Übungen PVK Analysis

MB & LB, Vorlage gemäss SeSc

January 2, 2018

Die Verweise auf Theoreme und Propositionen beziehen sich auf das Skript der Vorlesung, welches Sie *hier* finden können. Die Verweise auf Serien beziehen sich auf das HS 15. Es handelt sich bei dieser Übungssammlung um eine überarbeitete Version der von SeSc zur Verfügung gestellten Vorlage.

1 sup, inf, max, min von Mengen

Aufgabe 1. *Berechnen Sie das Supremum (kleinste obere Schranke) der Menge*

$$S := \left\{ \frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N}_0 \right\} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots \right\}$$

Was gilt für das Supremum der Menge $M := S \cup \{1\}$ *?*

Aufgabe 2. *Es sei* $A \subset \mathbb{R}$ *und* $A \neq \emptyset$, *desweiteren definieren wir* $-A := \{x \in \mathbb{R} : -x \in A\}$. *Entscheiden Sie für jede Aussage, ob sie wahr oder falsch ist.*

i.) A *unbeschränkt* $\Leftrightarrow \sup A = \infty$.

ii.) A *ist endlich* $\Rightarrow maxA = supA$.

iii.) $minA$ *existiert* $\Rightarrow minA = -max(-A)$.

iv.) $supA \notin A$.

Aufgabe 3. *Finden Sie das max, min, sup und inf der folgenden Menge und beweisen Sie ihre Aussage.*

$$S := \left\{ \frac{2n+1}{n+1} : n \in \mathbb{N}_{\geq 1} \right\} = \left\{ \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{9}{5}, \frac{11}{6}, \dots \right\}$$

Aufgabe 4. *Es sei* $S := (1, 5]$. *Beweisen Sie, dass* $\inf S = 1$.

2 Vollständige Induktion

Aufgabe 5. *i.) Beweisen Sie die Bernoulli-Ungleichung*

$$\forall x > -1 \; \forall n \in \mathbb{N} : (1+x)^n \geq 1 + nx$$

mittels Induktion.

ii.) Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ *und* $x_1, \ldots, x_n \geq 0$. *Zeigen Sie*

$$\prod_{i=1}^{n} (1 + x_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^{n} x_i$$

.

Aufgabe 6. *Zeigen Sie, dass*

$$\frac{4^{2n} - 3^n}{13} \in \mathbb{N}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.

Aufgabe 7.

i) Zeigen Sie, dass der kleinste, nicht triviale Teiler einer natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ *stets eine Primzahl ist. Hier ist keine vollständige Induktion notwendig, ein Beweis per Widerspruch genügt völlig.*

ii) Zeigen Sie, dass jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ *als Produkt von Primzahlen in der kanonischen Form* $n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$ *wobei* $p_1 < p_2 < \cdots < p_k \in \mathbb{P}$ *und* $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{N}_0$ *geschrieben werden kann. Diese Darstellung ist desweiteren eindeutig, dies muss jedoch nicht gezeigt werden.*

Aufgabe 8 (* Trig Heavy)**.** *Wir definieren die Chebyshev Polynome für alle* $x \in \mathbb{R}$ *wie folgt*

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 \\ P_1(x) &= x \\ P_{n+1}(x) &= xP_n(x) - P_{n-1}(x), \; \textit{für } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass gilt:

$$P_n(2\cos(\theta)) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}, \; \theta \in (0, \pi)$$

Aufgabe 9. *(*) Sei* $n \in \mathbb{N}$ *und* $a_{jk} \in \mathbb{C}$ *für* $j = 0, \ldots, n+1$, $k = 0, \ldots, n$. *Zeigen Sie, dass*

$$\sum_{j=0}^{n+1} \sum_{k=0}^{n} a_{jk} = \sum_{0 \leq j \leq k \leq n} a_{jk} + \sum_{0 \leq k < j \leq n+1} a_{jk}.$$

3 Folgen

Aufgabe 10. *Seien* $m \in \mathbb{N}$, $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^m$ *und* $x \in \mathbb{R}^m$.

i.) *Zeigen Sie, falls jede Teilfolge* $(x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ *eine Teilfolge* $(x_{n_{i_j}})_{j\in\mathbb{N}}$ *besitzt, die gegen* x *konvergiert, dann gilt* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

ii.) *Finden Sie eine Folge* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *so, dass für jede Teilfolge* $(x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ *eine konvergente Teilfolge* $(x_{n_{i_j}})_{j\in\mathbb{N}}$ *existiert, aber* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *nicht konvergiert.*

Aufgabe 11. *Sei* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C}$. *Entscheiden Sie für jede Aussage, ob sie wahr ist oder falsch.*

i.) $z_n \to z \Leftrightarrow Re(z_n) \to Re(z)$ *und* $Im(z_n) \to Im(z)$.

ii.) $|z_n| \to |z| \Rightarrow z_n \to z$.

iii.) $z_n \to z \Rightarrow |z_n| \to |z|$.

iv.) $z_n \in \mathbb{R}$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *und* $z_n \to z \Rightarrow z \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 12. *Seien* $m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}) \subseteq \mathbb{R}^m$ *and* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Entscheiden Sie für jede der folgenden Aufgaben, ob sie wahr oder falsch sind (mit Beweis oder Gegenbeispiel).*

i.) $(\|x_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert* $\Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert.*

ii.) $(x_n \cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert* $\Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert.*

iii.) $(\lambda x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert* $\Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert.*

iv.) *Jede beschränkte Folge konvergiert.*

Aufgabe 13. *Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:*

i.)

$$\limsup_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)$$

ii.)

$$\lim_{n\to\infty}\big(1-\frac{5}{n-3}\big)^{(n+\sqrt{n})/2}$$

iii.)

$$\liminf_{n\to\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}-5n^3}{n^3+n(n+1)(n+2)}$$

Aufgabe 14. *Entscheiden Sie für jede Aussage, ob sie wahr oder falsch ist.*
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ *mit Häufungspunkt* $h \in \mathbb{R}$.

i.) h *ist der Grenzwert von* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

ii.) h *ist der einzige Häufungspunkt in* $\mathbb{R} \Rightarrow a_n \to h$.

iii.) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert* $\Rightarrow a_n \to h$.

iv.) *Es existiert eine Teilfolge von* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *die gegen* h *konvergiert.*

v.) $\forall\, \epsilon > 0\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n > N : |a_n - h| < \epsilon$.

Aufgabe 15. ($\star$)

i.) *Berechnen Sie alle Häufungspunkte der Folge*

$$a_n = \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)\left(1+\frac{3}{n}\right)^{n+1}.$$

ii.) *Seien $a_i > 0$ für alle $i = 1, \dots, p$. Zeigen Sie, dass*

$$\lim_{n\to\infty} (a_1^n + \cdots + a_p^n)^{1/n} = \max_{i=1,\dots,p} a_i.$$

Aufgabe 16. ($\star$) *Sei eine reelle Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ rekursiv definiert durch*

$$a_0 = 1, \quad a_{k+1} = \sqrt{|a_k|} + \frac{15}{4} \text{ für } k \in \mathbb{N}.$$

i.) *Zeigen Sie, dass $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert.*

ii.) *Berechnen Sie den Grenzwert von $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$.*

Aufgabe 17. ($\star$)

i.) *Berechnen Sie den folgenden Grenzwert:*

$$\lim_{n\to\infty} \log\left(\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right).$$

ii.) *Berechnen Sie alle Häufungspunkte der komplexen Folge*

$$z_n = (n^4 - n^2 + 2)^{1/n} \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) + i\frac{n+e}{2n+1}(-1)^n.$$

iii.) *Zeigen Sie*

$$\lim_{n\to\infty}\left[(n+1)\cos\left(\frac{1}{n+1}\right) - n\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right] = 1.$$

Aufgabe 18 (*)**.**

i) *Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge derart, dass für ihre Inkremente gilt $|a_{n+1} - a_n| \leq 2^{-n}$. Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy Folge ist. Bedeutet dies, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert? Warum?*

ii) *Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge, welche rekursiv definiert ist mittels*

$$a_{n+2} = \frac{a_n + a_{n+1}}{2}, \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

Zeigen Sie, dass dies eine Cauchy Folge ist. Verwenden Sie Teil i).

iii) *Berechnen Sie den Grenzwert der Folge aus Teil ii).*

4 Reihen

Aufgabe 19. *Verwenden Sie den Cauchy'schen Verdichtungssatz (Kondensationssatz) um zu zeigen, dass die nachfolgenden Reihen divergieren respektive konvergieren*

i)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

ii)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

iii)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \text{ wobei } s > 1.$$

Aufgabe 20. ($\star$) *Bestimmen Sie für die folgenden Reihen, ob sie konvergent und ob sie absolut konvergent sind:*

i.)

$$\sum_{k \geq 0} \frac{2k}{3k^3 + 1}$$

ii.)

$$\sum_{k \geq 2} \frac{\sin(k\pi/2)}{\log(k)}$$

iii.)

$$\sum_{k \geq 1} \frac{2^k k!}{k^k}$$

Aufgabe 21. ($\star$) *Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:*

i.)

$$\sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+1}.$$

ii.)

$$\sum_{n \geq 0} \left(\frac{n+5}{3n-2} \right)^{3n}.$$

iii.)

$$\sum_{n \geq 0} \frac{\exp(3n \log(n))}{(k!)^2}.$$

Aufgabe 22. ($\star$) *Berechnen Sie*

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} \right).$$

Aufgabe 23.

i) Existiert ein $s > 0$ sodass die nachfolgende Reihe konvergiert?

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log(n)^s}$$

ii) Für welche $s \in \mathbb{R}$ ist die nachfolgende Reihe konvergent?

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^s(n)}$$

Aufgabe 24. *Zeigen Sie, dass die nachfolgende Reihe konvergiert*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k^2 + 2k + 3}{6k^5 + 6}$$

Aufgabe 25. *Zeigen Sie, dass die folgende Reihe konvergiert*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$$

Aufgabe 26. *Bestimmen Sie, ob die nachfolgende Reihe konvergiert*

$$\sum_{n=0}^{\infty} ne^{-n^2}$$

5 Stetigkeit und Grenzwerte von Funktionen

Aufgabe 27. *Zeigen Sie, mit Hilfe der Definition der Stetigkeit, dass die folgende Funktion in $x = 1$ stetig ist*

$$h : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{-1\} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \frac{x^2+x+1}{x+1} \end{cases}$$

Aufgabe 28. *Sind die 3 nachfolgenden Funktionen Lipschitz-stetig?*

i) $f : (0, \infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$

ii) $f : [0, 1) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{x}$

iii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sin x$

iv) Finden Sie eine Funktion, welche gleichmässig stetig, aber nicht Lipschitz-stetig ist.

v) Finden Sie eine Funktion, die Lipschitz-stetig, aber nicht diferenzierbar ist.

Aufgabe 29. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *stetig und injektiv, dann ist f streng monoton.*

Aufgabe 30. $(\star)$ *Sei $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ eine Funktionenfolge und $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$. Entscheiden Sie für jede der folgenden Aussagen, ob sie wahr oder falsch ist.*

i.) Alle f_n sind stetig und $f_n \to f$ punktweise $\Rightarrow$ f ist stetig.

ii.) Alle f_n sind stetig und $f_n \to f$ gleichmässig $\Rightarrow$ f ist stetig.

iii.) Alle f_n sind differenzierbar auf $(0, 1)$ und $f_n \to f$ gleichmässig $\Rightarrow$ f ist differenzierbar auf $(0, 1)$.

Aufgabe 31. *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt, dann besitzt f einen Fixpunkt.*

Aufgabe 32. $(\star)$ *Sei $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$ gleichmässig stetig. Zeigen Sie: Es existiert ein $c \in \mathbb{R}$, sodass für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $(0, 1]$ mit $x_n \to 0$ gilt:*

$$f(x_n) \to c \quad \text{für } n \to \infty.$$

Bemerkung (nicht Teil der Aufgabe): Das bedeutet, dass $\lim_{x\downarrow 0} f(x) = c$.

Aufgabe 33. *Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte*

i)

$$\lim_{x\to 0} \frac{sin(ax)}{x}$$

ii)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x x^5}{x^x}$$

iii)

$$\lim_{x\to\infty} \left(x^2 + 3 - \sqrt{x^4 + 6x^2}\right) x^2.$$

Aufgabe 34. *Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte (möglicherweise* $\pm\infty$*).*

i)

$$\lim_{x\to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

ii)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2-\cos x}{x+3}$$

iii)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2(2+\sin^2 x)}{x+100}$$

iv)

$$\lim_{x\to 0} x^2 e^{\sin^3\left(\frac{1}{x}\right)}$$

Aufgabe 35. *Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte*

i)

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\sqrt{x^2+1}\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$$

ii)

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\sqrt{x+4}-2}$$

Aufgabe 36. *Berechnen Sie den folgenden Grenzwert*

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\int_0^{\tan x} \log(2+t)dt$$

Aufgabe 37. *Berechnen Sie den folgenden Grenzwert. Tipp: Verwenden sie einen Fundamentallimes.*

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+2x}{x^2-3x+2}\right)^{\frac{x^2+1}{x-3}}$$

6 Potenzreihen

Aufgabe 38. *Sei* $f : \mathbb{R}_{>-1} \to \mathbb{R},\ f(x) = \log(1+x)$.

i.) *Bestimmen Sie die Taylorreihe von* f *um* $x_0 = 0$. *Bestimmen Sie den Konvergenzradius* ρ *dieser Reihe.*

ii.) *Sei* $R_2 f(x)$ *das Restglied des Taylorpolynoms zweiter Ordnung. Zeigen Sie:*

$$R_2 f(x) \geq 0, \quad \forall\ 0 \leq x < R.$$

iii.) *Zeigen Sie für alle* $n > 1$

$$1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} \left(1 + \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) \leq \frac{1}{2n^2}.$$

Aufgabe 39. *Es sei* $f_n : [1, \infty) \to \mathbb{R},\ f_n(x) = 2n\left((2x)^{1/n} - 1\right)$.

i.) *Zeigen Sie, dass* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *punktweise konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert* $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$.
Hinweise: Schreiben Sie $(2x)^{1/n} = \exp(1/n \cdot \log(2x))$.

ii.) *Zeigen Sie, dass die Konvergenz auf dem Intervall* $[1, 2]$ *gleichmässig ist.*

iii.) *Ist die Konvergenz gleichmässig auf* $[1, \infty)$*?*

Aufgabe 40. $(\star)$ *Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen in* $z \in \mathbb{C}$.

i.)

$$\sum_{m\geq 1} \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j}\right) z^m.$$

ii.)

$$\sum_{k\geq 0} 4k^5 3^k x^{k^2}.$$

iii.)

$$\sum_{n\geq 1} \left(5 - \frac{2}{n}\right)^n z^n.$$

iv.)

$$\sum_{n\geq 0} i^{n-1} n^n z^n.$$

v.)

$$\sum_{n\geq 0} \frac{2^n}{n!} z^n.$$

Aufgabe 41. $(\star)$ *Entscheiden Sie für die folgenden Aussagen, ob sie wahr oder falsch sind:*

i.) *Sei* $\rho > 0$ *der Konvergenzradius von* $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$. *Dann ist* f *auf* $\{z \in \mathbb{C}\ :\ |z| < \rho\}$ *stetig.*

ii.) *Sei* $\rho > 0$ *der Konvergenzradius von* $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$. *Dann*
$p_m(z) = \sum_{n=0}^{m} a_n z^n \to f(z)$ *gleichmässig auf* $\{z \in \mathbb{C}\ :\ |z| \leq r\}$ *für alle* $r < \rho$.

Aufgabe 42. *Berechnen Sie den folgenden Grenzwert mit Hilfe der Lagran'schen Fehlerabschätzung*

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x}\right).$$

7 Differentialrechnung

Aufgabe 43. ($\star$) *Sei* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *eine gerade (d.h.* $f(x) = f(-x)$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$*), differenzierbare Funktion. Zeigen Sie, dass* $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *eine ungerade Funktion ist, d.h.* $f'(-x) = -f'(x)$*.*

Aufgabe 44. *Beweisen Sie die verallgemeinerte Bernoulli-Ungleichung, diese besagt, dass für alle* $r \geq 1,\ x \geq 0$ *gilt:*

$$(1+x)^r \geq 1 + rx.$$

Hint: Betrachten Sie die Funktion $h(x) = (1+x)^r - (1+rx)$*.*

Aufgabe 45. ($\star$) *Sei* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definiert durch*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

i.) Zeigen Sie, dass f *auf ganz* $\mathbb{R}$ *differenzierbar ist und berechnen Sie* $f'(x)$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$*.*

ii.) Ist f' *an der Stelle* $x = 0$ *stetig?*

Aufgabe 46. *Sei* $\epsilon > 0$*. Wir definieren* $f_\epsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_\epsilon(x) = |x|^{1+\epsilon}$*. Zeigen Sie, dass* f_ϵ *auf ganz* $\mathbb{R}$ *differenzierbar ist.*

Aufgabe 47. *Bestimmen Sie alle Punkte, in denen*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

i.) stetig ist.

ii.) differenzierbar ist.

Aufgabe 48. ($\star$) *Berechnen Sie die Ableitungen* $f'(x)$ *der folgenden Funktionen:*

i.)

$$f(x) = \log\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right) \quad \textit{für } x \in (0,1).$$

ii.)

$$f(x) = \sqrt{\frac{a+bx}{a-bx}} \quad \textit{für } a, b > 0,\ \textit{für } x \in \left(\frac{-\alpha}{\beta}, \frac{\alpha}{\beta}\right).$$

iii.)

$$f(x) = x^{1/3}(1-x)^{2/3}(1+x)^{1/2} \quad \textit{für } x \in (0,1).$$

iv.)

$$f(x) = x^{\sqrt{x}} \quad \textit{für } x > 0.$$

v.)

$$f(x) = \log(\tan(x)^{-1/3}) \quad \textit{für } x \neq k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Aufgabe 49. ($\star$) *Seien* $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ *differenzierbare Funktionen.*

i.) Zeigen Sie, dass in allen Punkten $x \in (a,b)$ *mit* $f(x) \neq g(x)$ *die Funktion* $\max(f,g)$ *differenzierbar ist.*

ii.) Unter welcher Bedingung ist $\max(f,g)$ *differenzierbar in einem Punkt* $x \in (a,b)$ *mit* $f(x) = g(x)$*.*

Aufgabe 50. *Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, $f \in C^n([0,1],\mathbb{R})$ und $b \in \mathbb{R}$. Seien $0 \leq x_1 < \cdots < x_{n+1} \leq 1$ sodass $f(x_i) = b$ für alle $i \in \{1,\ldots,n+1\}$. Zeigen Sie, es existiert ein $\xi \in (x_1, x_{n+1})$ sodass $f^{(n)}(\xi) = 0$.*

Hint: Induktion.

Aufgabe 51. *Sei $K > 0$. Wir definieren*

$$f_n : [-K,K] \to \mathbb{R},\ f_n(x) := \begin{cases} \frac{n}{2}x^2 + \frac{1}{2n}, & x \in (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \\ |x|, & \textit{sonst.} \end{cases}$$

i.) Zeigen Sie, dass $f_n \in C^1([-K,K],\mathbb{R})$.

ii.) Berechnen Sie den Limes von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ in $(C^0([-K,K],\mathbb{R}), \|\cdot\|_{C^0([-K,K],\mathbb{R})})$.

iii.) Schliessen Sie, dass $(C^1([-K,K],\mathbb{R}), \|\cdot\|_{C^0([-K,K],\mathbb{R})})$ nicht vollständig ist.

Aufgabe 52. $(\star)$

i.) Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:

(a)

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{3x + 2}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{2}{3}\}.$$

(b)

$$g(x) = \log((x + \sin(x))^2), \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

(c)

$$h(x) = x^{\sin(\sqrt{x})}, \quad x > 0.$$

ii.) Finden Sie alle lokalen Extrema der Funktion $f(x) := (1+x)\sqrt{|x|}$, $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 53. *Zeigen Sie, dass die Exponentialabbildung auf $\mathbb{R}$ konvex ist und zeigen Sie $e^x \geq 1 + x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.*

Aufgabe 54. $(\star)$ *Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq y < x$ gilt:*

$$ny^{n-1} \leq \frac{x^n - y^n}{x - y} \leq nx^{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Aufgabe 55. $(\star)$ *Entscheiden Sie für jede der folgenden Aussagen, ob Sie wahr oder falsch ist.*

i.) Als Folge in $C^0([0,1],\mathbb{R})$ hat $f_n(x) = x^n$ keine konvergente Teilfolge.

ii.) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = x^2\cos(1/x)$ für $x \neq 0$ und $f(0) = 0$ ist in $x = 0$ differenzierbar

iii.) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex. Dann ist f auf $\mathbb{R}$ differenzierbar.

iv.) Ist $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ gleichmässig stetig und auf $(0,1)$ differenzierbar, dann ist f' beschränkt.

v.) Ist $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ differenzierbar und es gibt ein $x_0 \in (0,1)$ mit $f'(x_0) = 0$, so hat f in x_0 ein lokales Extremum.

Aufgabe 56. *Sei im folgenden $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a,b) differenzierbar.*

i) Verwenden Sie den Satz von Rolle um den Mittelwertsatz zu beweisen.

ii) Sei $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a,b)$, dann gilt $f(x)$ ist auf (a,b) konstant.

iii) Beweisen Sie die folgende Identität

$$\arctan(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$$

iv) Es gilt $f'(x) > 0$ für alle $x \in (a,b)$, dann ist f auf (a,b) monoton wachsend.

8 Integrationsrechnung

Aufgabe 57. *Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind, begründen Sie Ihre Antwort.*

i) *Es sei* $f : [a, b] \to [0, \infty)$. *Dann gilt* $\int_a^b f(x)dx = 0 \iff f \equiv 0$

ii) *Seien* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *sodass* $f \leq g$. *Dann gilt* $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx$.

iii) *Sei* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. *Dann impliziert* $\int_a^b f(x)dx > 0$ *dass* $f > 0$.

iv) *Sei* $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}_+$ *monoton fallend mit* $\int_0^\infty f(x)dx < \infty$. *Dann gilt* $\sum_{n=0}^{\infty} f(n) < \infty$.

Aufgabe 58. *Es sei* $t \in \mathbb{R}_1$. *Berechnen Sie die folgenden Integrale.*

i)

$$\int_0^t x^2(\ln(x))^2 dx$$

ii)

$$\int_1^3 \frac{2x+3}{x^2+3x+2} dx$$

iii)

$$\int_0^t \sin(3x)\cos(5x)dx$$

iv)

$$\int_{-2}^3 \frac{56x^7 \cos(\ln(x^8+6))}{x^8+6} dx$$

v)

$$\int_0^3 \frac{\cos(x)}{1+\cos(x)} dx$$

vi)

$$\int_{-1}^1 \cos(3x)\sqrt{x^4+3x^2+4}dx$$

vii)

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}} dx$$

viii)

$$\int_0^1 \ln(1+x^2)dx$$

ix)

$$\int_2^4 \frac{x^4+x^3+x^2+1}{x^2+x-2}$$