PVK Analysis I

Marco Bertenghi & Lukas Burch, Vorlage gemäss Severin Schraven

January 7, 2020

Die Verweise auf Theoreme und Propositionen beziehen sich auf das Skript der Vorlesung, welches Sie *hier* finden können. Die Verweise auf Serien beziehen sich auf das HS 15. Mit (*) markierte Aufgaben, sind im allgemeinen anspruchsvoller.

1 sup, inf, max, min von Mengen

Aufgabe 1. *Berechnen Sie das Supremum (kleinste obere Schranke) der Menge:*

$$S := \left\{ \frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots \right\}.$$

Was gilt für das Supremum der Menge $M := S \cup \{1\}$?

Solution:
Um zu zeigen, dass eine reelle Zahl M die kleinste obere Schranke einer Menge S ist, geht man normalerweise in 2 Schritten vor.

1. Zeige, dass M eine obere Schranke von S ist, i.e. zeige, dass $M \geq s$ für alle $s \in S$.
2. Zeige, dass M die kleinste obere Schranke von S ist. Meist geschieht dies per Widerspruch, man nimmt an, dass ein $\epsilon > 0$ existiert, sodass $M - \epsilon$ nach wie vor eine obere Schranke von S ist. Man findet dann ein Element $s \in S$ mit $s > M - \epsilon$, was zeigt, dass $M - \epsilon$ keine obere Schranke von S ist.

Wir stellen nun fest, dass jedes Element $s \in S$ kleiner als 1 ist, da $\frac{n}{n+1} < 1$. Wir behaupten, dass 1 das Supremum der Menge ist. Nehme zum Widerspruch an, dass 1 nicht die kleinste obere Schranke von S ist, d.h. es existiert $\epsilon > 0$ sodass $1 - \epsilon$ auch eine obere Schranke von S ist.

Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ sodass $n_0 > \frac{1}{\epsilon} - 1$, dann gilt $1 - \epsilon < \frac{n_0}{n_0+1}$ was zeigt, dass $1 - \epsilon$ keine obere Schranke von S ist, da $\epsilon > 0$ beliebig war, muss 1 die kleinste obere Schranke von S sein.

Unsere Bemühungen lassen nun schliessen, dass $\sup M = \max M = 1$ gelten muss, da 1 das Supremum der Menge S ist und insbesondere gilt $1 \in M$.

Aufgabe 2. *Es sei $A \subset \mathbb{R}$ und $A \neq \emptyset$, desweiteren definieren wir $-A := \{x \in \mathbb{R} : -x \in A\}$. Entscheiden Sie für jede Aussage, ob sie wahr oder falsch ist:*

i.) A *unbeschränkt* $\iff \sup A = \infty$.

ii.) A *ist endlich* $\implies \max A = \sup A$.

iii.) $\min A$ *existiert* $\implies \min A = -\max(-A)$.

iv.) $\sup A \notin A$.

Solution:

i.) Falsch, Gegenbeispiel $A = (-\infty, 0]$ ist unbeschränkt, aber $supA = 0$.

ii.) Wahr.

iii.) Wahr. Sei $x \in A$, dann gilt $-x \in -A$. Damit $x = -(-x) \geq -\max(-A)$. Da $-\max(-A) \in A$, folgt die Aussage.

iv.) Falsch. $A = \{42\}$. Dann ist $\sup A = 42 \in A$.

Aufgabe 3. *Finden Sie das max, min, sup und inf der folgenden Menge und beweisen Sie ihre Aussage:*

$$S := \left\{ \frac{2n+1}{n+1} : n \in \mathbb{N}_{\geq 1} \right\} = \left\{ \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{9}{5}, \frac{11}{6}, \dots \right\}.$$

Solution:
Der kleinste Term scheint $\frac{3}{2}$ zu sein und es scheint kein kleineres Element zu geben, aber alle Elemente sind kleiner als 2 und da $\lim \frac{2n+1}{n+1} = 2$ behaupten wir folgende Aussagen:
a) Es gibt kein Maximum, b) $\sup S = 2$ und c) $\min S = \inf S = \frac{3}{2}$.

Wir beginnen mit dem Supremum, können wir nähmlich zeigen, dass $\sup S = 2$ dann kann S kein Maximum besitzen, da $2 \notin S$. Es gilt offensichtlich:

$$\frac{2n+1}{n+1} < 2 \iff 2n+1 < 2n+2 \iff 1 < 2.$$

Da diese Aussage immer wahr ist, folgern wir, dass 2 in der Tat eine obere Schranke von S ist. Nun zeigen wir, dass 2 die kleinste obere Schranke von S ist. Falls 2 nicht die kleinste obere Schranke von S wäre, so würde $\epsilon > 0$ existieren sodass $2 - \epsilon$ eine obere Schranke von S ist. Wir behaupten, es existiert eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ sodass:

$$2 - \epsilon < \frac{2n+1}{n+1}.$$

gilt und somit $2 - \epsilon$ keine obere Schranke von S ist. Es gilt jedoch offensichtlich:

$$2 - \epsilon < \frac{2n+1}{n+1} \iff -\epsilon < \frac{2n+1}{n+1} - 2 \iff \epsilon > \frac{1}{n+1} \iff n > \frac{1}{\epsilon} - 1.$$

Wählen wir also $n \in \mathbb{N}$ sodass $n > \frac{1}{\epsilon} - 1$, dann gilt $2 - \epsilon < \frac{2n+1}{n+1}$, somit haben wir gezeigt, dass $\sup S = 2$. Um etwas präziser zu zeigen, dass $2 \notin S$ gilt, nehmen wir an, dass eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ existiert sodass:

$$2 = \frac{2n+1}{n+1} \iff 2(n+1) = 2n+1 \iff 2 = 1.$$

was natürlich ein Widerspruch ist, also $2 \notin S$ und somit existiert kein Maximum.

Schliesslich zeigen wir, dass $\min S = \frac{3}{2}$. Offensichtlich gilt $\frac{3}{2} \in S$. Es genügt also zu zeigen, dass $\frac{3}{2}$ eine untere Schranke von S ist, wir haben aber offensichtlich

$$\frac{2n+1}{n+1} \geq \frac{3}{2} \iff 2(2n+1) \geq 3(n+1) \iff n \geq 1.$$

Was natürlich wahr ist für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ wie in der Menge von S spezifiert, also gilt $\min S = \frac{3}{2}$.

Aufgabe 4. *Es sei* $S := (1, 5]$. *Beweisen Sie, dass* $\inf S = 1$.

Solution:
Per Definition von S erfüllt jedes $x \in S$ die Ungleichung $1 < x \leq 5$ und somit ist 1 natürlich eine untere Schranke von S. Wir wollen zeigen, dass 1 die grösste untere Schranke von S ist, insbesondere bedeutet dies das Wort "offensichtlich" möglichst zu vermeiden.

Wir nehmen also an, dass 1 nicht die grösste untere Schranke von S ist, dann existiert ein $\epsilon > 0$ sodass $1+\epsilon$ eine untere Schranke von S ist. Um ein Widerspruch zu erhalten finden wir ein Element $x \in S$, sodass $1 < x < 1+\epsilon$, was zeigt, dass $1+\epsilon$ keine untere Schranke von S sein kann.

Wir wählen $x = 1 + \frac{\epsilon}{2}$, dann gilt offensichtlich:

$$1 < x < 1 + \epsilon \leq 5.$$

da per Annahme $1+\epsilon$ eine untere Schranke von S war. Also ist $1+\epsilon$ keine untere Schranke von S und somit haben wir gezeigt, dass 1 die grösste untere Schranke von S ist.

2 Vollständige Induktion

Aufgabe 5.

i.) Beweisen Sie die Bernoulli-Ungleichung:

$$\forall x > -1 \ , \ \forall n \in \mathbb{N} : (1+x)^n \geq 1 + nx.$$

mittels Induktion.

ii.) Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und $x_1, \ldots, x_n \geq 0$. Zeigen Sie:

$$\prod_{i=1}^{n}(1+x_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Solution:

i.) Sei $x > -1$. Zuerst zeigen wir den Fall $n = 0$:

$$(1+x)^0 = 1 = 1 + 0 \cdot x.$$

Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig, aber fix, sodass $(1+x)^n \geq 1 + nx$ (IA).
Dann berechnen wir

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \overset{\text{IA, } x>-1}{\geq} (1+x)(1+nx) = 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x.$$

ii.) Zuerst zeigen wir den Fall $n = 2$. Seien $x_1, x_2 \geq 0$, dann

$$\prod_{i=1}^{2}(1+x_i) = 1 + (x_1 + x_2) + x_1 \cdot x_2 \overset{x_1, x_1 \geq 0}{\geq} 1 + (x_1 + x_2) = 1 + \sum_{i=1}^{2} x_i.$$

Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ beliebig, aber fix, sodass $\prod_{i=1}^{n}(1+x_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^{n} x_i$ für alle $x_1, \ldots, x_n \geq 0$ (IA).
Dann berechnen wir für $x_1, \ldots, x_{n+1} \geq 0$:

$$\prod_{i=1}^{n+1}(1+x_i) = (1+x_{n+1}) \cdot \prod_{i=1}^{n}(1+x_i) \overset{\text{IA}}{\geq} (1+x_{n+1})(1 + \sum_{i=1}^{n} x_i)$$

$$= 1 + \sum_{i=1}^{n+1} x_i + x_{n+1} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \overset{x_i \geq 0}{\geq} 1 + \sum_{i=1}^{n+1} x_i.$$

Aufgabe 6. *Zeigen Sie, dass:*

$$\frac{4^{2n} - 3^n}{13} \in \mathbb{N}.$$

für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.

Solution:
Zuerst zeigen wir den Fall $n = 1$:

$$\frac{4^2 - 3^1}{13} = \frac{13}{13} = 1 \in \mathbb{N}.$$

Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ beliebig, aber fix, sodass $\frac{4^{2n}-3^n}{13} \in \mathbb{N}$.

Dann berechnen wir:

$$\frac{4^{2(n+1)} - 3^{(n+1)}}{13} = \frac{4^2(4^{2n} - 3^n)}{13} + \frac{(4^2-3)3^n}{13} = 4^2 \underbrace{\frac{4^{2n} - 3^n}{13}}_{\in \mathbb{N} \text{ nach IA}} + 3^n \in \mathbb{N}.$$

Aufgabe 7.

i) Zeigen Sie, dass der kleinste, nicht triviale Teiler einer natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ stets eine Primzahl ist. Hier ist keine vollständige Induktion notwendig, ein Beweis per Widerspruch genügt völlig.

ii) Zeigen Sie, dass jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ als Produkt von Primzahlen in der kanonischen Form $n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$, wobei $p_1 < p_2 < \cdots < p_k \in \mathbb{P}$ und $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{N}_0$, geschrieben werden kann. Diese Darstellung ist desweiteren eindeutig, dies muss jedoch nicht gezeigt werden.

Solution:

i) Zum Widerspruch sei d_0 der kleinste, nicht triviale Teiler von $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ ohne dabei eine Primzahl zu sein. Da nun d_0 keine Primzahl ist, existiert per Definition eine Zahl v wobei $1 < v < d_0$ sodass $v \mid d_0$, per Transitivität gilt dann aber auch $v \mid n$ da bereits $d_0 \mid n$. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme, dass d_0 der kleinste, nicht triviale Teiler von n war.

ii) Für $n = 2$ ist n eine Primzahl und die Aussage somit trivial Wahr. Für den Induktionsschritt nehmen wir an, dass wir für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ die Darstellung $n = p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k}$ wie in der Aufgabenstellung haben. Falls nun $n+1$ eine Primzahl ist, so gibt es nichts zu zeigen, ist $n+1$ jedoch keine Primzahl so muss gelten $n + 1 = mq$ wobei $1 < m \leq q \leq n$, aber für solche Zahlen haben wir per Induktionsannahme kanonische Darstellungen der Form $m = p_1^{b_1} \cdots p_k^{b_k}$ und $q = s_1^{c_1} \cdots s_l^{c_l}$ haben wobei $p_1 < \cdots < p_k$ und $s_1 < \cdots < s_l$ alles Primzahlen sind und die Exponenten natürliche Zahlen. Zusammenfassen der Primzahlen und Neuanordnung/Neubeschriftung liefert dann die Aussage.

Aufgabe 8 ($\star$ Trig Heavy)**.** *Wir definieren die Chebyshev Polynome für alle $x \in \mathbb{R}$ wie folgt:*

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1. \\ P_1(x) &= x. \\ P_{n+1}(x) &= xP_n(x) - P_{n-1}(x), \text{ für } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass gilt:

$$P_n(2\cos(\theta)) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}, \ \theta \in (0, \pi).$$

Solution:

Wir zeigen die beiden Fälle $n = 0$ und $n = 1$, da wir in dem Induktionsschritt sowohl $k = n$ und $k = n - 1$ benötigen werden. Für $n = 0$ haben wir die triviale Aussage:

$$1 = P_0(2\cos\theta) = \frac{\sin\theta}{\sin\theta} = 1.$$

Für $n = 1$ haben wir die Aussage:

$$2\cos\theta = P_1(2\cos\theta) = \frac{\sin 2\theta}{\sin\theta} = \frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta} = 2\cos\theta.$$

Nehmen wir nun an, dass die Aussage für $n = k$ und $n = k - 1$ für $k > 0$ wahr ist, i.e. wir haben die beiden Gleichungen:

$$P_k(2\cos\theta) = \frac{\sin((k+1)\theta)}{\sin\theta}, \text{ und } P_{k-1}(2\cos\theta) = \frac{\sin(k\theta)}{\sin\theta}.$$

Per Definition von P_{k+1} haben wir nun:

$$\begin{aligned} P_{k+1}(2\cos\theta) &= 2\cos\theta P_k(2\cos\theta) - P_{k-1}(2\cos\theta) \\ &= 2\cos\theta \frac{\sin((k+1)\theta)}{\sin\theta} - \frac{\sin(k\theta)}{\sin\theta}. \end{aligned}$$

Wir schreiben $k\theta = (k+1)\theta - \theta$ und erhalten:

$$\begin{aligned} P_{k+1}(2\cos\theta) &= \frac{2\cos\theta\sin((k+1)\theta) - \sin((k+1)\theta - \theta)}{\sin\theta} \\ &= \frac{2\cos\theta\sin((k+1)\theta) - \cos\theta\sin((k+1)\theta) + \cos((k+1)\theta)\sin\theta}{\sin\theta} \\ &= \frac{\cos\theta\sin((k+1)\theta) + \cos((k+1)\theta)\sin\theta}{\sin\theta} \\ &= \frac{\sin((k+2)\theta}{\sin\theta}. \end{aligned}$$

Aufgabe 9. ($\star$) *Sei $n \in \mathbb{N}$ und $a_{jk} \in \mathbb{C}$ für $j = 0, \ldots, n+1$, $k = 0, \ldots, n$. Zeigen Sie, dass:*

$$\sum_{j=0}^{n+1} \sum_{k=0}^{n} a_{jk} = \sum_{0 \le j \le k \le n} a_{jk} + \sum_{0 \le k < j \le n+1} a_{jk}.$$

Solution:
Sei zuerst $n = 0$. Dann erhalten wir einfach:

$$\sum_{j=0}^{n+1} \sum_{k=0}^{n} a_{jk} = a_{00} + a_{10} = \sum_{0 \le j \le k \le n} a_{jk} + \sum_{0 \le k < j \le n+1} a_{jk}.$$

Nehmen wir nun an, dass die Formel für ein $n \in \mathbb{N}$ gültig ist. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n+2} \sum_{k=0}^{n+1} a_{jk} &= \sum_{j=0}^{n+2} \left(\sum_{k=0}^{n} a_{jk} + a_{j,n+1} \right) \\ &= \sum_{j=0}^{n+1} \left(\sum_{k=0}^{n} a_{jk} + a_{j,n+1} \right) + \left(\sum_{k=0}^{n} a_{n+2,k} + a_{n+2,n+1} \right) \\ &= \sum_{j=0}^{n+1} \sum_{k=0}^{n} a_{jk} + \sum_{j=0}^{n+1} a_{j,n+1} + \sum_{k=0}^{n+1} a_{n+2,k} \\ &= \sum_{0 \le j \le k \le n} a_{jk} + \sum_{0 \le k < j \le n+1} a_{jk} + \sum_{j=0}^{n+1} a_{j,n+1} + \sum_{k=0}^{n+1} a_{n+2,k} \\ &= \sum_{0 \le j \le k \le n+1} a_{jk} + \sum_{0 \le k < j \le n+2} a_{jk}. \end{aligned}$$

womit der Induktionsschritt gezeigt wäre.

Aufgabe 10. *Zeigen Sie die **Vorwärts-Rückwärts Induktion** (auch bekannt als Cauchy-Induktion): Es sei $P(n)$ eine Aussage für $n \in \mathbb{N}_{\ge 2}$. Falls $P(2)$ wahr ist und*

1. Aus $P(k)$ lässt sich $P(2k)$ folgern (Vorwärts Schritt).

2. Aus $P(k+1)$ lässt sich $P(k)$ folgern (Rückwärts Schritt).

Dann gilt die Aussage $P(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$.

Solution:
Da $P(2) = P(2^1)$ wahr ist, folgt aus der Eigenschaft 1 (E1) für $k = 2$, dass $P(2 \cdot 2) = P(2^2)$ wahr ist. Durch wiederholte Anwendung von (E1) erhalten wir, dass aus $P(2^k)$ stets $P(2^{k+1})$ folgt für $k \in \mathbb{N}$. Mit Hilfe der (standard) vollständigen Induktion erhalten wir dann die Aussage,

$$P(2^r) \text{ ist wahr für all } r \in \mathbb{N}. \tag{*}$$

Wenden wir nur die Eigenschaft 2 (E2) auf (*) an, erhalten wir zuerst, dass $P(2^r - 1)$ wahr ist für all $r \in \mathbb{N}$, und erneut durch sukzessive Anwendung von (E2) dass $P(2^r - m)$ wahr ist, also auch $P(2^r - (m+1))$ für alle $r, m \in \mathbb{N}$ mit $m < 2^r$. Wir haben also

$$P(2^r - (m+1)) \text{ ist wahr für alle } r, m \in \mathbb{N} \text{ sodass } m < 2^r. \tag{**}$$

Es ist jedoch offensichtlich, dass für all $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ $r, m \in \mathbb{N}$ existieren, sodass $n = 2^r - (m+1)$ mit $m < 2^r$. Also erhalten wir dank (**), dass

$$P(n) \text{ ist wahr für alle } n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$$

was zu zeigen war.

Aufgabe 11. *($\star$) Es seien $0 \leq x_i \leq \pi$ für $i = 1, \ldots, n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie folgende Ungleichung für alle $n \in \mathbb{N}$ mit Hilfe der Vorwärts-Rückwärts Induktion:*

$$\sin x_1 + \sin x_2 + \cdots + \sin x_n \leq n \sin\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right).$$

Solution:
Wir verwenden die Vorwärts-Rückwärts Induktion. Da wir die Aussage jedoch für alle $n \in \mathbb{N}$ (inklusive $n = 1$) zeigen wollen, müssen wir den Fall $n = 1$ zusätzlich analysieren, dieser ist jedoch trivial.

• Für $n = 2$ erhalten wir

$$\sin x_1 + \sin x_2 = 2 \sin\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \underbrace{\cos\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)}_{\leq 1} \leq 2 \sin\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$$

womit die Aussage $P(2)$ verifiziert wurde.

• Um den Vorwärts Schritt zu verifizieren nehmen wir an, dass wir für $k \in \mathbb{N}$ folgende Ungleichung haben:

$$\sin x_1 + \cdots + \sin x_k \leq k \sin\left(\frac{x_1 + \cdots + x_k}{k}\right) \tag{*}$$

falls wir diese Aussagen mit $P(k)$ bezeichnen, müssen wir zeigen, dass sich aus dieser $P(2k)$ herleiten lässt, also dass gilt:

$$\sin x_1 + \cdots + \sin x_k + \sin x_{k+1} + \cdots + \sin x_{2k} \leq 2k \sin\left(\frac{x_1 + \cdots + x_{2k}}{2k}\right).$$

Wir verwenden (*) für die k Zahlen $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_{2k}$ und erhalten per Annahme

$$\sin x_{k+1} + \cdots + \sin x_{2k} \le k \sin\left(\frac{x_{k+1} + \cdots + x_{2k}}{k}\right). \tag{**}$$

Kombinieren wir (*) und (**) erhalten wir

$$\sin x_1 + \cdots + \sin x_{2k} \le k \left[\sin\left(\frac{x_1 + \cdots + x_k}{k}\right) + \sin\left(\frac{x_{k+1} + \cdots + x_{2k}}{k}\right)\right]. \tag{***}$$

Es gilt jedoch, dass

$$\frac{x_1 + \cdots + x_k}{k}, \frac{x_{k+1} + \cdots + x_{2k}}{k} \in [0, \pi]$$

also können wir auf den geklammerten Term in (***) oben die Induktionsannahme für $n = 2$ anwenden und erhalten

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{x_1 + \cdots + x_k}{k}\right) + \sin\left(\frac{x_{k+1} + \cdots + x_{2k}}{k}\right) &\overset{P(2)}{\le} 2 \sin\left(\frac{\frac{x_1+\cdots+x_k}{k} + \frac{x_{k+1}+\cdots+x_{2k}}{k}}{2}\right)\\ &= 2 \sin\left(\frac{x_1 + \cdots + x_{2k}}{2k}\right).\end{aligned}$$

Aus obiger Überlegung und (***) erhalten wir also schliesslich:

$$\sin x_1 + \cdots + \sin x_{2k} \le 2k \sin\left(\frac{x_1 + \cdots + x_{2k}}{2k}\right),$$

also $P(k) \rightsquigarrow P(2k)$.

• Um den Rückwärts Schritt zu verifizieren nehmen wir an, dass wir für $k \in \mathbb{N}$ folgende Ungleichung haben:

$$\sin x_1 + \cdots + \sin x_{k+1} \le (k+1) \sin\left(\frac{x_1 + \cdots + x_{k+1}}{k+1}\right). \tag{$\bigstar$}$$

Wir wollen $P(k+1) \rightsquigarrow P(k)$ nachweisen. Wir verwenden ($\bigstar$) für die spezielle Wahl

$$x_{k+1} := \frac{x_1 + \cdots + x_k}{k} \in [0, \pi]$$

und erhalten:

$$\begin{aligned}\sin x_1 + \cdots + \sin x_k + \sin\left(\frac{x_1 + \cdots + x_k}{k}\right) &\le (k+1) \sin\left(\frac{x_1 + \cdots + x_k + \frac{x_1+\cdots+x_k}{k}}{k+1}\right)\\ &= (k+1) \sin\left(\frac{x_1 + \cdots + x_k}{k}\right)\\ &= k \sin\left(\frac{x_1 + \cdots + x_k}{k}\right) + \sin\left(\frac{x_1 + \cdots + x_k}{k}\right),\end{aligned}$$

kürzen wir auf beiden Seiten der Ungleichung den letzten Term erhalten wir schliesslich

$$\sin x_1 + \cdots + \sin x_k \le k \sin\left(\frac{x_1 + \cdots + x_k}{k}\right)$$

also $P(k+1) \rightsquigarrow P(k)$. Gemäss dem Prinzip der Cauchy-Induktion ist die Aussage somit für alle $n \in \mathbb{N}$ vollständig bewiesen.

Aufgabe 12. ($\star$) *Zeigen Sie mit Hilfe der Cauchy-Induktion die folgende Ungleichung, bekannt als Cauchy's Ungleichung (oder auch arithmetisches Mittel dominiert das geometrische Mittel): Es seien* $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, *dann gilt*

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}.$$

Solution:
Wir folgen dem selben Rezept wie in der vorherigen Aufgabe.

- $n = 1$ ist trivial.

- $n = 2$ wir haben:

$$\begin{aligned}\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 - a_1 a_2 &= \frac{1}{4}(a_1^2 + 2a_1 a_2 + a_2^2) - a_1 a_2 \\ &= \frac{1}{4}(a_1^2 - 2a_1 a_2 + a_2^2) = \left(\frac{a_1 - a_2}{2}\right)^2 \geq 0,\end{aligned}$$

oder äquivalent dazu

$$\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right) \geq \sqrt{a_1 a_2}.$$

- $P(n) \rightsquigarrow P(2n)$:

$$\begin{aligned}\frac{a_1 + \cdots + a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{2n}}{2n} &= \frac{\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} + \frac{a_{n+1} + \cdots + a_{2n}}{n}}{2} \\ &\overset{P(n)}{\geq} \frac{\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} + \sqrt[n]{a_{n+1} \cdot \ldots \cdot a_{2n}}}{2} \\ &\overset{P(2)}{\geq} \sqrt{\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} \cdot \sqrt[n]{a_{n+1} \cdot \ldots \cdot a_{2n}}} \\ &= \sqrt[2n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n \cdot a_{n+1} \cdot \ldots \cdot a_{2n}}.\end{aligned}$$

- $P(n+1) \rightsquigarrow P(n)$: Wir nehmen $P(n+1)$ an, d.h. es gilt

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n + a_{n+1}}{n+1} \geq \sqrt[n+1]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n \cdot a_{n+1}}. \tag{*}$$

Wir treffen in (*) die spezielle Wahl

$$a_{n+1} = \frac{a_1 \cdots + a_n}{n},$$

und erhalten:

$$\begin{aligned}\frac{a_1 + \cdots + a_n + \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}}{n+1} = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} &\geq \sqrt[n+1]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n \cdot \left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right)} \\ \implies \left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right)^{n+1} &\geq a_1 \cdot \ldots \cdot a_n \cdot \left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right) \\ \implies \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} &\geq \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}.\end{aligned}$$

Gemäss dem Prinzip der Cauchy-Induktion gilt die Aussage somit für alle $n \in \mathbb{N}$.

3 Folgen

Aufgabe 13. *Seien* $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ *und* $x \in \mathbb{R}$.

i.) *Zeigen Sie, falls jede Teilfolge* $(x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ *eine Teilfolge* $(x_{n_{i_j}})_{j\in\mathbb{N}}$ *besitzt, die gegen* x *konvergiert, dann gilt* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

ii.) *Finden Sie eine Folge* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *so, dass für jede Teilfolge* $(x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ *eine konvergente Teilfolge* $(x_{n_{i_j}})_{j\in\mathbb{N}}$ *existiert, aber* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *nicht konvergiert.*

Solution:

i.) Version 1

Seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $x \in \mathbb{R}$ wie in der Aufgabenstellung. Wir nehmen an, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gegen x konvergiert, d.h.

$$\exists \epsilon > 0 \ \forall N \in \mathbb{N} \ \exists n \geq N : |x_n - x| \geq \epsilon.$$

Wir wählen ein $\epsilon > 0$ und eine Teilfolge $(x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$, sodass für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt $|x_{n_i} - x| \geq \epsilon$. Dies ist ein Widerspruch dazu, dass eine Teilfolge $(x_{n_{i_j}})_{j\in\mathbb{N}}$ existiert mit $\lim_{j\to\infty} x_{n_{i_j}}$.

Version 2

Wir wissen, es gibt Teilfolgen $(x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$, $(x_{m_i})_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$, sodass $\lim_{i\to\infty} x_{n_i} = \liminf_{n\to\infty} x_n$ und $\lim_{i\to\infty} x_{m_i} = \limsup_{n\to\infty} x_n$. Da jeweils eine Teilfolge von den obigen Reihen gegen x konvergiert und der Limes konvergenter Folgen gleich der Limes seiner Teilfolgen ist (Prop. 3.19), gilt $\liminf_{n\to\infty} x_n = x = \limsup_{n\to\infty} x_n$. Aus Satz 3.13 folgt $\lim_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n = x$.

ii.) $x_n = (-1)^n$ konvergiert nicht. Sei $(x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dann ist $A_1 := \{n_i \in \mathbb{N} \ : \ n_i \text{ ist ungerade }\}$ oder $A_2 := \{n_i \in \mathbb{N} \ : \ n_i \text{ ist gerade }\}$ abzählbar unendlich. Wähle $i \in \{1, 2\}$ sodass A_i unendlich ist, dann ist $(x_l)_{l\in A_i}$ eine konvergente Teilfolge von $(x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ (mit Grenzwert $(-1)^i$).

Aufgabe 14. *Sei* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C}$. *Entscheiden Sie für jede Aussage, ob sie wahr oder falsch ist:*

i.) $z_n \longrightarrow z \iff Re(z_n) \longrightarrow Re(z)$ *und* $Im(z_n) \longrightarrow Im(z)$.

ii.) $|z_n| \longrightarrow |z| \implies z_n \longrightarrow z$.

iii.) $z_n \longrightarrow z \implies |z_n| \longrightarrow |z|$.

iv.) $z_n \in \mathbb{R}$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *und* $z_n \longrightarrow z \implies z \in \mathbb{R}$.

Solution:

i.) Wahr, siehe Seite 53.

ii.) Falsch, Gegenbeispiel $z_n = (-1)^n, z = i$.

iii.) Wahr, folgt aus der umgekehrten Dreiecksungleichung und dem Sandwichsatz:
$0 \leq \big|\, |z_n| - |z| \,\big| \leq |z_n - z| \longrightarrow 0$.

iv.) Wahr, folgt aus der ersten Aussage.

Aufgabe 15. *Seien* $m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^m$ *and* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Entscheiden Sie für jede der folgenden Aufgaben, ob sie wahr oder falsch sind (mit Beweis oder Gegenbeispiel):*

i.) $(\|x_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert* $\implies (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert.*

ii.) $(x_n \cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert* $\Longrightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert.*

iii.) $(\lambda x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert* $\Longrightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert.*

iv.) Jede beschränkte Folge konvergiert.

Solution:

i.) Falsch, Gegenbeispiel $x_n = (-1)^n$.

ii.) Falsch, Gegenbeispiel $x_n = n, y_n = \frac{1}{n}$. Alternativ $x_n = (-1)^n, y_n = 0$.

iii.) Falsch, Gegenbeispiel $\lambda = 0, x_n = (-1)^n$.

iv.) Falsch, Gegenbeispiel $x_n = (-1)^n$.

Aufgabe 16. *Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:*

i.)

$$\limsup_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n} - n\right).$$

ii.)

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{5}{n-3}\right)^{(n+\sqrt{n})/2}.$$

iii.)

$$\liminf_{n\to\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n} - 5n^3}{n^3 + n(n+1)(n+2)}.$$

Solution:

i.) Für $n > 0$ haben wir:

$$\sqrt{n^2+n} - n = \frac{(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}+n)}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}.$$

Damit haben wir:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n} - n\right) = \frac{1}{2}.$$

Also insbesondere:

$$\limsup_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n} - n\right) = \frac{1}{2}.$$

ii.) Wir schreiben:

$$\left(1 - \frac{5}{n-3}\right)^{(n+\sqrt{n})/2} = \underbrace{\sqrt{\left(1 - \frac{5}{n-3}\right)^{n-3}}}_{\Longrightarrow \sqrt{e^{-5}} = e^{-5/2}} \cdot \underbrace{\sqrt{\left(1 - \frac{5}{n-3}\right)^{3}}}_{\Longrightarrow \sqrt{1^3} = 1} \cdot \sqrt{\left(1 - \frac{5}{n-3}\right)^{\sqrt{n}}}.$$

Behauptung 1.

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{5}{n-3}\right)^{\sqrt{n}} = 1.$$

Proof.

$$\log\left(\left[1-\frac{5}{n-3}\right]^{\sqrt{n}}\right) = \frac{\sqrt{n}}{n-3}\log\left(\left[1-\frac{5}{n-3}\right]^{n-3}\right) \Longrightarrow 0\cdot\log(e^{-5}) = 0.$$

Damit erhalten wir:

$$\left(1-\frac{5}{n-3}\right)^{\sqrt{n}} = e^{\log\left((1-\frac{5}{n-3})^{\sqrt{n}}\right)} \Longrightarrow e^0 = 1.$$

□

Wenn wir alles zusammensetzen, erhalten wir:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{5}{n-3}\right)^{(n+\sqrt{n})/2} = e^{-5/2}\cdot 1\cdot\sqrt{1} = e^{-5/2}.$$

iii.) Zuerst zeigen wir:

Behauptung 2.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}-5n^3}{n^3+n(n+1)(n+2)} = -\frac{5}{2}.$$

Proof. Wir berechnen

$$\frac{\sqrt{n}-5n^3}{n^3+n(n+1)(n+2)} = \frac{\frac{\sqrt{n}}{n^3}-5}{1+1(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})} \longrightarrow -\frac{5}{2}, \qquad \text{für } n\longrightarrow\infty.$$

□

Der Faktor $(-1)^n$ oszilliert zwischen $+1$ und -1. Teilfolgen mit geraden Gliedern (bis auf endlich viele Glieder) liefern Häufungspunkt $-5/2$. Teilfolgen mit ungeraden Gliedern (bis auf endlich viele Glieder) liefern Häufungspunkt $5/2$. Alle anderen Teilfolgen (unendlich viele gerade und unendlich viele ungerade Glieder) können nicht konvergieren. Da der Limes Inferior der kleinste Häufungspunkt ist, folgt:

$$\liminf_{n\to\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}-5n^3}{n^3+n(n+1)(n+2)} = -\frac{5}{2}.$$

Aufgabe 17. *Entscheiden Sie für jede Aussage, ob sie wahr oder falsch ist:*
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\mathbb{R}$ mit Häufungspunkt $h\in\mathbb{R}$.

i.) *h ist der Grenzwert von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

ii.) *h ist der einzige Häufungspunkt in $\mathbb{R} \Longrightarrow a_n\longrightarrow h$.*

iii.) *$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert $\Longrightarrow a_n\longrightarrow h$.*

iv.) *Es existiert eine Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegen h konvergiert.*

v.) $\forall\,\epsilon>0\ \forall N\in\mathbb{N}\ \exists n>N: |a_n-h|<\epsilon$.

Solution:

i.) Falsch, Gegenbeispiel $(-1)^n$ und $h = 1$.

ii.) Falsch, Gegenbeispiel $a_{2n} = 0,\ a_{2n+1} = n$ und $h = 0$.

iii.) Wahr, Kor. 3.17.

iv.) Wahr, Prop. 3.20.

v.) Wahr, das ist die Definition eines Häufungspunktes.

Aufgabe 18. ($\star$)

i.) Berechnen Sie alle Häufungspunkte der Folge:

$$a_n = \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)\left(1 + \frac{3}{n}\right)^{n+1}.$$

ii.) Seien $a_i > 0$ für alle $i = 1, \dots, p$. Zeigen Sie, dass:

$$\lim_{n\to\infty} (a_1^n + \cdots + a_p^n)^{1/n} = \max_{i=1,\dots,p} a_i.$$

Solution:

i.) Zuerst beobachten wir:

$$\left(1 + \frac{3}{n}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{3}{n}\right)^{n}\left(1 + \frac{3}{n}\right) \longrightarrow e^3 \cdot 1 = e^3, \quad \text{für } n \longrightarrow \infty.$$

Für $k \in \mathbb{N}$ und $j \in \{1, 3\}$ gilt:

$$\sin\left(\frac{2k\pi}{2}\right) = 0 \text{ und } \sin\left(\frac{(4k+j)\pi}{2}\right) = \begin{cases} 1, & \text{für } j = 1 \\ -1, & \text{für } j = 3 \end{cases}.$$

Damit sind $0, -e^3$ und e^3 die Häufungspunkte von $\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)\left(1 + \frac{3}{n}\right)^{n+1}$.

ii.) Wir berechnen:

$$\max_{i\in\{1,\dots,p\}} a_i = \left(\max_{i\in\{1,\dots,p\}} a_i^n\right)^{1/n} \le (a_1^n + \cdots + a_p^n)^{1/n} \le \left(p \cdot \max_{i\in\{1,\dots,p\}} a_i^n\right)^{1/n}$$

$$= p^{1/n} \max_{i\in\{1,\dots,p\}} a_i \longrightarrow \max_{i\in\{1,\dots,p\}} a_i, \quad \text{für } n \longrightarrow \infty.$$

Aus dem Sandwichsatz (Prop. 3.8) folgt $\lim_{n\to\infty} (a_1^n + \cdots + a_p^n)^{1/n} = \max_{i=1,\dots,p} a_i$.

Aufgabe 19. ($\star$) *Sei eine reelle Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ rekursiv definiert durch:*

$$a_0 = 1, \quad a_{k+1} = \sqrt{|a_k|} + \frac{15}{4} \text{ für } k \in \mathbb{N}.$$

i.) Zeigen Sie, dass $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

ii.) Berechnen Sie den Grenzwert von $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Solution:

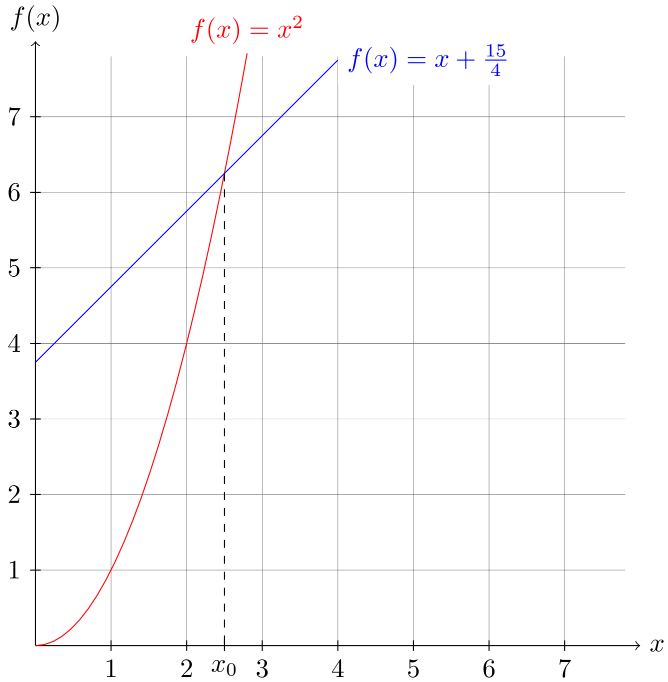
i.) Die Idee ist, dass wir zeigen, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton steigend und beschränkt ist (Prop. 3.11 erledigt den Rest). Zuerst beobachten wir, dass $a_0 = 1 > 0$ und für $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ gilt $a_n \geq \frac{15}{4} > 0$. Damit gilt für alle $n \in \mathbb{N}$: $a_n > 0$. Wir wollen nun, die Monotonie zeigen, d.h. wir versuchen zu zeigen, dass:

$$1 \leq \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{1}{\sqrt{a_k}} + \frac{15}{4}\cdot\frac{1}{a_k} \overset{a_k>0}{\iff} a_k \leq \sqrt{a_k} + \frac{15}{4}. \tag{1}$$

Wir versuchen nun zu erraten, welche Art von Abschätzung wir zeigen müssen. Da $a_k > 0$ können wir (für ein beliebiges, aber festes k) schreiben $a_k = x^2$ für ein $x > 0$. Dann gilt:

$$(1) \iff x + \frac{15}{4} \geq x^2.$$

Geometrisch sieht dies so aus:



Also gilt (1) solange $x \leq x_0$. Für x_0 gilt $x_0^2 = x_0 + \frac{15}{4}$. Wir müssen also $x_0^2 - x_0 - \frac{15}{4} = 0$ lösen. Mittels der Lösungsformel für quadratische Gleichungen erhalten wir :

$$x_0 = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(-\frac{15}{4})}}{2} = \frac{1 \pm 4}{2}.$$

Da $x_0 > 0$ folgt $x_0 = \frac{5}{2}$.

D.h. für $a_k \leq x_0^2 = \frac{25}{4}$ ist (1) erfüllt, die Folge also monoton wachsend. Wir zeigen nun die

Behauptung 3.

$$\forall k \in \mathbb{N} : a_k \leq \frac{25}{4}.$$

Proof. Induktion über k. Der Induktionsanfang $k = 0$ ist einfach $a_0 = 1 < \frac{25}{4}$. Wir nehmen nun an, dass für ein beliebiges, aber festes $k \in \mathbb{N}$ gilt $a_k \leq \frac{25}{4}$. Dann berechnen wir:

$$a_{k+1} = \sqrt{a_k} + \frac{15}{4} \leq \sqrt{\frac{25}{4}} + \frac{15}{4} = \frac{5}{2} + \frac{15}{4} = \frac{25}{4}.$$

Damit haben wir gezeigt, dass (1) immer erfüllt ist, d.h. $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend. Weiter haben wir gezeigt, dass $0 < a_k \leq 25/4$. Also ist $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ monoton und beschränkt, also konvergent. $\square$

ii.) Wir haben in *i.)* gezeigt, dass $a := \lim_{n\to\infty} a_n \geq 0$. Es gilt:

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} + \frac{15}{4} \overset{\sqrt{\cdot}\text{ stetig}}{=} \sqrt{\lim_{n\to\infty} a_n} + \frac{15}{4} = \sqrt{a} + \frac{15}{4}.$$

Wir setzen $x = \sqrt{a}$, dann gilt

$$x^2 = x + \frac{15}{4} \Longrightarrow x^2 - x - \frac{15}{4} = 0 \overset{x=\sqrt{a}\geq 0}{\Longrightarrow} x = \frac{1 + \sqrt{1 - 4\cdot(-\frac{15}{4})}}{2} = \frac{5}{2}.$$

Damit gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = a = x^2 = \frac{25}{4}$.

Aufgabe 20. ($\star$) *Zeigen Sie, dass*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty.$$

Solution:
Per Definition ist die Exponential gegeben als

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Es gilt dementsprechend für alle $x \in \mathbb{R}$, dass

$$e^x \geq \frac{x^n}{n!},$$

insbesondere also für $x = n \in \mathbb{N}$ auch das

$$e^n \geq \frac{n^n}{n!} \implies n! \geq \left(\frac{n}{e}\right)^n \implies \sqrt[n]{n!} \geq \frac{n}{e} \xrightarrow{n\to\infty} \infty.$$

Aufgabe 21. ($\star$)

i.) Berechnen Sie den folgenden Grenzwert:

$$\lim_{n\to\infty} \log\left(\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right).$$

ii.) Berechnen Sie alle Häufungspunkte der komplexen Folge:

$$z_n = (n^4 - n^2 + 2)^{1/n} \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) + i\frac{n+e}{2n+1}(-1)^n.$$

iii.) Zeigen Sie:

$$\lim_{n\to\infty}\left[(n+1)\cos\left(\frac{1}{n+1}\right) - n\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right] = 1.$$

Solution:

i.) Wir berechnen:

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n = \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{n+1}} \longrightarrow e^{-1}\cdot\frac{1}{1} = e^{-1}, \qquad \text{für } n \longrightarrow \infty.$$

Aus der Stetigkeit des Logarithmus folgt:

$$\lim_{n\to\infty} \log\left(\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right) = \log\left(\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right) = \log(e^{-1}) = -1.$$

ii.) Wir berechnen:

$$(n^4-n^2+2)^{1/n} = (n^{1/n})^4\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^4}\right)^{1/n} \longrightarrow 1^4\cdot 1 = 1, \qquad \text{für } n \longrightarrow \infty.$$

wobei wir verwendet haben, dass

$$\left(1-\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^4}\right)^{1/n} = \exp\left(\frac{1}{n}\log\left[1-\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^4}\right]\right) \xrightarrow{n\to\infty} \exp(0) = 1.$$

Desweiteren

$$\frac{n+e}{2n+1} = \frac{n}{2n+1} + \frac{e}{2n+1} = \frac{1}{2+\frac{1}{n}} + \frac{e}{2n+1} \longrightarrow \frac{1}{2}, \qquad \text{für } n \longrightarrow \infty.$$

Wir erinnern uns daran, dass gilt:

$$\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) = \begin{cases} 0, & \text{für } n = 2k,\ k\in\mathbb{N} \\ 1, & \text{für } n = 4k+1,\ k\in\mathbb{N} \\ -1, & \text{für } n = 4k+3,\ k\in\mathbb{N}. \end{cases}$$

Daraus folgt:

$$z_{2k} \longrightarrow \frac{i}{2}, \qquad \text{für } k \longrightarrow \infty,$$

$$z_{4k+1} \longrightarrow 1-\frac{i}{2}, \qquad \text{für } k \longrightarrow \infty,$$

$$z_{4k+3} \longrightarrow -1-\frac{i}{2}, \qquad \text{für } k \longrightarrow \infty,$$

Da diese drei Teilfolgen die ganze Folge überdecken, kann es keine anderen Häufungspunkte geben. Damit sind die Häufungspunkte von $((n^4-n^2+2)^{1/n}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)+i\frac{n+e}{2n+1}(-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ gerade die Elemente von $\{\frac{i}{2}, 1-\frac{i}{2}, -1-\frac{i}{2}\}$.

iii.) Wir berechnen:

$$(n+1)\cos\left(\frac{1}{n+1}\right) - n\cos\left(\frac{1}{n}\right) = \cos\left(\frac{1}{n+1}\right) + n\left(\cos\left(\frac{1}{n+1}\right)-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Wir kümmern uns zuerst um den zweiten Term. Der Mittelwertsatz (Satz 8.9) sagt uns, dass ein $\xi \in (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})$ existiert, sodass:

$$\cos\left(\frac{1}{n}\right) - \cos\left(\frac{1}{n+1}\right) = -\sin(\xi)\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) = -\sin(\xi)\left(\frac{1}{n\cdot(n+1)}\right).$$

Also gilt:

$$0 \leq \left| n\left(\cos\left(\frac{1}{n+1}\right) - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right| = \left| -\sin(\xi)\cdot \frac{1}{n+1}\right| \leq \frac{1}{n+1} \longrightarrow 0, \qquad \text{für } n \longrightarrow \infty.$$

Damit gilt:

$$\lim_{n\to\infty}\left[(n+1)\cos\left(\frac{1}{n+1}\right) - n\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right] = \lim_{n\to\infty}\cos\left(\frac{1}{n+1}\right) + \lim_{n\to\infty} n\left(\cos\left(\frac{1}{n+1}\right) - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$= \cos(0) + 0 = 1.$$

Aufgabe 22 ($\star$).

i) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge derart, dass für ihre Inkremente gilt $|a_{n+1} - a_n| \leq 2^{-n}$. Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy Folge ist. Bedeutet dies, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert? Warum?

ii) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge, welche rekursiv definiert ist mittels:

$$a_{n+2} = \frac{a_n + a_{n+1}}{2}, \ \textit{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, dass dies eine Cauchy Folge ist. Verwenden Sie Teil i).

iii) Berechnen Sie den Grenzwert der Folge aus Teil ii).

Solution:

i) Sei $\epsilon > 0$ fest aber beliebig. Seien $m \leq n$ beliebige natürliche Zahlen, wir setzen $k = n - m \geq 0$ und betrachten den Ausdruck $|a_m - a_{m+k}|$, falls $k = 1$ dann wissen wir bereits, dass $|a_m - a_{m+k}| \leq 2^{-m}$. Verwenden wir nun sukzessive die Dreicksungleichung erhalten wir:

$$\begin{aligned} |a_m - a_{m+k}| &= |(a_m - a_{m+1}) + (a_{m+1} - a_{m+2}) + \cdots + (a_{m+k-1} - a_{m+k})| \\ &\leq |a_m - a_{m+1}| + |a_{m+1} - a_{m+2}| + \cdots + |a_{m+k-1} - a_{m+k}| \\ &\leq 2^{-m} + 2^{-(m+1)} + \cdots + 2^{-(m+k-1)} < \sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{m-1}}. \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass falls $m, n \geq n_0$ dann haben wir stets die Ungleichung:

$$|a_m - a_n| < \frac{1}{2^{m-1}} \leq \frac{1}{2^{n_0-1}}.$$

Wir wählen also $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass $\frac{1}{2^{n_0-1}} \leq \epsilon$ oder äquivalent $n_0 \geq \log_2 \frac{2}{\epsilon}$. Wir wissen nun, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy Folge in $\mathbb{R}$ ist, da $\mathbb{R}$ vollständig ist konvergiert diese Cauchy Folge auch.

ii) Wir bemerken, dass per Definition gilt:

$$a_{n+2} - a_{n+1} = -\frac{a_{n+1} - a_n}{2} = \cdots = (-1)^n \frac{a_2 - a_1}{2^n}.$$

Folglich gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ für die Inkremente:

$$|a_{n+2} - a_{n+1}| \leq |a_2 - a_1| 2^{-n}.$$

Die Behauptung folgt also dank Teil i).

iii) Es sei $c := a_2 - a_1$. Wir verwenden die Darstellung von a_n als Teleskopische Summe. Wir betrachten also:

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1} - a_k) = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}\frac{c}{2^{k-1}} \\ &= a_1 + c\sum_{k=0}^{n-2}\left(\frac{-1}{2}\right)^k. \end{aligned}$$

Lassen wir nun $n \longrightarrow \infty$ streben und verwenden die Geometrische Reihe mit $r = -1/2$ erhalten wir:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a_1 + c\frac{1}{1-(-1/2)} = a_1 + c\frac{2}{3} = a_1 + \frac{2}{3}(a_2 - a_1) = \frac{a_1 + 2a_2}{3}.$$

4 Reihen

Aufgabe 23. *Wir wollen den Cauchy'schen Verdichtungssatz (Kondensationssatz von Cauchy) beweisen. Sei* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine nicht-negative Folge von monoton fallenden Termen. Zeige, dass*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} < \infty.$$

Solution:
Es sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent. Dann gilt, weil $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht-negativ und monoton fallend ist:

$$\begin{aligned} a_1 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{K} 2^n a_{2^n} &= a_1 + a_2 + 2a_4 + 4a_8 + \cdots + 2^{K-1} a_{2^K} \\ &\leq a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{2^{K-1}+1} + \cdots + a_{2^K-1} + a_{2^K} \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty. \end{aligned}$$

Um obige Ungleichung besser zu verstehen, bemerke dass $2a_4 = a_4 + a_4 \leq a_3 + a_4$, analog $4a_8 = a_8 + a_8 + a_8 + a_8 \leq a_5 + a_6 + a_7 + a_8$ usw. Für $K \to \infty$ zeigt dies, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} < \infty.$$

Nehme nun an, dass $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ konvergent ist. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N} a_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_N \\ &\leq a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \cdots + (a_{2^N} + \cdots + a_{2^{N+1}-1}) \\ &\leq a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \cdots + 2^N a_{2^N} \\ &\leq a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} < \infty. \end{aligned}$$

Lassen wir nun $N \to \infty$ so folgt die Behauptung.

Aufgabe 24. *Es sei* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge monoton fallender, nicht-negativer reellen Zahlen. Zeige dass falls* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergiert, dann gilt* $na_n \to 0$ *als* $n \to \infty$. *Hinweis: Verwende den Cauchy'schen Verdichtungssatz.*

Solution:
Da $\sum a_n$ konvergiert, gilt gemäss dem Cauchy'schen Verdichtungssatz auch, dass $\sum 2^n a_{2^n}$ konvergiert. Also muss $2^n a_{2^n}$ eine Nullfolge sein, das heisst

$$2^n a_{2^n} \xrightarrow{n\to\infty} 0. \tag{$\star$}$$

Sei nun $k \in \mathbb{N}$ sodass $2^n < k < 2^{n+1}$, da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend ist folgt dann

$$2^n a_{2^{n+1}} \leq k a_k \leq 2^{n+1} a_{2^n}.$$

Für $n \to \infty$ strebt auch $k \to \infty$ und aus obiger Ungleichung folgt mit dem Sandwich Theorem und $(\star)$ die Behauptung.

Aufgabe 25. *Verwenden Sie den Cauchy'schen Verdichtungssatz (Kondensationssatz) um zu zeigen, dass die nachfolgenden Reihen divergieren respektive konvergieren:*

i)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

ii)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

iii)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \text{ wobei } s > 1.$$

Solution:
Dank dem Cauchy'schen Kondensationssatz wissen wir, dass für eine nicht-negative, nicht-wachsende Folge $f(n)$ von reellen Zahlen gilt $\sum f(n) < \infty \iff \sum 2^n f(2^n) < \infty$ also erhalten wir:

i)

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty.$$

da $a_n = 1$ keine Nullfolge ist.

ii)

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{(2^n)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \infty.$$

da geometrische Reihe mit $r = \frac{1}{2} < 1$.

iii) Wir erhalten durch den Cauchy'schen Kondensationssatz die Reihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{(2^n)^s} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^{ns}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{s-1}}\right)^n < \infty.$$

Da $s > 1$ und wir erneut eine geometrische Reihe erhalten mit $0 \le r = 2^{1-s} < 1$.

Aufgabe 26.

i) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend, $a_n > 0$. Zeige, die Reihe

$$\sum_n \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right)$$

konvergiert genau dann, wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist.

ii) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge. Zeige dass gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+na_n} < \infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty.$$

Hinweis: Verwende Aufgabe 24.

Solution:

i) Nehme zum Widerspruch an, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt ist. Da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wächst, gilt für $m > n$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=n}^{m}\left(\frac{a_{k+1}}{a_k}-1\right) &= \frac{a_{m+1}-a_m}{a_m}+\cdots+\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n}\\ &\geq \frac{1}{a_m}[(a_{m+1}-a_m)+\cdots+(a_{n+1}-a_n)]\\ &= \frac{1}{a_m}(a_{m+1}-a_n) \geq 1-\frac{a_n}{a_m}.\end{aligned}$$

Da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt ist, gibt es zu jedem a_n ein $m > n$ mit $a_m > 2a_n$, also mit $1-\frac{a_n}{a_m} > \frac{1}{2}$. Also gibt es zu jedem n ein $m > n$ mit der Eigenschaft

$$\sum_{k=n}^{m}\left(\frac{a_{k+1}}{a_k}-1\right) > \frac{1}{2}.$$

Mit dem Cauchy-Kriterium folgt, dass die Divergenz der Reihe

$$\sum_n\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right)$$

was ein Widerspruch ist.

Sei nun andererseits $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend und beschränkt. Dann ist $\sum(a_{n+1}-a_n)$ eine konvergente Teleskop-Reihe. Wegen

$$0 \leq \frac{a_{n+1}}{a_n}-1 = \frac{a_{n+1}-a_n}{a_n} \leq \frac{1}{a_1}(a_{n+1}-a_n)$$

folgt die Konvergenz der Reihe $\sum\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right)$ aus dem Majoranten-Kriterium.

ii) Es konvergiere $\sum_n a_n$. Wegen $0 \leq \frac{a_n}{1+na_n} \leq a_n$ $(a_n \geq 0)$ folgt also die "$\Longleftarrow$" Implikation aus dem Majorantenkriterium.

Es gelte andererseits, dass $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+na_n}$ konvergiere. Sobald ein $a_{n_0}=0$ ist, so sind von dort an alle $a_n=0$ und die Behauptung ist trivial, es seien also alle $a_n > 0$. Da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend ist, ist $1/a_n$ monoton wachsend und wir schliessen dass

$$\frac{a_n}{1+na_n} = \frac{1}{n+1/a_n}$$

monoton fallend ist. Dank Aufgabe 24 gilt also $b_n := n\frac{a_n}{1+a_n} \to 0$ als $n\to\infty$ und da

$$na_n = \frac{b_n}{1-b_n}$$

folgt auch $na_n \to 0$ für $n\to\infty$. Also gilt $0 < na_n < 1$ ab einem Index n_0 und daher für alle $n \geq n_0$

$$\frac{a_n}{1+na_n} \geq \frac{a_n}{2}$$

Nach dem Majorantenkriterium folgt nun, dass die Reihe $\sum\frac{a_n}{2}$ und damit auch die Reihe $\sum a_n$ konvergent ist.

Aufgabe 27. $(\star)$ *Bestimmen Sie für die folgenden Reihen, ob sie konvergent und ob sie absolut konver-*

gent sind:

i.)

$$\sum_{k\geq 0} \frac{2k}{3k^3+1}.$$

ii.)

$$\sum_{k\geq 2} \frac{\sin(k\pi/2)}{\log(k)}.$$

iii.)

$$\sum_{k\geq 1} \frac{2^k k!}{k^k}.$$

Solution:

i.) Wir berechnen für $k \geq 1$:

$$\left|\frac{2k}{3k^3+1}\right| = \frac{2k}{3k^3+1} \leq \frac{2k}{3k^3} \leq \frac{1}{k^2}.$$

Wir wissen, dass $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^2}$ konvergiert (siehe Seite 43, Anwendung des Cauchy Verdichtungskriterium), folgt mit dem Majorantenkriterium (Prop. 4.8), dass $\sum_{k\geq 0} \frac{2k}{3k^3+1}$ absolut konvergiert.

ii.) Es gilt für $k \in \mathbb{N}$ gilt $\sin(k\pi) = 0$ und $\sin((2k+1)\pi/2) = (-1)^k$. Damit gilt:

$$\sum_{k\geq 2} \frac{\sin(k\pi/2)}{\log(k)} = \sum_{k\geq 1} \frac{\sin((2k+1)\pi/2)}{\log(2k+1)} = \sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^k}{\log(2k+1)}.$$

Da $\frac{1}{\log(2k+1)} > 0$ und die Folge $\frac{1}{\log(2k+1)}$ monoton fallend ist mit $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\log(2k+1)} = 0$, folgt aus dem Leibnizkriterium (Prop. 4.15), dass $\sum_{k\geq 2} \frac{\sin(k\pi/2)}{\log(k)}$ konvergiert.

Wir zeigen, dass $\sum_{k\geq 2} \frac{\sin(k\pi/2)}{\log(k)}$ nicht absolut konvergiert. Dazu brauchen wir die folgende

Behauptung 4.

$$\forall j \in \mathbb{N} : 2j+1 > \log(2j+1).$$

Proof. Wir definieren $h : \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}$ als $h(x) = 2x+1-\log(2x+1)$.
Dann gilt $h(0) = 1$ und $h'(x) = 2 - \frac{2}{2x+1} > 0$. □

Damit erhalten wir:

$$\sum_{k\geq 2} \left|\frac{\sin(k\pi/2)}{\log(k)}\right| = \sum_{k\geq 1} \left|\frac{(-1)^k}{\log(2k+1)}\right| = \sum_{k\geq 1} \frac{1}{\log(2k+1)} > \sum_{k\geq 1} \frac{1}{2k+1}.$$

Da die harmonische Reihe divergiert, divergiert $\sum_{k\geq 2} \left|\frac{\sin(k\pi/2)}{\log(k)}\right|$, d.h. $\sum_{k\geq 2} \frac{\sin(k\pi/2)}{\log(k)}$ konvergiert nicht absolut.

iii.) Sei $a_n = \frac{2^k k!}{k^k}$. Wir berechnen:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{2^{k+1}(k+1)!}{(k+1)^{k+1}} \cdot \frac{k^k}{2^k k!} = 2(k+1)\frac{k^k}{(k+1)^{k+1}} = 2\left(\frac{k}{k+1}\right)^k = 2\left(1 - \frac{1}{k+1}\right)^k$$

$$= 2\left(1-\frac{1}{k+1}\right)^{k+1} \frac{1}{1-\frac{1}{k+1}} \longrightarrow 2e^{-1} = \frac{2}{e}, \quad \text{für } k \longrightarrow \infty.$$

Aus dem Quotientenkriterium (Satz 4.12) folgt, dass $\sum_{k\geq 1} \frac{2^k k!}{k^k}$ absolut konvergiert.

Aufgabe 28. ($\star$) *Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:*

i.)
$$\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n+1}.$$

ii.)
$$\sum_{n\geq 0}\left(\frac{n+5}{3n-2}\right)^{3n}.$$

iii.)
$$\sum_{n\geq 0}\frac{\exp(3n\log(n))}{(n!)^2}.$$

Solution:

i.) Wir berechnen für $n\in\mathbb{N}$:

$$\frac{\sqrt{n+1}}{n+2}<\frac{\sqrt{n}}{n+1}\iff\frac{n+1}{(n+2)^2}<\frac{n}{(n+1)^2}$$

$$\iff n^3+3n^2+3n+1=(n+1)^3<(n+2)^2n=n^3+4n^2+4n\iff 0<n^2+n-1.$$

Also ist $(\frac{\sqrt{n}}{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend. Damit können wir das Leibnizkriterium (Prop. 4.15) anwenden, und damit konvergiert $\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n+1}$.

Wir zeigen, dass $\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n+1}$ nicht absolut konvergiert. Dazu berechnen wir für $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$:

$$\left|(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n+1}\right|=\frac{\sqrt{n}}{n+1}\geq\frac{\sqrt{n}}{2n}=\frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

Wir wissen (Anwendung des Verdichtungskriteriums, S. 43), dass $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ divergiert, damit divergiert auch $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{2\sqrt{n}}$. Und schliesslich divergiert deswegen $\sum_{n\geq 0}\left|(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n+1}\right|$. Also ist $\sum_{n\geq 0}\left|(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n+1}\right|$ nicht absolut konvergent.

ii.) Wir berechnen:

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\left(\frac{n+5}{3n-2}\right)^{3n}\right|^{1/n}=\limsup_{n\to\infty}\left(\frac{n+5}{3n-2}\right)^3=\limsup_{n\to\infty}\left(\frac{1+\frac{5}{n}}{3-\frac{2}{n}}\right)^3=\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}<1.$$

Aus dem Wurzelkriterium (Satz 4.11) folgt, dass $\sum_{n\geq 0}\left(\frac{n+5}{3n-2}\right)^{3n}$ absolut konvergiert.

iii.) Zuerst bemerken wir, dass $\frac{e^{3n\log(n)}}{(n!)^2}=\frac{n^{3n}}{(n!)^2}$. Es gibt verschiedene Arten, um zu zeigen, dass die Reihe divergiert. Hier sind zwei Möglichkeiten:

<u>Möglichkeit 1 : Nullfolgenkriterium</u>

$$\frac{e^{3n\log(n)}}{(n!)^2}=\frac{n^{3n}}{(n!)^2}=n^n\cdot\left(\frac{n^n}{n!}\right)^2=n^n\cdot\left(\frac{n^n}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}\right)^2\geq n^n\cdot 1^2\geq 1.$$

Damit ist $(\frac{e^{3n\log(n)}}{(n!)^2})_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge und mit dem Nullfolgenkriterium (Prop. 4.2) folgt, dass $\sum_{n\geq 0}\frac{\exp(3n\log(n))}{(n!)^2}$ divergiert.

Möglichkeit 2 : Quotientenkriterium

Wir berechnen:

$$\frac{\left(\frac{(n+1)^{3n+3}}{((n+1)!)^2}\right)}{\left(\frac{n^{3n}}{(n!)^2}\right)} = \frac{(n+1)^{3n+3}}{n^{3n}} \cdot \frac{(n!)^2}{((n+1)!)^2} = \frac{(n+1)^{3n}}{n^{3n}} \cdot (n+1)^3 \cdot \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$= \underbrace{\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^3}_{\longrightarrow e^3,\text{ für } n\longrightarrow\infty} \cdot \underbrace{(n+1)}_{\longrightarrow\infty,\text{ für } n\longrightarrow\infty} \longrightarrow \infty.$$

Aus dem Quotientenkriterium (Satz 4.12) folgt, dass $\sum_{n\geq 0} \frac{\exp(3n\log(n))}{(n!)^2}$ nicht absolut konvergiert. Da alle Terme nichtnegativ sind (dann ist absolute Konvergenz und Konvergenz das gleiche), folgt, dass $\sum_{n\geq 0} \frac{\exp(3n\log(n))}{(k!)^2}$ nicht konvergiert.

Aufgabe 29. $(\star)$ *Berechnen Sie:*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}\right).$$

Solution:
Wir berechnen:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k\cdot(k+1)} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1}+\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{k}-\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{k}-\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right) = 1.$$

Aufgabe 30.

i) Existiert ein $s>0$ sodass die nachfolgende Reihe konvergiert?

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\log^s(n)}.$$

ii) Für welche $s\in\mathbb{R}$ ist die nachfolgende Reihe konvergent?

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\log^s(n)}.$$

Solution:
Wir verwenden das Cauchy Kondensationsverfahren:

i)

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\log^s(n)}<\infty \iff \sum_{n=2}^{\infty}2^n\frac{1}{\log^s(2^n)}<\infty$$
$$\iff \frac{1}{\log^s(2)}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^n}{n^s}<\infty.$$

Jedoch konvergiert die letzte Reihe nicht, da $\lim \frac{2^n}{n^s} = \infty$ keine Nullfolge ist für alle $s > 0$ (da die exponential Funktion $2^n = \exp(n \log(2))$ schneller wächst als jedes Polynom beliebigen Grades). Also existiert kein $s > 0$ sodass die Reihe konvergiert.

ii)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^s(n)} < \infty \iff \sum_{n=2}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n \log^s(2^n)} < \infty$$
$$\iff C \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^s} < \infty, \text{ wobei } C := \frac{1}{\log^s(2)}.$$

Die letzte Reihe konvergiert genau dann wenn $s > 1$.

Aufgabe 31. *Zeigen Sie, dass die nachfolgende Reihe konvergiert:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k^2 + 2k + 3}{6k^5 + 6}.$$

Solution:
Für $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Partialsumme:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2k^2 + 2k + 3}{6k^5 + 6} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{k^5 + 1} + \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^5 + 1} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^5 + 1}.$$

Offensichtlich gilt, dass $k^5 + 1 \geq k^5$ und somit $\frac{1}{k^5+1} \leq \frac{1}{k^5}$, wir erhalten also die Abschätzung:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2k^2 + 2k + 3}{6k^5 + 6} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^4} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^5}.$$

Lassen wir nun $n \longrightarrow \infty$, dann erkennen wir die konvergenten Reihen, wir schliessen dass die Reihe konvergiert.

Alternativ können wir auch das Vergleichskriterium verwenden, denn es gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 + 2n + 3}{6n^5 + 6} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}.$$

Wir berechnen hierfür:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{2n^2+2n+3}{6n^5+6}}{\frac{1}{n^3}} = \lim_{n \to \infty} \frac{n^3(2n^2 + 2n + 3)}{6n^5 + 6} = \frac{1}{3} \in (0, \infty).$$

Wobei wir verwendet haben, dass die dominanten Terme die der Ordnung n^5 sind, somit verhält sich die Reihe vergleichbar mit der konvergenten Reihe $\sum \frac{1}{n^3}$.

Aufgabe 32. *Zeigen Sie mit Hilfe des Integralkriteriums, dass die folgende Reihe konvergiert:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}.$$

Solution:
Wir verwenden das Integralkriterium, d.h. wir betrachten das Integral:

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}dx = \tan^{-1}(x)\Big|_{x=0}^{x=\infty} = \frac{\pi}{2} < \infty.$$

Also konvergiert die Reihe, was zu zeigen war.

Aufgabe 33. *Bestimmen Sie, ob die nachfolgende Reihe konvergiert:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} ne^{-n^2}.$$

Solution:
Wir verwenden den Integraltest und erhalten:

$$\int_0^\infty xe^{-x^2}\ dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2}\Bigg|_{x=0}^{x=\infty} = \frac{1}{2} < \infty.$$

und folglich konvergiert die Reihe.

5 Topologie: Metrische Räume

Aufgabe 34. *Sei (X, d) ein metrischer Raum. Beweise, dass auch (X, d') mit $d' : X \times X \to \mathbb{R}$ spezifiziert als*

$$d'(x, y) := \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

ein metrischer Raum ist.

Solution:
Wir müssen lediglich zeigen, dass d' die drei definierenden Eigenschaften einer Metrik erfüllt, wir werden dazu selbstverständlich die Eigenschaft ausnützen, dass d bereits eine Metrik auf X ist. Seien also $x, y, z \in X$ fest aber beliebig:

1. Offensichtlich gilt, $d'(x, y) \geq 0$, weil $d(x, y) \geq 0$. Ausserdem gilt

$$d'(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} = 0 \iff d(x, y) = 0 \iff x = y$$

weil d eine Metrik auf X ist.

2. Die Symmetrie folgt aus der Eigenschaft weil d eine Metrik ist. Bemerke:

$$d'(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} = \frac{d(y, x)}{1 + d(y, x)} = d'(y, x).$$

3. Die Dreiecksungslgleichung ist der schwierigste Teil. Da d eine Metrik auf X ist folgt $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. Also gilt auch

$$d'(x, z) = \frac{d(x, z)}{1 + d(x, z)} \leq \frac{d(x, y) + d(y, z)}{1 + d(x, z)}.$$

Wir bemerken, dass die Abbildung $f(r) := \frac{r}{1+r}$ monoton wachsend ist. Seien dazu $r_1 \leq r_2$, wir wollen zeigen, dass $f(r_1) \leq f(r_2)$. Wir bemerken, dass

$$f(r_1) = \frac{r_1}{1 + r_1} = 1 - \frac{1}{1 + r_1}$$

und wir haben

$$1 + r_1 \leq 1 + r_2 \implies \frac{1}{1 + r_1} \geq \frac{1}{1 + r_2} \implies -\frac{1}{1 + r_1} \leq -\frac{1}{1 + r_2}$$

und daher

$$f(r_1) = 1 - \frac{1}{1 + r_1} \leq 1 - \frac{1}{1 + r_2} = \frac{r_2}{1 + r_2} = f(r_2).$$

Da wir $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ haben benützen wir obige Ungleichung für $r_1 = d(x, z)$ und $r_2 = d(x, y) + d(y, z)$. Dies liefert nun

$$d'(x, z) = \frac{d(x, z)}{1 + d(x, z)} \leq \frac{d(x, y) + d(y, z)}{1 + d(x, y) + d(y, z)} = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y) + d(y, z)} + \frac{d(y, z)}{1 + d(x, y) + d(y, z)}.$$

Nun schätzen wir einzelnen Terme ab. Da $d(x, y) \geq 0$ und $d(y, z) \geq 0$ gilt

$$\frac{d(x, y)}{1 + d(x, y) + \underbrace{d(y, z)}_{\geq 0}} \leq \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} = d'(x, y)$$

und analog

$$\frac{d(y, z)}{1 + \underbrace{d(x, y)}_{\geq 0} + d(y, z)} \leq \frac{d(y, z)}{1 + d(y, z)} = d'(y, z).$$

Zusammenfassend folgt nun die Dreiecksungleichung $d'(x, z) \leq d'(x, y) + d'(y, z)$. Somit definiert d' eine Metrik auf X und (X, d') ist auch ein metrischer Raum bezüglich d'.

Aufgabe 35. *Sei X eine beliebige nicht leere Menge und definierne $d : X \times X \to \mathbb{R}$ als*

$$d(x,y) := \begin{cases} 0 & \textit{falls } x = y \\ 1 & \textit{falls } x \neq y. \end{cases}$$

i) Zeige, dass (X, d) ein metrischer Raum ist.

ii) Zeige dass eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X genau dann bezgülich d konvergiert, wenn sie konstakt ist ab einem (endlichen) Index $N \in \mathbb{N}$.

iii) Folgere, dass (X, d) vollständig ist

iv) Welche Teilmengen von X sind offen? Welche sind abgeschlossen? Was ist also die Topologie $\tau \subset \mathcal{P}(X)$ auf X?

v) Sei (M, d') ein beliebiger metrischer Raum und $f : X \to M$ eine beliebige Funktion. Zeige, dass f stetig ist.

vi) Zeige dass $K \subset X$ ist kompakt, genau dann wenn K endlich ist.

Solution:

i) (a) Per Definition ist klar, dass $d(x, y) \geq 0$ und $d(x, y) = 0$ genau dann wenn $x = y$.

(b) Die Symmetrie ist ebenfalls trivial.

(c) Für die Dreiecksungleichung müssen wir zwei Fälle unterscheiden:

- Falls $x = z$, dann ist $d(x, z) = 0$ und $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ ist trivial wahr für alle Fälle (es gibt hier zwei weitere Situationen) denn $d(x, y), d(y, z) \in \{0, 1\}$.
- Falls $x \neq z$, dann ist $d(x, z) = 1$ und es gibt 3 Unterfälle:
  - $x = y \neq z \implies 1 = d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) = 0 + 1 = 1.$
  - $x \neq y = z \implies 1 = d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) = 1 + 0 = 1.$
  - $x \neq y \neq z \implies d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) = 1 + 1 = 2.$

In allen Situationen ist also die Dreiecksungleichung erfüllt.

ii) Wir verwenden die Notation "für fast alle $n \in \mathbb{N}$ was soviel bedeutet wie "für alle bis auf endlich viele". Da $d(a_n, a) \in \{0, 1\}$ folgt

$$\begin{aligned} a_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} a \iff d(a_n, a) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 &\iff d(a_n, a) = 0 \text{ für fast alle } n \in \mathbb{N} \\ &\iff a_n = a \text{ für fast alle } n \in \mathbb{N} \\ &\iff a_n \text{ ist konstant } (= a) \text{ ab einem Index } N \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

iii) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy Folge in X, dann gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ sodass für alle n, m grösser als N gilt $d(x_n, x_m) < \epsilon$. Wähle nun $\epsilon = 1/2$, dann gilt $d(x_n, x_m) = 0$ und somit muss (analog wie in vorheriger Aufgaben) x_n konstant für n grösser als N sein. Laut vorheriger Teilaufgabe beduetet dies, dass die Folge konvergiert und somit ist jede Cauchy Folge konvergent, also (X, d) ein vollständiger metrischer Raum.

iv) Sei $A \subset X$ und $x \in A$ beliebig. Für $\epsilon = 1/2$ ist der Ball um x mit Radius ϵ

$$B_\epsilon(x) = \{y \in X : d(x, y) < \epsilon\} = \{x\} \subset A.$$

Damit ist A offen. Also sind alle Teilmengen von X offen und daher auch alle abgeschlossen weil A^c offen impliziert A abgeschlossen. Folglich können wir sagen $\tau = \mathcal{P}(X)$.

v) Mittels der topologischen Charakterisierung von Stetigkeit wissen wir: f stetig $\iff f^{-1}(U) \subset X$ offen für alle $U \subset M$ offen. Da aber sowieso alle Teilmengen von X offen sind, insbesondere also auch $f^{-1}(U)$, ist f stetig.

vi) Sei einerseits $K = \{x_1, \dots, x_n\}$ endlich und $K \subset \bigcup_i U_i$ eine offene Überdeckung von K. Wähle U_{i_j} sodass $x_j \in U_{i_j}$. Dann ist $K \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$ eine endliche offene Teilüberdeckung. Also ist K kompakt.
Sei andererseits K kompakt. $K \subset \bigcup_{a \in K} \{a\}$ ist eine offene Überdeckung, da die Singleton-Mengen offen sind (sogar jede Teilmenge ist offen). Diese hat also eine endliche Teilüberdeckung $K \subset \{a_1\} \cup \dots \cup \{a_n\}$. Also muss K endlich sein.

Aufgabe 36. *Zeige, dass für alle $v \in \mathbb{R}^n$ gilt:*

$$\|v\|_\infty = \lim_{p \to \infty} \|v\|_p.$$

Solution:
Wir bemerken, dass einerseits.

$$\|v\|_\infty = \max_{j=1,\dots,n} |v_j| = \left(\max_{j=1,\dots,n} |v_j|^p \right)^{1/p} \leq (|v_1|^p + \dots + |v_n|^p)^{1/p} = \|v\|_p.$$

Andererseits haben wir:

$$\|v\|_p = (|v_1|^p + \dots + |v_n|^p)^{1/p} \leq (\|v\|_\infty^p + \dots + \|v\|_\infty^p)^{1/p} = n^{1/p} \|v\|_\infty.$$

Zusammenführend haben wir also gezeigt, dass gilt:

$$\|v\|_\infty \leq \|v\|_p \leq n^{1/p} \|v\|_\infty.$$

Da $\lim_{p \to \infty} n^{1/p} = 1$ folgt aus dem Sandwich theorem die Behauptung.

Aufgabe 37. *Beweise die Cauchy-Schwarz Ungleichung, das heisst für alle $v, w \in \mathbb{R}^n$ gilt*

$$\sum_{i=1}^n |v_i||w_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n |v_i|^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n |w_i|^2}.$$

Solution:
Für $v = 0$ oder $w = 0$ ist die Cauchy-SChwarz-Ungleichung trivialerweise erfüllt. Seien also $v, w \neq 0$ und wir verwenden die (standard) Notation:

$$\|v\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^n |v_i|^2}.$$

Bemerke, dass $(x-y)^2 \geq 0 \iff 2xy \leq x^2 + y^2$. Wir verwenden diese Ungleichung mit

$$x := \frac{|v_i|}{\|v\|_2}, \text{ und } y := \frac{|w_i|}{\|w\|_2}.$$

Wir erhalten:

$$2 \frac{|v_i||w_i|}{\|v\|_2 \|w\|_2} \leq \frac{|v_i|^2}{\|v\|_2^2} + \frac{|w_i|^2}{\|w\|_2^2}.$$

Summation beider Seiten von $i = 1, \dots, n$ liefert

$$\frac{2}{\|v\|_2 \|w\|_2} \sum_{i=1}^n |v_i||w_i| \leq \sum_{i=1}^n \frac{|v_i|^2}{\|v\|_2^2} + \sum_{i=1}^n \frac{|w_i|^2}{\|w\|_2^2} = \frac{\|v\|_2^2}{\|v\|_2^2} + \frac{\|w\|_2^2}{\|w\|_2^2} = 1 + 1 = 2.$$

Also

$$\frac{2}{\|v\|_2\|w\|_2}\sum_{i=1}^{n}|v_i||w_i| \leq 2 \implies \sum_{i=1}^{n}|v_i||w_i| \leq \|v\|_2\|w\|_2,$$

ziehen der Wurzel auf beiden Seiten liefert nun die gewünschte Ungleichung von Cauchy-Schwarz.

Aufgabe 38. *Sei Q der Raum der quadratsummierbaren reellen Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, d.h. für welche die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ konvergiert. Zeige, dass*

$$d((a_n),(b_n)) = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)^2}$$

eine Metrik auf Q definiert.
Hinweis: Verwende die Cauchy-Schwarz Ungleichung um die Dreiecksungleichung zu beweisen.

Solution:
Seien $(a_n),(b_n),(c_n) \in Q$ drei beliebige quadratsummierbare Folgen.

1. Offensichtlich gilt $d((a_n),(b_n)) \geq 0$ und es gilt

$$\begin{aligned} d((a_n),(b_n)) = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)^2} = 0 &\iff (a_n-b_n)^2 = 0 \text{ für alle } n\in\mathbb{N} \\ &\iff a_n = b_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \\ &\iff (a_n) = (b_n). \end{aligned}$$

2. Bemerke

$$d((a_n),(b_n)) = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)^2} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-a_n)^2} = d((b_n),(a_n)),$$

und somit ist die Symmetrie erfüllt.

3. Dies ist der schwierigste Teil der Aufgabe.

$$\begin{aligned} d((a_n),(c_n)) &= \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-c_n)^2} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n+b_n-c_n)^2} \\ &= \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)(b_n-c_n) + \sum_{n=1}^{\infty}(b_n-c_n)^2}. \end{aligned}$$

Nun verwenden wir die Cauchy-Schwarz-Ungleichung, um den mittleren Term abzuschätzen:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)(b_n-c_n) &\leq \sum_{n=1}^{\infty}|a_n-b_n||b_n-c_n| \\ &\leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)^2}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-c_n)^2}. \end{aligned}$$

Wir erhalten somit:

$$
\begin{aligned}
d((a_n),(b_n)) &\leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)^2+2\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)^2}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-c_n)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-c_n)^2} \\
&= \sqrt{\left(\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)^2}+\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-c_n)^2}\right)^2} \\
&= \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)^2}+\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-c_n)^2} = d((a_n),(b_n))+d((b_n),(c_n)).
\end{aligned}
$$

Aufgabe 39. *Betrachte den $\mathbb{R}^n$ mit der Euklidischen Metrik. Zeige oder widerlege:*

i) *$X := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2-y^2+2xy=5\}$ ist abgeschlossen. Hinweis: Urbilder abgeschlossener Mengen unter stetigen Funktionen sind abgeschlossen.*

ii) *$Y := \{\frac{\cos x}{x}\in\mathbb{R} \mid x\in\mathbb{N}\setminus\{0\}\}$ ist abgeschlossen.*

Solution:

i) Wahr. Sei $f(x,y)=x^2-y^2+2xy$. Dann ist f stetig als Summe von Produkten stetiger Funktionen. Die Singleton Menge $\{5\}$ ist abgeschlossen in $\mathbb{R}$ und es folgt, dass $X=f^{-1}(\{5\})$ ebenfalls abgeschlossen ist.

ii) Falsch. Es gilt:

$$\left|\frac{\cos(n)}{n}\right| \leq \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Wäre Y abgeschlossen, so müsste nach dem Folgenkriterium $0\in Y$ gelten. Das ist aber nicht der Fall, weil

$$\cos(x)=0 \iff x=n\pi+\frac{\pi}{2}, \quad n\in\mathbb{Z}$$

und Zahlen der Form $n\pi+\frac{\pi}{2}$ sind irrational, insbesondere also nicht in Y.

Aufgabe 40. *i.) Sei (X,d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie:*

(a) die umgekehrte Dreiecksungleichung

$$|d(x,y)-d(y,z)| \leq d(x,z).$$

(b) die verallgemeinerte Dreicksungleichung

$$d(x_n,x_1) \leq \sum_{i=1}^{n-1} d(x_{i+1},x_i).$$

(c) die Vierecksungleichung

$$|d(x,y)-d(u,v)| \leq d(x,u)+d(y,v).$$

ii.) Sei $(Y,\|\cdot\|)$ ein normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum. Zeigen Sie:

(a) die umgekehrte Dreiecksungleichung

$$\big|\, \|x\|-\|y\| \,\big| \leq \|x-y\|.$$

(b) *die verallgemeinerte Dreiecksungleichung*

$$\|x_n - x_1\| \le \sum_{i=1}^{n-1} \|x_{i+1} - x_i\|.$$

Solution:

i.) (a) Die Dreicksungleichung liefert uns für $x, y, z \in X$:

$$d(x,y) \le d(x,z) + d(y,z) \Rightarrow d(x,y) - d(y,z) \le d(x,z).$$

Tauschen wir die Rollen von x und y, so erhalten wir $-(d(x,y) - d(y,z)) = d(y,z) - d(x,y) \le d(x,z)$. Dammit erhalten wir $|d(x,y) - d(y,z)| \le d(x,z)$.

(b) Wir beweisen dies mit Induktion über n. Die Induktionsverankerung $n = 2$ ist trivial. Wir nehmen nun an, dass die Behauptung wahr ist für ein $n \in \mathbb{N}_{\ge 2}$. Dann gilt

$$d(x_{n+1}, x_1) \le d(x_{n+1}, x_n) + d(x_n, x_1) \overset{\text{IV}}{\le} d(x_{n+1}, x_n) + \sum_{i=1}^{n-1} d(x_{i+1}, x_i) = \sum_{i=1}^{n} d(x_{i+1}, x_i).$$

(c) Seien $x, y, u, v \in X$. Wir wenden zweimal die Dreicksungleichung an und erhalten

$$d(x,y) \le d(x,u) + d(u,y) \le d(x,u) + d(u,v) + d(v,y).$$

Wir folgern

$$d(x,y) - d(u,v) \le d(x,u) + d(y,v).$$

Tauschen wir die Rollen von x und u und auch y und v, so erhalten wir

$$-(d(x,y) - d(u,v)) = d(u,v) - d(x,y) \le d(x,u) + d(y,v).$$

Damit erhalten wir $|d(x,y) - d(u,v)| \le d(x,u) + d(y,v)$.

ii.) Folgt direkt aus *i.)* mit $d(x,y) = \|x - y\|$.

Aufgabe 41. *Seien $(M_1, d_1), (M_2, d_2)$ metrische Räume. Sei $f : M_1 \to M_2$ gleichmässig stetig. Zeigen Sie: Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in M_1 $\Rightarrow$ $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge in M_2.*

Solution:
Sei $\epsilon > 0$. Da f gleichmässig stetig ist, existiert $\delta > 0$, sodass

$$\forall x, y \in M_1 : d_1(x,y) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(y)) < \epsilon. \tag{2}$$

Da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge bezüglich d_1 ist, gilt

$$\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n, m \ge N : d_1(a_n, a_m) < \delta. \tag{3}$$

Kombinieren wir (2) und (3), so erhalten wir

$$\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n, m \ge N : d_2(f(a_n), f(a_m)) < \epsilon.$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig war, folgt, dass $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge bezüglich d_2 ist.

Aufgabe 42. *In dieser Aufgabe wollen wir zeigen, dass $\ell_p \subset \ell_q$ für $0 < p \le q$.*

i) Zeige zuerst, dass für $0 < a \le 1$ folgende Ungleichung gilt:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \right)^a \le \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^a.$$

ii) Folgere dass $\|a\|_q \leq \|a\|_p$.

Solution:

i) Die Ungleichung ist trivial für $a = 1$. Weiterin ist die Ungleichung trivial falls die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ identisch Null ist und dies ist genau der Fall falls

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = 0.$$

Sei also $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \neq 0$. Bemerke weiterhin, dass für $x \in (0, 1]$ and $a \in (0, 1)$ gilt $x^a \geq x$. Dies ist wahr weil $x = 1$ die Ungleichung trivial ist und für $x \in (0, 1)$ haben wir

$$x^a \geq x \iff \log(x^a) \geq \log(x) \iff a\log(x) \geq \log(x) \iff a \leq 1.$$

Es folgt nun

$$\frac{\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^a}{\left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|\right)^a} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|^a}{\left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|\right)^a} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{|a_n|}{\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|}\right)^a \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|}{\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|} = 1.$$

Aus obiger Ungleichung folgt nun die Behauptung:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|\right)^a \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^a.$$

ii) Sei nun $0 < p \leq q$, dann gilt für $a = p/q$ natürlich $0 < a \leq 1$. Mit Teilaufgabe i) erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\left(\sum_n |a_n|^q\right)^{1/q} = \left(\sum_n |a_n|^q\right)^{p/qp} = \left[\left(\sum_n |a_n|^q\right)^a\right]^{1/p} &\overset{i)}{\leq} \left(\sum_n |a_n|^{aq}\right)^{1/p} \\
&= \left(\sum_n |a_n|^{q(p/q)}\right)^{1/p} \\
&= \left(\sum_n |a_n|^p\right)^{1/p}.
\end{aligned}$$

Dies zeigt nun, dass $\ell_p \subset \ell_q$ für $p \leq q$.

6 Stetigkeit und Grenzwerte von Funktionen

Aufgabe 43. *Zeigen Sie, mit Hilfe der Definition der Stetigkeit, dass die folgende Funktion in $x = 1$ stetig ist:*

$$h : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{-1\} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \frac{x^2+x+1}{x+1}. \end{cases}$$

Solution:
Sei $\epsilon > 0$ fest aber beliebig, es sei δ sodass $0 < |x-1| < \delta$, und wir können stets ohne Einschränkung annehmen, dass $\delta < 1$. Wir betrachten den Ausdruck:

$$\begin{aligned} |h(x) - h(1)| &= \left| \frac{x^2+x+1}{x+1} - \frac{3}{2} \right| = \left| \frac{2x^2+2x+2-3x-3}{2(x+1)} \right| = \left| \frac{x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}}{x+1} \right| \\ &= \left| \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-1)}{x+1} \right| = \frac{\left|x+\frac{1}{2}\right| |x-1|}{|x+1|} < \frac{\left|x+\frac{1}{2}\right|}{|x+1|}\delta. \end{aligned}$$

Wir wollen also die Terme $x + \frac{1}{2}$ und $x + 1$ kontrollieren. Aus $|x-1| < \delta$ erhalten wir jedoch sofort:

$$\left| x + \frac{1}{2} \right| = \left| x - 1 + 1 + \frac{1}{2} \right| \le |x-1| + \frac{3}{2} < \delta + \frac{3}{2} < \frac{5}{2}.$$

Es bleibt also nur noch der Ausdruck $|x+1|$. Da wir per Annahme $0 < |x-1| < \delta$ haben, also x sich beliebig nahe an 1 befindet, muss sich $x+1$ beliebig Nahe an 2 befinden, also haben wir:

$$2 - \delta < |x+1| < 2 + \delta.$$

und da $\delta < 1$ haben wir $|x+1| > 1$, also erhalten wir:

$$|h(x) - h(1)| < \frac{\left|x+\frac{1}{2}\right|}{|x+1|}\delta < \frac{5}{2}\delta \overset{!}{<} \epsilon \iff \delta < \epsilon\frac{2}{5}.$$

Wir wählen also für ein beliebiges $\epsilon > 0$ ein δ derart, dass $0 < \delta < \min\{\frac{2\epsilon}{5}, 1\}$ und erhalten dass dann h stetig an der Stelle $x = 1$ ist, d.h. wir haben formal gezeigt, dass:

$$\lim_{x \to 1} h(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^2+x+1}{x+1} = \frac{3}{2}.$$

Aufgabe 44. *Sind die 3 nachfolgenden Funktionen Lipschitz-stetig?*

i) $f : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \frac{1}{1+x^2}$.

ii) $f : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \sqrt{x}$.

iii) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \sin x$.

iv) Finden Sie eine Funktion, welche gleichmässig stetig, aber nicht Lipschitz-stetig ist.

v) Finden Sie eine Funktion, die Lipschitz-stetig, aber nicht differenzierbar ist.

Solution:

i)

$$|f'(x)| = \left| \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \right| \le 1 \implies \text{Ableitung beschränkt} \implies f \text{ ist Lipschitz-stetig.}$$

Wir haben hierbei verwendet, dass gemäss Bernoulli Ungleichung $(1+x^2)^2 \geq 1+2x^2$. Desweiteren gilt $1+2x^2 \geq 2x$ weil $1-2x+2x^2 = (1-x)^2 + x^2 \geq 0$. Somit haben wir gezeigt, dass $(1+x^2)^2 \geq 2x$ und folglich die Behauptung.

ii) Für den Grenzwert der Ableitung an der Stelle $x = 0^+$ gilt:

$$\lim_{x\to 0^+} |f'(x)| = \lim_{x\to 0^+} \left| \frac{1}{2\sqrt{x}} \right| = \infty.$$

Also ist die Ableitung an der Stelle $x = 0^+$ unbeschränkt und somit ist f nicht Lipschitz-stetig.

iii) Offensichtlich ist die Ableitung durch die cos Funktion gegeben, welche durch 1 beschränkt ist und somit ist f Lipschitz-stetig.

iv) Wir definieren $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \sqrt{x}$, dann ist f gleichmässig stetig, aber nicht Lipschitz.

v) Die Betragsfunktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto |x|$ ist ein möglicher Kandidat.

Aufgabe 45. *Beweisen Sie, falls $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und injektiv ist, dann ist f streng monoton.*

Solution:
Wir nehmen an, dass f nicht streng monoton ist. Dann existieren $x_1 < x_2 < x_3$, sodass $f(x_1) \leq f(x_2) \geq f(x_3)$ oder $f(x_1) \geq f(x_2) \leq f(x_3)$. Es gibt nun de facto vier Fälle, die man untersuchen muss. Man kann es mittels Überlegen auf einen Fall reduzieren. Falls jemandem dieses "ohne Beschränkung der Allgemeinheit" nicht zusagt, so soll er dies in Gedanken durch "man zeigt analog" ersetzen und es zeigen. Dies ist eine gute Übung.
Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass gilt $f(x_1) \leq f(x_2) \geq f(x_3)$. Falls dies nicht der Fall ist, betrachten wir $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ g(x) := -f(x)$. g ist stetig und injektiv, desweiteren ist g genau dann streng monoton, wenn f es ist.
Desweiteren können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $f(x_1) \leq f(x_3)$, dies ist wahr weil f per Annahme stetig ist, also können wir x_3 nahe genug an x_2 wählen sodass $f(x_1) \leq f(x_3)$.
Wir haben nun alles auf den Fall $f(x_1) \leq f(x_3) \leq f(x_2)$ reduziert. Aus dem Zwischenwertsatz (Satz 6.16) folgt, dass es ein $\xi \in (x_1, x_2)$ gibt, sodass $f(x_3) = f(\xi)$, dies steht im Widerspruch, dass f injektiv ist.

Aufgabe 46. $(\star)$ *Sei $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktionenfolge und $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$. Entscheiden Sie für jede der folgenden Aussagen, ob sie wahr oder falsch ist:*

i.) Alle f_n sind stetig und $f_n \longrightarrow f$ punktweise $\Longrightarrow f$ ist stetig.

ii.) Alle f_n sind stetig und $f_n \longrightarrow f$ gleichmässig $\Longrightarrow f$ ist stetig.

iii.) Alle f_n sind differenzierbar auf $(0,1)$ und $f_n \longrightarrow f$ gleichmässig $\Longrightarrow f$ ist differenzierbar auf $(0,1)$.

Solution:

i.) Falsch. Gegenbeispiel, $f_n(x) = x^n$ und $f(x) = \begin{cases} 1, & x = 1 \\ 0, & x \neq 1. \end{cases}$

ii.) Wahr, Prop. 6.24.

iii.) Falsch. Gegenbeispiel, $f_n(x) := \sqrt{(x-1/2)^2 + 1/n}$ konvergiert gleichmässig gegen die nicht differenzierbare Funkton $f(x) := |x - 1/2|$.

Aufgabe 47. *Beweisen Sie, falls $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und beschränkt ist, dann besitzt f einen Fixpunkt.*

Solution:
Wir definieren $a := \inf_{x\in\mathbb{R}} f(x)$ und $b := \sup_{x\in\mathbb{R}} f(x)$. Dann gilt $Im(f) \subseteq [a, b]$ und wir können f einschränken auf $f : [a, b] \longrightarrow [a, b]$. Da f stetig ist, folgt die Behauptung aus dem Fixpunktsatz.

Aufgabe 48. ($\star$) *Sei $f : (0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ gleichmässig stetig. Zeigen Sie: Es existiert ein $c \in \mathbb{R}$, sodass für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $(0, 1]$ mit $x_n \longrightarrow 0$ gilt:*

$$f(x_n) \longrightarrow c \quad \text{für } n \longrightarrow \infty.$$

Bemerkung (nicht Teil der Aufgabe): Das bedeutet, dass $\lim_{x\downarrow 0} f(x) = c$.

Solution:
Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (0, 1]$ mit $x_n \longrightarrow 0$. Dann ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge (da sie konvergiert). Da f gleichmässig stetig ist, ist $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls eine Cauchyfolge. Da $\mathbb{R}$ vollständig ist (Satz 3.23), existiert ein $c \in \mathbb{R}$, sodass $f(x_n) \longrightarrow c$. Sei nun $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (0, 1]$, sodass $y_n \longrightarrow 0$. Wir definieren für $n \in \mathbb{N}$:

$$z_{2n} := x_n \quad \text{und} \quad z_{2n+1} := y_n.$$

Dann gilt $z_n \longrightarrow 0$. Mit der gleichen Argumentation wie oben, erhalten wir, dass $(f(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und damit gilt:

$$\lim_{n\to\infty} f(y_n) = \lim_{n\to\infty} f(z_{2n+1}) = \lim_{n\to\infty} f(z_n) = \lim_{n\to\infty} f(z_{2n}) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = c.$$

Aufgabe 49. *Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:*

i)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{x}.$$

ii)
$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x x^5}{x^x}.$$

iii)
$$\lim_{x\to\infty} \left(x^2 + 3 - \sqrt{x^4 + 6x^2}\right)x^2.$$

Solution:

i) Es gibt mehrere Möglichkeiten dies zu zeigen:
Möglichkeit 1 : Potenzreihe:
Es gilt:

$$\frac{\sin(ax)}{x} = \sum_{j\geq 0} \frac{(-1)^j a^{2j+1}}{(2j+1)!} x^{2j}.$$

Wir berechnen:

$$\left| \frac{(-1)^j a^{2j+1}}{(2j+1)!} \right|^{\frac{1}{2j}} = \frac{|a|^{1+\frac{1}{2j}}}{((2j+1)!)^{\frac{1}{j}}} \longrightarrow |a| \cdot 0 = 0, \quad \text{für } j \longrightarrow \infty.$$

Die restlichen Koeffizienten von $\sum_{j\geq 0} \frac{(-1)^j a^{2j+1}}{(2j+1)!} z^{2j}$ sind 0. Damit ist der Konvergenzradius $\rho = \infty$. Wir setzten:

$$f(z) = \sum_{j\geq 0} \frac{(-1)^j a^{2j+1}}{(2j+1)!} z^{2j}.$$

Nach Satz 7.2 ist f stetig. Damit gilt:

$$\lim_{x\to 0} \frac{sin(ax)}{x} = \lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = \sum_{j\geq 0} \frac{(-1)^j a^{2j+1}}{(2j+1)!} 0^{2j} = \frac{(-1)^0 a^{2\cdot 0+1}}{(2\cdot 0+1)!} = a.$$

Möglichkeit 2 : L'Hôpital:

Es gilt $\lim_{x\to 0} \sin(ax) = 0 = \lim_{x\to 0} x$. Nenner und Zähler sind beide differenzierbar. Mit dem Satz von Hôpital (Satz 8.14) folgt:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{a\cdot\cos(ax)}{1} = a\cdot\cos(0) = a.$$

Wobei wir benutzt haben, dass cos stetig ist und $\cos(0) = 1$.

ii) Wir berechnen:

$$\frac{e^x x^5}{x^x} = e^5 \frac{e^{x-5}}{x^{x-5}} = e^5 \left(\frac{e}{x}\right)^{x-5}.$$

Für $x \geq 2e$ gilt:

$$0 \leq e^5 \left(\frac{e}{x}\right)^{x-5} \leq e^5 \left(\frac{1}{2}\right)^{x-5} \longrightarrow 0, \quad \text{für } x \longrightarrow \infty.$$

Wobei wir benutzt haben, dass $2^{x-5} \longrightarrow \infty$ für $x \longrightarrow \infty$. Damit gilt $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x x^5}{x^x} = 0$.

iii) Wir berechnen:

$$\left(x^2+3-\sqrt{x^4+6x^2}\right)x^2 = \frac{\left(x^2+3-\sqrt{x^4+6x^2}\right)\left(x^2+3+\sqrt{x^4+6x^2}\right)x^2}{x^2+3+\sqrt{x^4+6x^2}}$$

$$= \frac{9x^2}{x^2+3+\sqrt{x^4+6x^2}} = \frac{9}{1+\frac{3}{x^2}+\sqrt{1+\frac{6}{x^2}}} \longrightarrow \frac{9}{2}, \quad \text{für } x \longrightarrow \infty.$$

Also $\lim_{x\to\infty} \left(x^2+3-\sqrt{x^4+6x^2}\right)x^2 = \frac{9}{2}$.

Aufgabe 50. *Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte (möglicherweise $\pm\infty$):*

i)

$$\lim_{x\to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

ii)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2-\cos x}{x+3}.$$

iii)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2(2+\sin^2 x)}{x+100}.$$

iv)

$$\lim_{x\to 0} x^2 e^{\sin^3\left(\frac{1}{x}\right)}.$$

Solution:
Wir verwenden in allen Lösungen, dass die trigonometrischen Funktionen von oben durch 1 und von unten durch -1 beschränkt sind. Wir erhalten dann:

i)

$$0 \longleftarrow -x^2 \le x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \le x^2 \longrightarrow 0, \text{ falls } x \longrightarrow 0.$$

da $x^2 \ge 0$.

ii) Wir haben $-1 \le \cos(x) \le 1$ und somit $1 \ge -\cos(x) \ge -1$ also:

$$0 \longleftarrow \frac{1}{x+3} \le \frac{2-\cos x}{x+3} \le \frac{3}{x+3} \longrightarrow 0 \text{ falls } x \longrightarrow \infty.$$

iii) Es genügt die untere Abschätzung zu betrachten, wir erkennen dass:

$$\frac{x^2}{x+100} \le \frac{x^2(2+\sin^2 x)}{x+100}.$$

und da die untere Schranke gegen unendlich divergiert, muss auch die obere Schranke nach unendlich divergieren.

iv) Da die Exponential Funktion monoton wachsend auf $\mathbb{R}$ ist erhalten wir:

$$0 \longleftarrow x^2 e^{-1} \le x^2 \exp\left(\sin^3\left(\frac{1}{x}\right)\right) \le x^2 e^1 \longrightarrow 0, \text{ falls } x \longrightarrow 0.$$

Aufgabe 51. *Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:*

i)

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\sqrt{x^2+1}\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}.$$

ii)

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\sqrt{x+4}-2}.$$

Solution:
Wir verwenden den $e^{\log}$-Trick um diese beiden Aufgaben zu lösen:

i)

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\sqrt{x^2+1}\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to 0^+} \exp\left(\log\left[\left(\sqrt{x^2+1}\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}\right]\right) = \lim_{x\to 0^+} \exp\left(\frac{\log\sqrt{x^2+1}}{\sin^2 x}\right).$$

Da die Exponentialfunktion stetig ist, dürfen wir den Grenzwert mit der exp-Funktion vertauschen (i.e. in ihr Argument hereinziehen). Für den Grenzwert der Funktion im Exponenten erhalten wir mit Hilfe des Satzes von Bernoulli De L'Hopital, dass:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\log(\sqrt{x^2+1}}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(x^2+1)}{2\sin^2 x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{2x}{1+x^2}}{4\sin x\cos x} = \lim_{x\to 0^+} \underbrace{\frac{x}{2\sin x}}_{\longrightarrow 1/2} \cdot \underbrace{\frac{1}{(1+x^2)\cos x}}_{\longrightarrow 1}$$
$$= \frac{1}{2}.$$

und somit erhalten wir für den Grenzwert $e^{1/2}$.

ii)

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\sqrt{x+4}-2} = \lim_{x\to 0^+} \exp\left(\log\left(x^{\sqrt{x+4}-2}\right)\right) = \lim_{x\to 0^+} \exp\left((\sqrt{x+4}-2)\log(x)\right).$$

Dann berechnen wir den Grenzwert für die Funktion im Exponenten, erneut mit Hilfe des Satzes von Bernoulli- de L'Hopital:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} (\sqrt{4+x}-2)\log(x) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(x)}{\frac{1}{\sqrt{x+4}-2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-\frac{1}{2\sqrt{x+4}}}{(\sqrt{x+4}-2)^2}} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{-2\cdot\sqrt{x+4}\cdot(\sqrt{x+4}-2)^2}{x} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{-4(\sqrt{x+4}-2)^2}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-8(\sqrt{x+4}-2)\frac{1}{2\sqrt{x+4}}}{1} \\
&= \lim_{x\to 0^+} -8\underbrace{(\sqrt{x+4}-2)}_{\longrightarrow 0} \cdot \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x+4}}}_{\longrightarrow 1/4} = 0.
\end{aligned}$$

Also erhalten wir als Grenzwert $e^0 = 1$.

Aufgabe 52. *Berechnen Sie den folgenden Grenzwert:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \int_0^{\tan x} \log(2+t)dt.$$

Solution:
Wir haben den Typ "0/0" da $\lim_{x\to 0} \int_0^{\tan x} \log(2+t)dt = 0$. *Dank dem Hauptsatz der Integralrechnung erhalten wir:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \int_0^{\tan x} \log(2+t)dt = \lim_{x\to 0} \frac{\log(2+\tan(x))\cdot\frac{1}{\cos^2(x)}}{1} = \lim_{x\to 0} \frac{\log(2+\tan(x))}{\cos^2(x)} = \log(2).$$

Aufgabe 53. *Berechnen Sie den folgenden Grenzwert: Tipp: Verwenden sie einen Fundamentallimes.*

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+2x}{x^2-3x+2}\right)^{\frac{x^2+1}{x-3}}.$$

Solution:

Wir verwenden den Fundamentallimes $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$. Wir berechnen also:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x}{x^2-3x+2}\right)^{\frac{x^2+1}{x-3}} &= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-3x+2+3x-2+2x}{x^2-3x+2}\right)^{\frac{x^2+1}{x-3}} \\
&= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5x-2}{x^2-3x+2}\right)^{\frac{x^2+1}{x-3}} \\
&= \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x^2-3x+2}{5x-2}}\right)^{\frac{x^2-3x+2}{5x-2}}\right]^{\frac{5x-2}{x^2-3x+2}\frac{x^2+1}{x-3}}.
\end{aligned}$$

Der Ausdruck in den eckigen Klammern [.] konvergiert gemäss Fundamentallimes gegen e, also betrachten wir nurnoch den Exponenten, dieser kann jedoch wie folgt vereinfacht werden:

$$\frac{5x-2}{x^2-3x+2}\frac{x^2+1}{x-3} = \frac{5x^3-2x^2+5x-2}{x^3-6x^2+12x-6} \longrightarrow 5 \text{ falls } x \longrightarrow \infty.$$

Da die höchst auftretenden Potenzen beide Grad 3 aufweisen. Wir erhalten also den Grenzwert e^5. Als kleine Bemerkung, wir haben verwendet, dass wir eine Funktion der folgenden Form betrachten:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to\infty} f(x)^{\lim g(x)}.$$

unter der Annahme, dass die beiden Grenzwerte $\lim f(x)$ und $\lim g(x)$ existieren. Dies gilt gemäss dem $e^{\log}$-Trick. In der Tat wir betrachten:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\exp\left(\log\left(f(x)^{g(x)}\right)\right) = \lim_{x\to\infty}\exp\left(g(x)\log(f(x))\right) &= \exp(\lim g(x)\log(\lim f(x))) \\
&= \lim f(x)^{\lim g(x)}.
\end{aligned}$$

Da sowohl exp als auch log stetig sind.

7 Potenzreihen

Aufgabe 54. *Sei* $f : \mathbb{R}_{>-1} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = \log(1+x)$.

i.) Bestimmen Sie die Taylorreihe von f *um* $x_0 = 0$. *Bestimmen Sie den Konvergenzradius* ρ *dieser Reihe.*

ii.) Sei $R_2 f(x)$ *das Restglied des Taylorpolynoms zweiter Ordnung. Zeigen Sie:*

$$R_2 f(x) \geq 0, \quad \forall\ 0 \leq x < \rho.$$

iii.) Zeigen Sie für alle $n > 1$*:*

$$1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1}\left(1 + \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) \leq \frac{1}{2n^2}.$$

Solution:

i.) Wir zeigen, dass:

$$\log(1+x) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\, x^n, \quad x \in (-1, 1).$$

Zuerst zeigen wir die folgende

Behauptung 5.

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(1+x)^n}, \quad x \in \mathbb{R}_{>-1} \textit{ und } n \in \mathbb{N}_{\geq 1}.$$

Proof. Wir beweisen dies mittels Induktion über n. Zuerst zeigen wir die Induktionsverankerung $n = 1$:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = \frac{(-1)^2(1-1)!}{(1+x)^1}.$$

Wir nehmen nun an, dass die Behauptung für ein $n \in \mathbb{N}$ wahr ist. Dann berechnen wir:

$$f^{(n+1)}(x) = \left(\frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(1+x)^n}\right)' = (-1)^{n+1}(n-1)!\Big((1+x)^{-n}\Big)'$$

$$= (-1)^{n+1}(n-1)!(-n)(1+x)^{-n-1} = \frac{(-1)^{(n+1)+1}((n+1)-1)!}{(1+x)^{n+1}}.$$

□

Zusätzlich gilt $f^{(0)}(0) = f(0) = \log(1) = 0$. Damit erhalten wir für die Taylorreihe von f in $x_0 = 0$ den folgenden Ausdruck:

$$\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,(x-0)^n = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{n!(1+0)^n}\, x^n = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\, x^n.$$

Der Konvergenzradius ist gegeben durch:

$$\rho = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty}(1/n)^{1/n}} = \frac{1}{1} = 1.$$

ii.) Möglichkeit 1 : Taylorreihe

Das Restglied des Taylorpolynoms zweiter Ordnung ist für $0 \leq x < 1$ gegeben durch:

$$R_2 f(x) = \sum_{k \geq 3} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \ x^k = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=3}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \ x^k \geq 0.$$

Wobei wir benutzt haben, dass:

$$\sum_{k=3}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \ x^k = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{(-1)^{(2k+1)+1}}{2k+1} \ x^{2k+1} + \frac{(-1)^{(2k+2)+1}}{2k+2} \ x^{2k+2} \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2k+1} \ x^{2k+1} - \frac{1}{2k+2} \ x^{2k+2} \right) = \sum_{k=1}^{n-1} \underbrace{\left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2} \ x \right)}_{\geq 0} \underbrace{x^{2k+1}}_{\geq 0} \geq 0.$$

Möglichkeit 2 : Lagrange Restglied

Alternativ kann man das Restglied von Lagrange (Satz 8.25) verwenden. Es existiert ein $\xi_x \in (0, x)$, sodass:

$$R_2 f(x) = \frac{f^{(3)}(\xi_x)}{3!} x^3 \overset{\text{Behauptung 5}}{=} \frac{2!(-1)^4}{3!(1+\xi_x)^3} x^3 = \frac{1}{3} \cdot \underbrace{\frac{x^3}{(1+\xi_x)^3}}_{\geq 0, \text{ da } x \geq 0, \xi_x \geq 0} \geq 0.$$

iii.) Für $n > 1$ gilt $0 < \frac{1}{n} < 1$. Wir können also schreiben:

$$\log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2}{2} + R_2 f\left(\frac{1}{n}\right).$$

Wenn wir diese Identität einsetzen erhalten wir:

$$1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} \left(1 + \log(1 + \frac{1}{n})\right) = 1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} \left(1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{2}(\frac{1}{n})^2 + R_2 f(\frac{1}{n})\right)$$

$$= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} \frac{1}{2n^2} - \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1}}_{>0} \underbrace{R_2 f(\frac{1}{n})}_{\geq 0, \text{ wegen } ii.)} \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} \frac{1}{2n^2} = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{2n^2} \leq \frac{1}{2n^2}.$$

Aufgabe 55. *Es sei* $f_n : [1, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}, \ f_n(x) = 2n \left((2x)^{1/n} - 1\right)$.

i.) *Zeigen Sie, dass* $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *punktweise konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert* $f : [1, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$.
Hinweise: Schreiben Sie $(2x)^{1/n} = \exp(1/n \cdot \log(2x))$.

ii.) *Zeigen Sie, dass die Konvergenz auf dem Intervall* $[1, 2]$ *gleichmässig ist.*

iii.) *Ist die Konvergenz gleichmässig auf* $[1, \infty)$*?*

Solution:

i.) Sei $x \geq 1$. Wir wenden den Satz über die Taylorapproximation mit Langrange'schem Restglied

(Satz 8.25) an. Dann existiert ein $\xi_x \in (0, 1/n\log(2x))$, sodass:

$$\exp\left(\frac{1}{n}\cdot\log(2x)\right) = e^0 + e^0\frac{1}{n}\cdot\log(2x) + \frac{e^{\xi_x}}{2}\left(\frac{1}{n}\cdot\log(2x)\right)^2$$

$$= 1 + \frac{1}{n}\cdot\log(2x) + \frac{e^{\xi_x}}{2}\left(\frac{1}{n}\cdot\log(2x)\right)^2.$$

Damit gilt:

$$2n\left((2x)^{1/n} - 1\right) = 2n\left(\exp\left(\frac{1}{n}\cdot\log(2x)\right) - 1\right)$$

$$= 2\cdot\log(2x) + \frac{e^{\xi_x}}{2n}\log(2x)^2 \longrightarrow 2\log(2x) =: f(x), \quad \text{für } n \longrightarrow \infty.$$

ii.) Aus *i.)* wissen wir, dass es für jedes $x \in [1,2]$ ein $\xi_x \in (0, 1/n\log(2x))$ gibt, sodass:

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|2\cdot\log(2x) + \frac{e^{\xi_x}}{2n}\log(2x)^2 - f(x)\right| = \left|\frac{e^{\xi_x}}{2n}\log(2x)^2\right|.$$

Da die Exponentialfunktion und der Logarithmus auf unserem Bereich monoton steigend und nichtnegativ sind, gilt:

$$\sup_{x\in[1,2]}|f_n(x) - f(x)| \le \frac{e^{\frac{1}{n}\log(4)}}{2n}\log(4)^2 \le \frac{e^{\log(4)}}{2n}\log(4)^2 = \frac{2\cdot\log(4)^2}{n} \longrightarrow 0, \quad \text{für } n \longrightarrow \infty.$$

iii.) Nein.

$$\left|f_n\left(\frac{n^n}{2}\right) - f\left(\frac{n^n}{2}\right)\right| = |2n\,(n-1) - 2\log(n^n)| = |2n(n-1-\log(n))| \longrightarrow \infty, \quad \text{für } n \longrightarrow \infty.$$

Also:

$$\sup_{x\in[1,\infty)}|f_n(x) - f(x)| \longrightarrow \infty, \quad \text{für } n \longrightarrow \infty.$$

Aufgabe 56. $(\star)$ *Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen in $z \in \mathbb{C}$:*

i.)

$$\sum_{m\ge1}\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{j}\right)z^m.$$

ii.)

$$\sum_{k\ge0}4k^5 3^k z^{k^2}.$$

iii.)

$$\sum_{n\ge1}\left(5 - \frac{2}{n}\right)^n z^n.$$

iv.)

$$\sum_{n\ge0} i^{n-1} n^n z^n.$$

v.)

$$\sum_{n\ge0}\frac{2^n}{n!}z^n.$$

Solution:

i.)

$$1 = 1^n = \left(n \cdot \frac{1}{n}\right)^{1/n} \leq \left|\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}\right|^{1/n} \leq n^{1/n} \longrightarrow 1, \quad \text{für } n \longrightarrow \infty.$$

Damit gilt $\lim_{n\to\infty} \left|\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}\right|^{1/n} = 1$ und damit:

$$\rho = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \left|\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}\right|^{1/n}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \left|\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}\right|^{1/n}} = \frac{1}{1} = 1.$$

ii.) Die Koeffizienten sind:

$$a_n = \begin{cases} 0, & n \text{ keine Quadratzahl} \\ 4n^{5/2} 3^{\sqrt{n}}, & n \text{ Quadratzahl.} \end{cases}$$

Wir berechnen:

$$|a_{n^2}|^{1/n} = |4n^{5/2} \cdot 3^{\sqrt{n}}|^{1/n} = \underbrace{4^{1/n}}_{\longrightarrow 1} \cdot \underbrace{\left(n^{1/n}\right)^{5/2}}_{\longrightarrow 1^{5/2}=1} \cdot \underbrace{e^{\log(3)/\sqrt{n}}}_{\longrightarrow e^0 = 1} \longrightarrow 1, \quad \text{für } n \longrightarrow \infty.$$

Damit erhalten wir:

$$\rho = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}} = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} |a_{n^2}|^{1/n^2}} = \frac{1}{1} = 1.$$

iii.) Wir berechnen:

$$\rho = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \left|\left(5 - \frac{2}{n}\right)^n\right|^{1/n}} = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \left(5 - \frac{2}{n}\right)} = \frac{1}{5}.$$

iv.) Wir berechnen:

$$\limsup_{n\to\infty} |i^{n-1} n^n|^{1/n} \stackrel{|i|=1}{=} \limsup_{n\to\infty} n = \infty.$$

Damit gilt:

$$\rho = 0.$$

v.) Sei $k \in \mathbb{N}$, dann gilt für $n \geq k$:

$$(n!)^{1/n} \geq \left(1 \cdot 2 \cdot \cdot 3 \cdot \ldots (k-1) \cdot k \cdot \underbrace{k \cdot \cdots \cdot k}_{n-k \text{ mal}}\right)^{1/n} \geq k^{(n-k)/n} = k^{1-k/n}.$$

Damit gilt:

$$\limsup_{n\to\infty} (n!)^{1/n} \geq \limsup_{n\to\infty} k^{1-k/n} = k.$$

Da $k \in \mathbb{N}$ beliebig war, gilt $\limsup_{n\to\infty} (n!)^{1/n} = \infty$. Es folgt:

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{2^n}{n!}\right|^{1/n} = \limsup_{n\to\infty} \frac{2}{(n!)^{1/n}} = 0.$$

Also gilt:

$$\rho = \infty.$$

Aufgabe 57. ($\star$) *Entscheiden Sie für die folgenden Aussagen, ob sie wahr oder falsch sind:*

i.) Sei $\rho > 0$ der Konvergenzradius von $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$. Dann ist f auf $\{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| < \rho\}$ stetig.

ii.) Sei $\rho > 0$ der Konvergenzradius von $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$. Dann $p_m(z) = \sum_{n=0}^{m} a_n z^n \longrightarrow f(z)$ gleichmässig auf $\{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| \leq r\}$ für alle $r < \rho$.

Solution:

i.) Wahr, Satz 8.30.

ii.) Sei $0 \leq r < \rho$. Nach Satz 7.2 konvergiert $\sum_{n\geq 0} |a_n| \cdot r^n$. Insbesondere gilt $\sum_{n\geq m+1} |a_n| \cdot r^n \longrightarrow 0$ für $m \longrightarrow \infty$. Die folgende Rechnung zeigt die gleichmässige Konvergenz auf $\{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| \leq r\}$:

$$\begin{aligned}\sup_{|z|\leq r} |f(z) - p_m(z)| &= \sup_{|z|\leq r} \Big|\sum_{n\geq m+1} a_n z^n\Big| \leq \sup_{|z|\leq r} \sum_{n\geq m+1} |a_n| \cdot |z^n| \\ &= \sum_{n\geq m+1} |a_n| \cdot r^n \longrightarrow 0, \qquad \text{für } m \longrightarrow \infty.\end{aligned}$$

Aufgabe 58. *Berechnen Sie den folgenden Grenzwert mit Hilfe der Lagrange'schen Fehlerabschätzung:*

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \right).$$

Solution:
Aus dem Satz über das Lagrang'sche Restglied (Satz 8.25) wissen wir, dass gilt:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + e^{\xi_x} \cdot \frac{x^3}{6},$$

wobei $\xi_x \in [0, x]$ für $x > 0$ und $\xi_x \in [x, 0]$ für $x < 0$. Damit folgt:

$$\begin{aligned}\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} &= \frac{1}{x + \frac{x^2}{2} + e^{\xi_x} \cdot \frac{x^3}{6}} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{1 + \frac{x}{2} + e^{\xi_x} \cdot \frac{x^2}{6}} - 1 \right) = \frac{1}{x}\left(\frac{-\frac{x}{2} - e^{\xi_x} \cdot \frac{x^2}{6}}{1 + \frac{x}{2} + e^{\xi_x} \cdot \frac{x^2}{6}} \right) \\ &= \frac{-\frac{1}{2} - e^{\xi_x} \cdot \frac{x}{6}}{1 + \frac{x}{2} + e^{\xi_x} \cdot \frac{x^2}{6}}.\end{aligned}$$

Da $|\xi_x| \leq |x|$, gilt $\xi_x \longrightarrow 0$ für $x \longrightarrow 0$. Damit erhalten wir mit der Stetigkeit der Exponentialfunktion:

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{2} - e^{\xi_x} \cdot \frac{x}{6}}{1 + \frac{x}{2} + e^{\xi_x} \cdot \frac{x^2}{6}} = \frac{-\frac{1}{2} - e^0 \cdot 0}{1 + \frac{0}{2} + e^0 \cdot \frac{0^2}{6}} = -\frac{1}{2}.$$

8 Differentialrechnung

Aufgabe 59. ($\star$) *Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine gerade (d.h. $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$), differenzierbare Funktion. Zeigen Sie, dass $f' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine ungerade Funktion ist, d.h. $f'(-x) = -f'(x)$.*

Solution:
Sei $x \in \mathbb{R}$, dann gilt:

$$f'(-x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-x+h) - f(-x)}{h} \overset{f \text{ gerade}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{-h}$$

$$= -\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = -f'(x).$$

Aufgabe 60. *Beweisen Sie die verallgemeinerte Bernoulli-Ungleichung, welche besagt, dass für alle $r \geq 1,\ x \geq 0$ gilt:*

$$(1+x)^r \geq 1 + rx.$$

Hint: Betrachten Sie die Funktion $h(x) = (1+x)^r - (1+rx)$.

Solution:
Die Behauptung ist äquivalent zu der Aussage $h(x) \geq 0$ für alle $x \geq 0$. Zuerst berechnen wir die Ableitung von h:

$$h'(x) = r(1+x)^{r-1} - r = r((1+x)^r - 1) \geq 0.$$

Damit ist h monoton steigend. Da $h(0) = 1^r - 1 = 0$, folgt, dass $h(x) \geq 0$ für alle $x \geq 0$ und damit die Behauptung.

Aufgabe 61. ($\star$) *Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch:*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

i.) Zeigen Sie, dass f auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar ist und berechnen Sie $f'(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

ii.) Ist f' an der Stelle $x = 0$ stetig?

Solution:

i.) Für $x \neq 0$ erhalten wir mit der Kettenregel (Prop. 8.5) und der Produktregel (Satz 8.3), dass f differenzierbar ist und dass gilt:

$$f'(x) = (x^2)' \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)' = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)\left(\frac{1}{x}\right)'$$

$$= 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2\left(\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\left(\frac{-1}{x^2}\right) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Für $x = 0$ berechnen wir:

$$0 \leq \left|\frac{f(h) - f(0)}{h - 0}\right| = \left|\frac{h^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{h}\right| = |h| \cdot \left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |h| \longrightarrow 0, \qquad \text{für } h \longrightarrow 0.$$

Damit gilt $f'(0) = \lim_{h\to 0} \left|\frac{f(h)-f(0)}{h-0}\right| = 0.$

ii.) f' ist stetig in $x = 0$, genau dann wenn gilt $\lim_{h\to 0} f'(h) = f'(0)$, also:

$$\lim_{h\to 0}\left[2h\sin\left(\frac{1}{h}\right) - \cos\left(\frac{1}{h}\right)\right] = f'(0) = 0.$$

Aus der Rechnung von $i.)$ folgt $\lim_{h\to 0} 2h\sin\left(\frac{1}{h}\right) = 0$. Damit ist f' stetig in $x = 0$, genau dann wenn $\lim_{h\to 0}\cos\left(\frac{1}{h}\right) = 0$. Dies ist jedoch nicht der Fall. Da:

$$\cos\left(\frac{1}{\left(\frac{1}{2n\pi}\right)}\right) = \cos(2n\pi) = 1 \quad \text{und } \frac{1}{2n\pi} \longrightarrow 0 \quad \text{für } n \longrightarrow \infty.$$

Also ist f' nicht stetig in $x = 0$.

Aufgabe 62. *Sei $\epsilon > 0$. Wir definieren $f_\epsilon : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f_\epsilon(x) = |x|^{1+\epsilon}$. Zeigen Sie, dass f_ϵ auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar ist.*

Solution:
Wir wissen, dass der Absolutbetrag ausserhalb von $x = 0$ differenzierbar ist. Auch wissen wir, dass $x \longmapsto x^{1+\epsilon}$ differenzierbar ist (Seite 90). Die Komposition differenzierbarer Funktionen ist differenzierbar (Kettenregel, Prop. 8.5), also ist f_ϵ in $x \neq 0$ differenzierbar. Nun zeigen wir noch, dass f_ϵ in $x = 0$ differenzierbar ist

$$\left|\frac{f_\epsilon(h) - f_\epsilon(0)}{h - 0}\right| = \left|\frac{|h|^{1+\epsilon}}{h}\right| = |h|^\epsilon \longrightarrow 0, \quad h \longrightarrow 0.$$

Damit gilt $\lim_{h\to 0}\frac{f_\epsilon(h)-f_\epsilon(0)}{h-0} = 0$, also ist f_ϵ in $x = 0$ differenzierbar (mit $f'_\epsilon(0) = 0$).

Aufgabe 63. *Bestimmen Sie alle Punkte, in denen:*

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$$

i.) stetig ist.

ii.) differenzierbar ist.

Solution:

i.) Wir zeigen, dass f nur in $x = 0$ stetig ist.

Sei $x \neq 0$. Da sowohl $\mathbb{Q}$, als auch $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ liegen (Prop. 2.17 und Seite 62), existieren Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = x = \lim_{n\to\infty} b_n$. Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0 \neq x^2 = \lim_{n\to\infty} b_n^2 = \lim_{n\to\infty} f(b_n).$$

Damit ist f nicht stetig in $x \neq 0$. Die gleiche Rechnung zeigt, dass f in $x = 0$ stetig ist.

ii.) Wir zeigen, dass f nur in $x = 0$ differenzierbar ist.

Da f nicht stetig ist in $x \neq 0$, ist f auch nicht differenzierbar in $x \neq 0$ (Prop. 8.2). Wir berechnen:

$$\left|\frac{f(h) - f(0)}{h - 0}\right| \leq \left|\frac{h^2}{h}\right| = |h| \longrightarrow 0, \quad h \longrightarrow 0.$$

Damit gilt $\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h-0} = 0$, also ist f in $x = 0$ differenzierbar (mit $f'(0) = 0$).

Das Ziel dieser Aufgabe war es, daran zu erinneren, dass eine Funktion, die in x differenzierbar ist, nicht in einer ganzen Umgebung von x differenzierbar sein muss.

Aufgabe 64. ($\star$) *Berechnen Sie die Ableitungen $f'(x)$ der folgenden Funktionen:*

i.)

$$f(x) = \log\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right) \quad \textit{für } x \in (0,1).$$

ii.)

$$f(x) = \sqrt{\frac{a+bx}{a-bx}} \quad \textit{für } a, b > 0, \ \textit{für } x \in \left(\frac{-\alpha}{\beta}, \frac{\alpha}{\beta}\right).$$

iii.)

$$f(x) = x^{1/3}(1-x)^{2/3}(1+x)^{1/2} \quad \textit{für } x \in (0,1).$$

iv.)

$$f(x) = x^{\sqrt{x}} \quad \textit{für } x > 0.$$

v.)

$$f(x) = \log(\tan(x)^{-1/3}) \quad \textit{für } x \neq k\frac{\pi}{2}, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Solution:

i.)

$$f'(x) \overset{\text{Kettenregel}}{=} \frac{1}{\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right)'$$

$$\overset{\text{Quotientenregel}}{=} \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{(1+\sqrt{1-x^2})'x - (1+\sqrt{1-x^2})(x)'}{x^2}$$

$$\overset{\text{Kettenregel}}{=} \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot x - (1+\sqrt{1-x^2})}{x^2} = \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{\left(\frac{-x^2-\sqrt{1-x^2}-(\sqrt{1-x^2})^2}{\sqrt{1-x^2}}\right)}{x^2}$$

$$= \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{\left(\frac{-1-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\right)}{x^2} = \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{-1-\sqrt{1-x^2}}{x^2 \cdot \sqrt{1-x^2}} = \frac{-1}{x \cdot \sqrt{1-x^2}}.$$

ii.) Man prüft leicht nach, dass:

$$a - bt > 0 \iff t > -\frac{a}{b} \quad \text{und} \quad a + bt > 0 \iff t < \frac{a}{b}.$$

Damit gilt:

$$\frac{a+bt}{a-bt} \geq 0 \iff t \in \left(-\frac{a}{b}, \frac{a}{b}\right].$$

Wir rechnen:

$$f'(x) \overset{\text{Kettenregel}}{=} \frac{1}{2\sqrt{\frac{a+bx}{a-bx}}} \cdot \left(\frac{a+bx}{a-bx}\right)' \overset{\text{Quotientenregel}}{=} \frac{\sqrt{a-bx}}{2\sqrt{a+bx}} \cdot \frac{b \cdot (a-bx) - (a+bx) \cdot (-b)}{(a-bx)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{a-bx}}{2\sqrt{a+bx}} \cdot \frac{b \cdot ((a-bx) + (a+bx))}{(a-bx)^2} = \frac{\sqrt{a-bx}}{\sqrt{a+bx}} \cdot \frac{ab}{(a-bx)^2}.$$

iii.)

$$f'(x) \overset{\text{Produktregel}}{=} \left(x^{1/3} \cdot (1-x)^{2/3}\right)' \cdot (1+x)^{1/2} + x^{1/3} \cdot (1-x)^{2/3} \left((1+x)^{1/2}\right)'$$

$$\overset{\text{Produktregel}}{=} \left(\left(x^{1/3}\right)' \cdot (1-x)^{2/3} + x^{1/3} \left((1-x)^{2/3}\right)'\right) \cdot (1+x)^{1/2} + x^{1/3} \cdot (1-x)^{2/3} \cdot \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}$$

$$\overset{\text{Kettenregel}}{=} \left(\frac{1}{3}x^{-2/3} \cdot (1-x)^{2/3} - x^{1/3} \cdot \frac{2}{3}(1-x)^{-1/3}\right) \cdot (1+x)^{1/2} + x^{1/3} \cdot (1-x)^{2/3} \cdot \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}$$

$$= \frac{1}{3}x^{-2/3} \cdot (1-x)^{2/3} \cdot (1+x)^{1/2} - \frac{2}{3}x^{1/3} \cdot (1-x)^{-1/3} \cdot (1+x)^{1/2} + \frac{1}{2}x^{1/3} \cdot (1-x)^{2/3} \cdot (1+x)^{-1/2}$$

$$= \left(\frac{1}{3x^{1/3}} - \frac{2}{3(1-x)^{2/3}} + \frac{1}{2(1+x)^{1/2}}\right) \cdot x^{1/3} \cdot (1-x)^{2/3} \cdot (1+x)^{1/2}.$$

iv.)

$$f'(x) = \left(e^{\sqrt{x} \cdot \log(x)}\right)' \overset{\text{Produktregel}}{=} \left(\sqrt{x} \cdot \log(x)\right)' \cdot \left(e^{\sqrt{x} \cdot \log(x)}\right)$$

$$\overset{\textit{Produktregel}}{=} \left((\sqrt{x})' \cdot \log(x) + \sqrt{x} \cdot (\log(x))'\right) \cdot x^{\sqrt{x}} = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \log(x) + \frac{\sqrt{x}}{x}\right) \cdot x^{\sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}} \left(\frac{\log(x)}{2} + 1\right) x^{\sqrt{x}} = \left(\frac{\log(x)}{2} + 1\right) x^{\sqrt{x} - 1/2}.$$

v.)

$$f'(x) \overset{\text{Kettenregel}}{=} \frac{1}{\tan(x)^{-1/3}} \cdot \left(\tan(x)^{-1/3}\right)' \overset{\text{Kettenregel}}{=} \tan(x)^{1/3} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \tan(x)^{-4/3} \cdot (\tan(x))'$$

$$= -\frac{1}{3} \tan(x)^{-1} \cdot \left(1 + \tan(x)^2\right) = -\frac{1}{3} \left(\frac{1}{\tan(x)} + \tan(x)\right).$$

Aufgabe 65. ($\star$) *Seien $f, g : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen.*

i.) Zeigen Sie, dass in allen Punkten $x \in (a,b)$ mit $f(x) \neq g(x)$ die Funktion $\max(f,g)$ differenzierbar ist.

ii.) Unter welcher Bedingung ist $\max(f,g)$ differenzierbar in einem Punkt $x \in (a,b)$ mit $f(x) = g(x)$.

Solution:

i.) Sei $x \in (a,b)$.

<u>Fall 1 : $f(x) - g(x) > 0$:</u>

Da f, g stetig sind, ist $f - g$ ebenfalls stetig (Prop. 6.3) und damit existiert ein $\delta > 0$, sodass $(f-g)|_{(x-\epsilon, x+\epsilon)} > 0$ gilt. Damit gilt:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\max(f,g)(x+h) - \max(f,g)(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x).$$

Fall 2 : $f(x) - g(x) < 0$: Da f, g stetig sind, ist $f - g$ ebenfalls stetig (Prop. 6.3) und damit existiert ein $\delta > 0$, sodass $(f-g)|_{(x-\epsilon, x+\epsilon)} < 0$ gilt. Damit gilt:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\max(f,g)(x+h) - \max(f,g)(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = g'(x).$$

ii.)

Behauptung 6. *Sei $x \in (a,b)$:*

$$\max(f,g) \textit{ ist differenzierbar in } x \iff f'(x) = g'(x).$$

Proof. " $\Longrightarrow$ " Wir zeigen die Kontraposition. Sei $f'(x) \neq g'(x)$, wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $f'(x) > g'(x)$ (ansonsten benennen wir unsere Funktionen um). Da

$$\lim_{h\to 0} \frac{(f-g)(x+h) - \overbrace{(f-g)(x)}^{=0}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(f-g)(x+h)}{h} = f'(x) - g'(x) > 0.$$

Damit existiert ein $h_0 > 0$, sodass für alle $0 < h \leq h_0$:

$$\frac{(f-g)(x+h)}{h} > 0 \Longrightarrow f(x+h) > g(x+h)$$

und für $-h_0 \leq h < 0$:

$$\frac{(f-g)(x+h)}{h} > 0 \Longrightarrow f(x+h) < g(x+h).$$

Damit gilt:

$$\lim_{h\downarrow 0} \frac{\max(f,g)(x+h) - \max(f,g)(x)}{h} = \lim_{h\downarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x) \neq g'(x)$$

$$= \lim_{h\downarrow 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \lim_{h\uparrow 0} \frac{\max(f,g)(x+h) - \max(f,g)(x)}{h}.$$

Also existiert $\lim_{h\to 0} \frac{\max(f,g)(x+h)-\max(f,g)(x)}{h}$ nicht. Deswegen ist $\max(f,g)$ in x nicht differenzierbar.

" $\Longleftarrow$ " Sei nun $f'(x) = g'(x)$ für ein fixes $x \in (a,b)$ und $\epsilon > 0$.

Da $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$, existiert ein $\delta_1 > 0$, sodass für alle $0 < |h| < \delta_1$:

$$\left| \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - f'(x) \right| < \epsilon.$$

Da $\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = g'(x)$, existiert ein $\delta_2 > 0$, sodass für alle $0 < |h| < \delta_2$:

$$\left| \frac{g(x+h)-g(x)}{h} - g'(x) \right| < \epsilon.$$

Damit gilt auch für alle $0 < |h| < \delta_2$:

$$\left| \frac{g(x+h)-f(x)}{h} - f'(x) \right| \overset{f(x)=g(x),\ f'(x)=g'(x)}{=} \left| \frac{g(x+h)-g(x)}{h} - g'(x) \right| < \epsilon.$$

Sei $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Dann gilt für $0 < |h| < \delta$:

$$\left| \frac{\max(f,g)(x+h) - \max(f,g)(x)}{h} - f'(x) \right| \overset{f(x)=g(x)}{=} \left| \frac{\max(f,g)(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) \right|$$

$$\leq \max \left\{ \underbrace{\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) \right|}_{<\epsilon,\ \text{da } \delta \leq \delta_1}, \underbrace{\left| \frac{g(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) \right|}_{<\epsilon,\ \text{da } \delta \leq \delta_2} \right\} < \epsilon.$$

Damit gilt $\lim_{h\to 0} \frac{\max(f,g)(x+h) - \max(f,g)(x)}{h}$ konvergiert (gegen $f'(x)$), also ist $\max(f,g)$ in x differenzierbar. □

Aufgabe 66. *Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, $f \in C^n([0,1],\mathbb{R})$ und $b \in \mathbb{R}$. Seien $0 \leq x_1 < \cdots < x_{n+1} \leq 1$ sodass $f(x_i) = b$ für alle $i \in \{1, \ldots, n+1\}$. Zeigen Sie, es existiert ein $\xi \in (x_1, x_{n+1})$ sodass $f^{(n)}(\xi) = 0$.*

Hint: Induktion.

Solution:
Wir beweisen die Behauptung mittels Induktion über n.

Die Induktionsverankerung $n = 1$ folgt direkt aus dem Mittelwertsatz (Satz 8.9). Wir nehmen an, die Aussage gilt für ein $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Seien jetzt $0 \leq x_1 < \cdots < x_{n+2} \leq 1$. Wir wenden die Induktionsverankerung an, auf die Paare $0 \leq x_i < x_{i+1} \leq 1$ für $i \in \{1, \ldots, n+1\}$ und erhalten $\xi_1 < \ldots \xi_{n+1}$ mit $x_i < \xi_i < x_{i+1}$ und $f'(\xi_i) = 0$. Die Induktionsannahme liefert uns ein $\xi \in (x_1, x_{n+2})$ mit $f^{(n+1)}(\xi) = 0$.

Aufgabe 67. *Sei $K > 0$. Wir definieren:*

$$f_n : [-K, K] \longrightarrow \mathbb{R},\ f_n(x) := \begin{cases} \frac{n}{2}x^2 + \frac{1}{2n}, & x \in (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \\ |x|, & \textit{sonst.} \end{cases}$$

i.) Zeigen Sie, dass $f_n \in C^1([-K,K],\mathbb{R})$.

ii.) Berechnen Sie den Limes von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ in $(C^0([-K,K],\mathbb{R}), \|\cdot\|_{C^0([-K,K],\mathbb{R})})$.

iii.) Schliessen Sie, dass $(C^1([-K,K],\mathbb{R}), \|\cdot\|_{C^0([-K,K],\mathbb{R})})$ nicht vollständig ist.

Solution:
Diese Aufgabe soll daran erinnern, dass der gleichmässige Limes von differenzierbaren Funktionen nicht differenzierbar sein muss. In anderen Worten, der Raum der differenzierbaren Funktionen ist nicht vollständig bezüglich der Supremumsnorm.
Man beachte, dass $(C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}), \|\cdot\|_{C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})})$ kein normierter Vektorraum ist.

i.) f_n ist für $x \neq \pm 1/n$ offensichtlich stetig. Nun müssen wir die Stetigkeit in $\pm 1/n$ beweisen, dazu benutzen wir Prop. 6.13:

$$\lim_{x\downarrow \frac{-1}{n}} f_n(x) = \lim_{x\downarrow \frac{-1}{n}} \frac{n}{2}x^2 + \frac{1}{2n} = \frac{n}{2}\left(\frac{-1}{n}\right)^2 + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n} = \lim_{x\uparrow \frac{-1}{n}} |x| = \lim_{x\uparrow \frac{-1}{n}} f_n(x).$$

$$\lim_{x\uparrow \frac{1}{n}} f_n(x) = \lim_{x\uparrow \frac{1}{n}} \frac{n}{2}x^2 + \frac{1}{2n} = \frac{n}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n} = \lim_{x\downarrow \frac{1}{n}} |x| = \lim_{x\downarrow \frac{1}{n}} f_n(x).$$

Für die Differenzierbarkeit reicht es analog Serie 11, Aufgabe 2 zu zeigen, dass $\lim_{x\to a} f_n'(x)$ existiert für $a \neq \pm 1/n$. Dazu reicht es zu zeigen (Prop. 6.13), dass gilt $\lim_{x\uparrow a} f_n'(x) = \lim_{x\downarrow a} f_n'(x)$. Dies rechnen wir nun nach:

$$\lim_{x\downarrow \frac{-1}{n}} f_n'(x) = \lim_{x\downarrow \frac{-1}{n}} nx = -1 = \lim_{x\uparrow \frac{-1}{n}} -1 = \lim_{x\uparrow \frac{-1}{n}} f_n'(x).$$

$$\lim_{x\uparrow\frac{1}{n}} f_n'(x) = \lim_{x\uparrow\frac{1}{n}} nx = 1 = \lim_{x\downarrow\frac{1}{n}} 1 = \lim_{x\downarrow\frac{1}{n}} f_n'(x).$$

Wobei wir benutzt haben, dass der Absolutbetrag differenzierbar ist für $x \neq 0$ und es gilt:

$$|x|' = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Es bleibt zu zeigen, dass der Limes am Rand existiert (siehe Seite 97). Wir berechnen für $n \geq 1/K$:

$$\lim_{x\downarrow -K} f'(x) = \lim_{x\downarrow -K} |x|' = \lim_{x\downarrow -K} -1 = -1.$$

$$\lim_{x\uparrow K} f'(x) = \lim_{x\uparrow K} |x|' = \lim_{x\uparrow K} 1 = 1.$$

und für $n < 1/K$:

$$\lim_{x\downarrow -K} f'(x) = \lim_{x\downarrow -K} nx = -nK.$$

$$\lim_{x\uparrow K} f'(x) = \lim_{x\uparrow K} nx = nK.$$

ii.) Wir definieren:

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x|.$$

Wir zeigen, dass $f_n \longrightarrow f$ bezüglich $\|\cdot\|_{C^0([-K,K],\mathbb{R})}$. Für $n \geq 1/K$ gilt:

$$0 \leq \|f_n - f\|_{C^0([-K,K],\mathbb{R})} = \sup_{x\in[-K,K]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in\left(\frac{-1}{n},\frac{1}{n}\right)} |f_n(x) - f(x)|$$

$$\leq \sup_{x\in\left(\frac{-1}{n},\frac{1}{n}\right)} (|f_n(x)| + |f(x)|) \leq \sup_{x\in\left(\frac{-1}{n},\frac{1}{n}\right)} |f_n(x)| + \sup_{x\in\left(\frac{-1}{n},\frac{1}{n}\right)} |f(x)|$$

$$= \sup_{x\in\left(\frac{-1}{n},\frac{1}{n}\right)} \left|\frac{n}{2}x^2 + \frac{1}{2n}\right| + \sup_{x\in\left(\frac{-1}{n},\frac{1}{n}\right)} |x| = \frac{n}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{2n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n} \longrightarrow 0, \quad \text{für } n \longrightarrow \infty.$$

iii.) Es gilt $C^1([-K,K],\mathbb{R}) \subset C^0([-K,K],\mathbb{R})$ (Prop. 8.2). Wir wissen aus *ii.)*, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ in $(C^0([-K,K],\mathbb{R}), \|\cdot\|_{C^0([-K,K],\mathbb{R})})$ konvergiert. Damit gilt insbesondere, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ eine Cauchyfolge in $(C^0([-K,K],\mathbb{R}), \|\cdot\|_{C^0([-K,K],\mathbb{R})})$ und damit auch eine Cauchyfolge in $(C^1([-K,K],\mathbb{R}), \|\cdot\|_{C^0([-K,K],\mathbb{R})})$ ist, da nach *i.)* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} \subseteq C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Jedoch gilt $f \notin C^1([-K,K],\mathbb{R})$ und damit ist $(C^1([-K,K],\mathbb{R}), \|\cdot\|_{C^0([-K,K],\mathbb{R})})$ nicht vollständig.

Aufgabe 68. ($\star$)

i.) Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:

(a)

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{3x + 2}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{3}\right\}.$$

(b)

$$g(x) = \log((x + \sin(x))^2), \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

(c)

$$h(x) = x^{\sin(\sqrt{x})}, \quad x > 0.$$

ii.) Finden Sie alle lokalen Extrema der Funktion $f(x) := (1+x)\sqrt{|x|},\ x \in \mathbb{R}$.

Solution:

i.) (a)

$$f'(x) \overset{\text{Quotientenregel}}{=} \frac{(x^2-2x+1)'\cdot(3x+2)-(x^2-2x+1)\cdot(3x+2)'}{(3x+2)^2}$$

$$= \frac{(2x-2)\cdot(3x+2)-(x^2-2x+1)\cdot 3}{(3x+2)^2} = \frac{2(x-1)(3x+2)-3(x-1)(x-1)}{(3x+2)^2}$$

$$= \frac{(x-1)(6x+4-3x+3)}{(3x+2)^2} = \frac{(x-1)(3x+7)}{(3x+2)^2}.$$

(b)

$$g'(x) \overset{\text{Kettenregel}}{=} \frac{1}{(x+\sin(x))^2}\cdot\left((x+\sin(x))^2\right)'$$

$$\overset{\text{Kettenregel}}{=} \frac{1}{(x+\sin(x))^2}\cdot 2((x+\sin(x))\cdot((x+\sin(x))'$$

$$= \frac{1}{(x+\sin(x))^2}\cdot 2((x+\sin(x))\cdot(1+\cos(x)) = \frac{2+2\cos(x)}{x+\sin(x)}.$$

(c)

$$h'(x) = \left(e^{\sin(\sqrt{x})\cdot\log(x)}\right)' \overset{\text{Kettenregel}}{=} \left(\sin(\sqrt{x})\cdot\log(x)\right)'\cdot\left(e^{\sin(\sqrt{x})\cdot\log(x)}\right)$$

$$\overset{\text{Produktregel}}{=} \left(\sin(\sqrt{x})'\cdot\log(x)+\sin(\sqrt{x})\cdot\log(x)'\right)\cdot x^{\sin(\sqrt{x})}$$

$$\overset{\text{Kettenregel}}{=} \left(\cos(\sqrt{x})\cdot\left(\sqrt{x}\right)'\cdot\log(x)+\frac{\sin(\sqrt{x})}{x}\right)x^{\sin(\sqrt{x})}$$

$$= \left(\frac{\cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}\cdot\log(x)+\frac{\sin(\sqrt{x})}{x}\right)\cdot x^{\sin(\sqrt{x})}.$$

ii.) Wir unterscheiden in unserer Analysis drei Fälle:

$\underline{x = 0}$:

Zuerst zeigen wir, dass $x = 0$ ein lokales Minimum von f ist. Dazu bemerken wir $f(0) = 0$. Weiter gilt:

$$0 < h \Longrightarrow f(h) = \underbrace{(1+h)}_{>0}\underbrace{\sqrt{h}}_{>0} > 0$$

und:

$$-1 < h < 0 \Longrightarrow f(h) = \underbrace{(1+h)}_{>0}\underbrace{\sqrt{-h}}_{>0} > 0.$$

$\underline{x > 0}$:

Nun zeigen wir, dass f keine Extrema in $(0,\infty)$ besitzt. Für $x > 0$ gilt $f(x) = (1+x)\sqrt{x}$. f ist hier differenzierbar. Es gilt:

$$0 = f'(x) \overset{\text{Produktregel}}{=} \sqrt{x}+\frac{1+x}{2\sqrt{x}} = \frac{3x+1}{2\sqrt{x}} \Longleftrightarrow 0 = 3x+1 \Longleftrightarrow x = -\frac{1}{3}.$$

Damit besitzt die Gleichung $f'(x) = 0$ in $(0,\infty)$ keine Lösung. Aus Prop. 8.7 folgt, dass f keine Extrema in $(0,\infty)$ besitzt.

$\underline{x < 0}$:

Für $x < 0$ gilt $f(x) = (1+x)\sqrt{-x}$. f ist hier differenzierbar. Es gilt:

$$0 = f'(x) \overset{\text{Produktregel, Kettenregel}}{=} \sqrt{-x} - \frac{1+x}{2\sqrt{-x}} = -\frac{3x+1}{2\sqrt{-x}} \Longleftrightarrow 0 = -3x - 1 \Longleftrightarrow x = -\frac{1}{3}.$$

Es gilt $f'(x) > 0$ für $x < -1/3$ und $f'(x) < 0$ für $-1/3 < x < 0$. Aus Prop. 8.13 folgt, dass $x = -1/3$ ein lokales Maximum von f ist. Dies kann man alternativ auch mit Prop. 8.26 beweisen, da:

$$f''(x) \overset{\text{Quotientenregel}}{=} -\frac{6\sqrt{-x} + \frac{(3x+1)}{\sqrt{-x}}}{-4x} = -\frac{1}{-4x} \cdot \frac{-3x+1}{\sqrt{-x}}$$

und damit:

$$f''\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{\sqrt{\frac{1}{3}}} > 0.$$

Damit sind $\{-1/3, 0\}$ alle lokalen Extrema von f.

Aufgabe 69. *Zeigen Sie, dass die Exponentialabbildung auf $\mathbb{R}$ konvex ist und zeigen Sie $e^x \geq 1 + x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.*

Solution:
Es gilt $(e^x)'' = e^x > 0$. Aus Prop. 8.21 folgt, dass die Exponentialabbildung konvex ist. Aus Prop. 8.20 folgt:

$$e^z \leq \frac{e^y - e^z}{y - z} \leq e^y, \quad \text{für } z \leq y.$$

Falls $x > 0$, setzen wir $z = 0,\ y = x$:

$$1 = e^0 \leq \frac{e^x - e^0}{x - 0} = \frac{e^x - 1}{x} \Longrightarrow 1 + x \leq e^x.$$

Falls $x < 0$, setzen wir $z = x,\ y = 0$:

$$\frac{1 - e^x}{-x} = \frac{e^0 - e^x}{-x} \leq e^0 = 1 \Longrightarrow 1 - e^x \leq -x \Longrightarrow 1 + x \leq e^x.$$

Aufgabe 70. $(\star)$ *Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq y < x$ gilt:*

$$ny^{n-1} \leq \frac{x^n - y^n}{x - y} \leq nx^{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Solution:
Für $y = 0$ ist die Aussage trivial. Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und $f : \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = x^n$. Es gilt $f^{(2)}(x) = n(n-1)x^{n-2} \geq 0$. Mit Prop. 8.21 ist f konvex und die Aussage folgt aus Prop. 8.20.

Aufgabe 71. $(\star)$ *Entscheiden Sie für jede der folgenden Aussagen, ob Sie wahr oder falsch ist:*

i.) *Als Folge in $C^0([0,1], \mathbb{R})$ hat $f_n(x) = x^n$ keine gleichmässig konvergente Teilfolge.*

ii.) *Die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = x^2 \cos(1/x)$ für $x \neq 0$ und $f(0) = 0$ ist in $x = 0$ differenzierbar.*

iii.) *Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ konvex. Dann ist f auf $\mathbb{R}$ differenzierbar.*

iv.) *Ist $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ gleichmässig stetig und auf $(0,1)$ differenzierbar, dann ist f' beschränkt.*

v.) Ist $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und es gibt ein $x_0 \in (0,1)$ mit $f'(x_0) = 0$, so hat f in x_0 ein lokales Extremum.

Solution:

i.) Wahr. Nehmen wir an, es gäbe eine gleichmässig konvergente Teilfolge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Diese konvergiert punktweise gegen $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$. Damit $f_{n_k} \longrightarrow f$ gleichmässig. Da die f_n stetig sind, ist f stetig (Prop. 6.24). Dies ist offensichtlich nicht der Fall, also Widerspruch.

ii.) Wahr. Es gilt:

$$0 \leq \left| \frac{h^2 \cos(\frac{1}{h}) - 0}{h - 0} \right| = |h| \cdot \big| \cos\big(\frac{1}{h}\big) \big| \leq |h| \longrightarrow 0, \qquad \text{für } h \longrightarrow 0.$$

Damit gilt $\lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h-0} = 0$. Also ist f in $x = 0$ differenzierbar (mit $f'(0) = 0$).

iii.) Falsch, der Absolutbetrag ist ein Gegenbeispiel (nicht differenzierbar in $x = 0$).

iv.) Falsch. Gegenbeispiel $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^2 \cos(\frac{1}{x^3}), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ Man beweist analog zu *ii.)*, dass f stetig ist. Da $[0,1]$ kompakt ist, ist f gleichmässig stetig (Satz 6.22). Mittels der Kettenregel (Prop. 8.5) erhalten wir für $x \in (0,1) : f'(x) = 2x\cos(\frac{1}{x^3}) + \frac{1}{x^2}\sin(\frac{1}{x^3})$. Der erste Term ist durch 1 beschränkt und der zweite ist unbeschränkt, also ist f' unbeschränkt.

Ein alternatives Gegenbeispiel ist $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R},\ g(x) = \sqrt{x}$. Wieder folgt aus Satz 6.22, dass g gleichmässig stetig ist. Jedoch ist $g'(x) = 1/\sqrt{x}$ unbeschränkt auf $(0,1)$.

v.) Falsch, Gegenbeispiel $f(x) = (x - \frac{1}{2})^3$. $f'\big(\frac{1}{2}\big) = 2 \cdot (\frac{1}{2} - \frac{1}{2})^2 = 0$, aber $x = \frac{1}{2}$ ist weder lokales Maximum, noch Minimum von f. Da $f\big(\frac{1}{2}\big) = (\frac{1}{2} - \frac{1}{2})^3 = 0$.
Für $x < \frac{1}{2}$ gilt $x - \frac{1}{2} < 0$ und damit $f(x) = (x - \frac{1}{2})^3 < 0$.
Für $x > \frac{1}{2}$ gilt $x - \frac{1}{2} > 0$ und damit $f(x) = (x - \frac{1}{2})^3 > 0$.

Aufgabe 72. *Sei im folgenden $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und auf (a,b) differenzierbar.*

i) Verwenden Sie den Satz von Rolle um den Mittelwertsatz zu beweisen.

ii) Sei $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a,b)$, dann gilt: $f(x)$ ist auf (a,b) konstant.

iii) Es gilt $f'(x) > 0$ für alle $x \in (a,b)$, dann ist f auf (a,b) monoton wachsend.

Solution:

i) Wir definieren die Hilfsfunktion $g(x) := f(x) - rx$ wobei $r = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, es gilt dann $g(a) = g(b)$ weil:

$$g(x) = f(x) - rx = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x = \frac{f(x)(b-a) - (f(b) - f(a))x}{b - a}.$$

Desweiteren erfüllt g die Annahme von Rolle's Theorem, also stetig auf $[a,b]$ und differenzierbar auf (a,b). Also existiert eine $c \in (a,b)$ sodass $g'(c) = 0$ gilt. Also:

$$g'(c) = 0 = f'(c) - r \iff f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

ii) Seien $x_1, x_2 \in (a,b)$ beliebig. Die Voraussetzungen für den Mittelwertsatz sind erfüllt, also erhalten wir die Existenz eines $c \in (a,b)$ mit:

$$\underbrace{f'(c)}_{=0} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \implies f(x_2) = f(x_1).$$

Also folgt, dass f auf (a,b) konstant sein muss.

iii) Wir verwenden erneut den Mittelwertsatz welchen wir in Aufgabe i) bewiesen haben. Wir haben die Existenz eines $c \in (a,b)$ sodass:

$$\underbrace{f'(c)}_{>0} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}. \tag{*}$$

Da aber natürlich auch $x_2 - x_1 > 0$ gilt, folgt aus (*), dass $f(x_2) - f(x_1) > 0$ also $f(x_2) > f(x_1)$ und somit ist f auf (a,b) monoton wachsend.

9 Integrationsrechnung

Aufgabe 73. *Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind, begründen Sie Ihre Antwort:*

i) *Es sei* $f : [a, b] \longrightarrow [0, \infty)$. *Dann gilt:* $\int_a^b f(x)\ dx = 0 \iff f \equiv 0.$

ii) *Seien* $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *sodass* $f \leq g$. *Dann gilt:* $\int_a^b f(x)\ dx \leq \int_a^b g(x)\ dx.$

iii) *Sei* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. *Dann impliziert* $\int_a^b f(x)\ dx > 0$, *dass* $f > 0$.

iv) *Sei* $f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *monoton fallend mit* $\int_0^\infty f(x)\ dx < \infty$. *Dann gilt:* $\sum_{n=0}^{\infty} f(n) < \infty.$

Solution:

i.) Falsch. Sei z.B. $f(a) = 1$ und $f(x) = 0 \ \ \forall x \in (a, b]$. Dann ist f nicht konstant null, aber das Integral schon.
Bemerkung: Falls f zusätzlich noch stetig ist, wäre die Aussage wahr.

ii.) Wahr, Theorem aus Vorlesung, bekannt als die Monotonie des Integrals.

iii.) Falsch. Der negative Teil von f muss nur eine kleinere Fläche haben, als der positive Teil, z.B. $f : [-1, 3] \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x$. Dann gilt

$$\int_{-1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x \ = \ \frac{1}{2}x^2\Big|_{-1}^{3} \ = \ \frac{9}{2} - \frac{1}{2} \ = 4 > 0,$$

und $f(-1) = -1 < 0$.

iv.) Wahr. Wir benutzen das Integralkriterium für Reihen (Satz 10.5.11). Das liefert uns die Konvergenz der Reihe, sobald wir gezeigt haben, dass $\int_0^\infty g(x)\,\mathrm{d}x < \infty$, wobei $g(x) := f(n)$ falls $x \in [n, n+1)$. Da f monoton fallend ist, gilt $g(x) = f(n) \leq f(n-1) \leq f(x-1)\ \forall x \in [n, n+1), n \in \mathbb{N}$. Also gilt $g(x) \leq f(x-1)\ \forall x \in [0, \infty)$ und deshalb:

$$\int_0^\infty g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x + \int_1^\infty g(x)\,\mathrm{d}x \leq a_0 + \int_1^\infty f(x-1)\,\mathrm{d}x = a_0 + \int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x < \infty.$$

Aufgabe 74. *Es sei* $t \in \mathbb{R}_{>}1$. *Berechnen Sie die folgenden Integrale:*

i)

$$\int_1^t x^2(\ln(x))^2\ dx.$$

ii)

$$\int_1^3 \frac{2x+3}{x^2+3x+2}\ dx.$$

iii)

$$\int_0^t \sin(3x)\cos(5x)\ dx.$$

iv)

$$\int_{-2}^{3} \frac{56x^7 \cos(\ln(x^8+6))}{x^8+6}\ dx.$$

v)

$$\int_0^3 \frac{\cos(x)}{1+\cos(x)}\ dx.$$

vi)

$$\int_{-1}^{1} \sin(3x)\sqrt{x^4+3x^2+4}\ dx.$$

vii)

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}}\ dx.$$

viii)

$$\int_0^1 \ln(1+x^2)\ dx.$$

ix)

$$\int_2^4 \frac{x^4+x^3+x^2+1}{x^2+x-2}\ dx.$$

Solution:

i.) Wir benutzen zwei mal partielle Integration (PI):

$$\begin{aligned}
\int_1^t x^2\,(\ln(x))^2\ \mathrm{d}x &\overset{PI}{=} \frac{1}{3}x^3\,(\ln(x))^2\Big|_1^t - \int_1^t \frac{1}{3}x^3\ 2\frac{1}{x}\ \ln(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{3}t^3\,(\ln(t))^2 - \int_1^t \frac{2}{3}x^2\ \ln(x)\,\mathrm{d}x \\
&\overset{PI}{=} \frac{1}{3}t^3\,(\ln(t))^2 - \left(\frac{2}{9}x^3\ln(x)\Big|_1^t - \int_1^t \frac{2}{9}x^3\ \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{1}{3}t^3\,(\ln(t))^2 - \frac{2}{9}t^3\ln(t) + \int_1^t \frac{2}{9}x^2\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{3}t^3\,(\ln(t))^2 - \frac{2}{9}t^3\ln(t) + \frac{2}{27}x^3\Big|_1^t \\
&= \frac{1}{3}t^3\,(\ln(t))^2 - \frac{2}{9}t^3\ln(t) + \frac{2}{27}t^3 - \frac{2}{27}.
\end{aligned}$$

ii.) <u>1. Möglichkeit: Partialbruchzerlegung</u>:
Wir bemerken, dass $x^2+3x+2=(x+2)(x+1)$ und suchen nun $a,b\in\mathbb{R}$ mit:

$$\frac{2x+3}{x^2+3x+2} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x+1} = \frac{a(x+1)+b(x+2)}{x^2+3x+2} = \frac{x(a+b)+(a+2b)}{x^2+3x+2}.$$

Wir vergleichen die Koeffizienten von den Zählern vom ersten und dem letzten Bruch und kommen auf das Gleichungssystem $\begin{cases} 2 = a + b \\ 3 = a + 2b \end{cases}$.
Das hat die Lösung $a = 1 = b$ und wir schliessen daraus, dass:

$$\int_1^3 \frac{2x+3}{x^2+3x+2}\,\mathrm{d}x = \int_1^3 \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x = \Big(\ln(x+2) + \ln(x+1)\Big)\Big|_1^3$$

$$= \ln\big((x+2)(x+1)\big)\Big|_1^3 = \ln(20) - \ln(6) = \ln\left(\frac{20}{6}\right) = \ln\left(\frac{10}{3}\right).$$

<u>2. Möglichkeit: Substitution:</u>
Sei $u(x) := x^2 + 3x + 2$. Dann gilt $u'(x) = 2x + 3$, was genau dem Zähler entspricht. Wir rechnen also:

$$\int_1^3 \frac{2x+3}{x^2+3x+2}\,\mathrm{d}x = \int_1^3 \frac{u'(x)}{u(x)}\,\mathrm{d}x = \int_{u(1)}^{u(3)} \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \ln(u)\Big|_{1^2+3\cdot 1+2}^{3^2+3\cdot 3+2} = \ln(20) - \ln(6) = \ln\left(\frac{10}{3}\right).$$

iii.) Wir benutzen zwei mal partielle Integration (PI) um wieder zum ursprünglichen Integral zu kommen:

$$\int_0^t \sin(3x)\cos(5x)\,\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}
&\overset{PI}{=} -\frac{1}{3}\cos(3x)\cos(5x)\Big|_0^t - \int_0^t \left(-\frac{1}{3}\cos(3x)\right)(-5\sin(5x))\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{3}\cos(3t)\cos(5t) + \frac{1}{3} - \int_0^t \frac{5}{3}\cos(3x)\sin(5x)\,\mathrm{d}x \\
&\overset{PI}{=} -\frac{1}{3}\cos(3t)\cos(5t) + \frac{1}{3} - \frac{5}{3}\left(\frac{1}{3}\sin(3x)\sin(5x)\Big|_0^t - \int_0^t \frac{1}{3}\sin(3x)\cdot 5\cos(5x)\,\mathrm{d}x\right) \\
&= -\frac{1}{3}\cos(3t)\cos(5t) + \frac{1}{3} - \frac{5}{9}\sin(3t)\sin(5t) + \frac{25}{9}\int_0^t \sin(3x)\cos(5x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Nun subtrahieren wir den letzten Term und bekommen:

$$(1 - \frac{25}{9})\int_0^t \sin(3x)\cos(5x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\cos(3t)\cos(5t) + \frac{1}{3} - \frac{5}{9}\sin(3t)\sin(5t).$$

Teilen wir durch $-\frac{16}{9}$, liefert uns das das gewünschte Resultat:

$$\int_0^t \sin(3x)\cos(5x)\,\mathrm{d}x = \frac{3}{16}\cos(3t)\cos(5t) - \frac{3}{16} + \frac{5}{16}\sin(3t)\sin(5t).$$

iv.) Wir benutzen die Substitutionsmethode mit $u(x) := \ln(x^8+6)$. Dann gilt $u'(x) = \frac{8x^7}{x^8+6}$ und wir erkennnen, dass:

$$\int_{-2}^3 \frac{56x^7\cos(\ln(x^8+6))}{x^8+6}\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^3 7u'(x)\cos(u(x))\,\mathrm{d}x = 7\int_{u(-2)}^{u(3)} \cos(u)\,\mathrm{d}u$$

$$= 7\sin(u)\Big|_{\ln(262)}^{\ln(6567)} = 7\sin(\ln 6567) - 7\sin(\ln 262).$$

v.) Wir benutzen den Additionssatz und $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ für:

$$1 + \cos(x) = 1 + \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = 1 + \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right),$$

und deshalb ist:

$$\Big(\tan\Big(\frac{x}{2}\Big)\Big)' = \frac{1/2}{\cos^2\big(\frac{x}{2}\big)} = \frac{1}{1+\cos(x)}.$$

Wir berechnen nun das Integral:

$$\begin{aligned}\int_0^3 \frac{\cos(x)}{1+\cos(x)}\,\mathrm{d}x &= \int_0^3 \frac{1+\cos(x)-1}{1+\cos(x)}\,\mathrm{d}x = \int_0^3 1-\frac{1}{1+\cos(x)}\,\mathrm{d}x \\ &= \Big(x-\tan\Big(\frac{x}{2}\Big)\Big)\Big|_0^3 = 3-\tan\Big(\frac{3}{2}\Big).\end{aligned}$$

vi.) Die Funktion ist als Produkt einer ungeraden Funktion mit einer geraden Funktion ungerade, nämlich sei $f(x) := \sin(3x)\sqrt{x^4+3x^2+4}$. Dann gilt für $x \in [-1,1]$:

$$f(-x) = \sin(-3x)\sqrt{(-x)^4+3(-x)^2+4} = -\sin(3x)\sqrt{x^4+3x^2+4} = -f(x).$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 \sin(3x)\sqrt{x^4+3x^2+4}\,\mathrm{d}x &= \int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^0 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 f(-x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0.\end{aligned}$$

vii.) Wir benutzen die dritte binomische Formel:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}}\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}}\,\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}}{x+1-(x+2)}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 -(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2})\,\mathrm{d}x \\ &= \Big(-\frac{2}{3}\sqrt{x+1}^3+\frac{2}{3}\sqrt{x+2}^3\Big)\Big|_0^1 \\ &= \frac{2}{3}-\frac{8\sqrt{2}}{2}+2\sqrt{3}.\end{aligned}$$

viii.) Wir integrieren partiell:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \ln(1+x^2)\cdot 1\,\mathrm{d}x &= \ln(1+x^2)x\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}\cdot x\ \mathrm{d}x \\ &= \ln(2) - \int_0^1 \frac{2(x^2+1)-2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \ln(2) - \int_0^1 2-\frac{2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \ln(2) - \big(2x-2\arctan(x)\big)\Big|_0^1 \\ &= \ln(2)-2+\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

ix.) Da der Grad des Zählers grösser ist als der Grad des Nenners müssen wir zuerst eine Polynomdivision durchführen, wir erhalten:

$$\frac{x^4+x^3+x^2+1}{x^2+x-2} = x^2+3+\frac{-3x+7}{x^2+x-2}.$$

Weil:

$$\begin{array}{l}
\left(\;x^4+x^3\;+x^2\qquad\quad+1\right) \div \left(x^2+x-2\right) = x^2+3+\dfrac{-3x+7}{x^2+x-2}. \\
\underline{-x^4-x^3+2x^2} \\
\qquad\qquad 3x^2\qquad +1 \\
\qquad\quad \underline{-3x^2-3x+6} \\
\qquad\qquad\quad -3x+7
\end{array}$$

Für den zweiten Term verwenden wir Partialbruch-Zerlegunng, wir verwenden den Ansatz:

$$\frac{-3x+7}{x^2+x-2} = \frac{-3x+7}{(x+2)(x-1)} = \frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-1}.$$

Wir erhalten also nach Multiplikation mit $(x+2)(x-1)$ die Aussage:

$$A(x-1)+B(x+2) = -3x+7.$$

Setzen wir $x=1$ erhalten wir $B=\frac{4}{3}$ und für $x=-2$ erhalten wir $A=-\frac{13}{3}$. Somit haben wir gezeigt, dass:

$$\frac{x^4+x^3+x^2+1}{x^2+x-2} = x^2+3-\frac{13}{3}\frac{1}{x+2}+\frac{4}{3}\frac{1}{x-1}.$$

Nun liefert die Integration über die Grenzen schliesslich:

$$\begin{aligned}
\int_2^4 \frac{x^4+x^3+x^2+1}{x^2+x-2}\,dx &= \frac{x^3}{3}+3x-\frac{13}{3}\ln(x+2)+\frac{4}{3}\ln(x-1)\Big|_{x=2}^{x=4} \\
&= \frac{74}{3}+\ln\left(\frac{16\sqrt[3]{2}}{27}\right).
\end{aligned}$$