cdot \log(2x))$.

ii.) *Zeigen Sie, dass die Konvergenz auf dem Intervall* $[1, 2]$ *gleichmässig ist.*

iii.) *Ist die Konvergenz gleichmässig auf* $[1, \infty)$*?*

Aufgabe 25. $(\star)$ *Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen in* $z \in \mathbb{C}$*:*

i.)

$$\sum_{m \geq 1} \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j}\right) z^m.$$

ii.)

$$\sum_{k \geq 0} 4k^5 3^k z^{k^2}.$$

iii.)

$$\sum_{n \geq 1} \left(5 - \frac{2}{n}\right)^n z^n.$$

iv.)

$$\sum_{n \geq 0} i^{n-1} n^n z^n.$$

v.)

$$\sum_{n \geq 0} \frac{2^n}{n!} z^n.$$

Aufgabe 26. $(\star)$ *Entscheiden Sie für die folgenden Aussagen, ob sie wahr oder falsch sind:*

i.) *Sei* $\rho > 0$ *der Konvergenzradius von* $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$. *Dann ist* f *auf* $\{z \in \mathbb{C} : |z| < \rho\}$ *stetig.*

ii.) *Sei* $\rho > 0$ *der Konvergenzradius von* $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$. *Dann* $p_m(z) = \sum_{n=0}^{m} a_n z^n \longrightarrow f(z)$ *gleichmässig auf* $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$ *für alle* $r < \rho$.

Aufgabe 27. *Berechnen Sie den folgenden Grenzwert mit Hilfe der Lagrange'schen Fehlerabschätzung:*

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x}\right).$$