

# PVK Analysis I

Marco Bertenghi & Lukas Burch, Vorlage gemäss Severin Schraven

January 7, 2020

Die Verweise auf Theoreme und Propositionen beziehen sich auf das Skript der Vorlesung, welches Sie *hier* finden können. Die Verweise auf Serien beziehen sich auf das HS 15. Mit (\*) markierte Aufgaben, sind im allgemeinen anspruchsvoller.

## 1 sup, inf, max, min von Mengen

**Aufgabe 1.** Berechnen Sie das Supremum (kleinste obere Schranke) der Menge:

$$S := \left\{ \frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots \right\}.$$

Was gilt für das Supremum der Menge  $M := S \cup \{1\}$ ?

### **Solution:**

Um zu zeigen, dass eine reelle Zahl  $M$  die kleinste obere Schranke einer Menge  $S$  ist, geht man normalerweise in 2 Schritten vor.

1. Zeige, dass  $M$  eine obere Schranke von  $S$  ist, i.e. zeige, dass  $M \geq s$  für alle  $s \in S$ .
2. Zeige, dass  $M$  die kleinste obere Schranke von  $S$  ist. Meist geschieht dies per Widerspruch, man nimmt an, dass ein  $\epsilon > 0$  existiert, sodass  $M - \epsilon$  nach wie vor eine obere Schranke von  $S$  ist. Man findet dann ein Element  $s \in S$  mit  $s > M - \epsilon$ , was zeigt, dass  $M - \epsilon$  keine obere Schranke von  $S$  ist.

Wir stellen nun fest, dass jedes Element  $s \in S$  kleiner als 1 ist, da  $\frac{n}{n+1} < 1$ . Wir behaupten, dass 1 das Supremum der Menge ist. Nehme zum Widerspruch an, dass 1 nicht die kleinste obere Schranke von  $S$  ist, d.h. es existiert  $\epsilon > 0$  sodass  $1 - \epsilon$  auch eine obere Schranke von  $S$  ist.

Wähle  $n_0 \in \mathbb{N}$  sodass  $n_0 > \frac{1}{\epsilon} - 1$ , dann gilt  $1 - \epsilon < \frac{n_0}{n_0+1}$  was zeigt, dass  $1 - \epsilon$  keine obere Schranke von  $S$  ist, da  $\epsilon > 0$  beliebig war, muss 1 die kleinste obere Schranke von  $S$  sein.

Unsere Bemühungen lassen nun schliessen, dass  $\sup M = \max M = 1$  gelten muss, da 1 das Supremum der Menge  $S$  ist und insbesondere gilt  $1 \in M$ .

**Aufgabe 2.** Es sei  $A \subset \mathbb{R}$  und  $A \neq \emptyset$ , desweiteren definieren wir  $-A := \{x \in \mathbb{R} : -x \in A\}$ . Entscheiden Sie für jede Aussage, ob sie wahr oder falsch ist:

- i.)  $A$  unbeschränkt  $\iff \sup A = \infty$ .
- ii.)  $A$  ist endlich  $\implies \max A = \sup A$ .
- iii.)  $\min A$  existiert  $\implies \min A = -\max(-A)$ .
- iv.)  $\sup A \notin A$ .

**Solution:**

- i.) Falsch, Gegenbeispiel  $A = (-\infty, 0]$  ist unbeschränkt, aber  $\sup A = 0$ .
- ii.) Wahr.
- iii.) Wahr. Sei  $x \in A$ , dann gilt  $-x \in -A$ . Damit  $x = -(-x) \geq -\max(-A)$ . Da  $-\max(-A) \in A$ , folgt die Aussage.
- iv.) Falsch.  $A = \{42\}$ . Dann ist  $\sup A = 42 \in A$ .

**Aufgabe 3.** Finden Sie das  $\max$ ,  $\min$ ,  $\sup$  und  $\inf$  der folgenden Menge und beweisen Sie ihre Aussage:

$$S := \left\{ \frac{2n+1}{n+1} : n \in \mathbb{N}_{\geq 1} \right\} = \left\{ \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{9}{5}, \frac{11}{6}, \dots \right\}.$$

**Solution:**

Der kleinste Term scheint  $\frac{3}{2}$  zu sein und es scheint kein kleineres Element zu geben, aber alle Elemente sind kleiner als 2 und da  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n+1} = 2$  behaupten wir folgende Aussagen:

- a) Es gibt kein Maximum, b)  $\sup S = 2$  und c)  $\min S = \inf S = \frac{3}{2}$ .

Wir beginnen mit dem Supremum, können wir nämlich zeigen, dass  $\sup S = 2$  dann kann  $S$  kein Maximum besitzen, da  $2 \notin S$ . Es gilt offensichtlich:

$$\frac{2n+1}{n+1} < 2 \iff 2n+1 < 2n+2 \iff 1 < 2.$$

Da diese Aussage immer wahr ist, folgern wir, dass 2 in der Tat eine obere Schranke von  $S$  ist. Nun zeigen wir, dass 2 die kleinste obere Schranke von  $S$  ist. Falls 2 nicht die kleinste obere Schranke von  $S$  wäre, so würde  $\epsilon > 0$  existieren sodass  $2 - \epsilon$  eine obere Schranke von  $S$  ist. Wir behaupten, es existiert eine natürliche Zahl  $n \in \mathbb{N}$  sodass:

$$2 - \epsilon < \frac{2n+1}{n+1}.$$

gilt und somit  $2 - \epsilon$  keine obere Schranke von  $S$  ist. Es gilt jedoch offensichtlich:

$$2 - \epsilon < \frac{2n+1}{n+1} \iff -\epsilon < \frac{2n+1}{n+1} - 2 \iff \epsilon > \frac{1}{n+1} \iff n > \frac{1}{\epsilon} - 1.$$

Wählen wir also  $n \in \mathbb{N}$  sodass  $n > \frac{1}{\epsilon} - 1$ , dann gilt  $2 - \epsilon < \frac{2n+1}{n+1}$ , somit haben wir gezeigt, dass  $\sup S = 2$ . Um etwas präziser zu zeigen, dass  $2 \notin S$  gilt, nehmen wir an, dass eine natürliche Zahl  $n \in \mathbb{N}$  existiert sodass:

$$2 = \frac{2n+1}{n+1} \iff 2(n+1) = 2n+1 \iff 2 = 1.$$

was natürlich ein Widerspruch ist, also  $2 \notin S$  und somit existiert kein Maximum.

Schliesslich zeigen wir, dass  $\min S = \frac{3}{2}$ . Offensichtlich gilt  $\frac{3}{2} \in S$ . Es genügt also zu zeigen, dass  $\frac{3}{2}$  eine untere Schranke von  $S$  ist, wir haben aber offensichtlich

$$\frac{2n+1}{n+1} \geq \frac{3}{2} \iff 2(2n+1) \geq 3(n+1) \iff n \geq 1.$$

Was natürlich wahr ist für alle  $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$  wie in der Menge von  $S$  spezifiziert, also gilt  $\min S = \frac{3}{2}$ .

**Aufgabe 4.** Es sei  $S := (1, 5]$ . Beweisen Sie, dass  $\inf S = 1$ .

**Solution:**

Per Definition von  $S$  erfüllt jedes  $x \in S$  die Ungleichung  $1 < x \leq 5$  und somit ist 1 natürlich eine untere Schranke von  $S$ . Wir wollen zeigen, dass 1 die grösste untere Schranke von  $S$  ist, insbesondere bedeutet dies das Wort "offensichtlich" möglichst zu vermeiden.

Wir nehmen also an, dass 1 nicht die grösste untere Schranke von  $S$  ist, dann existiert ein  $\epsilon > 0$  sodass  $1 + \epsilon$  eine untere Schranke von  $S$  ist. Um ein Widerspruch zu erhalten finden wir ein Element  $x \in S$ , sodass  $1 < x < 1 + \epsilon$ , was zeigt, dass  $1 + \epsilon$  keine untere Schranke von  $S$  sein kann.

Wir wählen  $x = 1 + \frac{\epsilon}{2}$ , dann gilt offensichtlich:

$$1 < x < 1 + \epsilon \leq 5.$$

da per Annahme  $1 + \epsilon$  eine untere Schranke von  $S$  war. Also ist  $1 + \epsilon$  keine untere Schranke von  $S$  und somit haben wir gezeigt, dass 1 die grösste untere Schranke von  $S$  ist.

## 2 Vollständige Induktion

### Aufgabe 5.

i.) Beweisen Sie die Bernoulli-Ungleichung:

$$\forall x > -1, \forall n \in \mathbb{N} : (1+x)^n \geq 1+nx.$$

mittels Induktion.

ii.) Seien  $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$  und  $x_1, \dots, x_n \geq 0$ . Zeigen Sie:

$$\prod_{i=1}^n (1+x_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^n x_i.$$

#### Solution:

i.) Sei  $x > -1$ . Zuerst zeigen wir den Fall  $n = 0$ :

$$(1+x)^0 = 1 = 1 + 0 \cdot x.$$

Sei  $n \in \mathbb{N}$  beliebig, aber fix, sodass  $(1+x)^n \geq 1+nx$  (IA).

Dann berechnen wir

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \stackrel{\text{IA}, x > -1}{\geq} (1+x)(1+nx) = 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x.$$

ii.) Zuerst zeigen wir den Fall  $n = 2$ . Seien  $x_1, x_2 \geq 0$ , dann

$$\prod_{i=1}^2 (1+x_i) = 1 + (x_1 + x_2) + x_1 \cdot x_2 \stackrel{x_1, x_2 \geq 0}{\geq} 1 + (x_1 + x_2) = 1 + \sum_{i=1}^2 x_i.$$

Sei  $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$  beliebig, aber fix, sodass  $\prod_{i=1}^n (1+x_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^n x_i$  für alle  $x_1, \dots, x_n \geq 0$  (IA).

Dann berechnen wir für  $x_1, \dots, x_{n+1} \geq 0$ :

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^{n+1} (1+x_i) &= (1+x_{n+1}) \cdot \prod_{i=1}^n (1+x_i) \stackrel{\text{IA}}{\geq} (1+x_{n+1}) \left(1 + \sum_{i=1}^n x_i\right) \\ &= 1 + \sum_{i=1}^{n+1} x_i + x_{n+1} \cdot \sum_{i=1}^n x_i \stackrel{x_i \geq 0}{\geq} 1 + \sum_{i=1}^{n+1} x_i. \end{aligned}$$

### Aufgabe 6. Zeigen Sie, dass:

$$\frac{4^{2n} - 3^n}{13} \in \mathbb{N}.$$

für alle  $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ .

#### Solution:

Zuerst zeigen wir den Fall  $n = 1$ :

$$\frac{4^2 - 3^1}{13} = \frac{13}{13} = 1 \in \mathbb{N}.$$

Sei  $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$  beliebig, aber fix, sodass  $\frac{4^{2n}-3^n}{13} \in \mathbb{N}$ .

Dann berechnen wir:

$$\frac{4^{2(n+1)} - 3^{(n+1)}}{13} = \frac{4^2(4^{2n} - 3^n)}{13} + \frac{(4^2 - 3)3^n}{13} = 4^2 \underbrace{\frac{4^{2n} - 3^n}{13}}_{\in \mathbb{N} \text{ nach IA}} + 3^n \in \mathbb{N}.$$

### Aufgabe 7.

- i) Zeigen Sie, dass der kleinste, nicht triviale Teiler einer natürlichen Zahl  $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$  stets eine Primzahl ist. Hier ist keine vollständige Induktion notwendig, ein Beweis per Widerspruch genügt völlig.
- ii) Zeigen Sie, dass jede natürliche Zahl  $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$  als Produkt von Primzahlen in der kanonischen Form  $n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$ , wobei  $p_1 < p_2 < \cdots < p_k \in \mathbb{P}$  und  $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{N}_0$ , geschrieben werden kann. Diese Darstellung ist desweiteren eindeutig, dies muss jedoch nicht gezeigt werden.

### Solution:

- i) Zum Widerspruch sei  $d_0$  der kleinste, nicht triviale Teiler von  $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$  ohne dabei eine Primzahl zu sein. Da nun  $d_0$  keine Primzahl ist, existiert per Definition eine Zahl  $v$  wobei  $1 < v < d_0$  sodass  $v \mid d_0$ , per Transitivität gilt dann aber auch  $v \mid n$  da bereits  $d_0 \mid n$ . Dies ist ein Widerspruch zur Annahme, dass  $d_0$  der kleinste, nicht triviale Teiler von  $n$  war.
- ii) Für  $n = 2$  ist  $n$  eine Primzahl und die Aussage somit trivial Wahr. Für den Induktionsschritt nehmen wir an, dass wir für jede natürliche Zahl  $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$  die Darstellung  $n = p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k}$  wie in der Aufgabenstellung haben. Falls nun  $n+1$  eine Primzahl ist, so gibt es nichts zu zeigen, ist  $n+1$  jedoch keine Primzahl so muss gelten  $n+1 = mq$  wobei  $1 < m \leq q \leq n$ , aber für solche Zahlen haben wir per Induktionsannahme kanonische Darstellungen der Form  $m = p_1^{b_1} \cdots p_k^{b_k}$  und  $q = s_1^{c_1} \cdots s_l^{c_l}$  haben wobei  $p_1 < \cdots < p_k$  und  $s_1 < \cdots < s_l$  alle Primzahlen sind und die Exponenten natürliche Zahlen. Zusammenfassen der Primzahlen und Neuordnung/Neubeschriftung liefert dann die Aussage.

**Aufgabe 8** (★ Trig Heavy). Wir definieren die Chebyshev Polynome für alle  $x \in \mathbb{R}$  wie folgt:

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1. \\ P_1(x) &= x. \\ P_{n+1}(x) &= xP_n(x) - P_{n-1}(x), \text{ für } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass gilt:

$$P_n(2 \cos(\theta)) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}, \quad \theta \in (0, \pi).$$

### Solution:

Wir zeigen die beiden Fälle  $n = 0$  und  $n = 1$ , da wir in dem Induktionsschritt sowohl  $k = n$  und  $k = n - 1$  benötigen werden. Für  $n = 0$  haben wir die triviale Aussage:

$$1 = P_0(2 \cos \theta) = \frac{\sin \theta}{\sin \theta} = 1.$$

Für  $n = 1$  haben wir die Aussage:

$$2 \cos \theta = P_1(2 \cos \theta) = \frac{\sin 2\theta}{\sin \theta} = \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{\sin \theta} = 2 \cos \theta.$$

Nehmen wir nun an, dass die Aussage für  $n = k$  und  $n = k - 1$  für  $k > 0$  wahr ist, i.e. wir haben die beiden Gleichungen:

$$P_k(2 \cos \theta) = \frac{\sin((k+1)\theta)}{\sin \theta}, \text{ und } P_{k-1}(2 \cos \theta) = \frac{\sin(k\theta)}{\sin \theta}.$$

Per Definition von  $P_{k+1}$  haben wir nun:

$$\begin{aligned} P_{k+1}(2 \cos \theta) &= 2 \cos \theta P_k(2 \cos \theta) - P_{k-1}(2 \cos \theta) \\ &= 2 \cos \theta \frac{\sin((k+1)\theta)}{\sin \theta} - \frac{\sin(k\theta)}{\sin \theta}. \end{aligned}$$

Wir schreiben  $k\theta = (k+1)\theta - \theta$  und erhalten:

$$\begin{aligned} P_{k+1}(2 \cos \theta) &= \frac{2 \cos \theta \sin((k+1)\theta) - \sin((k+1)\theta - \theta)}{\sin \theta} \\ &= \frac{2 \cos \theta \sin((k+1)\theta) - \cos \theta \sin((k+1)\theta) + \cos((k+1)\theta) \sin \theta}{\sin \theta} \\ &= \frac{\cos \theta \sin((k+1)\theta) + \cos((k+1)\theta) \sin \theta}{\sin \theta} \\ &= \frac{\sin((k+2)\theta)}{\sin \theta}. \end{aligned}$$

**Aufgabe 9.** (★) Sei  $n \in \mathbb{N}$  und  $a_{jk} \in \mathbb{C}$  für  $j = 0, \dots, n+1$ ,  $k = 0, \dots, n$ . Zeigen Sie, dass:

$$\sum_{j=0}^{n+1} \sum_{k=0}^n a_{jk} = \sum_{0 \leq j \leq k \leq n} a_{jk} + \sum_{0 \leq k < j \leq n+1} a_{jk}.$$

**Solution:**

Sei zuerst  $n = 0$ . Dann erhalten wir einfach:

$$\sum_{j=0}^{n+1} \sum_{k=0}^n a_{jk} = a_{00} + a_{10} = \sum_{0 \leq j \leq k \leq n} a_{jk} + \sum_{0 \leq k < j \leq n+1} a_{jk}.$$

Nehmen wir nun an, dass die Formel für ein  $n \in \mathbb{N}$  gültig ist. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n+2} \sum_{k=0}^{n+1} a_{jk} &= \sum_{j=0}^{n+2} \left( \sum_{k=0}^n a_{jk} + a_{j,n+1} \right) \\ &= \sum_{j=0}^{n+1} \left( \sum_{k=0}^n a_{jk} + a_{j,n+1} \right) + \left( \sum_{k=0}^n a_{n+2,k} + a_{n+2,n+1} \right) \\ &= \sum_{j=0}^{n+1} \sum_{k=0}^n a_{jk} + \sum_{j=0}^{n+1} a_{j,n+1} + \sum_{k=0}^{n+1} a_{n+2,k} \\ &= \sum_{0 \leq j \leq k \leq n} a_{jk} + \sum_{0 \leq k < j \leq n+1} a_{jk} + \sum_{j=0}^{n+1} a_{j,n+1} + \sum_{k=0}^{n+1} a_{n+2,k} \\ &= \sum_{0 \leq j \leq k \leq n+1} a_{jk} + \sum_{0 \leq k < j \leq n+2} a_{jk}. \end{aligned}$$

womit der Induktionsschritt gezeigt wäre.

**Aufgabe 10.** Zeigen Sie die **Vorwärts-Rückwärts Induktion** (auch bekannt als Cauchy-Induktion): Es sei  $P(n)$  eine Aussage für  $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ . Falls  $P(2)$  wahr ist und

1. Aus  $P(k)$  lässt sich  $P(2k)$  folgern (Vorwärts Schritt).

2. Aus  $P(k+1)$  lässt sich  $P(k)$  folgern (Rückwärts Schritt).

Dann gilt die Aussage  $P(n)$  für alle  $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ .

**Solution:**

Da  $P(2) = P(2^1)$  wahr ist, folgt aus der Eigenschaft 1 (E1) für  $k = 2$ , dass  $P(2 \cdot 2) = P(2^2)$  wahr ist. Durch wiederholte Anwendung von (E1) erhalten wir, dass aus  $P(2^k)$  stets  $P(2^{k+1})$  folgt für  $k \in \mathbb{N}$ . Mit Hilfe der (standard) vollständigen Induktion erhalten wir dann die Aussage,

$$P(2^r) \text{ ist wahr für alle } r \in \mathbb{N}. \quad (*)$$

Wenden wir nur die Eigenschaft 2 (E2) auf  $(*)$  an, erhalten wir zuerst, dass  $P(2^r - 1)$  wahr ist für all  $r \in \mathbb{N}$ , und erneut durch sukzessive Anwendung von (E2) dass  $P(2^r - m)$  wahr ist, also auch  $P(2^r - (m+1))$  für alle  $r, m \in \mathbb{N}$  mit  $m < 2^r$ . Wir haben also

$$P(2^r - (m+1)) \text{ ist wahr für alle } r, m \in \mathbb{N} \text{ sodass } m < 2^r. \quad (**)$$

Es ist jedoch offensichtlich, dass für all  $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$   $r, m \in \mathbb{N}$  existieren, sodass  $n = 2^r - (m+1)$  mit  $m < 2^r$ . Also erhalten wir dank  $(**)$ , dass

$$P(n) \text{ ist wahr für alle } n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$$

was zu zeigen war.

**Aufgabe 11.**  $(*)$  Es seien  $0 \leq x_i \leq \pi$  für  $i = 1, \dots, n \in \mathbb{N}$ . Zeigen Sie folgende Ungleichung für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit Hilfe der Vorwärts-Rückwärts Induktion:

$$\sin x_1 + \sin x_2 + \dots + \sin x_n \leq n \sin \left( \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \right).$$

**Solution:**

Wir verwenden die Vorwärts-Rückwärts Induktion. Da wir die Aussage jedoch für alle  $n \in \mathbb{N}$  (inklusive  $n = 1$ ) zeigen wollen, müssen wir den Fall  $n = 1$  zusätzlich analysieren, dieser ist jedoch trivial.

• Für  $n = 2$  erhalten wir

$$\sin x_1 + \sin x_2 = 2 \sin \left( \frac{x_1 + x_2}{2} \right) \underbrace{\cos \left( \frac{x_1 - x_2}{2} \right)}_{\leq 1} \leq 2 \sin \left( \frac{x_1 + x_2}{2} \right)$$

womit die Aussage  $P(2)$  verifiziert wurde.

• Um den Vorwärts Schritt zu verifizieren nehmen wir an, dass wir für  $k \in \mathbb{N}$  folgende Ungleichung haben:

$$\sin x_1 + \dots + \sin x_k \leq k \sin \left( \frac{x_1 + \dots + x_k}{k} \right) \quad (*)$$

falls wir diese Aussagen mit  $P(k)$  bezeichnen, müssen wir zeigen, dass sich aus dieser  $P(2k)$  herleiten lässt, also dass gilt:

$$\sin x_1 + \dots + \sin x_k + \sin x_{k+1} + \dots + \sin x_{2k} \leq 2k \sin \left( \frac{x_1 + \dots + x_{2k}}{2k} \right).$$

Wir verwenden (\*) für die  $k$  Zahlen  $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_{2k}$  und erhalten per Annahme

$$\sin x_{k+1} + \dots + \sin x_{2k} \leq k \sin \left( \frac{x_{k+1} + \dots + x_{2k}}{k} \right). \quad (**)$$

Kombinieren wir (\*) und (\*\*) erhalten wir

$$\sin x_1 + \dots + \sin x_{2k} \leq k \left[ \sin \left( \frac{x_1 + \dots + x_k}{k} \right) + \sin \left( \frac{x_{k+1} + \dots + x_{2k}}{k} \right) \right]. \quad (***)$$

Es gilt jedoch, dass

$$\frac{x_1 + \dots + x_k}{k}, \frac{x_{k+1} + \dots + x_{2k}}{k} \in [0, \pi]$$

also können wir auf den geklammerten Term in (\*\*\*) oben die Induktionsannahme für  $n = 2$  anwenden und erhalten

$$\begin{aligned} \sin \left( \frac{x_1 + \dots + x_k}{k} \right) + \sin \left( \frac{x_{k+1} + \dots + x_{2k}}{k} \right) &\stackrel{P(2)}{\leq} 2 \sin \left( \frac{\frac{x_1 + \dots + x_k}{k} + \frac{x_{k+1} + \dots + x_{2k}}{k}}{2} \right) \\ &= 2 \sin \left( \frac{x_1 + \dots + x_{2k}}{2k} \right). \end{aligned}$$

Aus obiger Überlegung und (\*\*\*) erhalten wir also schliesslich:

$$\sin x_1 + \dots + \sin x_{2k} \leq 2k \sin \left( \frac{x_1 + \dots + x_{2k}}{2k} \right),$$

also  $P(k) \rightsquigarrow P(2k)$ .

• Um den Rückwärts Schritt zu verifizieren nehmen wir an, dass wir für  $k \in \mathbb{N}$  folgende Ungleichung haben:

$$\sin x_1 + \dots + \sin x_{k+1} \leq (k+1) \sin \left( \frac{x_1 + \dots + x_{k+1}}{k+1} \right). \quad (\star)$$

Wir wollen  $P(k+1) \rightsquigarrow P(k)$  nachweisen. Wir verwenden  $(\star)$  für die spezielle Wahl

$$x_{k+1} := \frac{x_1 + \dots + x_k}{k} \in [0, \pi]$$

und erhalten:

$$\begin{aligned} \sin x_1 + \dots + \sin x_k + \sin \left( \frac{x_1 + \dots + x_k}{k} \right) &\leq (k+1) \sin \left( \frac{x_1 + \dots + x_k + \frac{x_1 + \dots + x_k}{k}}{k+1} \right) \\ &= (k+1) \sin \left( \frac{x_1 + \dots + x_k}{k} \right) \\ &= k \sin \left( \frac{x_1 + \dots + x_k}{k} \right) + \sin \left( \frac{x_1 + \dots + x_k}{k} \right), \end{aligned}$$

kürzen wir auf beiden Seiten der Ungleichung den letzten Term erhalten wir schliesslich

$$\sin x_1 + \dots + \sin x_k \leq k \sin \left( \frac{x_1 + \dots + x_k}{k} \right)$$

also  $P(k+1) \rightsquigarrow P(k)$ . Gemäss dem Prinzip der Cauchy-Induktion ist die Aussage somit für alle  $n \in \mathbb{N}$  vollständig bewiesen.



**Aufgabe 12.** (★) Zeigen Sie mit Hilfe der Cauchy-Induktion die folgende Ungleichung, bekannt als Cauchy's Ungleichung (oder auch arithmetisches Mittel dominiert das geometrische Mittel): Es seien  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ , dann gilt

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}.$$

**Solution:**

Wir folgen dem selben Rezept wie in der vorherigen Aufgabe.

•  $n = 1$  ist trivial.

•  $n = 2$  wir haben:

$$\begin{aligned} \left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 - a_1 a_2 &= \frac{1}{4}(a_1^2 + 2a_1 a_2 + a_2^2) - a_1 a_2 \\ &= \frac{1}{4}(a_1^2 - 2a_1 a_2 + a_2^2) = \left(\frac{a_1 - a_2}{2}\right)^2 \geq 0, \end{aligned}$$

oder äquivalent dazu

$$\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right) \geq \sqrt{a_1 a_2}.$$

•  $P(n) \rightsquigarrow P(2n)$  :

$$\begin{aligned} \frac{a_1 + \dots + a_n + a_{n+1} + \dots + a_{2n}}{2n} &= \frac{\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} + \frac{a_{n+1} + \dots + a_{2n}}{n}}{2} \\ &\stackrel{P(n)}{\geq} \frac{\sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n} + \sqrt[n]{a_{n+1} \cdot \dots \cdot a_{2n}}}{2} \\ &\stackrel{P(2)}{\geq} \sqrt{\sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n} \cdot \sqrt[n]{a_{n+1} \cdot \dots \cdot a_{2n}}} \\ &= \sqrt[2n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n \cdot a_{n+1} \cdot \dots \cdot a_{2n}}. \end{aligned}$$

•  $P(n+1) \rightsquigarrow P(n)$  : Wir nehmen  $P(n+1)$  an, d.h. es gilt

$$\frac{a_1 + \dots + a_n + a_{n+1}}{n+1} \geq \sqrt[n+1]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n \cdot a_{n+1}}. \quad (*)$$

Wir treffen in (\*) die spezielle Wahl

$$a_{n+1} = \frac{a_1 + \dots + a_n}{n},$$

und erhalten:

$$\begin{aligned} \frac{a_1 + \dots + a_n + \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}}{n+1} &= \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n+1]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n \cdot \left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n}\right)} \\ \Rightarrow \left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n}\right)^{n+1} &\geq a_1 \cdot \dots \cdot a_n \cdot \left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n}\right) \\ \Rightarrow \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} &\geq \sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n}. \end{aligned}$$

Gemäss dem Prinzip der Cauchy-Induktion gilt die Aussage somit für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

### 3 Folgen

**Aufgabe 13.** Seien  $(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$  und  $x \in \mathbb{R}$ .

- i.) Zeigen Sie, falls jede Teilfolge  $(x_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$  eine Teilfolge  $(x_{n_{i_j}})_{j \in \mathbb{N}}$  besitzt, die gegen  $x$  konvergiert, dann gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ .
- ii.) Finden Sie eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  so, dass für jede Teilfolge  $(x_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$  eine konvergente Teilfolge  $(x_{n_{i_j}})_{j \in \mathbb{N}}$  existiert, aber  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  nicht konvergiert.

**Solution:**

i.) Version 1

Seien  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $x \in \mathbb{R}$  wie in der Aufgabenstellung. Wir nehmen an, dass  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  nicht gegen  $x$  konvergiert, d.h.

$$\exists \epsilon > 0 \forall N \in \mathbb{N} \exists n \geq N : |x_n - x| \geq \epsilon.$$

Wir wählen ein  $\epsilon > 0$  und eine Teilfolge  $(x_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ , sodass für alle  $i \in \mathbb{N}$  gilt  $|x_{n_i} - x| \geq \epsilon$ . Dies ist ein Widerspruch dazu, dass eine Teilfolge  $(x_{n_{i_j}})_{j \in \mathbb{N}}$  existiert mit  $\lim_{j \rightarrow \infty} x_{n_{i_j}} = x$ .

Version 2

Wir wissen, es gibt Teilfolgen  $(x_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ ,  $(x_{m_i})_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ , sodass  $\lim_{i \rightarrow \infty} x_{n_i} = \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$  und  $\lim_{i \rightarrow \infty} x_{m_i} = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$ . Da jeweils eine Teilfolge von den obigen Reihen gegen  $x$  konvergiert und der Limes konvergenter Folgen gleich der Limes seiner Teilfolgen ist (Prop. 3.19), gilt  $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = x = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$ . Aus Satz 3.13 folgt  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ .

- ii.)  $x_n = (-1)^n$  konvergiert nicht. Sei  $(x_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$  eine Teilfolge von  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , dann ist  $A_1 := \{n_i \in \mathbb{N} : n_i \text{ ist ungerade}\}$  oder  $A_2 := \{n_i \in \mathbb{N} : n_i \text{ ist gerade}\}$  abzählbar unendlich. Wähle  $i \in \{1, 2\}$  sodass  $A_i$  unendlich ist, dann ist  $(x_l)_{l \in A_i}$  eine konvergente Teilfolge von  $(x_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$  (mit Grenzwert  $(-1)^i$ ).

**Aufgabe 14.** Sei  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$ ,  $z \in \mathbb{C}$ . Entscheiden Sie für jede Aussage, ob sie wahr oder falsch ist:

- i.)  $z_n \rightarrow z \iff \operatorname{Re}(z_n) \rightarrow \operatorname{Re}(z) \text{ und } \operatorname{Im}(z_n) \rightarrow \operatorname{Im}(z)$ .
- ii.)  $|z_n| \rightarrow |z| \implies z_n \rightarrow z$ .
- iii.)  $z_n \rightarrow z \implies |z_n| \rightarrow |z|$ .
- iv.)  $z_n \in \mathbb{R}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $z_n \rightarrow z \implies z \in \mathbb{R}$ .

**Solution:**

- i.) Wahr, siehe Seite 53.
- ii.) Falsch, Gegenbeispiel  $z_n = (-1)^n, z = i$ .
- iii.) Wahr, folgt aus der umgekehrten Dreiecksungleichung und dem Sandwichsatz:  

$$0 \leq ||z_n| - |z|| \leq |z_n - z| \rightarrow 0.$$
- iv.) Wahr, folgt aus der ersten Aussage.

**Aufgabe 15.** Seien  $m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ ,  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^m$  and  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Entscheiden Sie für jede der folgenden Aufgaben, ob sie wahr oder falsch sind (mit Beweis oder Gegenbeispiel):

- i.)  $(\|x_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert  $\implies (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert.

ii.)  $(x_n \cdot y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert  $\implies (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert.

iii.)  $(\lambda x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert  $\implies (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert.

iv.) Jede beschränkte Folge konvergiert.

**Solution:**

i.) Falsch, Gegenbeispiel  $x_n = (-1)^n$ .

ii.) Falsch, Gegenbeispiel  $x_n = n, y_n = \frac{1}{n}$ . Alternativ  $x_n = (-1)^n, y_n = 0$ .

iii.) Falsch, Gegenbeispiel  $\lambda = 0, x_n = (-1)^n$ .

iv.) Falsch, Gegenbeispiel  $x_n = (-1)^n$ .

**Aufgabe 16.** Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

i.)

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n} - n).$$

ii.)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{5}{n-3}\right)^{(n+\sqrt{n})/2}.$$

iii.)

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n} - 5n^3}{n^3 + n(n+1)(n+2)}.$$

**Solution:**

i.) Für  $n > 0$  haben wir:

$$\sqrt{n^2 + n} - n = \frac{(\sqrt{n^2 + n} - n)(\sqrt{n^2 + n} + n)}{\sqrt{n^2 + n} + n} = \frac{n}{\sqrt{n^2 + n} + n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1}.$$

Damit haben wir:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n} - n) = \frac{1}{2}.$$

Also insbesondere:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n} - n) = \frac{1}{2}.$$

ii.) Wir schreiben:

$$\left(1 - \frac{5}{n-3}\right)^{(n+\sqrt{n})/2} = \underbrace{\sqrt{\left(1 - \frac{5}{n-3}\right)^{n-3}}}_{\implies \sqrt{e^{-5}} = e^{-5/2}} \cdot \underbrace{\sqrt{\left(1 - \frac{5}{n-3}\right)^3}}_{\implies \sqrt{1^3} = 1} \cdot \sqrt{\left(1 - \frac{5}{n-3}\right)^{\sqrt{n}}}.$$

**Behauptung 1.**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{5}{n-3}\right)^{\sqrt{n}} = 1.$$

*Proof.*

$$\log \left( \left[ 1 - \frac{5}{n-3} \right]^{\sqrt{n}} \right) = \frac{\sqrt{n}}{n-3} \log \left( \left[ 1 - \frac{5}{n-3} \right]^{n-3} \right) \Rightarrow 0 \cdot \log(e^{-5}) = 0.$$

Damit erhalten wir:

$$\left( 1 - \frac{5}{n-3} \right)^{\sqrt{n}} = e^{\log \left( \left( 1 - \frac{5}{n-3} \right)^{\sqrt{n}} \right)} \Rightarrow e^0 = 1.$$

□

Wenn wir alles zusammensetzen, erhalten wir:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{5}{n-3} \right)^{(n+\sqrt{n})/2} = e^{-5/2} \cdot 1 \cdot \sqrt{1} = e^{-5/2}.$$

iii.) Zuerst zeigen wir:

**Behauptung 2.**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} - 5n^3}{n^3 + n(n+1)(n+2)} = -\frac{5}{2}.$$

*Proof.* Wir berechnen

$$\frac{\sqrt{n} - 5n^3}{n^3 + n(n+1)(n+2)} = \frac{\frac{\sqrt{n}}{n^3} - 5}{1 + 1(1 + \frac{1}{n})(1 + \frac{2}{n})} \rightarrow -\frac{5}{2}, \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

□

Der Faktor  $(-1)^n$  oszilliert zwischen  $+1$  und  $-1$ . Teilfolgen mit geraden Gliedern (bis auf endlich viele Glieder) liefern Häufungspunkt  $-5/2$ . Teilfolgen mit ungeraden Gliedern (bis auf endlich viele Glieder) liefern Häufungspunkt  $5/2$ . Alle anderen Teilfolgen (unendlich viele gerade und unendlich viele ungerade Glieder) können nicht konvergieren. Da der Limes Inferior der kleinste Häufungspunkt ist, folgt:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n} - 5n^3}{n^3 + n(n+1)(n+2)} = -\frac{5}{2}.$$

**Aufgabe 17.** Entscheiden Sie für jede Aussage, ob sie wahr oder falsch ist:

Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$  mit Häufungspunkt  $h \in \mathbb{R}$ .

i.)  $h$  ist der Grenzwert von  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

ii.)  $h$  ist der einzige Häufungspunkt in  $\mathbb{R} \Rightarrow a_n \rightarrow h$ .

iii.)  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert  $\Rightarrow a_n \rightarrow h$ .

iv.) Es existiert eine Teilfolge von  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , die gegen  $h$  konvergiert.

v.)  $\forall \epsilon > 0 \forall N \in \mathbb{N} \exists n > N : |a_n - h| < \epsilon$ .

**Solution:**

- i.) Falsch, Gegenbeispiel  $(-1)^n$  und  $h = 1$ .
- ii.) Falsch, Gegenbeispiel  $a_{2n} = 0$ ,  $a_{2n+1} = n$  und  $h = 0$ .
- iii.) Wahr, Kor. 3.17.
- iv.) Wahr, Prop. 3.20.
- v.) Wahr, das ist die Definition eines Häufungspunktes.

**Aufgabe 18. (★)**

i.) Berechnen Sie alle Häufungspunkte der Folge:

$$a_n = \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) \left(1 + \frac{3}{n}\right)^{n+1}.$$

ii.) Seien  $a_i > 0$  für alle  $i = 1, \dots, p$ . Zeigen Sie, dass:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1^n + \dots + a_p^n)^{1/n} = \max_{i=1, \dots, p} a_i.$$

**Solution:**

i.) Zuerst beobachten wir:

$$\left(1 + \frac{3}{n}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n \left(1 + \frac{3}{n}\right) \longrightarrow e^3 \cdot 1 = e^3, \quad \text{für } n \longrightarrow \infty.$$

Für  $k \in \mathbb{N}$  und  $j \in \{1, 3\}$  gilt:

$$\sin\left(\frac{2k\pi}{2}\right) = 0 \text{ und } \sin\left(\frac{(4k+j)\pi}{2}\right) = \begin{cases} 1, & \text{für } j = 1 \\ -1, & \text{für } j = 3 \end{cases}.$$

Damit sind  $0$ ,  $-e^3$  und  $e^3$  die Häufungspunkte von  $\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) \left(1 + \frac{3}{n}\right)^{n+1}$ .

ii.) Wir berechnen:

$$\begin{aligned} \max_{i \in \{1, \dots, p\}} a_i &= \left( \max_{i \in \{1, \dots, p\}} a_i^n \right)^{1/n} \leq (a_1^n + \dots + a_p^n)^{1/n} \leq \left( p \cdot \max_{i \in \{1, \dots, p\}} a_i^n \right)^{1/n} \\ &= p^{1/n} \max_{i \in \{1, \dots, p\}} a_i \longrightarrow \max_{i \in \{1, \dots, p\}} a_i, \quad \text{für } n \longrightarrow \infty. \end{aligned}$$

Aus dem Sandwichsatz (Prop. 3.8) folgt  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1^n + \dots + a_p^n)^{1/n} = \max_{i=1, \dots, p} a_i$ .

**Aufgabe 19. (★)** Sei eine reelle Folge  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  rekursiv definiert durch:

$$a_0 = 1, \quad a_{k+1} = \sqrt{|a_k|} + \frac{15}{4} \text{ für } k \in \mathbb{N}.$$

- i.) Zeigen Sie, dass  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  konvergiert.
- ii.) Berechnen Sie den Grenzwert von  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ .

**Solution:**

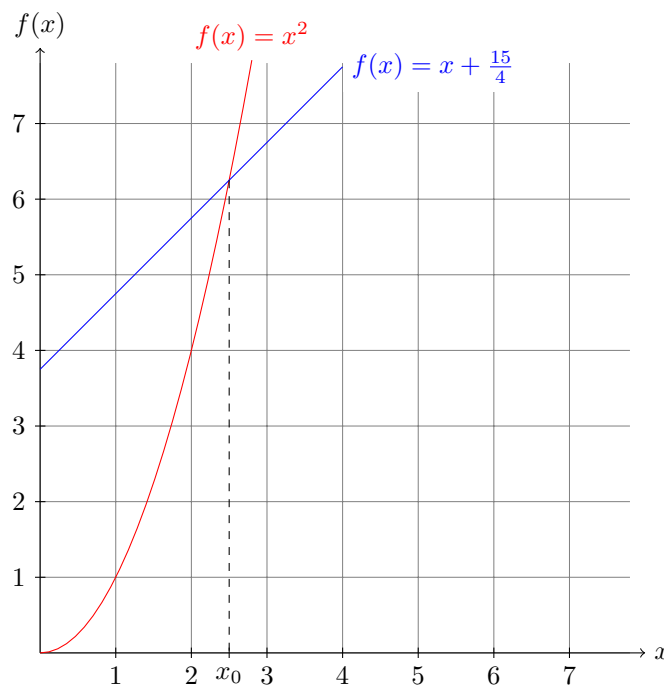
- i.) Die Idee ist, dass wir zeigen, dass  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  monoton steigend und beschränkt ist (Prop. 3.11 erledigt den Rest). Zuerst beobachten wir, dass  $a_0 = 1 > 0$  und für  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  gilt  $a_n \geq \frac{15}{4} > 0$ . Damit gilt für alle  $n \in \mathbb{N}$ :  $a_n > 0$ . Wir wollen nun, die Monotonie zeigen, d.h. wir versuchen zu zeigen, dass:

$$1 \leq \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{1}{\sqrt{a_k}} + \frac{15}{4} \cdot \frac{1}{a_k} \stackrel{a_k > 0}{\iff} a_k \leq \sqrt{a_k} + \frac{15}{4}. \quad (1)$$

Wir versuchen nun zu erraten, welche Art von Abschätzung wir zeigen müssen. Da  $a_k > 0$  können wir (für ein beliebiges, aber festes  $k$ ) schreiben  $a_k = x^2$  für ein  $x > 0$ . Dann gilt:

$$(1) \iff x + \frac{15}{4} \geq x^2.$$

Geometrisch sieht dies so aus:



Also gilt (1) solange  $x \leq x_0$ . Für  $x_0$  gilt  $x_0^2 = x_0 + \frac{15}{4}$ . Wir müssen also  $x_0^2 - x_0 - \frac{15}{4} = 0$  lösen. Mittels der Lösungsformel für quadratische Gleichungen erhalten wir :

$$x_0 = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(-\frac{15}{4})}}{2} = \frac{1 \pm 4}{2}.$$

Da  $x_0 > 0$  folgt  $x_0 = \frac{5}{2}$ .

D.h. für  $a_k \leq x_0^2 = \frac{25}{4}$  ist (1) erfüllt, die Folge also monoton wachsend. Wir zeigen nun die

**Behauptung 3.**

$$\forall k \in \mathbb{N} : a_k \leq \frac{25}{4}.$$

*Proof.* Induktion über  $k$ . Der Induktionsanfang  $k = 0$  ist einfach  $a_0 = 1 < \frac{25}{4}$ . Wir nehmen nun an, dass für ein beliebiges, aber festes  $k \in \mathbb{N}$  gilt  $a_k \leq \frac{25}{4}$ . Dann berechnen wir:

$$a_{k+1} = \sqrt{a_k} + \frac{15}{4} \leq \sqrt{\frac{25}{4}} + \frac{15}{4} = \frac{5}{2} + \frac{15}{4} = \frac{25}{4}.$$

Damit haben wir gezeigt, dass (1) immer erfüllt ist, d.h.  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  ist monoton wachsend. Weiter haben wir gezeigt, dass  $0 < a_k \leq 25/4$ . Also ist  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  monoton und beschränkt, also konvergent.  $\square$

ii.) Wir haben in i.) gezeigt, dass  $a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \geq 0$ . Es gilt:

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n} + \frac{15}{4} \stackrel{\text{stetig}}{=} \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n} + \frac{15}{4} = \sqrt{a} + \frac{15}{4}.$$

Wir setzen  $x = \sqrt{a}$ , dann gilt

$$x^2 = x + \frac{15}{4} \implies x^2 - x - \frac{15}{4} = 0 \stackrel{x=\sqrt{a} \geq 0}{\implies} x = \frac{1 + \sqrt{1 - 4 \cdot (-\frac{15}{4})}}{2} = \frac{5}{2}.$$

Damit gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a = x^2 = \frac{25}{4}$ .

**Aufgabe 20.** (★) Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = \infty.$$

**Solution:**

Per Definition ist die Exponential gegeben als

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Es gilt dementsprechend für alle  $x \in \mathbb{R}$ , dass

$$e^x \geq \frac{x^n}{n!},$$

insbesondere also für  $x = n \in \mathbb{N}$  auch das

$$e^n \geq \frac{n^n}{n!} \implies n! \geq \left(\frac{n}{e}\right)^n \implies \sqrt[n]{n!} \geq \frac{n}{e} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty.$$

**Aufgabe 21.** (★)

i.) Berechnen Sie den folgenden Grenzwert:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log \left( \left( \frac{n}{n+1} \right)^n \right).$$

ii.) Berechnen Sie alle Häufungspunkte der komplexen Folge:

$$z_n = (n^4 - n^2 + 2)^{1/n} \sin \left( \frac{\pi n}{2} \right) + i \frac{n+e}{2n+1} (-1)^n.$$

iii.) Zeigen Sie:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ (n+1) \cos \left( \frac{1}{n+1} \right) - n \cos \left( \frac{1}{n} \right) \right] = 1.$$

**Solution:**

i.) Wir berechnen:

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} \rightarrow e^{-1} \cdot \frac{1}{1} = e^{-1}, \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Aus der Stetigkeit des Logarithmus folgt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log \left( \left( \frac{n}{n+1} \right)^n \right) = \log \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)^n \right) = \log(e^{-1}) = -1.$$

ii.) Wir berechnen:

$$(n^4 - n^2 + 2)^{1/n} = (n^{1/n})^4 \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^4}\right)^{1/n} \rightarrow 1^4 \cdot 1 = 1, \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

wobei wir verwendet haben, dass

$$\left(1 - \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^4}\right)^{1/n} = \exp \left( \frac{1}{n} \log \left[ 1 - \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^4} \right] \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \exp(0) = 1.$$

Desweiteren

$$\frac{n+e}{2n+1} = \frac{n}{2n+1} + \frac{e}{2n+1} = \frac{1}{2 + \frac{1}{n}} + \frac{e}{2n+1} \rightarrow \frac{1}{2}, \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Wir erinnern uns daran, dass gilt:

$$\sin \left( \frac{\pi n}{2} \right) = \begin{cases} 0, & \text{für } n = 2k, \ k \in \mathbb{N} \\ 1, & \text{für } n = 4k+1, \ k \in \mathbb{N} \\ -1, & \text{für } n = 4k+3, \ k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Daraus folgt:

$$z_{2k} \rightarrow \frac{i}{2}, \quad \text{für } k \rightarrow \infty,$$

$$z_{4k+1} \rightarrow 1 - \frac{i}{2}, \quad \text{für } k \rightarrow \infty,$$

$$z_{4k+3} \rightarrow -1 - \frac{i}{2}, \quad \text{für } k \rightarrow \infty,$$

Da diese drei Teilfolgen die ganze Folge überdecken, kann es keine anderen Häufungspunkte geben. Damit sind die Häufungspunkte von  $((n^4 - n^2 + 2)^{1/n} \sin \left( \frac{\pi n}{2} \right) + i \frac{n+e}{2n+1} (-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$  gerade die Elemente von  $\{\frac{i}{2}, 1 - \frac{i}{2}, -1 - \frac{i}{2}\}$ .

iii.) Wir berechnen:

$$(n+1) \cos \left( \frac{1}{n+1} \right) - n \cos \left( \frac{1}{n} \right) = \cos \left( \frac{1}{n+1} \right) + n \left( \cos \left( \frac{1}{n+1} \right) - \cos \left( \frac{1}{n} \right) \right).$$

Wir kümmern uns zuerst um den zweiten Term. Der Mittelwertsatz (Satz 8.9) sagt uns, dass ein  $\xi \in (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})$  existiert, sodass:

$$\cos \left( \frac{1}{n} \right) - \cos \left( \frac{1}{n+1} \right) = -\sin(\xi) \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = -\sin(\xi) \left( \frac{1}{n \cdot (n+1)} \right).$$



Also gilt:

$$0 \leq \left| n \left( \cos \left( \frac{1}{n+1} \right) - \cos \left( \frac{1}{n} \right) \right) \right| = \left| -\sin(\xi) \cdot \frac{1}{n+1} \right| \leq \frac{1}{n+1} \rightarrow 0, \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ (n+1) \cos \left( \frac{1}{n+1} \right) - n \cos \left( \frac{1}{n} \right) \right] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \cos \left( \frac{1}{n+1} \right) + \lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \cos \left( \frac{1}{n+1} \right) - \cos \left( \frac{1}{n} \right) \right) \\ &= \cos(0) + 0 = 1. \end{aligned}$$

### Aufgabe 22 (★).

- i) Es sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine reelle Folge derart, dass für ihre Inkremente gilt  $|a_{n+1} - a_n| \leq 2^{-n}$ . Zeigen Sie, dass  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy Folge ist. Bedeutet dies, dass  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert? Warum?
- ii) Es sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine reelle Folge, welche rekursiv definiert ist mittels:

$$a_{n+2} = \frac{a_n + a_{n+1}}{2}, \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, dass dies eine Cauchy Folge ist. Verwenden Sie Teil i).

- iii) Berechnen Sie den Grenzwert der Folge aus Teil ii).

### Solution:

- i) Sei  $\epsilon > 0$  fest aber beliebig. Seien  $m \leq n$  beliebige natürliche Zahlen, wir setzen  $k = n - m \geq 0$  und betrachten den Ausdruck  $|a_m - a_{m+k}|$ , falls  $k = 1$  dann wissen wir bereits, dass  $|a_m - a_{m+k}| \leq 2^{-m}$ . Verwenden wir nun sukzessive die Dreiecksungleichung erhalten wir:

$$\begin{aligned} |a_m - a_{m+k}| &= |(a_m - a_{m+1}) + (a_{m+1} - a_{m+2}) + \dots + (a_{m+k-1} - a_{m+k})| \\ &\leq |a_m - a_{m+1}| + |a_{m+1} - a_{m+2}| + \dots + |a_{m+k-1} - a_{m+k}| \\ &\leq 2^{-m} + 2^{-(m+1)} + \dots + 2^{-(m+k-1)} < \sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{m-1}}. \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass falls  $m, n \geq n_0$  dann haben wir stets die Ungleichung:

$$|a_m - a_n| < \frac{1}{2^{m-1}} \leq \frac{1}{2^{n_0-1}}.$$

Wir wählen also  $n_0 \in \mathbb{N}$  derart, dass  $\frac{1}{2^{n_0-1}} \leq \epsilon$  oder äquivalent  $n_0 \geq \log_2 \frac{2}{\epsilon}$ . Wir wissen nun, dass  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy Folge in  $\mathbb{R}$  ist, da  $\mathbb{R}$  vollständig ist konvergiert diese Cauchy Folge auch.

- ii) Wir bemerken, dass per Definition gilt:

$$a_{n+2} - a_{n+1} = -\frac{a_{n+1} - a_n}{2} = \dots = (-1)^n \frac{a_2 - a_1}{2^n}.$$

Folglich gilt für alle  $n \in \mathbb{N}$  für die Inkremente:

$$|a_{n+2} - a_{n+1}| \leq |a_2 - a_1| 2^{-n}.$$

Die Behauptung folgt also dank Teil i).

iii) Es sei  $c := a_2 - a_1$ . Wir verwenden die Darstellung von  $a_n$  als Teleskopische Summe. Wir betrachten also:

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} \frac{c}{2^{k-1}} \\ &= a_1 + c \sum_{k=0}^{n-2} \left( \frac{-1}{2} \right)^k. \end{aligned}$$

Lassen wir nun  $n \rightarrow \infty$  streben und verwenden die Geometrische Reihe mit  $r = -1/2$  erhalten wir:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a_1 + c \frac{1}{1 - (-1/2)} = a_1 + c \frac{2}{3} = a_1 + \frac{2}{3}(a_2 - a_1) = \frac{a_1 + 2a_2}{3}.$$

## 4 Reihen

**Aufgabe 23.** Wir wollen den Cauchy'schen Verdichtungssatz (Kondensationssatz von Cauchy) beweisen. Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine nicht-negative Folge von monoton fallenden Termen. Zeige, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} < \infty.$$

**Solution:**

Es sei  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergent. Dann gilt, weil  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  nicht-negativ und monoton fallend ist:

$$\begin{aligned} a_1 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^K 2^n a_{2^n} &= a_1 + a_2 + 2a_4 + 4a_8 + \cdots + 2^{K-1} a_{2^K} \\ &\leq a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{2^{K-1}+1} + \cdots + a_{2^K-1} + a_{2^K} \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty. \end{aligned}$$

Um obige Ungleichung besser zu verstehen, bemerke dass  $2a_4 = a_4 + a_4 \leq a_3 + a_4$ , analog  $4a_8 = a_8 + a_8 + a_8 + a_8 \leq a_5 + a_6 + a_7 + a_8$  usw. Für  $K \rightarrow \infty$  zeigt dies, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} < \infty.$$

Nehme nun an, dass  $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$  konvergent ist. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N a_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_N \\ &\leq a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \cdots + (a_{2^N} + \cdots + a_{2^{N+1}-1}) \\ &\leq a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \cdots + 2^N a_{2^N} \\ &\leq a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} < \infty. \end{aligned}$$

Lassen wir nun  $N \rightarrow \infty$  so folgt die Behauptung.

**Aufgabe 24.** Es sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge monoton fallender, nicht-negativer reellen Zahlen. Zeige dass falls  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergiert, dann gilt  $na_n \rightarrow 0$  als  $n \rightarrow \infty$ . Hinweis: Verwende den Cauchy'schen Verdichtungssatz.

**Solution:**

Da  $\sum a_n$  konvergiert, gilt gemäss dem Cauchy'schen Verdichtungssatz auch, dass  $\sum 2^n a_{2^n}$  konvergiert. Also muss  $2^n a_{2^n}$  eine Nullfolge sein, das heisst

$$2^n a_{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Sei nun  $k \in \mathbb{N}$  sodass  $2^n < k < 2^{n+1}$ , da  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  monoton fallend ist folgt dann

$$2^n a_{2^{n+1}} \leq ka_k \leq 2^{n+1} a_{2^n}.$$

Für  $k \rightarrow \infty$  gilt automatisch  $2^n, 2^{n+1} \rightarrow \infty$  und die Aussage folgt dank dem Sandwich-Lemma.

**Aufgabe 25.** Verwenden Sie den Cauchy'schen Verdichtungssatz (Kondensationssatz) um zu zeigen, dass die nachfolgenden Reihen divergieren respektive konvergieren:

i)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

ii)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

iii)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \text{ wobei } s > 1.$$

**Solution:**

Dank dem Cauchy'schen Kondensationssatz wissen wir, dass für eine nicht-negative, nicht-wachsende Folge  $f(n)$  von reellen Zahlen gilt  $\sum f(n) < \infty \iff \sum 2^n f(2^n) < \infty$  also erhalten wir:

i)

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty.$$

da  $a_n = 1$  keine Nullfolge ist.

ii)

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{(2^n)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \infty.$$

da geometrische Reihe mit  $r = \frac{1}{2} < 1$ .

iii) Wir erhalten durch den Cauchy'schen Kondensationssatz die Reihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{(2^n)^s} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^{ns}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2^{s-1}} \right)^n < \infty.$$

Da  $s > 1$  und wir erneut eine geometrische Reihe erhalten mit  $0 \leq r = 2^{1-s} < 1$ .

**Aufgabe 26.**

i) Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  monoton wachsend,  $a_n > 0$ . Zeige, die Reihe

$$\sum_n \left( \frac{a_{n+1}}{a_n} - 1 \right)$$

konvergiert genau dann, wenn  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  beschränkt ist.

ii) Es sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine monoton fallende Nullfolge. Zeige dass gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1 + na_n} < \infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty.$$

Hinweis: Verwende Aufgabe 24.

**Solution:**

- i) Nehme zum Widerspruch an, dass  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  unbeschränkt ist. Da  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  monoton wächst, gilt für  $m > n$ :

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^m \left( \frac{a_{k+1}}{a_k} - 1 \right) &= \frac{a_{m+1} - a_m}{a_m} + \dots + \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n} \\ &\geq \frac{1}{a_m} [(a_{m+1} - a_m) + \dots + (a_{n+1} - a_n)] \\ &= \frac{1}{a_m} (a_{m+1} - a_n) \geq 1 - \frac{a_n}{a_m}. \end{aligned}$$

Da  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  unbeschränkt ist, gibt es zu jedem  $a_n$  ein  $m > n$  mit  $a_m > 2a_n$ , also mit  $1 - \frac{a_n}{a_m} > \frac{1}{2}$ . Also gibt es zu jedem  $n$  ein  $m > n$  mit der Eigenschaft

$$\sum_{k=n}^m \left( \frac{a_{k+1}}{a_k} - 1 \right) > \frac{1}{2}.$$

Mit dem Cauchy-Kriterium folgt, dass die Divergenz der Reihe

$$\sum_n \left( \frac{a_{n+1}}{a_n} - 1 \right)$$

was ein Widerspruch ist.

Sei nun andererseits  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  monoton wachsend und beschränkt. Dann ist  $\sum (a_{n+1} - a_n)$  eine konvergente Teleskop-Reihe. Wegen

$$0 \leq \frac{a_{n+1}}{a_n} - 1 = \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n} \leq \frac{1}{a_1} (a_{n+1} - a_n)$$

folgt die Konvergenz der Reihe  $\sum \left( \frac{a_{n+1}}{a_n} - 1 \right)$  aus dem Majoranten-Kriterium.

- ii) Es konvergiere  $\sum_n a_n$ . Wegen  $0 \leq \frac{a_n}{1+na_n} \leq a_n$  ( $a_n \geq 0$ ) folgt also die " $\Leftarrow$ " Implikation aus dem Majorantenkriterium.

Es gelte andererseits, dass  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+na_n}$  konvergiere. Sobald ein  $a_{n_0} = 0$  ist, so sind von dort an alle  $a_n = 0$  und die Behauptung ist trivial, es seien also alle  $a_n > 0$ . Da  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  monoton fallend ist, ist  $1/a_n$  monoton wachsend und wir schließen dass

$$\frac{a_n}{1+na_n} = \frac{1}{n+1/a_n}$$

monoton fallend ist. Dank Aufgabe 24 gilt also  $b_n := n \frac{a_n}{1+a_n} \rightarrow 0$  als  $n \rightarrow \infty$  und da

$$na_n = \frac{b_n}{1-b_n}$$

folgt auch  $na_n \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ . Also gilt  $0 < na_n < 1$  ab einem Index  $n_0$  und daher für alle  $n \geq n_0$

$$\frac{a_n}{1+na_n} \geq \frac{a_n}{2}$$

Nach dem Majorantenkriterium folgt nun, dass die Reihe  $\sum \frac{a_n}{2}$  und damit auch die Reihe  $\sum a_n$  konvergent ist.

**Aufgabe 27.** (★) Bestimmen Sie für die folgenden Reihen, ob sie konvergent und ob sie absolut konver-

gent sind:

i.)

$$\sum_{k \geq 0} \frac{2k}{3k^3 + 1}.$$

ii.)

$$\sum_{k \geq 2} \frac{\sin(k\pi/2)}{\log(k)}.$$

iii.)

$$\sum_{k \geq 1} \frac{2^k k!}{k^k}.$$

### Solution:

i.) Wir berechnen für  $k \geq 1$ :

$$\left| \frac{2k}{3k^3 + 1} \right| = \frac{2k}{3k^3 + 1} \leq \frac{2k}{3k^3} \leq \frac{1}{k^2}.$$

Wir wissen, dass  $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2}$  konvergiert (siehe Seite 43, Anwendung des Cauchy Verdichtungskriterium), folgt mit dem Majorantenkriterium (Prop. 4.8), dass  $\sum_{k \geq 0} \frac{2k}{3k^3 + 1}$  absolut konvergiert.

ii.) Es gilt für  $k \in \mathbb{N}$  gilt  $\sin(k\pi) = 0$  und  $\sin((2k+1)\pi/2) = (-1)^k$ . Damit gilt:

$$\sum_{k \geq 2} \frac{\sin(k\pi/2)}{\log(k)} = \sum_{k \geq 1} \frac{\sin((2k+1)\pi/2)}{\log(2k+1)} = \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^k}{\log(2k+1)}.$$

Da  $\frac{1}{\log(2k+1)} > 0$  und die Folge  $\frac{1}{\log(2k+1)}$  monoton fallend ist mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\log(2k+1)} = 0$ , folgt aus dem Leibnizkriterium (Prop. 4.15), dass  $\sum_{k \geq 2} \frac{\sin(k\pi/2)}{\log(k)}$  konvergiert.

Wir zeigen, dass  $\sum_{k \geq 2} \frac{\sin(k\pi/2)}{\log(k)}$  nicht absolut konvergiert. Dazu brauchen wir die folgende

#### **Behauptung 4.**

$$\forall j \in \mathbb{N} : 2j + 1 > \log(2j + 1).$$

*Proof.* Wir definieren  $h : \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  als  $h(x) = 2x + 1 - \log(2x + 1)$ .

Dann gilt  $h(0) = 1$  und  $h'(x) = 2 - \frac{2}{2x+1} > 0$ . □

Damit erhalten wir:

$$\sum_{k \geq 2} \left| \frac{\sin(k\pi/2)}{\log(k)} \right| = \sum_{k \geq 1} \left| \frac{(-1)^k}{\log(2k+1)} \right| = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{\log(2k+1)} > \sum_{k \geq 1} \frac{1}{2k+1}.$$

Da die harmonische Reihe divergiert, divergiert  $\sum_{k \geq 2} \left| \frac{\sin(k\pi/2)}{\log(k)} \right|$ , d.h.  $\sum_{k \geq 2} \frac{\sin(k\pi/2)}{\log(k)}$  konvergiert nicht absolut.

iii.) Sei  $a_n = \frac{2^k k!}{k^k}$ . Wir berechnen:

$$\begin{aligned} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= \frac{2^{k+1}(k+1)!}{(k+1)^{k+1}} \cdot \frac{k^k}{2^k k!} = 2(k+1) \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}} = 2 \left( \frac{k}{k+1} \right)^k = 2 \left( 1 - \frac{1}{k+1} \right)^k \\ &= 2 \left( 1 - \frac{1}{k+1} \right)^{k+1} \frac{1}{1 - \frac{1}{k+1}} \rightarrow 2e^{-1} = \frac{2}{e}, \quad \text{für } k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Aus dem Quotientenkriterium (Satz 4.12) folgt, dass  $\sum_{k \geq 1} \frac{2^k k!}{k^k}$  absolut konvergiert.

**Aufgabe 28.** (★) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

i.)

$$\sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+1}.$$

ii.)

$$\sum_{n \geq 0} \left( \frac{n+5}{3n-2} \right)^{3n}.$$

iii.)

$$\sum_{n \geq 0} \frac{\exp(3n \log(n))}{(n!)^2}.$$

**Solution:**

i.) Wir berechnen für  $n \in \mathbb{N}$ :

$$\frac{\sqrt{n+1}}{n+2} < \frac{\sqrt{n}}{n+1} \iff \frac{n+1}{(n+2)^2} < \frac{n}{(n+1)^2}$$

$$\iff n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = (n+1)^3 < (n+2)^2 n = n^3 + 4n^2 + 4n \iff 0 < n^2 + n - 1.$$

Also ist  $(\frac{\sqrt{n}}{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  monoton fallend. Damit können wir das Leibnizkriterium (Prop. 4.15) anwenden, und damit konvergiert  $\sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+1}$ .

Wir zeigen, dass  $\sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+1}$  nicht absolut konvergiert. Dazu berechnen wir für  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ :

$$\left| (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+1} \right| = \frac{\sqrt{n}}{n+1} \geq \frac{\sqrt{n}}{2n} = \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

Wir wissen (Anwendung des Verdichtungskriteriums, S. 43), dass  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$  divergiert, damit divergiert auch  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{2\sqrt{n}}$ . Und schliesslich divergiert deswegen  $\sum_{n \geq 0} \left| (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+1} \right|$ . Also ist  $\sum_{n \geq 0} \left| (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+1} \right|$  nicht absolut konvergent.

ii.) Wir berechnen:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \left( \frac{n+5}{3n-2} \right)^{3n} \right|^{1/n} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+5}{3n-2} \right)^3 = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1 + \frac{5}{n}}{3 - \frac{2}{n}} \right)^3 = \left( \frac{1}{3} \right)^3 = \frac{1}{27} < 1.$$

Aus dem Wurzelkriterium (Satz 4.11) folgt, dass  $\sum_{n \geq 0} \left( \frac{n+5}{3n-2} \right)^{3n}$  absolut konvergiert.

iii.) Zuerst bemerken wir, dass  $\frac{e^{3n \log(n)}}{(n!)^2} = \frac{n^{3n}}{(n!)^2}$ . Es gibt verschiedene Arten, um zu zeigen, dass die Reihe divergiert. Hier sind zwei Möglichkeiten:

Möglichkeit 1 : Nullfolgenkriterium

$$\frac{e^{3n \log(n)}}{(n!)^2} = \frac{n^{3n}}{(n!)^2} = n^n \cdot \left( \frac{n^n}{n!} \right)^2 = n^n \cdot \left( \frac{n^n}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} \right)^2 \geq n^n \cdot 1^2 \geq 1.$$

Damit ist  $(\frac{e^{3n \log(n)}}{(n!)^2})_{n \in \mathbb{N}}$  keine Nullfolge und mit dem Nullfolgenkriterium (Prop. 4.2) folgt, dass  $\sum_{n \geq 0} \frac{\exp(3n \log(n))}{(n!)^2}$  divergiert.

### Möglichkeit 2 : Quotientenkriterium

Wir berechnen:

$$\begin{aligned}\frac{\left(\frac{(n+1)^{3n+3}}{((n+1)!)^2}\right)}{\left(\frac{n^{3n}}{(n!)^2}\right)} &= \frac{(n+1)^{3n+3}}{n^{3n}} \cdot \frac{(n!)^2}{((n+1)!)^2} = \frac{(n+1)^{3n}}{n^{3n}} \cdot (n+1)^3 \cdot \frac{1}{(n+1)^2} \\ &= \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}_{\rightarrow e^3, \text{ für } n \rightarrow \infty}^3 \cdot \underbrace{(n+1)}_{\rightarrow \infty, \text{ für } n \rightarrow \infty} \rightarrow \infty.\end{aligned}$$

Aus dem Quotientenkriterium (Satz 4.12) folgt, dass  $\sum_{n \geq 0} \frac{\exp(3n \log(n))}{(n!)^2}$  nicht absolut konvergiert. Da alle Terme nichtnegativ sind (dann ist absolute Konvergenz und Konvergenz das gleiche), folgt, dass  $\sum_{n \geq 0} \frac{\exp(3n \log(n))}{(k!)^2}$  nicht konvergiert.

**Aufgabe 29.** (★) Berechnen Sie:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} \right).$$

**Solution:**

Wir berechnen:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k \cdot (k+1)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{1} + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k} - \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{n} \right) = 1.\end{aligned}$$

**Aufgabe 30.**

i) Existiert ein  $s > 0$  sodass die nachfolgende Reihe konvergiert?

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log^s(n)}.$$

ii) Für welche  $s \in \mathbb{R}$  ist die nachfolgende Reihe konvergent?

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^s(n)}.$$

**Solution:**

Wir verwenden das Cauchy Kondensationsverfahren:

i)

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log^s(n)} < \infty &\iff \sum_{n=2}^{\infty} 2^n \frac{1}{\log^s(2^n)} < \infty \\ &\iff \frac{1}{\log^s(2)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{n^s} < \infty.\end{aligned}$$



Jedoch konvergiert die letzte Reihe nicht, da  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n^s} = \infty$  keine Nullfolge ist für alle  $s > 0$  (da die exponential Funktion  $2^n = \exp(n \log(2))$  schneller wächst als jedes Polynom beliebigen Grades). Also existiert kein  $s > 0$  sodass die Reihe konvergiert.

ii)

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^s(n)} < \infty &\iff \sum_{n=2}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n \log^s(2^n)} < \infty \\ &\iff C \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^s} < \infty, \text{ wobei } C := \frac{1}{\log^s(2)}. \end{aligned}$$

Die letzte Reihe konvergiert genau dann wenn  $s > 1$ .

**Aufgabe 31.** Zeigen Sie, dass die nachfolgende Reihe konvergiert:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k^2 + 2k + 3}{6k^5 + 6}.$$

**Solution:**

Für  $n \in \mathbb{N}$  betrachten wir die Partialsumme:

$$\sum_{k=1}^n \frac{2k^2 + 2k + 3}{6k^5 + 6} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{k^5 + 1} + \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \frac{k}{k^5 + 1} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^5 + 1}.$$

Offensichtlich gilt, dass  $k^5 + 1 \geq k^5$  und somit  $\frac{1}{k^5 + 1} \leq \frac{1}{k^5}$ , wir erhalten also die Abschätzung:

$$\sum_{k=1}^n \frac{2k^2 + 2k + 3}{6k^5 + 6} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^4} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^5}.$$

Lassen wir nun  $n \rightarrow \infty$ , dann erkennen wir die konvergenten Reihen, wir schliessen dass die Reihe konvergiert.

Alternativ können wir auch das Vergleichskriterium verwenden, denn es gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 + 2n + 3}{6n^5 + 6} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}.$$

Wir berechnen hierfür:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2n^2 + 2n + 3}{6n^5 + 6}}{\frac{1}{n^3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3(2n^2 + 2n + 3)}{6n^5 + 6} = \frac{1}{3} \in (0, \infty).$$

Wobei wir verwendet haben, dass die dominanten Terme die der Ordnung  $n^5$  sind, somit verhält sich die Reihe vergleichbar mit der konvergenten Reihe  $\sum \frac{1}{n^3}$ .

**Aufgabe 32.** Zeigen Sie mit Hilfe des Integralkriteriums, dass die folgende Reihe konvergiert:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}.$$

**Solution:**

Wir verwenden das Integralkriterium, d.h. wir betrachten das Integral:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx = \tan^{-1}(x) \Big|_{x=0}^{x=\infty} = \frac{\pi}{2} < \infty.$$

Also konvergiert die Reihe, was zu zeigen war.

**Aufgabe 33.** *Bestimmen Sie, ob die nachfolgende Reihe konvergiert:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} n e^{-n^2}.$$

**Solution:**

Wir verwenden den Integraltest und erhalten:

$$\int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} e^{-x^2} \Big|_{x=0}^{x=\infty} = \frac{1}{2} < \infty.$$

und folglich konvergiert die Reihe.