Lösungen PVK Analysis

MB & LB, Vorlage gemäss SeSc

December 28, 2017

Die Verweise auf Theoreme und Propositionen beziehen sich auf das Skript der Vorlesung, welches Sie *hier* finden können. Die Verweise auf Serien beziehen sich auf das HS 15. Es handelt sich bei dieser Übungssammlung um eine Überarbeite Version der von SeSc zur Verfügung gestellten Vorlage.

1 Vollständige Induktion

Aufgabe 1.

i.) Beweisen Sie die Bernoulli-Ungleichung

$$\forall x > -1 \; \forall n \in \mathbb{N} : (1+x)^n \geq 1 + nx$$

mittels Induktion.

ii.) Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und $x_1, \dots, x_n \geq 0$. Zeigen Sie

$$\prod_{i=1}^{n} (1+x_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^{n} x_i$$

.

Solution:

i.) Sei $x > -1$. Zuerst zeigen wir den Fall $n = 0$.

$$(1+x)^0 = 1 = 1 + 0 \cdot x.$$

Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ beliebig, aber fix, sodass $(1+x)^n \geq 1 + nx$ (IA).
Dann berechnen wir

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \overset{\text{IA, } x>-1}{\geq} (1+x)(1+nx) = 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x.$$

ii.) Zuerst zeigen wir den Fall $n = 2$. Seien $x_1, x_2 \geq 0$.

$$\prod_{i=1}^{2} (1+x_i) = 1 + (x_1 + x_2) + x_1 \cdot x_2 \overset{x_1, x_1 \geq 0}{\geq} 1 + (x_1 + x_2) = 1 + \sum_{i=1}^{2} x_i.$$

Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ beliebig, aber fix, sodass $\prod_{i=1}^{n}(1+x_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^{n} x_i$ für alle $x_1, \dots, x_n \geq 0$ (IA).
Dann berechnen wir für $x_1, \dots, x_{n+1} \geq 0$

$$\prod_{i=1}^{n+1} (1+x_i) = (1+x_{n+1}) \cdot \prod_{i=1}^{n} (1+x_i) \overset{\text{IA}}{\geq} (1+x_{n+1})(1 + \sum_{i=1}^{n} x_i)$$

$$= 1 + \sum_{i=1}^{n+1} x_i + x_{n+1} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \overset{x_i \geq 0}{\geq} 1 + \sum_{i=1}^{n+1} x_i.$$

Aufgabe 2. ($\star$) *Zeigen Sie, dass*

$$\frac{4^{2n} - 3^n}{13} \in \mathbb{N}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.

Solution:
Zuerst zeigen wir den Fall $n = 1$.

$$\frac{4^2 - 3^1}{13} = \frac{13}{13} = 1 \in \mathbb{N}.$$

Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ beliebig, aber fix, sodass $\frac{4^{2n}-3^n}{13} \in \mathbb{N}$.
Dann berechnen wir

$$\frac{4^{2(n+1)} - 3^(n+1)}{13} = \frac{4^2(4^{2n} - 3^n)}{13} + \frac{(4^2 - 3)3^n}{13} = 4^2 \underbrace{\frac{4^{2n} - 3^n}{13}}_{\in \mathbb{N} \text{ nach IA}} + 3^n \in \mathbb{N}.$$

Aufgabe 3.

i) Zeigen Sie, dass der kleinste, nicht triviale Teiler einer natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ *stets eine Primzahl ist. Hier ist keine vollständige Induktion notwendig, ein Beweis per Widerspruch genügt völlig.*

ii) Zeigen Sie, dass jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ *als Produkt von Primzahlen in der kanonischen Form* $n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$ *wobei* $p_1 < p_2 < \cdots < p_k \in \mathbb{P}$ *und* $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{N}_0$ *geschrieben werden kann. Diese Darstellung ist desweiteren eindeutig, dies muss jedoch nicht gezeigt werden.*

Solution:

i) Zum Widerspruch sei d_0 der kleinste, nicht triviale Teiler von $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ ohne dabei eine Primzahl zu sein. Da nun d_0 keine Primzahl ist, existiert per Definition eine Zahl v wobei $1 < v < d_0$ sodass $v \mid d_0$, per Transitivität gilt dann aber auch $v \mid n$ da bereits $d_0 \mid n$. Dies ist ein Widerspruch zur ANnahme, dass d_0 der kleinste, nicht triviale Teiler von n war.

ii) Für $n = 2$ ist n eine Primzahl und die Aussage somit trivial Wahr. Für den Induktionsschritt nehmen wir an, dass wir für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ die Darstellung $n = p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k}$ wie in der Aufgabenstellung haben. Falls nun $n+1$ eine Primzahl ist, so gibt es nicht zu zeigen, ist $n+1$ jedoch keine Primzahl so muss gelten $n + 1 = mq$ wobei $1 < m \leq q \leq n$, aber für solche Zahlen haben wir per Induktionsannahme kanonische Darstellungen der Form $m = p_1^{b_1} \cdots p_k^{b_k}$ und $q = s_1^{c_1} \cdots s_l^{c_l}$ haben wobei $p_1 < \cdots < p_k$ und $s_1 < \cdots < s_l$ alles Primzahlen sind und die Exponenten natürliche Zahlen. Zusammenfassen der Primzahlen und Neuanordnung/Neubeschriftung liefert dann die Aussage.

Aufgabe 4 (* Trig Heavy)**.** *Wir definieren die Chebyshev Polynome für alle* $x \in \mathbb{R}$ *wie folgt*

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 \\ P_1(x) &= x \\ P_{n+1}(x) &= xP_n(x) - P_{n-1}(x), \ \textit{für } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass gilt:

$$P_n(2\cos(\theta)) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}, \ \theta \in (0, \pi)$$

Solution:
Wir zeigen die beiden Fälle $n = 0$ und $n = 1$, da wir in dem Induktionsschritt sowohl $k = n$ und $k = n - 1$ benötigen werden. Für $n = 0$ haben wir die triviale Aussage

$$1 = P_0(2\cos\theta) = \frac{\sin\theta}{\sin\theta} = 1$$

Für $n = 1$ haben wir die Aussage

$$2\cos\theta = P_1(2\cos\theta) = \frac{\sin 2\theta}{\sin\theta} = \frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta} = 2\cos\theta$$

Nehmen wir nun an, dass die Aussage für $n = k$ und $n = k - 1$ für $k > 0$ wahr ist, i.e. wir haben die beiden Gleichungen

$$P_k(2\cos\theta) = \frac{\sin((k+1)\theta)}{\sin\theta}, \text{ und } P_{k-1}(2\cos\theta) = \frac{\sin(k\theta)}{\sin\theta}$$

Per definition von P_{k+1} haben wir nun

$$\begin{aligned} P_{k+1}(2\cos\theta) &= 2\cos\theta P_k(2\cos\theta) - P_{k-1}(2\cos\theta) \\ &= 2\cos\theta\frac{\sin((k+1)\theta)}{\sin\theta} - \frac{\sin(k\theta)}{\sin\theta} \end{aligned}$$

Wir schreiben $k\theta = (k+1)\theta - \theta$ und erhalten

$$\begin{aligned} P_{k+1}(2\cos\theta) &= \frac{2\cos\theta\sin((k+1)\theta) - \sin((k+1)\theta - \theta)}{\sin\theta} \\ &= \frac{2\cos\theta\sin((k+1)\theta) - \cos\theta\sin((k+)\theta) + \cos((k+1)\theta)\sin\theta}{\sin\theta} \\ &= \frac{\cos\theta\sin((k+1)\theta) + \cos((k+1)\theta)\sin\theta}{\sin\theta} \\ &= \frac{\sin((k+2)\theta}{\sin\theta} \end{aligned}$$

2 sup, inf, max, min von Mengen

Aufgabe 5. *Berechnen Sie das Supremum (kleinste obere Schranke) der Menge*

$$S := \left\{\frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N}_0\right\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots\right\}$$

Was gilt für das Supremum der Menge $M := S \cup \{1\}$?

Solution:
Um zu zeigen, dass eine reelle Zahl M die kleinste obere Schranke einer Menge S ist, geht man normalerweise in 2 Schritten vor.

1. Zeige, dass M eine obere Schranke von S ist, i.e. zeige, dass $M \geq s$ für alle $s \in S$.
2. Zeige, dass M die kleinste obere Schranke von S ist. Meist geschieht dies per Widerspruch, man nimmt an, dass ein $\epsilon > 0$ existiert, sodass $M - \epsilon$ nach wie vor eine obere Schranke von S ist. Man findet dann ein Element $s \in S$ mit $s > M - \epsilon$, was zeigt, dass $M - \epsilon$ keine obere Schranke von S ist.

Wir stellen nun fest, dass jedes Element $s \in S$ kleiner als 1 ist, da $\frac{n}{n+1} < 1$. Wir behauptet, dass 1 das Supremum der Menge ist. Nehme zum Widerspruch an, dass 1 nicht die kleinste obere Schranke von S ist, d.h. es existiert $\epsilon > 0$ sodass $1 - \epsilon$ auch eine obere Schranke von S ist.

Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ sodass $n > \frac{1}{\epsilon} - 1$, dann gilt $1 - \epsilon < \frac{n_0}{n_0+1}$ was zeigt, dass $1 - \epsilon$ keine obere Schranke von S ist, da $\epsilon > 0$ beliebig war, muss 1 die kleinste obere Schranke von S sein.

Unsere Bemühungen lassen nun schliessen, dass $\sup M = \max M = 1$ gelten muss, da 1 das Supremum der Menge S ist und insbesondere gilt $1 \in M$.

Aufgabe 6. *Es sei $A \subset \mathbb{R}$ und $A \neq \emptyset$, desweiteren definieren wir $-A := \{x \in \mathbb{R} : -x \in A\}$. Entscheiden Sie für jede Aussage, ob sie wahr oder falsch ist.*

i.) *A unbeschränkt* $\Leftrightarrow \sup A = \infty$.

ii.) *A ist endlich* $\Rightarrow maxA = supA$.

iii.) *$minA$ existiert* $\Rightarrow minA = -max(-A)$.

iv.) $supA \notin A$.

Solution:

i.) Falsch, Gegenbeispiel $A = (-\infty, 0]$ ist unbeschränkt, aber $supA = 0$.

ii.) Wahr.

iii.) Wahr. Sei $x \in A$, dann gilt $-x \in -A$. Damit $x = -(-x) \geq -\max(-A)$. Da $-\max(-A) \in A$, folgt die Aussage.

iv.) Falsch. $A = \{42\}$. Dann ist $supA = 42 \in A$.

Aufgabe 7. *Finden Sie das max, min, sup und inf der folgenden Menge und beweisen Sie ihre Aussage.*

$$S := \left\{ \frac{2n+1}{n+1} : n \in \mathbb{N}_{\geq 1} \right\} = \left\{ \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{9}{5}, \frac{11}{6}, \dots \right\}$$

Solution:
Der kleinste Term scheint $\frac{3}{2}$ zu sein und es scheint kein grösstes Element zu geben, aber alle Elemente sind kleiner als 2 und da $\lim \frac{2n+1}{n+1} = 2$ behaupten wir folgende Aussagen:
a) Es gibt kein Maximum, b) $\sup S = 2$ und c) $\min S = \inf S = \frac{3}{2}$.

Wir beginnen mit dem Supremum, können wir nähmlich zeigen, dass $\sup S = 2$ dann kann S kein Maximum besitzen, da $2 \notin S$. Es gilt offensichtlich

$$\frac{2n+1}{n+1} < 2 \iff 2n+1 < 2n+2 \iff 1 < 2$$

Da diese Aussage immer wahr ist, folgern wir, dass 2 in der Tat eine obere Schranke von S ist. Nun zeigen wir, dass 2 die kleinste obere Schranke von S ist. Falls 2 nicht die kleinste obere Schranke von S wäre, so würde $\epsilon > 0$ existieren sodass $2 - \epsilon$ eine obere Schranke von S ist. Wir behaupten, es existiert eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ sodass

$$2 - \epsilon < \frac{2n+1}{n+1}$$

gilt und somit $2-\epsilon$ keine obere Schranke von S ist. Es gilt jedoch offensichtlich

$$2-\epsilon < \frac{2n+1}{n+1} \iff -\epsilon\frac{2n+1}{n+1} - 2 \iff \epsilon > \frac{1}{n+1} \iff n > \frac{1}{\epsilon} - 1$$

Wählen wir also $n \in \mathbb{N}$ sodass $n > \frac{1}{\epsilon} - 1$, dann gilt $2 - \epsilon < \frac{2n+1}{n+1}$, somit haben wir gezeigt, dass $\sup S = 2$. Um etwas präziser zu zeigen, dass $2 \notin S$ gilt, nehmen wir an, dass eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ existiert sodass

$$2 = \frac{2n+1}{n+1} \iff 2(n+1) = 2n+1 \iff 2 = 1$$

was natürlich ein Widerspruch ist, also $2 \notin S$ und somit existiert kein Maximum.

Schliesslich zeigen wir, dass $\min S = \frac{3}{2}$. Offensichtlich gilt $\frac{3}{2} \in S$. Es genügt also zu zeigen, dass $\frac{3}{2}$ eine untere Schranke von S ist, wir haben aber offensichtlich

$$\frac{2n+1}{n+1} \geq \frac{3}{2} \iff 2(2n+1) \geq 3(n+1) \iff n \geq 1$$

Was natürlich wahr ist für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ wie in der Menge von S spezifiert, also gilt $\min S = \frac{3}{2}$.

Aufgabe 8. *Es sei* $S := (1, 5]$. *Beweisen Sie, dass* $\inf S = 1$.

Solution:
Per Definition von S erfüllt jedes $x \in S$ die Ungleichung $1 < x \leq 5$ und somit ist 1 natürlich eine untere Schranke von S. Wir wollen zeigen, dass 1 die grösste untere Schranke von S ist, insbesondere bedeutet dies das Wort "offensichtlich" möglichst zu vermeiden.

Wir nehmen also an, dass 1 nicht die grösste untere Schranke von S ist, dann existiere ein $\epsilon > 0$ sodass $1 + \epsilon$ eine untere Schranke von S ist. Um ein Widerspruch zu erhalten finden wir ein element $x \in S$ sodass $1 < x < 1 + \epsilon$, was zeigt, dass $1 + \epsilon$ keine untere Schranke von S sein kann.

Wir wählen $x = 1 + \frac{\epsilon}{2}$, dann gilt offensichtlich

$$1 < x < 1 + \epsilon \leq 5$$

da per Annahme $1 + \epsilon$ eine untere Schranke von S war. Also ist $1 + \epsilon$ keine untere Schranke von S und somit haben wir gezeigt, dass 1 die grösste untere Schranke von S ist.

3 Folgen

Aufgabe 9. *Seien* $m \in \mathbb{N}$, $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^m$ *und* $x \in \mathbb{R}^m$.

i.) Zeigen Sie, falls jede Teilfolge $(x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ *eine Teilfolge* $(x_{n_{i_j}})_{j\in\mathbb{N}}$ *besitzt, die gegen* x *konvergiert, dann gilt* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

ii.) Finden Sie eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *so, dass für jede Teilfolge* $(x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ *eine konvergente Teilfolge* $(x_{n_{i_j}})_{j\in\mathbb{N}}$ *existiert, aber* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *nicht konvergiert.*

Solution:

i.) Version 1

Seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $x \in R$ wie in der Aufgabenstellung. Wir nehmen an, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gegen x konvergiert, d.h.

$$\exists \epsilon > 0 \ \forall N \in \mathbb{N} \ \exists n \geq N : |x_n - x| \geq \epsilon.$$

Wir wählen ein $\epsilon > 0$ und eine Teilfolge $(x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$, sodass für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt $|x_{n_i} - x| \geq \epsilon$. Dies ist ein Widerspruch dazu, dass eine Teilfolge $(x_{n_{i_j}})_{j\in\mathbb{N}}$ existiert mit $\lim_{j\to\infty} x_{n_{i_j}}$.

<u>Version 2</u>

Wir wissen, es gibt Teilfolgen $(x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$, $(x_{m_i})_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$, sodass $\lim_{i\to\infty} x_{n_i} = \liminf_{n\to\infty} x_n$ und $\lim_{i\to\infty} x_{m_i} = \limsup_{n\to\infty} x_n$. Da jeweils eine Teilfolge von den obigen Reihen gegen x konvergiert und der Limes konvergenter Folgen gleich der Limes seiner Teilfolgen ist (Prop. 3.19), gilt $\liminf_{n\to\infty} x_n = x = \limsup_{n\to\infty} x_n$. Aus Satz 3.13 folgt $\lim_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n = x$.

ii.) $x_n = (-1)^n$ konvergiert nicht. Sei $(x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dann ist $A_1 := \{n_i \in \mathbb{N} \ : \ n_i \text{ ist ungerade } \}$ oder $A_2 := \{n_i \in \mathbb{N} \ : \ n_i \text{ ist gerade } \}$ abzählbar unendlich. Wähle $i \in \{1, 2\}$ sodass A_i unendlich ist, dann ist $(x_l)_{l\in A_i}$ eine konvergente Teilfolge von $(x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ (mit Grenzwert $(-1)^i$).

Aufgabe 10. ($\star$) *Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C}$. Entscheiden Sie für jede Aussage, ob sie wahr ist oder falsch.*

i.) $z_n \to z \Leftrightarrow Re(z_n) \to Re(z)$ *und* $Im(z_n) \to Im(z)$.

ii.) $|z_n| \to |z| \Rightarrow z_n \to z$.

iii.) $z_n \to z \Rightarrow |z_n| \to |z|$.

iv.) $z_n \in \mathbb{R}$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *und* $z_n \to z \Rightarrow z \in \mathbb{R}$.

Solution:

i.) Wahr, siehe Seite 53.

ii.) Falsch, Gegenbeispiel $z_n = (-1)^n, z = i$.

iii.) Wahr, folgt aus der umgekehrten Dreiecksungleichung und dem Sandwichsatz (Prop 3.8) $0 \leq \big| \, |z_n| - |z| \, \big| \leq |z_n - z| \to 0$.

iv.) Wahr, folgt aus der ersten Aussage.

Aufgabe 11. *Seien $m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}) \subseteq \mathbb{R}^m$ and $\lambda \in \mathbb{R}$. Entscheiden Sie für jede der folgenden Aufgaben, ob sie wahr oder falsch sind (mit Beweis oder Gegenbeispiel).*

i.) $(\|x_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert* $\Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert.*

ii.) $(x_n \cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert* $\Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert.*

iii.) $(\lambda x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert* $\Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert.*

iv.) Jede beschränkte Folge konvergiert.

Solution:

i.) Falsch, Gegenbeispiel $x_n = (-1)^n$.

ii.) Falsch, Gegenbeispiel $x_n = n, y_n = \frac{1}{n}$. Alternativ $x_n = (-1)^n, y_n = 0$.

iii.) Falsch, Gegenbeispiel $\lambda = 0, x_n = (-1)^n$.

iv.) Falsch, Gegenbeispiel $x_n = (-1)^n$.

Aufgabe 12. $(\star)$ *Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:*

i.)

$$\limsup_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)$$

ii.)

$$\lim_{n\to\infty}\big(1-\frac{5}{n-3}\big)^{(n+\sqrt{n})/2}$$

iii.)

$$\liminf_{n\to\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}-5n^3}{n^3+n(n+1)(n+2)}$$

Solution:

i.) Für $n>0$ haben wir

$$\sqrt{n^2+n}-n=\frac{(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}+n)}{\sqrt{n^2+n}+n}=\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}$$

Damit haben wir

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)=\frac{1}{2}.$$

Also insbesondere

$$\limsup_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)=\frac{1}{2}.$$

ii.) Wir schreiben

$$\big(1-\frac{5}{n-3}\big)^{(n+\sqrt{n})/2}=\underbrace{\sqrt{\big(1-\frac{5}{n-3}\big)^{n-3}}}_{\to\sqrt{e^{-5}}=e^{-5/2}}\cdot\underbrace{\sqrt{\big(1-\frac{5}{n-3}\big)^{3}}}_{\to\sqrt{1^3}=1}\cdot\sqrt{\big(1-\frac{5}{n-3}\big)^{\sqrt{n}}}.$$

Behauptung 1.

$$\lim_{n\to\infty}\big(1-\frac{5}{n-3}\big)^{\sqrt{n}}=1.$$

Proof.

$$\log\left(\big(1-\frac{5}{n-3}\big)^{\sqrt{n}}\right)=\frac{\sqrt{n}}{n-3}\log\left(\big(1-\frac{5}{n-3}\big)^{n-3}\right)\to 0\cdot\log(e^{-5})=0.$$

Damit erhalten wir

$$\big(1-\frac{5}{n-3}\big)^{\sqrt{n}}=e^{\log\left(\left(1-\frac{5}{n-3}\right)^{\sqrt{n}}\right)}\to e^0=1.$$

□

Wenn wir alles zusammensetzen, erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty}\big(1-\frac{5}{n-3}\big)^{(n+\sqrt{n})/2}=e^{-5/2}\cdot 1\cdot\sqrt{1}=e^{-5/2}.$$

iii.) Zuerst zeigen wir

Behauptung 2.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}-5n^3}{n^3+n(n+1)(n+2)}=-\frac{5}{2}.$$

Proof. Wir berechnen

$$\frac{\sqrt{n}-5n^3}{n^3+n(n+1)(n+2)} = \frac{\frac{\sqrt{n}}{n^3}-5}{1+1(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})} \to -\frac{5}{2}, \qquad \text{für } n \to \infty.$$

□

Der Faktor $(-1)^n$ oszilliert zwischen $+1$ und -1. Teilfolgen mit geraden Gliedern (bis auf endlich viele Glieder) liefern Häufungspunkt $-5/2$. Teilfolgen mit ungeraden Gliedern (bis auf endlich viele Glieder) liefern Häufungspunkt $5/2$. Alle anderen Teilfolgen (unendlich viele gerade und unendlich viele ungerade Glieder) können nicht konvergieren. Da der Limes Inferior der kleinste Häufungspunkt ist, folgt

$$\liminf_{n\to\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}-5n^3}{n^3+n(n+1)(n+2)} = -\frac{5}{2}.$$

Aufgabe 13. ($\star$) *Entscheiden Sie für jede Aussage, ob sie wahr oder falsch ist.*
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ mit Häufungspunkt $h \in \mathbb{R}$.

i.) *h ist der Grenzwert von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

ii.) *h ist der einzige Häufungspunkt in $\mathbb{R} \Rightarrow a_n \to h$.*

iii.) *$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert $\Rightarrow a_n \to h$.*

iv.) *Es existiert eine Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegen h konvergiert.*

v.) $\forall\, \epsilon > 0\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n > N : |a_n - h| < \epsilon$.

Solution:

i.) Falsch, Gegenbeispiel $(-1)^n$ und $h = 1$.

ii.) Falsch, Gegenbeispiel $a_{2n} = 0,\ a_{2n+1} = n$ und $h = 0$.

iii.) Wahr, Kor. 3.17.

iv.) Wahr, Prop. 3.20.

v.) Wahr, das ist die Definition eines Häufungspunktes.

Aufgabe 14. ($\star$)

i.) *Berechnen Sie alle Häufungspunkte der Folge*

$$a_n = \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)\left(1+\frac{3}{n}\right)^{n+1}.$$

ii.) *Seien $a_i > 0$ für alle $i = 1, \dots, p$. Zeigen Sie, dass*

$$\lim_{n\to\infty}(a_1^n + \cdots + a_p^n)^{1/n} = \max_{i=1,\dots,p} a_i.$$

Solution:

i.) Zuerst beobachten wir

$$\left(1+\frac{3}{n}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{3}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{3}{n}\right) \to e^3 \cdot 1 = e^3, \quad \text{für } n \to \infty.$$

Für $k \in \mathbb{N}$ und $j \in \{1, 3\}$ gilt

$$\sin\left(\frac{2k\pi}{2}\right) = 0 \text{ und } \sin\left(\frac{(4k+j)\pi}{2}\right) = (-1)^{j+1}.$$

Damit sind $0, -e^3$ und e^3 die Häufungspunkte von $\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)\left(1+\frac{3}{n}\right)^{n+1}$.

ii.) Wir berechnen

$$\max_{i\in\{1,\ldots,p\}} a_i = \left(\max_{i\in\{1,\ldots,p\}} a_i^n\right)^{1/n} \le (a_1^n + \cdots + a_p^n)^{1/n} \le \left(n \cdot \max_{i\in\{1,\ldots,p\}} a_i^n\right)^{1/n}$$

$$= n^{1/n} \max_{i\in\{1,\ldots,p\}} a_i \to \max_{i\in\{1,\ldots,p\}} a_i, \quad \text{für } n \to \infty.$$

Aus dem Sandwichsatz (Prop. 3.8) folgt $\lim_{n\to\infty}(a_1^n + \cdots + a_p^n)^{1/n} = \max_{i=1,\ldots,p} a_i$.

Aufgabe 15. ($\star$) *Sei eine reelle Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ rekursiv definiert durch*

$$a_0 = 1, \quad a_{k+1} = \sqrt{|a_k|} + \frac{15}{4} \textit{ für } k \in \mathbb{N}.$$

i.) Zeigen Sie, dass $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

ii.) Berechnen Sie den Grenzwert von $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Solution:

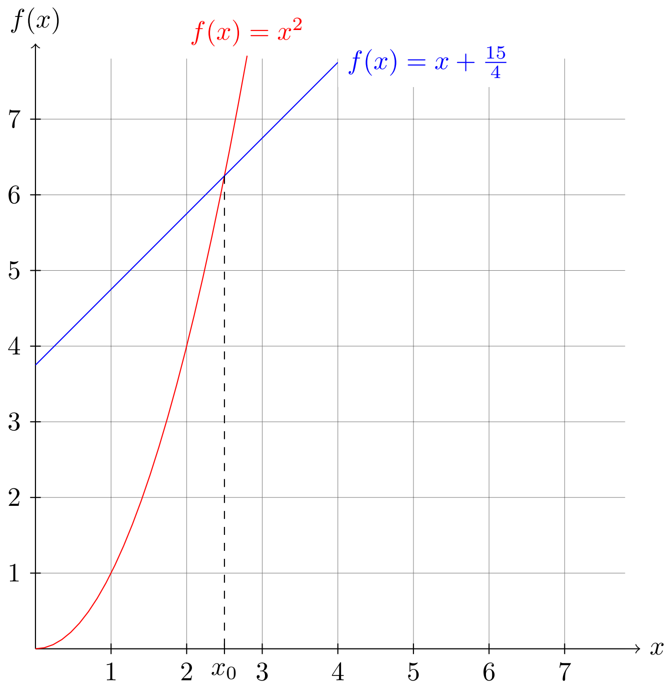
i.) Die Idee ist, dass wir zeigen, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton steigend und beschränkt ist (Prop. 3.11 erledigt den Rest). Zuerst beobachten wir, dass $a_0 = 1 > 0$ und für $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ gilt $a_n \ge \frac{15}{4} > 0$. Damit gilt für alle $n \in \mathbb{N}$: $a_n > 0$. Wir wollen nun, die Monotonie zeigen, d.h. wir versuchen zu zeigen, dass

$$1 \le \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{1}{\sqrt{a_k}} + \frac{15}{4} \cdot \frac{1}{a_k} \overset{a_k>0}{\Leftrightarrow} a_k \le \sqrt{a_k} + \frac{15}{4}. \tag{1}$$

Wir versuchen nun zu erraten, welche Art von Abschätzung wir zeigen müssen. Da $a_k > 0$ können wir (für ein beliebiges, aber festes k) schreiben $a_k = x^2$ für ein $x > 0$. Dann gilt

$$(1) \Leftrightarrow x + \frac{15}{4} \ge x^2.$$

Geometrisch sieht dies so aus



Also gilt (1) solange $x \leq x_0$. Für x_0 gilt $x_0^2 = x_0 + \frac{15}{4}$. Wir müssen also $x_0^2 - x_0 - \frac{15}{4} = 0$ lösen. Mittels der Lösungsformel für quadratische Gleichungen erhalten wir

$$x_0 = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(-\frac{15}{4})}}{2} = \frac{1 \pm 4}{2}.$$

Da $x_0 > 0$ folgt $x_0 = \frac{5}{2}$.
D.h. für $a_k \leq x_0^2 = \frac{25}{4}$ ist (1) erfüllt, die Folge also monoton wachsend. Wir zeigen nun die

Behauptung 3.

$$\forall k \in \mathbb{N} : a_k \leq \frac{25}{4}.$$

Proof. Induktion über k. Der Induktionsanfang $k = 0$ ist einfach $a_0 = 1 < \frac{25}{4}$. Wir nehmen nun an, dass für ein beliebiges, aber festes $k \in \mathbb{N}$ gilt $a_k \leq \frac{25}{4}$. Dann berechnen wir

$$a_{k+1} = \sqrt{a_k} + \frac{15}{4} \leq \sqrt{\frac{25}{4}} + \frac{15}{4} = \frac{5}{2} + \frac{15}{4} = \frac{25}{4}.$$

Damit haben wir gezeigt, dass (1) immer erfüllt ist, d.h. $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend. Weiter haben wir gezeigt, dass $0 < a_k \leq 25/4$. Also ist $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ monoton und beschränkt, also konvergent. □

ii.) Wir haben in *i.)* gezeigt, dass $a := \lim_{n\to\infty} a_n \geq 0$. Es gilt

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} + \frac{15}{4} \overset{\sqrt{\cdot}\text{ stetig}}{=} \sqrt{\lim_{n\to\infty} a_n} + \frac{15}{4} = \sqrt{a} + \frac{15}{4}.$$

Wir setzen $x = \sqrt{a}$, dann gilt

$$x^2 = x + \frac{15}{4} \Rightarrow x^2 - x - \frac{15}{4} = 0 \overset{x=\sqrt{a}\geq 0}{\Rightarrow} x = \frac{1 + \sqrt{1 - 4 \cdot (-\frac{15}{4})}}{2} = \frac{5}{2}.$$

Damit gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = a = x^2 = \frac{25}{4}$.

Aufgabe 16. ($\star$)

i.) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a)

$$\lim_{n\to\infty} \log\left(\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right).$$

(b)

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}\right).$$

ii.) Berechnen Sie alle Häufungspunkte der komplexen Folge

$$z_n = (n^4-n^2+2)^{1/n}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) + i\frac{n+e}{2n+1}(-1)^n.$$

iii.) Zeigen Sie

$$\lim_{n\to\infty}\left[(n+1)\cos\left(\frac{1}{n+1}\right) - n\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right] = 1.$$

Solution:

i.) (a) Wir berechnen

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n = \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}} \to e^{-1}\cdot\frac{1}{1} = e^{-1}, \qquad \text{für } n\to\infty.$$

Aus der Stetigkeit des Logaritmus folgt

$$\lim_{n\to\infty}\log\left(\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right) = \log\left(\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right) = \log(e^{-1}) = -1.$$

(b) Aus dem Satz über das Lagrang'sche Restglied (Satz 8.25) wissen wir, dass gilt

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + e^{\xi_x}\cdot\frac{x^3}{6},$$

wobei $\xi_x \in [0,x]$ für $x>0$ und $\xi_x\in[x,0]$ für $x<0$. Damit folgt

$$\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x} = \frac{1}{x+\frac{x^2}{2}+e^{\xi_x}\cdot\frac{x^3}{6}} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{1+\frac{x}{2}+e^{\xi_x}\cdot\frac{x^2}{6}}-1\right) = \frac{1}{x}\left(\frac{-\frac{x}{2}-e^{\xi_x}\cdot\frac{x^2}{6}}{1+\frac{x}{2}+e^{\xi_x}\cdot\frac{x^2}{6}}\right)$$

$$= \frac{-\frac{1}{2}-e^{\xi_x}\cdot\frac{x}{6}}{1+\frac{x}{2}+e^{\xi_x}\cdot\frac{x^2}{6}}$$

Da $|\xi_x|\le|x|$, gilt $\xi_x\to 0$ für $x\to 0$. Damit erhalten wir mit der Stetigkeit der Exponentialfunktion

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}-e^{\xi_x}\cdot\frac{x}{6}}{1+\frac{x}{2}+e^{\xi_x}\cdot\frac{x^2}{6}} = \frac{-\frac{1}{2}-e^0\cdot 0}{1+\frac{0}{2}+e^0\cdot\frac{0^2}{6}} = -\frac{1}{2}.$$

ii.) Wir berechnen

$$(n^4-n^2+2)^{1/n} = (n^{1/n})^4\cdot(1-\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^4})^{1/n} \to 1^4\cdot 1 = 1, \qquad \text{für } n\to\infty$$

und
$$\frac{n+e}{2n+1} = \frac{n}{2n+1} + \frac{e}{2n+1} = \frac{1}{2+\frac{1}{n}} + \frac{e}{2n+1} \to \frac{1}{2}, \qquad \text{für } n \to \infty.$$

Wir erinneren uns daran, dass gilt

$$\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) = \begin{cases} 0, & \text{für } n = 2k,\ k \in \mathbb{N} \\ 1, & \text{für } n = 4k+1,\ k \in \mathbb{N} \\ -1, & \text{für } n = 4k+3,\ k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Daraus folgt

$$z_{2k} \to \frac{i}{2}, \qquad \text{für } k \to \infty,$$

$$z_{4k+1} \to 1 - \frac{i}{2}, \qquad \text{für } k \to \infty,$$

$$z_{4k+3} \to -1 - \frac{i}{2}, \qquad \text{für } k \to \infty,$$

Da diese drei Teilfolgen die ganze Folge überdecken, kann es keine anderen Häufungspunkte geben. Damit sind die Häufungspunkte von $((n^4 - n^2 + 2)^{1/n} \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) + i\frac{n+e}{2n+1}(-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ gerade die Elemente von $\{\frac{i}{2}, 1 - \frac{i}{2}, -1 - \frac{i}{2}\}$.

iii.) Wir berechnen

$$(n+1)\cos\left(\frac{1}{n+1}\right) - n\cos\left(\frac{1}{n}\right) = \cos\left(\frac{1}{n+1}\right) + n\left(\cos\left(\frac{1}{n+1}\right) - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

Wir kümmern uns zuerst um den zweiten Term. Der Mittelwertsatz (Satz 8.9) sagt uns, dass ein $\xi \in (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})$ existiert, sodass

$$\cos\left(\frac{1}{n}\right) - \cos\left(\frac{1}{n+1}\right) = -\sin(\xi)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = -\sin(\xi)\left(\frac{1}{n\cdot(n+1)}\right)$$

Also gilt

$$0 \le \left|n\left(\cos\left(\frac{1}{n+1}\right) - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right| = \left|-\sin(\xi)\cdot\frac{1}{n+1}\right| \le \frac{1}{n+1} \to 0, \qquad \text{für } n \to \infty.$$

Damit gilt

$$\lim_{n\to\infty}\left[(n+1)\cos\left(\frac{1}{n+1}\right) - n\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right] = \lim_{n\to\infty}\cos\left(\frac{1}{n+1}\right) + \lim_{n\to\infty} n\left(\cos\left(\frac{1}{n+1}\right) - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$= \cos(0) + 0 = 1.$$

4 Reihen

Aufgabe 17. *Verwenden Sie den Cauchy'schen Verdichtungssatz (Kondensationssatz) um zu zeigen, dass die nachfolgenden Reihen divergieren respektive konvergieren*

i)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

ii)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

iii)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \text{ wobei } s > 1.$$

Solution:
Dank dem Cauchy'schen Kondensationssatz wissen wir, dass für eine nicht-negative, nicht-wachsende Folge $f(n)$ von reellen Zahl gilt $\sum f(n) < \infty \iff \sum 2^n f(2^n)$ also erhalten wir

i)

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty$$

da $a_n = 1$ keine Nullfolge ist.

ii)

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{(2^n)2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \infty$$

da geometrische Reihe mit $r = \frac{1}{2}$.

iii) Wir erhalten durch den Cauchy'schen Kondensationssatz die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{(2^n)^s} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^{ns}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{s-1}}\right)^n < \infty$$

Da $s > 1$ und wir erneut eine Geometrische Reihe erhalten mit $0 \leq r = 2^{1-s} < 1$.

Aufgabe 18. ($\star$) *Bestimmen Sie für die folgenden Reihen, ob sie konvergent und ob sie absolut konvergent sind:*

i.)

$$\sum_{k \geq 0} \frac{2k}{3k^3 + 1}$$

ii.)

$$\sum_{k \geq 2} \frac{\sin(k\pi/2)}{\log(k)}$$

iii.)

$$\sum_{k \geq 1} \frac{2^k k!}{k^k}$$

Solution:

i.) Wir berechnen für $k \geq 1$

$$\left|\frac{2k}{3k^3+1}\right| = \frac{2k}{3k^3+1} \leq \frac{2k}{3k^3} \leq \frac{1}{k^2}.$$

Wir wissen, dass $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^2}$ konvergiert (siehe Seite 43, Anwendung des Cauchy Verdichtungskriterium), folgt mit dem Majorantenkriterium (Prop. 4.8), dass $\sum_{k\geq 0} \frac{2k}{3k^3+1}$ absolut konvergiert.

ii.) Es gilt für $k \in \mathbb{N}$ gilt $\sin(k\pi) = 0$ und $\sin((2k+1)\pi/2) = (-1)^k$. Damit gilt

$$\sum_{k\geq 2} \frac{\sin(k\pi/2)}{\log(k)} = \sum_{k\geq 1} \frac{\sin((2k+1)\pi/2)}{\log(2k+1)} = \sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^k}{\log(2k+1)}.$$

Da $\frac{1}{\log(2k+1)} > 0$ und $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\log(2k+1)} = 0$, folgt aus dem Leibnizkriterium (Prop. 4.15), dass $\sum_{k\geq 2} \frac{\sin(k\pi/2)}{\log(k)}$ konvergiert.

Wir zeigen, dass $\sum_{k\geq 2} \frac{\sin(k\pi/2)}{\log(k)}$ nicht absolut konvergiert. Dazu brauchen wir die folgende

Behauptung 4.

$$\forall j \in \mathbb{N} : 2j + 1 > \log(2j+1).$$

Proof. Wir definieren $h(x) = 2j + 1 - \log(2j+1)$.
Dann gilt $h(0) = 1$ und $h'(x)) = 2 - \frac{1}{2j+1} > 0$. □

Damit erhalten wir

$$\sum_{k\geq 2} \left|\frac{\sin(k\pi/2)}{\log(k)}\right| = \sum_{k\geq 1} \left|\frac{(-1)^k}{\log(2k+1)}\right| = \sum_{k\geq 1} \frac{1}{\log(2k+1)} > \sum_{k\geq 1} \frac{1}{2k+1} > \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k}.$$

Da die harmonische Reihe divergiert, divergiert $\sum_{k\geq 2} \left|\frac{\sin(k\pi/2)}{\log(k)}\right|$, d.h. $\sum_{k\geq 2} \frac{\sin(k\pi/2)}{\log(k)}$ konvergiert nicht absolut.

iii.) Sei $a_n = \frac{2^k k!}{k^k}$. Wir berechnen

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{2^{k+1}(k+1)!}{(k+1)^{k+1}} \cdot \frac{k^k}{2^k k!} = 2(k+1)\frac{k^k}{(k+1)^{k+1}} = 2\left(\frac{k}{k+1}\right)^k = 2\left(1 - \frac{1}{k+1}\right)^k$$

$$= 2\left(1 - \frac{1}{k+1}\right)^{k+1} \frac{1}{1 - \frac{1}{k+1}} \to 2e^{-1} = \frac{2}{e}, \quad \text{für } k \to \infty.$$

Aus dem Quotientenkriterium (Satz 4.12) folgt, dass $\sum_{k\geq 1} \frac{2^k k!}{k^k}$ absolut konvergiert.

Aufgabe 19. ($\star$) *Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:*

i.)

$$\sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+1}.$$

ii.)

$$\sum_{n\geq 0} \left(\frac{n+5}{3n-2}\right)^{3n}.$$

iii.)

$$\sum_{n\geq 0} \frac{\exp(3n\log(n))}{(k!)^2}.$$

Solution:

i.) Wir berechnen für $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{\sqrt{n+2}}{n+2} < \frac{\sqrt{n}}{n+1} \Leftrightarrow \frac{n+1}{(n+2)^2} < \frac{n}{(n+1)^2}$$

$$\Leftrightarrow n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = (n+1)^3 < (n+2)^2 n = n^3 + 4n^2 + 4n \Leftrightarrow 0 < n^2 + n - 1.$$

Also ist $(\frac{\sqrt{n}}{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend. Damit können wir das Leibnizkriterium (Prop. 4.15) anwenden, und damit konvergiert $\sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+1}$.

Wir zeigen, dass $\sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+1}$ nicht absolut konvergiert. Dazu berechnen wir für $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$

$$\left|(-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+1}\right| = \frac{\sqrt{n}}{n+1} \geq \frac{\sqrt{n}}{2n} = \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

Wir wissen (Anwendung des Verdichtungskriteriums, S. 43), dass $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ divergiert, damit divergiert auch $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{2\sqrt{n}}$. Und schliesslich divergiert deswegen $\sum_{n\geq 0}\left|(-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+1}\right|$. Also ist $\sum_{n\geq 0}\left|(-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+1}\right|$ nicht absolut konvergent.

ii.) Wir berechnen

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\left(\frac{n+5}{3n-2}\right)^{3n}\right|^{1/n} = \limsup_{n\to\infty}\left(\frac{n+5}{3n-2}\right)^3 = \limsup_{n\to\infty}\left(\frac{1+\frac{5}{n}}{3-\frac{2}{n}}\right)^3 = \limsup_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27} < 1.$$

Aus dem Wurzelkriterium (Satz 4.11) folgt, dass $\sum_{n\geq 0}\left(\frac{n+5}{3n-2}\right)^{3n}$ absolut konvergiert.

iii.) Zuerst bemerken wir, dass $\frac{e^{3n\log(n)}}{(n!)^2} = \frac{n^{3n}}{(n!)^2}$. Es gibt verschiedene Arten, um zu zeigen, dass die Reihe divergiert. Hier sind zwei Möglichkeiten.

<u>Möglichkeit 1 : Nullfolgenkriterium</u>

$$\frac{e^{3n\log(n)}}{(n!)^2} = \frac{n^{3n}}{(n!)^2} = n^n \cdot \left(\frac{n^n}{n!}\right)^2 = n^n \cdot \left(\frac{n^n}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n}\right)^2 \geq n^n \cdot 1^2 \geq 1.$$

Damit ist $(\frac{e^{3n\log(n)}}{(n!)^2})_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge und mit dem Nullfolgenkriterium (Prop. 4.2) folgt, dass $\sum_{n\geq 0}\frac{\exp(3n\log(n))}{(k!)^2}$ divergiert.

<u>Möglichkeit 2 : Quotientenkriterium</u>

Wir berechnen

$$\frac{\left(\frac{(n+1)^{3n+3}}{((n+1)!)^2}\right)}{\left(\frac{n^{3n}}{(n!)^2}\right)} = \frac{(n+1)^{3n+3}}{n^{3n}} \cdot \frac{(n!)^2}{((n+1)!)^2} = \frac{(n+1)^{3n}}{n^{3n}} \cdot (n+1)^3 \cdot \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$= \underbrace{\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^3}_{\to e^3,\text{ für } n\to\infty} \cdot \underbrace{(n+1)}_{\to\infty,\text{ für } n\to\infty} \to \infty.$$

Aus dem Qutientenkriterium (Satz 4.12) folgt, dass $\sum_{n\geq 0} \frac{\exp(3n\log(n))}{(k!)^2}$ nicht absolut konvergiert. Da alle Terme nichtnegativ sind (dann ist absolute Konvergenz und Konvergenz das gleiche), folgt, dass $\sum_{n\geq 0} \frac{\exp(3n\log(n))}{(k!)^2}$ nicht konvergiert.

Aufgabe 20. ($\star$) *Berechnen Sie*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}\right).$$

Solution:
Wir berechnen

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k\cdot(k+1)} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1}+\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{k}-\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{k}-\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right) = 1.$$

Aufgabe 21.

i) Existiert ein $s>0$ sodass die nachfolgende Reihe konvergiert?

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\log(n)^s}$$

ii) Für welche $s\in\mathbb{R}$ ist die nachfolgende Reihe konvergent?

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\log^s(n)}$$

Solution:
Wir verwenden das Cauchy Kondensationsverfahren

i)

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\log(n)^s}<\infty \iff \sum_{n=2}^{\infty}2^n\frac{1}{\log(2^n)^s}<\infty$$
$$\iff \frac{1}{\log(2)^s}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^n}{n^s}<\infty$$

Jedoch konvergiert die letzte Reihe nicht, da $\lim \frac{2^n}{n^s}=\infty$ keine Nullfolge ist für alle $s>0$. Also existiert kein $s>0$ sodass die Reihe konvergiert.

ii)

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\log^s(n)}<\infty \iff \sum_{n=2}^{\infty}2^n\frac{1}{2^n\log^s(2^n)}<\infty$$
$$\iff C\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^s}<\infty$$

Die letzte Reihe konvergiert genau dann wenn $s>1$

Aufgabe 22. *Zeigen Sie, dass die nachfolgende Reihe konvergiert*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k^2 + 2k + 3}{6k^5 + 6}$$

Solution:
Für $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Partialsumme

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2k^2 + 2k + 3}{6k^5 + 6} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{k^5 + 1} + \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^5 + 1} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^5 + 1}$$

Offensichtlich gilt, dass $k^5 + 1 \geq k^5$ und somit $\frac{1}{k^5+1} \leq \frac{1}{k^5}$, wir erhalten also die Abschätzung

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2k^2 + 2k + 3}{6k^5 + 6} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^4} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^5}$$

Lassen wir nun $n \to \infty$, dann erkennen wir die konvergenten Reihen, wir schliessen dass die Reihe konvergiert.

Aufgabe 23. *Zeigen Sie, dass die folgende Reihe konvergiert*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$$

Solution:
Wir verwenden das Integralkriterium, d.h. wir betrachten den Integral

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx = \tan^{-1}\Big|_{x=0}^{\infty} = \frac{\pi}{2} < \infty$$

Also konvergiert die Reihe, was zu zeigen war.

Aufgabe 24. *Bestimmen Sie, ob die nachfolgende Reihe konvergiert*

$$\sum_{n=0}^{\infty} ne^{-n^2}$$

Solution:
Wir verwenden den Integraltest und erhalten

$$\int_0^{\infty} xe^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} e^{-x^2}\Bigg|_{x=0}^{x=\infty} = \frac{1}{2} < \infty$$

und folglich konvergiert die Reihe.

5 Stetigkeit

Aufgabe 25. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *stetig und injektiv, dann ist* f *streng monoton.*

Solution:
Wir nehmen an, dass f nicht streng monoton ist. Dann existieren $x_1 < x_2 < x_3$, sodass $f(x_1) \leq f(x_2) \geq f(x_3)$ oder $f(x_1) \geq f(x_2) \leq f(x_3)$. Es gibt nun de facto vier Fälle, die man untersuchen muss. Man kann es mittels Überlegen auf einen Fall reduzieren. Falls jemandem dieses "ohne Beschränkung der Allgemeinheit" nicht zusagt, so soll er dies in Gedanken durch "man zeigt analog" ersetzen und es zeigen. Dies ist eine gute Übung.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annhemen, dass gilt $f(x_1) \leq f(x_2) \geq f(x_3)$. Falls dies nicht der Fall ist, betrachten wir $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) := -f(x)$. g ist stetig und injektiv, desweiteren ist g genau dann streng monoton, wenn f es ist.

Desweiteren können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $f(x_1) \leq f(x_3)$. Andernfalls betrachten wir $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h(x) := f(-x)$.

Wir haben nun alles auf den Fall $f(x_1) \leq f(x_3) \leq f(x_2)$ reduziert. Aus dem Zwischenwertsatz (Satz 6.16) folgt, dass es ein $\xi \in (x_1, x_2)$, sodass $f(x_3) = f(\xi)$, dies steht im Widerspruch, dass f injektiv ist.

Aufgabe 26. ($\star$) *Sei* $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ *eine Funktionenfolge und* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. *Entscheiden Sie für jede der folgenden Aussagen, ob sie wahr oder falsch ist.*

i.) Alle f_n *sind stetig und* $f_n \to f$ *punktweise* $\Rightarrow$ f *ist stetig.*

ii.) Alle f_n *sind stetig und* $f_n \to f$ *gleichmässig* $\Rightarrow$ f *ist stetig.*

iii.) Alle f_n *sind differenzierbar auf* $(0,1)$ *und* $f_n \to f$ *gleichmässig* $\Rightarrow$ f *ist differenzierbar auf* $(0,1)$.

Solution:

i.) Falsch. Gegenbeispiel, $f_n(x) = x^n$ und $f(x) = \begin{cases} 1, & x = 1 \\ 0, & x \neq 1. \end{cases}$

ii.) Wahr, Prop. 6.24.

iii.) Falsch. Gegenbeispiel, $f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1/2) \\ \frac{n}{2}(x - 1/2)^2, & x \in [1/2, 1/2 + 1/n) \\ x - 1/2, & x \in [1/2 + 1/n, 1], \end{cases}$ und

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1/2) \\ x - 1/2, & x \in [1/2, 1). \end{cases}$$

Aufgabe 27. *Sei* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *stetig und beschränkt, dann besitzt* f *einen Fixpunkt.*

Solution:
Wir definieren $a := \inf_{x \in \mathbb{R}} f(x)$ und $b := \sup_{x \in \mathbb{R}} f(x)$. Dann gilt $Im(f) \subseteq [a, b]$ und wir können f einschränken auf $f : [a, b] \to [a, b]$. Da f stetig ist, folgt die Behauptung aus Übungsblatt 9, Aufgabe 2a.

Aufgabe 28. ($\star$) *Sei* $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ *gleichmässig stetig. Zeigen Sie: Es existiert ein* $c \in \mathbb{R}$, *sodass für jede Folge* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *in* $(0,1]$ *mit* $x_n \to 0$ *gilt:*

$$f(x_n) \to c \quad \text{für } n \to \infty.$$

Bemerkung (nicht Teil der Aufgabe): Das bedeutet, dass $\lim_{x \downarrow 0} f(x) = c$.

Solution:
Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (0,1]$ mit $x_n \to 0$. Dann ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge (da sie konvergiert). Da f gleichmässig stetig ist, ist $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls eine Cauchyfolge (Aufgabe 24). Da $\mathbb{R}$ vollständig ist (Satz 3.23), existiert ein $c \in \mathbb{R}$, sodass $f(x_n) \to c$. Sei nun $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (0,1]$, sodass $y_n \to 0$. Wir definieren für $n \in \mathbb{N}$

$$z_{2n} := x_n \quad \text{und} \quad z_{2n+1} := y_n.$$

Dann gilt $z_n \to 0$. Mit der gleichen Argumentation wie oben, erhalten wir, dass $(f(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und damit gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(y_n) = \lim_{n\to\infty} f(z_{2n+1}) = \lim_{n\to\infty} f(z_n) = \lim_{n\to\infty} f(z_{2n}) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = c.$$

Aufgabe 29. *Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte*

i)
$$\lim_{x\to 0} \frac{sin(ax)}{x}$$

ii)
$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x x^5}{x^x}$$

iii)
$$\lim_{x\to\infty} \left(x^2 + 3 - \sqrt{x^4 + 6x^2}\right)x^2.$$

Solution:

i) Es gibt mehrere Möglichkeiten dies zu zeigen.

Möglichkeit 1 : Potenzreihe

Es gilt
$$\frac{\sin(ax)}{x} = \sum_{j\geq 0} \frac{(-1)^j a^{2j+1}}{(2j+1)!} x^{2j}.$$

Wir berechnen

$$\left|\frac{(-1)^j a^{2j+1}}{(2j+1)!}\right|^{\frac{1}{2j}} = \frac{|a|^{1+\frac{1}{2j}}}{((2j+1)!)^{\frac{1}{j}}} \to |a| \cdot 0 = 0, \qquad \text{für } j \to \infty.$$

Die restlichen Koeffizienten von $\sum_{j\geq 0} \frac{(-1)^j a^{2j+1}}{(2j+1)!} z^{2j}$ sind 0. Damit ist der Konvergenzradius $\rho = \infty$. Wir setzten
$$f(z) = \sum_{j\geq 0} \frac{(-1)^j a^{2j+1}}{(2j+1)!} z^{2j}.$$

Nach Satz 7.2 ist f stetig. Damit gilt

$$\lim_{x\to 0} \frac{sin(ax)}{x} = \lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = \sum_{j\geq 0} \frac{(-1)^j a^{2j+1}}{(2j+1)!} 0^{2j} = \frac{(-1)^0 a^{2\cdot 0+1}}{(2\cdot 0+1)!} = a.$$

Möglichkeit 2 : L'Hôpital

Es gilt $\lim_{x\to 0} \sin(ax) = 0 = \lim_{x\to 0} x$. Nenner und Zähler sind beide differenzierbar. Mit dem Satz von Hôpital (Satz 8.14) folgt

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{a\cdot\cos(ax)}{1}=a\cdot\cos(0)=a.$$

Wobei wir benutzt haben, dass cos stetig ist und $\cos(0)=1$.

ii) Wir berechnen

$$\frac{e^x x^5}{x^x}=e^5\frac{e^{x-5}}{x^{x-5}}=e^5\left(\frac{e}{x}\right)^{x-5}.$$

Für $x\geq 2e$ gilt

$$0\leq e^5\left(\frac{e}{x}\right)^{x-5}\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{x-5}\to 0,\qquad \text{für } x\to\infty.$$

Wobei wir benutzt haben, dass $2^{x-5}\to\infty$ für $x\to\infty$. Damit gilt $\lim_{x\to\infty}\frac{e^x x^5}{x^x}=0$.

iii) Wir berechnen

$$\begin{aligned}\left(x^2+3-\sqrt{x^4+6x^2}\right)x^2&=\frac{\left(x^2+3-\sqrt{x^4+6x^2}\right)\left(x^2+3+\sqrt{x^4+6x^2}\right)x^2}{x^2+3+\sqrt{x^4+6x^2}}\\&=\frac{9x^2}{x^2+3+\sqrt{x^4+6x^2}}=\frac{9}{1+\frac{3}{x^2}+\sqrt{1+\frac{6}{x^2}}}\to\frac{9}{2},\qquad \text{für } x\to\infty.\end{aligned}$$

ALso $\lim_{x\to\infty}\left(x^2+3-\sqrt{x^4+6x^2}\right)x^2=\frac{9}{2}$.

6 Potenzreihen und Differentialrechnung

Aufgabe 30. ($\star$) *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine gerade (d.h. $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$), differenzierbare Funktion. Zeigen Sie, dass $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine ungerade Funktion ist, d.h. $f'(-x) = -f'(x)$.*

Solution:
Sei $x \in \mathbb{R}$, dann gilt

$$f'(-x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-x+h) - f(-x)}{h} \overset{f \text{ gerade}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{-h}$$

$$= -\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = -f'(x).$$

Aufgabe 31. *Beweisen Sie die verallgemeinerte Bernoulli-Ungleichung, diese besagt, dass für alle $r \geq 1,\ x \geq$ gilt:*

$$(1+x)^r \geq 1 + rx.$$

Hint: Betrachten Sie die Funktion $h(x) = (1+x)^r - (1+rx)$.

Solution:
Die Behauptung ist äquivalent zu der Aussage $h(x) \geq 0$ für alle $x \geq 0$. Zuerst berechnen wir die Ableitung von h.

$$h'(x) = r(1+x)^{r-1} - r = r((1+x)^r - 1) \geq 0.$$

Damit ist h monoton steigend. Da $h(0) = 1^r - 1 = 0$, folgt, dass $h(x) \geq 0$ für alle $x \geq 0$ und damit die Behauptung.

Aufgabe 32. ($\star$) *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

i.) Zeigen Sie, dass f auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar ist und berechnen Sie $f'(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

ii.) Ist f' an der Stelle $x = 0$ stetig?

Solution:

i.) Für $x \neq 0$ erhalten wir mit der Kettenregel (Prop. 8.5) und der Produktregel (Satz 8.3), dass f differenzierbar ist und dass gilt

$$f'(x) = (x^2)' \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)' = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)\left(\frac{1}{x}\right)'$$

$$= 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \left(\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\left(\frac{-1}{x^2}\right) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Für $x = 0$ berechnen wir

$$0 \leq \left|\frac{f(h) - f(0)}{h - 0}\right| = \left|\frac{h^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{h}\right| = |h| \cdot \left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |h| \to 0, \qquad \text{für } h \to 0.$$

Damit gilt $f'(0) = \lim_{h\to 0} \left|\frac{f(h)-f(0)}{h-0}\right| = 0.$

ii.) f' ist stetig in $x = 0$, genau dann wenn gilt $\lim_{h\to 0} f'(h) = f'(0)$, also

$$\lim_{h\to 0}\left[2h\sin\left(\frac{1}{h}\right) - \cos\left(\frac{1}{h}\right)\right] = f'(0) = 0.$$

Aus der Rechnung von *i.*) folgt $\lim_{h\to 0} 2h\sin\left(\frac{1}{h}\right) = 0$. Damit ist f' stetig in $x = 0$, genau dann wenn $\lim_{h\to 0}\cos\left(\frac{1}{h}\right) = 0$. Dies ist jedoch nicht der Fall. Da

$$\cos\left(\frac{1}{\left(\frac{1}{2n\pi}\right)}\right) = \cos(2n\pi) = 1 \quad \text{und } \frac{1}{2n\pi} \to 0 \quad \text{für } n \to \infty.$$

Also ist f' nicht stetig in $x = 0$.

Aufgabe 33. *Sei $\epsilon > 0$. Wir definieren $f_\epsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_\epsilon(x) = |x|^{1+\epsilon}$. Zeigen Sie, dass f_ϵ auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar ist.*

Solution:
Wir wissen, dass der Absolutbetrag ausserhalb von $x = 0$ differenzierbar ist. Auch wissen wir, dass $x \mapsto x^{1+\epsilon}$ differenzierbar ist (Seite 90). Die Komposition differenzierbarer Funktionen ist differenzierbar (Kettenregel, Prop. 8.5), also ist f_ϵ in $x \neq 0$ differenzierbar. Nun zeigen wir noch, dass f_ϵ in $x = 0$ differenzierbar ist

$$\left|\frac{f_\epsilon(h) - f_\epsilon(0)}{h - 0}\right| = \left|\frac{|h|^{1+\epsilon}}{h}\right| = |h|^\epsilon \to 0, \quad h \to 0.$$

Damit gilt $\lim_{h\to 0}\frac{f_\epsilon(h)-f_\epsilon(0)}{h-0} = 0$, also ist f_ϵ in $x = 0$ differenzierbar (mit $f'_\epsilon(0) = 0$).

Aufgabe 34. *Bestimmen Sie alle Punkte, in denen*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$$

i.) stetig ist.

ii.) differenzierbar ist.

Solution:

i.) Wir zeigen, dass f nur in $x = 0$ stetig ist.

Sei $x \neq 0$. Da sowohl $\mathbb{Q}$, als auch $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ liegen (Prop. 2.17 und Seite 62), existieren Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = x = \lim_{n\to\infty} b_n$. Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0 \neq x^2 = \lim_{n\to\infty} b_n^2 = \lim_{n\to\infty} f(b_n).$$

Damit ist f nicht stetig in $x \neq 0$. Die gleiche Rechnung zeigt, dass f in $x = 0$ stetig ist.

ii.) Wir zeigen, dass f nur in $x = 0$ differenzierbar ist.

Da f nicht stetig ist in $x \neq 0$, ist f auch nicht differenzierbar in $x \neq 0$ (Prop. 8.2). Wir berechnen

$$\left|\frac{f(h) - f(0)}{h - 0}\right| \leq \left|\frac{h^2}{h}\right| = |h| \to 0, \quad h \to 0.$$

Damit gilt $\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h-0} = 0$, also ist f in $x = 0$ differenzierbar (mit $f'(0) = 0$).

Das Ziel dieser Aufgabe war es, daran zu erinnern, dass eine Funktion, die in x differenzierbar ist, nicht in einer ganzen Umgebung von x differenzierbar sein muss.

Aufgabe 35. $(\star)$ *Berechnen Sie die Ableitungen $f'(x)$ der folgenden Funktionen:*

i.)

$$f(x) = \log\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right) \qquad \textit{für } x \in (0,1).$$

ii.)

$$f(x) = \sqrt{\frac{a+bx}{a-bx}} \qquad \textit{für } a,b>0,\ \textit{für } x \in \left(\frac{-\alpha}{\beta}, \frac{\alpha}{\beta}\right).$$

iii.)

$$f(x) = x^{1/3}(1-x)^{2/3}(1+x)^{1/2} \qquad \textit{für } x \in (0,1).$$

iv.)

$$f(x) = x^{\sqrt{x}} \qquad \textit{für } x>0.$$

v.)

$$f(x) = \log(\tan(x)^{-1/3}) \qquad \textit{für } x \neq k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Solution:

i.)

$$f'(x) \overset{\text{Kettenregel}}{=} \frac{1}{\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right)'$$

$$\overset{\text{Quotientenregel}}{=} \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{(1+\sqrt{1-x^2})'x - (1+\sqrt{1-x^2})(x)'}{x^2}$$

$$\overset{\text{Kettenregel}}{=} \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot x - (1+\sqrt{1-x^2})}{x^2} = \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{\left(\frac{-x^2-\sqrt{1-x^2}-(\sqrt{1-x^2})^2}{\sqrt{1-x^2}}\right)}{x^2}$$

$$= \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{\left(\frac{-1-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\right)}{x^2} = \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{-1-\sqrt{1-x^2}}{x^2 \cdot \sqrt{1-x^2}} = \frac{-1}{x \cdot \sqrt{1-x^2}}.$$

ii.) Man prüft leicht nach, dass

$$a - bt > 0 \Leftrightarrow t > -\frac{a}{b} \qquad \text{und} \qquad a + bt > 0 \Leftrightarrow t < \frac{a}{b}.$$

Damit gilt

$$\frac{a+bt}{a-bt} \geq 0 \Leftrightarrow t \in \left(-\frac{a}{b}, \frac{a}{b}\right].$$

Wir rechnen

$$f'(x) \overset{\text{Kettenregel}}{=} \frac{1}{2\sqrt{\frac{a+bx}{a-bx}}} \cdot \left(\frac{a+bx}{a-bx}\right)' \overset{\text{Quotientenregel}}{=} \frac{\sqrt{a-bx}}{2\sqrt{a+bx}} \cdot \frac{b\cdot(a-bx)-(a+bx)\cdot(-b)}{(a-bx)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{a-bx}}{2\sqrt{a+bx}} \cdot \frac{b\cdot((a-bx)+(a+bx))}{(a-bx)^2} = \frac{\sqrt{a-bx}}{\sqrt{a+bx}} \cdot \frac{ab}{(a-bx)^2}$$

iii.)

$$f'(x) \overset{\text{Produktregel}}{=} \left(x^{1/3}\cdot(1-x)^{2/3}\right)'\cdot(1+x)^{1/2} + x^{1/3}\cdot(1-x)^{2/3}\left((1+x)^{1/2}\right)'$$

$$\overset{\text{Produktregel}}{=} \left(\left(x^{1/3}\right)'\cdot(1-x)^{2/3} + x^{1/3}\left((1-x)^{2/3}\right)'\right)\cdot(1+x)^{1/2} + x^{1/3}\cdot(1-x)^{2/3}\cdot\frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}$$

$$\overset{\text{Kettenregel}}{=} \left(\frac{1}{3}x^{-2/3}\cdot(1-x)^{2/3} - x^{1/3}\cdot\frac{2}{3}(1-x)^{-1/3}\right)\cdot(1+x)^{1/2} + x^{1/3}\cdot(1-x)^{2/3}\cdot\frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}$$

$$= \frac{1}{3}x^{-2/3}\cdot(1-x)^{2/3}\cdot(1+x)^{1/2} - \frac{2}{3}x^{1/3}\cdot(1-x)^{-1/3}\cdot(1+x)^{1/2} + \frac{1}{2}x^{1/3}\cdot(1-x)^{2/3}\cdot(1+x)^{-1/2}$$

$$= \left(\frac{1}{3x^{1/3}} - \frac{2}{3(1-x)^{2/3}} + \frac{1}{2(1+x)^{1/2}}\right)\cdot x^{1/3}\cdot(1-x)^{2/3}\cdot(1+x)^{1/2}.$$

iv.)

$$f'(x) = \left(e^{\sqrt{x}\cdot\log(x)}\right)' \overset{\text{Produktregel}}{=} \left(\sqrt{x}\cdot\log(x)\right)'\cdot\left(e^{\sqrt{x}\cdot\log(x)}\right)$$

$$\overset{\textit{Produktregel}}{=} \left((\sqrt{x})'\cdot\log(x) + \sqrt{x}\cdot(\log(x))'\right)\cdot x^{\sqrt{x}} = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\log(x) + \frac{\sqrt{x}}{x}\right)\cdot x^{\sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{\log(x)}{2}+1\right)x^{\sqrt{x}} = \left(\frac{\log(x)}{2}+1\right)x^{\sqrt{x}-1/2}.$$

v.)

$$f'(x) \overset{\text{Kettenregel}}{=} \frac{1}{\tan(x)^{-1/3}}\cdot\left(\tan(x)^{-1/3}\right)' \overset{\text{Kettenregel}}{=} \tan(x)^{1/3}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\tan(x)^{-4/3}\cdot(\tan(x))'$$

$$= -\frac{1}{3}\tan(x)^{-1}\cdot\left(1+\tan(x)^2\right) = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\tan(x)}+\tan(x)\right).$$

Aufgabe 36. ($\star$) *Seien $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen.*

i.) Zeigen Sie, dass in allen Punkten $x \in (a, b)$ mit $f(x) \neq g(x)$ die Funktion $\max(f, g)$ differenzierbar ist.

ii.) Unter welcher Bedingung ist $\max(f, g)$ differenzierbar in einem Punkt $x \in (a, b)$ mit $f(x) = g(x)$.

Solution:

i.) Sei $x \in (a, b)$.

Fall $1 : f(x) - g(x) > 0$

Da f, g stetig sind, ist $f - g$ ebenfalls stetig (Prop. 6.3) und damit existiert ein $\delta > 0$, sodass gilt $(f-g)|_{(x-\epsilon,x+\epsilon)} > 0$. Damit gilt

$$\lim_{h\to 0}\frac{\max(f,g)(x+h)-\max(f,g)(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x).$$

Fall 2 : $f(x) - g(x) < 0$

Da f, g stetig sind, ist $f - g$ ebenfalls stetig (Prop. 6.3) und damit existiert ein $\delta > 0$, sodass gilt $(f-g)|_{(x-\epsilon, x+\epsilon)} < 0$. Damit gilt

$$\lim_{h\to 0} \frac{\max(f,g)(x+h) - \max(f,g)(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = g'(x).$$

ii.)

Behauptung 5. *Sei $x \in (a,b)$:*

$$\max(f,g) \textit{ ist differenzierbar in } x \Leftrightarrow f'(x) = g'(x).$$

Proof. " $\Rightarrow$ " Wir zeigen die Kontraposition. Sei $f(x) \neq g(x)$, wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $f'(x) > g'(x)$ (ansonsten benennen wir unsere Funktionen um). Da

$$\lim_{h\to 0} \frac{(f-g)(x+h) - \overbrace{(f-g)(x)}^{=0}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(f-g)(x+h)}{h} = f'(x) - g'(x) > 0.$$

Damit existiert ein $h_0 > 0$, sodass für alle $0 < h \leq h_0$

$$\frac{(f-g)(x+h)}{h} > 0 \Rightarrow f(x+h) > g(x+h)$$

und für $-h_0 \leq h < 0$

$$\frac{(f-g)(x+h)}{h} > 0 \Rightarrow f(x+h) < g(x+h).$$

Damit gilt

$$\lim_{h\downarrow 0} \frac{\max(f,g)(x+h) - \max(f,g)(x)}{h} = \lim_{h\downarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) \neq g'(x)$$

$$= \lim_{h\downarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h\uparrow 0} \frac{\max(f,g)(x+h) - \max(f,g)(x)}{h}.$$

Also existiert $\lim_{h\to 0} \frac{\max(f,g)(x+h) - \max(f,g)(x)}{h}$ nicht. Deswegen ist $\max(f,g)$ in x nicht differenzierbar.

" $\Leftarrow$ " Sei nun $f'(x) = g'(x)$ für ein fixes $x \in (a,b)$. Sei $\epsilon > 0$.

Da $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$, existiert ein $\delta_1 > 0$, sodass für alle $0 < |h| < \delta_1$

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) \right| < \epsilon.$$

Da $\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = g'(x)$, existiert ein $\delta_2 > 0$, sodass für alle $0 < |h| < \delta_2$

$$\left| \frac{g(x+h) - g(x)}{h} - g'(x) \right| < \epsilon.$$

Damit gilt auch für alle $0 < |h| < \delta_2$

$$\left| \frac{g(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) \right| \overset{f(x)=g(x),\ f'(x)=g'(x)}{=} \left| \frac{g(x+h) - g(x)}{h} - g'(x) \right| < \epsilon.$$

Sei $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Dann gilt für $0 < |h| < \delta$

$$\left| \frac{\max(f,g)(x+h) - \max(f,g)(x)}{h} - f'(x) \right| \overset{f(x)=g(x)}{=} \left| \frac{\max(f,g)(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) \right|$$

$$\leq \max\left\{\underbrace{\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f'(x)\right|}_{<\epsilon,\text{ da }\delta\leq\delta_1}, \underbrace{\left|\frac{g(x+h)-f(x)}{h}-f'(x)\right|}_{<\epsilon,\text{ da }\delta\leq\delta_2}\right\} < \epsilon.$$

Damit gilt $\lim_{h\in\to 0}\frac{\max(f,g)(x+h)-\max(f,g)(x)}{h}$ konvergiert (gegen $f'(x)$), also ist $\max(f,g)$ in x differenzierbar. $\square$

Aufgabe 37. *Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, $f \in C^n([0,1],\mathbb{R})$ und $b \in \mathbb{R}$. Seien $0 \leq x_1 < \cdots < x_{n+1} \leq 1$ sodass $f(x_i) = b$ für alle $i \in \{1,\ldots,n+1\}$. Zeigen Sie, es existiert ein $\xi \in (x_1, x_{n+1})$ sodass $f^{(n)}(\xi) = 0$.*

Hint: Induktion.

Solution:
Wir beweisen die Behauptung mittels Induktion über n.

Die Induktionsverankerung $n = 1$ folgt direkt aus dem Mittelwertsatz (Satz 8.9). Wir nehmen an, die Aussage gilt für $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Seien jetzt $0 \leq x_1 < \cdots < x_{n+2} \leq 1$. Wir wenden die Induktionsverankerung an, auf die Paare $0 \leq x_i < x_{i+1} \leq 1$ für $i \in \{1,\ldots,n+1\}$ und erhalten $\xi_1 < \ldots \xi_{n+1}$ mit $x_i < \xi_i < x_{i+1}$ und $f'(\xi_i) = 0$. Die Induktionsannahme liefert uns ein $\xi \in (x_1, x_{n+2})$ mit $f^{(n+1)}(\xi) = 0$.

Aufgabe 38. *Sei $K > 0$. Wir definieren*

$$f_n : [-K,K] \to \mathbb{R},\ f_n(x) := \begin{cases} \frac{n}{2}x^2 + \frac{1}{2n}, & x \in (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \\ |x|, & \textit{sonst.} \end{cases}$$

i.) Zeigen Sie, dass $f_n \in C^1([-K,K],\mathbb{R})$.

ii.) Berechnen Sie den Limes von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ in $(C^0([-K,K],\mathbb{R}), \|\cdot\|_{C^0([-K,K],\mathbb{R})})$.

iii.) Schliessen Sie, dass $(C^1([-K,K],\mathbb{R}), \|\cdot\|_{C^0([-K,K],\mathbb{R})})$ nicht vollständig ist.

Solution:
Diese Aufgabe soll daran erinnern, dass der gleichmässige Limes von differenzierbaren Funktionen nicht differenzierbar sein muss. In anderen Worten, der Raum der differenzierbaren Funktionen ist nicht vollständig bezüglich der Supremumsnorm.

Man beachte, dass $(C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}), \|\cdot\|_{C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})})$ kein normierter Vektorraum ist und darum die ursprüngliche Aufgabe keinen Sinn macht (zum Beispiel ist $id \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, aber $\sup_{x\in\mathbb{R}}|id(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}}|x| = \infty$). Weiter waren die ursprünglichen Funktionen nicht einmal stetig und insbesondere also nicht differenzierbar. Damit war auch das Gegenbeispiel zu Aufgabe 30 falsch. Man kann die obigen Funktionen benutzen um ein echtes Gegenbeispiel zu konstruieren.

i.) f_n ist für $x \neq \pm 1/n$ offensichtlich stetig. Nun müssen wir die Stetigkeit in $\pm 1/n$ beweisen, dazu benutzen wir Prop. 6.13

$$\lim_{x\downarrow\frac{-1}{n}} f_n(x) = \lim_{x\downarrow\frac{-1}{n}} \frac{n}{2}x^2 + \frac{1}{2n} = \frac{n}{2}\left(\frac{-1}{n}\right)^2 + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n} = \lim_{x\uparrow\frac{-1}{n}} |x| = \lim_{x\uparrow\frac{-1}{n}} f_n(x).$$

$$\lim_{x\uparrow\frac{1}{n}} f_n(x) = \lim_{x\uparrow\frac{1}{n}} \frac{n}{2}x^2 + \frac{1}{2n} = \frac{n}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n} = \lim_{x\downarrow\frac{1}{n}} |x| = \lim_{x\downarrow\frac{1}{n}} f_n(x).$$

Für die Differenzierbarkeit reicht es analog Serie 11, Aufgabe 2 zu zeigen, dass $\lim_{x\to a} f_n'(x)$ existiert für $a \neq \pm 1/n$. Dazu reicht es zu zeigen (Prop. 6.13), dass gilt $\lim_{x\uparrow a} f_n'(x) = \lim_{x\downarrow a} f_n'(x)$. Dies rechnen wir nun nach

$$\lim_{x\downarrow\frac{-1}{n}} f_n'(x) = \lim_{x\downarrow\frac{-1}{n}} nx = -1 = \lim_{x\uparrow\frac{-1}{n}} -1 = \lim_{x\uparrow\frac{-1}{n}} f_n'(x).$$

$$\lim_{x\uparrow\frac{1}{n}} f_n'(x) = \lim_{x\uparrow\frac{1}{n}} nx = 1 = \lim_{x\downarrow\frac{1}{n}} 1 = \lim_{x\downarrow\frac{1}{n}} f_n'(x).$$

Wobei wir benutzt haben, dass der Absolutbetrag differenzierbar ist für $x \neq 0$ und es gilt

$$|x|' = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Es bleibt zu zeigen, dass der Limes am Rand existiert (siehe Seite 97). Wir berechnen für $n \geq 1/K$

$$\lim_{x\downarrow -K} f'(x) = \lim_{x\downarrow -K} |x|' = \lim_{x\downarrow -K} -1 = -1.$$

$$\lim_{x\uparrow K} f'(x) = \lim_{x\uparrow K} |x|' = \lim_{x\uparrow K} 1 = 1.$$

und für $n < 1/K$

$$\lim_{x\downarrow -K} f'(x) = \lim_{x\downarrow -K} nx = -nK.$$

$$\lim_{x\uparrow K} f'(x) = \lim_{x\uparrow K} nx = nK.$$

ii.) Wir definieren

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = |x|.$$

Wir zeigen, dass $f_n \to f$ bezüglich $\|\cdot\|_{C^0([-K,K],\mathbb{R})}$. Für $n \geq 1/K$ gilt

$$0 \leq \|f_n - f\|_{C^0([-K,K],\mathbb{R})} = \sup_{x\in[-K,K]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in\left(\frac{-1}{n},\frac{1}{n}\right)} |f_n(x) - f(x)|$$

$$\leq \sup_{x\in\left(\frac{-1}{n},\frac{1}{n}\right)} (|f_n(x)| + |f(x)|) \leq \sup_{x\in\left(\frac{-1}{n},\frac{1}{n}\right)} |f_n(x)| + \sup_{x\in\left(\frac{-1}{n},\frac{1}{n}\right)} |f(x)|$$

$$= \sup_{x\in\left(\frac{-1}{n},\frac{1}{n}\right)} \left|\frac{n}{2}x^2 + \frac{1}{2n}\right| + \sup_{x\in\left(\frac{-1}{n},\frac{1}{n}\right)} |x| = \frac{n}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{2n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n} \to 0, \quad \text{für } n \to \infty.$$

iii.) Es gilt $C^1([-K,K],\mathbb{R}) \subset C^0([-K,K],\mathbb{R})$ (Prop. 8.2). Wir wissen aus *ii.*), dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ in $(C^0([-K,K],\mathbb{R}), \|\cdot\|_{C^0([-K,K],\mathbb{R})})$ konvergiert. Damit gilt insbesondere, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ eine Cauchyfolge in $(C^0([-K,K],\mathbb{R}), \|\cdot\|_{C^0([-K,K],\mathbb{R})})$ und damit auch eine Cauchyfolge in $(C^1([-K,K],\mathbb{R}), \|\cdot\|_{C^0([-K,K],\mathbb{R})})$ ist, da nach *i.*) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} \subseteq C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Jedoch gilt $f \notin C^1([-K,K],\mathbb{R})$ und damit ist $(C^1([-K,K],\mathbb{R}), \|\cdot\|_{C^0([-K,K],\mathbb{R})})$ nicht vollständig.

Aufgabe 39. ($\star$)

i.) Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:

(a)

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{3x + 2}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{2}{3}\}.$$

(b)

$$g(x) = \log((x + \sin(x))^2), \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

(c)

$$h(x) = x^{\sin(\sqrt{x})}, \quad x > 0.$$

ii.) Finden Sie alle lokalen Extrema der Funktion $f(x) := (1+x)\sqrt{|x|},\ x \in \mathbb{R}$.

Solution:

i.) (a)

$$f'(x) \overset{\text{Quotientenregel}}{=} \frac{(x^2-2x+1)' \cdot (3x+2) - (x^2-2x+1)\cdot(3x+2)'}{(3x+2)^2}$$

$$= \frac{(2x-2)\cdot(3x+2)-(x^2-2x+1)\cdot 3}{(3x+2)^2} = \frac{2(x-1)(3x+2)-3(x-1)(x-1)}{(3x+2)^2}$$

$$= \frac{(x-1)(6x+4-3x+3)}{(3x+2)^2} = \frac{(x-1)(3x+7)}{(3x+2)^2}.$$

(b)

$$g'(x) \overset{\text{Kettenregel}}{=} \frac{1}{(x+\sin(x))^2} \cdot \big((x+\sin(x))^2\big)'$$

$$\overset{\text{Kettenregel}}{=} \frac{1}{(x+\sin(x))^2} \cdot 2((x+\sin(x))\cdot((x+\sin(x))'$$

$$= \frac{1}{(x+\sin(x))^2} \cdot 2((x+\sin(x))\cdot(1+\cos(x)) = \frac{2+2\cos(x)}{x+\sin(x)}.$$

(c)

$$h'(x) = \left(e^{\sin(\sqrt{x})\cdot\log(x)}\right)' \overset{\text{Kettenregel}}{=} \big(\sin(\sqrt{x})\cdot\log(x)\big)' \cdot \left(e^{\sin(\sqrt{x})\cdot\log(x)}\right)$$

$$\overset{\text{Produktregel}}{=} \big(\sin(\sqrt{x})'\cdot\log(x) + \sin(\sqrt{x})\cdot\log(x)'\big)\cdot x^{\sin(\sqrt{x})}$$

$$\overset{\text{Kettenregel}}{=} \left(\cos(\sqrt{x})\cdot\big(\sqrt{x}\big)'\cdot\log(x) + \frac{\sin(\sqrt{x})}{x}\right) x^{\sin(\sqrt{x})}$$

$$= \left(\frac{\cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}\cdot\log(x) + \frac{\sin(\sqrt{x})}{x}\right)\cdot x^{\sin(\sqrt{x})}.$$

ii.) Wir unterscheiden in unserer Analysis drei Fälle.

$\underline{x = 0}$

Zuerst zeigen wir $x = 0$ ein lokales Minimum von f ist. Dazu bemerken wir $f(0) = 0$. Weiter gilt

$$0 < h \Rightarrow f(h) = \underbrace{(1+h)}_{>0}\underbrace{\sqrt{h}}_{>0} > 0$$

und

$$-1 < h < 0 \Rightarrow f(h) = \underbrace{(1+h)}_{>0}\underbrace{\sqrt{-h}}_{>0} > 0.$$

$\underline{x > 0}$

Nun zeigen wir, dass f keine Extrema in $(0,\infty)$ besitzt. Für $x > 0$ gilt $f(x) = (1+x)\sqrt{x}$. f ist hier differenzierbar. Es gilt

$$0 = f'(x) \overset{\text{Produktregel}}{=} \sqrt{x} + \frac{1+x}{2\sqrt{x}} = \frac{3x+1}{2\sqrt{x}} \Leftrightarrow 0 = 3x+1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}.$$

Damit besitzt die Gleichung $f'(x) = 0$ in $(0, \infty)$ keine Lösung. Aus Prop. 8.7 folgt, dass f keine Extrema in $(0, \infty)$ besitzt.

$\underline{x < 0}$ Für $x > 0$ gilt $f(x) = (1 + x)\sqrt{-x}$. f ist hier differenzierbar. Es gilt

$$0 = f'(x) \overset{\text{Produktregel, Kettenregel}}{=} \sqrt{-x} - \frac{1+x}{2\sqrt{-x}} = -\frac{3x+1}{2\sqrt{-x}} \Leftrightarrow 0 = -3x - 1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}.$$

Es gilt $f'(x) > 0$ für $x < -1/3$ und $f'(x) < 0$ für $-1/3 < x < 0$. Aus Prop. 8.13 folgt, dass $x = -1/3$ ein lokales Maximum von f ist. Dies kann man alternativ auch mit Prop. 8.26 beweisen, da

$$f''(x) \overset{\text{Quotientenregel}}{=} -\frac{6\sqrt{-x} + \frac{(3x+1)}{\sqrt{-x}}}{-4x} = -\frac{1}{-4x} \cdot \frac{-3x+1}{\sqrt{-x}}$$

und damit

$$f''\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{\sqrt{\frac{1}{3}}} > 0.$$

Damit sind $\{-1/3, 0\}$ alle lokalen Extrema von f.

Aufgabe 40. *Zeigen Sie, dass die Exponentialabbildung auf $\mathbb{R}$ konvex ist und zeigen Sie $e^x \geq 1 + x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.*

Solution:
Es gilt $(e^x)'' = e^x > 0$. Aus Prop. 8.21 folgt, dass die Exponentialabbildung konvex ist. Aus Prop. 8.20 folgt

$$e^z \leq \frac{e^y - e^z}{y - z} \leq e^y, \qquad \text{für } z \leq y.$$

Falls $x > 0$, setzen wir $z = 0, y = x$

$$1 = e^0 \leq \frac{e^x - e^0}{x - 0} = \frac{e^x - 1}{x} \Rightarrow 1 + x \leq e^x.$$

Falls $x < 0$, setzen wir $z = x, y = 0$

$$\frac{1 - e^x}{-x} = \frac{e^0 - e^x}{-x} \leq e^0 = 1 \Rightarrow 1 - e^x \leq -x \Rightarrow 1 + x \leq e^x.$$

Aufgabe 41. $(\star)$ *Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq y < x$ gilt:*

$$ny^{n-1} \leq \frac{x^n - y^n}{x - y} \leq nx^{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Solution:
Für $y = 0$ ist die Aussage trivial. Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}, f(x) = x^n$. Es gilt $f^{(2)}(x) = n(n-1)x^{n-2} \geq 0$. Mit Prop. 8.21 ist f konvex und die Aussage folgt aus Prop. 8.20.

Aufgabe 42. $(\star)$ *Entscheiden Sie für jede der folgenden Aussagen, ob Sie wahr oder falsch ist.*

i.) *Als Folge in $C^0([0,1], \mathbb{R})$ hat $f_n(x) = x^n$ keine konvergente Teilfolge.*

ii.) *Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = x^2 \cos(1/x)$ für $x \neq 0$ und $f(0) = 0$ ist in $x = 0$ differenzierbar* *iii.) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex. Dann ist f auf $\mathbb{R}$ differenzierbar.*

iv.) Ist $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ gleichmässig stetig und auf $(0,1)$ differenzierbar, dann ist f' beschränkt.

v.) Ist $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ differenzierbar und es gibt ein $x_0 \in (0,1)$ mit $f'(x_0) = 0$, so hat f in x_0 ein lokales Extremum.

Solution:

i.) Wahr. Nehmen wir an, es gäbe eine gleichmässig konvergente Teilfolge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Diese konvergiert punktweise gegen $f : [0,1] \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$. Damit $f_{n_k} \to f$ gleichmässig. Da die f_n stetig sind, ist f stetig (Prop. 6.24). Dies ist offensichtlich nicht der Fall, also Widerspruch.

ii.) Wahr. Es gilt

$$0 \leq \left| \frac{h^2 \cos(\frac{1}{h}) - 0}{h - 0} \right| = |h| \cdot \left| \cos\left(\frac{1}{h}\right) \right| \leq |h| \to 0, \qquad \text{für } h \to 0.$$

Damit gilt $\lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h-0} = 0$. Also ist f in $x = 0$ differenzierbar (mit $f'(0) = 0$).

iii.) Falsch, der Absolutbetrag ist ein Gegenbeispiel (nicht differenzierbar in $x = 0$).

iv.) Falsch. Gegenbeispiel $f : [0,1] \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^2 \cos(\frac{1}{x^3}), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ Man beweist analog zu *ii.)*, dass f stetig ist. Da $[0,1]$ kompakt ist, ist f gleichmässig stetig (Satz 6.22). Mittels der Kettenregel (Prop. 8.5) erhalten wir für $x \in (0,1) : f'(x) = 2x \cos(\frac{1}{x^3}) + \frac{1}{x^2} \sin(\frac{1}{x^3})$. Der erste Term ist durch 1 beschränkt und der zweite ist unbeschränkt, also ist f' unbeschränkt.

Ein alternatives Gegenbeispiel ist $g : [0,1] \to \mathbb{R},\ g(x) = \sqrt{x}$. Wieder folgt aus Satz 6.22, dass g gleichmässig stetig ist. Jedoch ist $g'(x) = 1/\sqrt{x}$ unbeschränkt auf $(0,1)$.

v.) Falsch, Gegenbeispiel $f(x) = (x - \frac{1}{2})^3$. $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot (\frac{1}{2} - \frac{1}{2})^2 = 0$, aber $x = \frac{1}{2}$ ist weder lokales Maximum, noch Minimum von f. Da $f\left(\frac{1}{2}\right) = (\frac{1}{2} - \frac{1}{2})^3 = 0$.
Für $x < \frac{1}{2}$ gilt $x - \frac{1}{2} < 0$ und damit $f(x) = (x - \frac{1}{2})^3 < 0$.
Für $x > \frac{1}{2}$ gilt $x - \frac{1}{2} > 0$ und damit $f(x) = (x - \frac{1}{2})^3 > 0$.

Aufgabe 43. *Sei $f : \mathbb{R}_{>-1} \to \mathbb{R},\ f(x) = \log(1 + x)$.*

i.) Bestimmen Sie die Taylorreihe von f um $x_0 = 0$. Bestimmen Sie den Konvergenzradius ρ dieser Reihe.

ii.) Sei $R_2 f(x)$ das Restglied des Taylorpolynoms zweiter Ordnung. Zeigen Sie:

$$R_2 f(x) \geq 0, \quad \forall\ 0 \leq x < R.$$

iii.) Zeigen Sie für alle $n > 1$

$$1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} \left(1 + \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) \leq \frac{1}{2n^2}.$$

Solution:

i.) Wir zeigen, dass

$$\log(1+x) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\, x^n, \quad x \in (-1,1).$$

Zuerst zeigen wir die folgende

Behauptung 6.

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(1+x)^n}, \quad x \in \mathbb{R}_{>-1} \textit{ und } n \in \mathbb{N}_{\geq 1}.$$

Proof. Wir beweisen dies mittels Induktion über n. Zuerst zeigen wir die Induktionsverankerung $n = 1$.

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = \frac{(-1)^2(1-1)!}{(1+x)^1}.$$

Wir nehmen nun an, dass die Behauptung für $n \in \mathbb{N}$ wahr ist. Dann berechnen wir

$$f^{(n+1)}(x) = \left(\frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(1+x)^n}\right)' = (-1)^{n+1}(n-1)!\Big((1+x)^{-n}\Big)'$$

$$= (-1)^{n+1}(n-1)!(-n)(1+x)^{-n-1} = \frac{(-1)^{(n+1)+1}((n+1)-1)!}{(1+x)^{n+1}}.$$

□

Zusätzlich gilt $f^{(0)}(0) = f(0) = \log(1) = 0$. Damit erhalten wir für die Taylorreihe von f in $x_0 = 0$ den folgenden Ausdruck

$$\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,(x-0)^n = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{n!(1+0)^n}\, x^n = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\, x^n.$$

Der Konvergenzradius ist gegeben durch

$$\rho = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} n^{1/n}} = \frac{1}{1} = 1.$$

ii.) <u>Möglichkeit 1 : Taylorreihe</u>

Das Restglied des Taylorpolynoms zweiter Ordnung ist für $0 \leq x < 1$ gegeben durch

$$R_2 f(x) = \sum_{k\geq 3} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\, x^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=3}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\, x^k \geq 0.$$

Wobei wir benutzt haben, dass

$$\sum_{k=3}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\, x^k = \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{(-1)^{(2k+1)+1}}{2k+1}\, x^{2k+1} + \frac{(-1)^{(2k+2)+1}}{2k+2}\, x^{2k+2}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2k+1}\, x^{2k+1} - \frac{1}{2k+2}\, x^{2k+2}\right) = \sum_{k=1}^{n-1} \underbrace{\left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2}\, x\right)}_{\geq 0} \underbrace{x^{2k+1}}_{\geq 0} \geq 0$$

<u>Möglichkeit 2 : Lagrange Restglied</u>

Alternativ kann man das Restglied von Lagrange (Satz 8.25) verwenden. Es existiert ein $\xi_x \in (0,x)$, sodass

$$R_2 f(x) = \frac{f^{(3)}(\xi_x)}{3!} x^3 \overset{\text{Behauptung 8}}{=} \frac{2!(-1)^4}{3!(1+\xi_x)^3} x^3 = \frac{1}{3} \cdot \underbrace{\frac{x^3}{(1+\xi_x)^3}}_{\geq 0, \text{ da } x \geq 0, \xi_x \geq 0} \geq 0$$

iii.) Für $n > 1$ gilt $0 < \frac{1}{n} < 1$. Wir können also schreiben

$$\log\left(1+\frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2}{2} + R_2 f\left(\frac{1}{n}\right).$$

Wenn wir diese Identität einsetzen erhalten wir

$$1 - \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1}\left(1+\log(1+\frac{1}{n})\right) = 1 - \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1}\left(1+\frac{1}{n} - \frac{1}{2}(\frac{1}{n})^2 + R_2 f(\frac{1}{n})\right)$$

$$= \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1}\frac{1}{2n^2} - \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1}}_{>0} \underbrace{R_2 f(\frac{1}{n})}_{\geq 0, \text{ wegen } ii.)} \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1}\frac{1}{2n^2} = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{2n^2} \leq \frac{1}{2n^2}.$$

Aufgabe 44. *Es sei* $f_n : [1,\infty) \to \mathbb{R},\ f_n(x) = 2n\left((2x)^{1/n} - 1\right)$.

i.) Zeigen Sie, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *punktweise konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert* $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}$.
Hinweise: Schreiben Sie $(2x)^{1/n} = \exp(1/n \cdot \log(2x))$.

ii.) Zeigen Sie, dass die Konvergenz auf dem Intervall $[1,2]$ *gleichmässig ist.*

iii.) Ist die Konvergenz gleichmässig auf $[1,\infty)$*?*

Solution:

i.) Sei $x \geq 1$. Wir wenden den Satz über die Taylorapproximation mit Langrange'schem Restglied (Satz 8.25) an. Dann existiert ein $\xi_x \in (0, 1/n \log(2x))$, sodass

$$\exp\left(\frac{1}{n}\cdot\log(2x)\right) = e^0 + e^0\frac{1}{n}\cdot\log(2x) + \frac{e^{\xi_x}}{2}\left(\frac{1}{n}\cdot\log(2x)\right)^2$$

$$= 1 + \frac{1}{n}\cdot\log(2x) + \frac{e^{\xi_x}}{2}\left(\frac{1}{n}\cdot\log(2x)\right)^2$$

Damit gilt

$$2n\left((2x)^{1/n} - 1\right) = 2n\left(\exp\left(\frac{1}{n}\cdot\log(2x)\right) - 1\right)$$

$$= 2\cdot\log(2x) + \frac{e^{\xi_x}}{2n}\log(2x)^2 \to 2\log(2x) =: f(x), \qquad \text{für } n \to \infty.$$

ii.) Aus *i.)* wissen wir, dass es für jedes $x \in [1,2]$ ein $\xi_x \in (0, 1/n\log(2x))$, sodass

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|2\cdot\log(2x) + \frac{e^{\xi_x}}{2n}\log(2x)^2 - f(x)\right| = \left|\frac{e^{\xi_x}}{2n}\log(2x)^2\right|.$$

Da die Exponentialfunktion und der Logarithmus auf unserem Bereich monoton steigend und nichtnegativ sind, gilt

$$\sup_{x\in[1,2]} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{e^{\frac{1}{n}\log(4)}}{2n}\log(4)^2 \leq \frac{e^{\log(4)}}{2n}\log(4)^2 \leq \frac{2\cdot\log(16)}{n} \to 0, \qquad \text{für } n\to\infty.$$

iii.) Nein.

$$\left| f_n\left(\frac{n^n}{2}\right) - f\left(\frac{n^n}{2}\right)\right| = |2n\,(n-1) - 2\log(n^n)| = |2n(n-1-\log(n))| \to \infty, \qquad \text{für } n\to\infty.$$

Also

$$\sup_{x\in[1,\infty)} |f_n(x) - f(x)| \to \infty, \qquad \text{für } n\to\infty.$$

Aufgabe 45. ($\star$) *Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen in $z\in\mathbb{C}$.*

i.)

$$\sum_{m\geq 1}\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{j}\right)z^m.$$

ii.)

$$\sum_{k\geq 0} 4k^5 3^k x^{k^2}.$$

iii.)

$$\sum_{n\geq 1}\left(5-\frac{2}{n}\right)^n z^n.$$

iv.)

$$\sum_{n\geq 0} i^{n-1} n^n z^n.$$

v.)

$$\sum_{n\geq 0}\frac{2^n}{n!}z^n.$$

Solution:

i.)

$$1 = 1^n = \left(n\cdot\frac{1}{n}\right)^{1/n} \leq \left|\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\right|^{1/n} \leq n^{1/n} \to 1, \qquad \text{für } n\to\infty.$$

Damit gilt $\lim_{n\to\infty}\left|\sum_{j=1}^n \frac{1}{j}\right|^{1/n} = 1$ und damit

$$\rho = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty}\left|\sum_{j=1}^n\frac{1}{j}\right|^{1/n}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left|\sum_{j=1}^n\frac{1}{j}\right|^{1/n}} = \frac{1}{1} = 1.$$

ii.) Die Koeffizienten sind

$$a_n = \begin{cases} 0, & n \text{ keine Quadratzahl} \\ 4n^{5/2}3^{\sqrt{n}}, & n \text{ Quadratzahl.}\end{cases}$$

Wir berechnen

$$|a_{n^2}|^{1/n^2} = |4n^{5/2} \cdot 3^{\sqrt{n}}|^{1/n} = \underbrace{4^{1/n}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\left(n^{1/n}\right)^{5/2}}_{\to 1^{5/2}=1} \cdot \underbrace{e^{\log(3)/\sqrt{n}}}_{\to e^0=1} \to 1, \qquad \text{für } n \to \infty.$$

Damit erhalten wir

$$\rho = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}} = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} |a_{n^2}|^{1/n^2}} = \frac{1}{1} = 1.$$

iii.) Wir berechnen

$$\rho = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \left| \left(5 - \frac{2}{n}\right)^n \right|^{1/n}} = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \left(5 - \frac{2}{n}\right)} = \frac{1}{5}.$$

iv.) Wir berechnen

$$\limsup_{n\to\infty} |i^{n-1} n^n|^{1/n} \overset{|i|=1}{=} \limsup_{n\to\infty} n = \infty.$$

Damit gilt

$$\rho = 0.$$

v.) Sei $k \in \mathbb{N}$, dann gilt für $n \geq k$

$$(n!)^{1/n} \geq \left(1 \cdot 2 \cdot \cdot 3 \cdot \ldots (k-1) \cdot k \underbrace{k \cdot \cdots \cdot k}_{n-k \text{ mal}} \right)^{1/n} \geq k^{(n-k)/n} = k^{1-k/n}$$

Damit gilt

$$\limsup_{n\to\infty} (n!)^{1/n} \geq \limsup_{n\to\infty} k^{1-k/n} = k.$$

Da $k \in \mathbb{N}$ beliebig war, gilt $\limsup_{n\to\infty} (n!)^{1/n} = \infty$. Es folgt

$$\limsup_{n\to\infty} \left| \frac{2^n}{n!} \right|^{1/n} = \limsup_{n\to\infty} \frac{2}{(n!)^{1/n}} = 0.$$

Also gilt

$$\rho = \infty.$$

Aufgabe 46. ($\star$) *Entscheiden Sie für die folgenden Aussagen, ob sie wahr oder falsch sind:*

i.) Sei $\rho > 0$ der Konvergenzradius von $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$. Dann ist f auf $\{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| < \rho\}$ stetig.

ii.) Sei $\rho > 0$ der Konvergenzradius von $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$. Dann $p_m(z) = \sum_{n=0}^m a_n z^n \to f(z)$ gleichmässig auf $\{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| \leq r\}$ für alle $r < \rho$.

iii.) Es existiert eine analytische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 0$ für alle $|x| > 2$ und $f(x) = 1$ für alle $|x| \leq 1$.

Solution:

i.) Wahr, Satz 8.30.

ii.) Sei $0 \leq r < \rho$. Nach Satz 7.2 konvergiert $\sum_{n\geq 0} |a_n| \cdot r^n$. Insbesondere gilt $\sum_{n\geq m+1} |a_n| \cdot r^n \to 0$ für $m \to \infty$. Die folgende Rechnung zeigt die gleichmässige Konvergenz auf $\{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| \leq r\}$

$$\sup_{|z|\le r} |f(z) - p_m(z)| = \sup_{|z|\le r} |\sum_{n\ge m+1} a_n z^n| \le \sup_{|z|\le r} \sum_{n\ge m+1} |a_n| \cdot |z^n|$$

$$= \sum_{n\ge m+1} |a_n| \cdot r^n \to 0, \qquad \text{für } m \to \infty.$$

iii.) Falsch. Siehe nächste Aufgabe.

Aufgabe 47. *Seien $a \in \mathbb{R}, \epsilon > 0$, und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ analytisch mit $f|_{(a,a+\epsilon)} = 0$. Wir wollen zeigen, dass $f = 0$.*

i.) Zeigen Sie $\{x \in \mathbb{R}_{>a} \ : \ f|_{(a,x)} = 0\} \neq \emptyset$.

ii.) Definieren Sie $b := \sup\{x \in \mathbb{R}_{>a} \ : \ f|_{(a,x)}\}$. Nutzen Sie das Identitätsprinzip um (mittels Widerspruchsbeweis) zu zeigen, dass $b = \infty$.

iii.) Schliessen Sie, dass $f = 0$.

Solution:

i.) Nach Voraussetzung $\epsilon \in \{x \in \mathbb{R}_{>a} \ : \ f|_{(a,x)} = 0\}$ und damit $\{x \in \mathbb{R}_{>a} \ : \ f|_{(a,x)} = 0\} \neq \emptyset$.

ii.) Annahme $b \neq \infty$. Dann ist $f(b) = 0$, da $f|_{(a,b)} = 0$ und f stetig (da f analytisch, Kor. 8.31). Aus dem Identitätsprinzip (Prop. 8.33) folgt, dass f in einer Umgebung von b identisch gleich Null ist. Damit existiert ein $\delta > 0$, sodass $f|_{(b-\delta,b+\delta)} = 0$. Dann gilt jedoch $f|_{(a,b+\delta)} = 0$ Dies ist ein Widerspruch dazu, dass $b = \sup\{x \in \mathbb{R}_{>a} \ : \ f|_{(a,x)}\}$.

iii.) Aus *ii.*) folgt, dass $f|_{(a,\infty)} = 0$. Wir müssen nur noch zeigen, dass $f|_{(-\infty,a)} = 0$. Wir definieren $g(x) := f(-x)$. Da f und $x \mapsto -x$ analytisch sind und die Komposition analytischer Funktionen analytisch ist (siehe Seite 110), folgt, dass g analytisch ist. Es gilt $g|_{(-a-\epsilon,-a)} = f|_{(a,a+\epsilon)} = 0$. Aus *ii.*) folgt, dass $g|_{(-a,\infty)} = 0$ und damit $f|_{(-\infty,a)} = 0$.