PVK Analysis I

Marco Bertenghi & Lukas Burch, Vorlage gemäss Severin Schraven

January 6, 2019

Die Verweise auf Theoreme und Propositionen beziehen sich auf das Skript der Vorlesung, welches Sie *hier* finden können. Die Verweise auf Serien beziehen sich auf das HS 15. Mit (*) markierte Aufgaben, sind im allgemeinen anspruchsvoller.

1 sup, inf, max, min von Mengen

Aufgabe 1. *Berechnen Sie das Supremum (kleinste obere Schranke) der Menge:*

$$S := \left\{ \frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots \right\}.$$

Was gilt für das Supremum der Menge $M := S \cup \{1\}$*?*

Aufgabe 2. *Es sei* $A \subset \mathbb{R}$ *und* $A \neq \emptyset$*, desweiteren definieren wir* $-A := \{x \in \mathbb{R} : -x \in A\}$*. Entscheiden Sie für jede Aussage, ob sie wahr oder falsch ist:*

i.) A *unbeschränkt* $\iff \sup A = \infty$.

ii.) A *ist endlich* $\Longrightarrow \max A = \sup A$.

iii.) $\min A$ *existiert* $\Longrightarrow \min A = -\max(-A)$.

iv.) $\sup A \notin A$.

Aufgabe 3. *Finden Sie das max, min, sup und inf der folgenden Menge und beweisen Sie ihre Aussage:*

$$S := \left\{ \frac{2n+1}{n+1} : n \in \mathbb{N}_{\geq 1} \right\} = \left\{ \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{9}{5}, \frac{11}{6}, \dots \right\}.$$

Aufgabe 4. *Es sei* $S := (1, 5]$*. Beweisen Sie, dass* $\inf S = 1$.

2 Vollständige Induktion

Aufgabe 5.

i.) *Beweisen Sie die Bernoulli-Ungleichung:*

$$\forall x > -1\ ,\ \forall n \in \mathbb{N} : (1+x)^n \geq 1 + nx.$$

mittels Induktion.

ii.) *Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und $x_1, \ldots, x_n \geq 0$. Zeigen Sie:*

$$\prod_{i=1}^{n} (1+x_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Aufgabe 6. *Zeigen Sie, dass:*

$$\frac{4^{2n} - 3^n}{13} \in \mathbb{N}.$$

für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.

Aufgabe 7.

i) *Zeigen Sie, dass der kleinste, nicht triviale Teiler einer natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ stets eine Primzahl ist. Hier ist keine vollständige Induktion notwendig, ein Beweis per Widerspruch genügt völlig.*

ii) *Zeigen Sie, dass jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ als Produkt von Primzahlen in der kanonischen Form $n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$, wobei $p_1 < p_2 < \cdots < p_k \in \mathbb{P}$ und $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{N}_0$, geschrieben werden kann. Diese Darstellung ist desweiteren eindeutig, dies muss jedoch nicht gezeigt werden.*

Aufgabe 8 ($\star$ Trig Heavy)**.** *Wir definieren die Chebyshev Polynome für alle $x \in \mathbb{R}$ wie folgt:*

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1. \\ P_1(x) &= x. \\ P_{n+1}(x) &= xP_n(x) - P_{n-1}(x),\ \text{für } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass gilt:

$$P_n(2\cos(\theta)) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)},\ \theta \in (0, \pi).$$

Aufgabe 9. ($\star$) *Sei $n \in \mathbb{N}$ und $a_{jk} \in \mathbb{C}$ für $j = 0, \ldots, n+1$, $k = 0, \ldots, n$. Zeigen Sie, dass:*

$$\sum_{j=0}^{n+1} \sum_{k=0}^{n} a_{jk} = \sum_{0 \leq j \leq k \leq n} a_{jk} + \sum_{0 \leq k < j \leq n+1} a_{jk}.$$

Aufgabe 10. *Zeigen Sie die* ***Vorwärts-Rückwärts Induktion*** *(auch bekannt als Cauchy-Induktion): Es sei $P(n)$ eine Aussage für $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Falls $P(2)$ wahr ist und*

1. *Aus $P(k)$ lässt sich $P(2k)$ folgern (Vorwärts Schritt).*
2. *Aus $P(k+1)$ lässt sich $P(k)$ folgern (Rückwärts Schritt).*

Dann gilt die Aussage $P(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$.

Aufgabe 11. *($\star$) Es seien $0 \leq x_i \leq \pi$ für $i = 1, \ldots, n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie folgende Ungleichung für alle $n \in \mathbb{N}$ mit Hilfe der Vorwärts-Rückwärts Induktion:*

$$\sin x_1 + \sin x_2 + \cdots + \sin x_n \leq n \sin\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right)$$

Aufgabe 12. ($\star$) *Zeigen Sie mit Hilfe der Cauchy-Induktion die folgende Ungleichung, bekannt als Cauchy's Ungleichung (oder auch arithmetisches Mittel dominiert das geometrische Mittel): Es seien $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, dann gilt*

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$$

3 Folgen

Aufgabe 13. *Seien* $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ *und* $x \in \mathbb{R}$.

i.) *Zeigen Sie, falls jede Teilfolge* $(x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ *eine Teilfolge* $(x_{n_{i_j}})_{j\in\mathbb{N}}$ *besitzt, die gegen* x *konvergiert, dann gilt* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

ii.) *Finden Sie eine Folge* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *so, dass für jede Teilfolge* $(x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ *eine konvergente Teilfolge* $(x_{n_{i_j}})_{j\in\mathbb{N}}$ *existiert, aber* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *nicht konvergiert.*

Aufgabe 14. *Sei* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C}$. *Entscheiden Sie für jede Aussage, ob sie wahr oder falsch ist:*

i.) $z_n \longrightarrow z \Longleftrightarrow Re(z_n) \longrightarrow Re(z)$ *und* $Im(z_n) \longrightarrow Im(z)$.

ii.) $|z_n| \longrightarrow |z| \Longrightarrow z_n \longrightarrow z$.

iii.) $z_n \longrightarrow z \Longrightarrow |z_n| \longrightarrow |z|$.

iv.) $z_n \in \mathbb{R}$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *und* $z_n \longrightarrow z \Longrightarrow z \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 15. *Seien* $m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^m$ *and* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Entscheiden Sie für jede der folgenden Aufgaben, ob sie wahr oder falsch sind (mit Beweis oder Gegenbeispiel):*

i.) $(\|x_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert* $\Longrightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert.*

ii.) $(x_n \cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert* $\Longrightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert.*

iii.) $(\lambda x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert* $\Longrightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert.*

iv.) *Jede beschränkte Folge konvergiert.*

Aufgabe 16. *Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:*

i.)

$$\limsup_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n} - n\right).$$

ii.)

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{5}{n-3}\right)^{(n+\sqrt{n})/2}.$$

iii.)

$$\liminf_{n\to\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n} - 5n^3}{n^3 + n(n+1)(n+2)}.$$

Aufgabe 17. *Entscheiden Sie für jede Aussage, ob sie wahr oder falsch ist:*
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ *mit Häufungspunkt* $h \in \mathbb{R}$.

i.) h *ist der Grenzwert von* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

ii.) h *ist der einzige Häufungspunkt in* $\mathbb{R} \Longrightarrow a_n \longrightarrow h$.

iii.) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert* $\Longrightarrow a_n \longrightarrow h$.

iv.) *Es existiert eine Teilfolge von* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *die gegen* h *konvergiert.*

v.) $\forall\, \epsilon > 0\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n > N : |a_n - h| < \epsilon$.

Aufgabe 18. $(\star)$

i.) Berechnen Sie alle Häufungspunkte der Folge:

$$a_n = \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)\left(1+\frac{3}{n}\right)^{n+1}.$$

ii.) Seien $a_i > 0$ für alle $i = 1, \dots, p$. Zeigen Sie, dass:

$$\lim_{n\to\infty} (a_1^n + \cdots + a_p^n)^{1/n} = \max_{i=1,\dots,p} a_i.$$

Aufgabe 19. ($\star$) *Sei eine reelle Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ rekursiv definiert durch:*

$$a_0 = 1, \quad a_{k+1} = \sqrt{|a_k|} + \frac{15}{4} \text{ für } k \in \mathbb{N}.$$

i.) Zeigen Sie, dass $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

ii.) Berechnen Sie den Grenzwert von $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Aufgabe 20. ($\star$) *Zeigen Sie, dass*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty.$$

Aufgabe 21. ($\star$)

i.) Berechnen Sie den folgenden Grenzwert:

$$\lim_{n\to\infty} \log\left(\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right).$$

ii.) Berechnen Sie alle Häufungspunkte der komplexen Folge:

$$z_n = (n^4 - n^2 + 2)^{1/n} \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) + i\frac{n+e}{2n+1}(-1)^n.$$

iii.) Zeigen Sie:

$$\lim_{n\to\infty}\left[(n+1)\cos\left(\frac{1}{n+1}\right) - n\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right] = 1.$$

Aufgabe 22 ($\star$).

i) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge derart, dass für ihre Inkremente gilt $|a_{n+1} - a_n| \le 2^{-n}$. Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy Folge ist. Bedeutet dies, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert? Warum?

ii) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge, welche rekursiv definiert ist mittels:

$$a_{n+2} = \frac{a_n + a_{n+1}}{2}, \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, dass dies eine Cauchy Folge ist. Verwenden Sie Teil i).

iii) Berechnen Sie den Grenzwert der Folge aus Teil ii).

4 Reihen

Aufgabe 23. *Verwenden Sie den Cauchy'schen Verdichtungssatz (Kondensationssatz) um zu zeigen, dass die nachfolgenden Reihen divergieren respektive konvergieren:*

i)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

ii)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

iii)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \text{ wobei } s > 1.$$

Aufgabe 24. ($\star$) *Bestimmen Sie für die folgenden Reihen, ob sie konvergent und ob sie absolut konvergent sind:*

i.)

$$\sum_{k\geq 0} \frac{2k}{3k^3+1}.$$

ii.)

$$\sum_{k\geq 2} \frac{\sin(k\pi/2)}{\log(k)}.$$

iii.)

$$\sum_{k\geq 1} \frac{2^k k!}{k^k}.$$

Aufgabe 25. ($\star$) *Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:*

i.)

$$\sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+1}.$$

ii.)

$$\sum_{n\geq 0} \left(\frac{n+5}{3n-2}\right)^{3n}.$$

iii.)

$$\sum_{n\geq 0} \frac{\exp(3n\log(n))}{(n!)^2}.$$

Aufgabe 26. ($\star$) *Berechnen Sie:*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{(n-1)\cdot n}\right).$$

Aufgabe 27.

i) Existiert ein $s > 0$ sodass die nachfolgende Reihe konvergiert?

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log(n)^s}.$$

ii) Für welche $s \in \mathbb{R}$ ist die nachfolgende Reihe konvergent?

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^s(n)}.$$

Aufgabe 28. *Zeigen Sie, dass die nachfolgende Reihe konvergiert:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k^2 + 2k + 3}{6k^5 + 6}.$$

Aufgabe 29. *Zeigen Sie mit Hilfe des Integralkriteriums, dass die folgende Reihe konvergiert:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}.$$

Aufgabe 30. *Bestimmen Sie, ob die nachfolgende Reihe konvergiert:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} n e^{-n^2}.$$

5 Stetigkeit und Grenzwerte von Funktionen

Aufgabe 31. *Zeigen Sie, mit Hilfe der Definition der Stetigkeit, dass die folgende Funktion in $x = 1$ stetig ist:*

$$h : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{-1\} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \frac{x^2+x+1}{x+1}. \end{cases}$$

Aufgabe 32. *Sind die 3 nachfolgenden Funktionen Lipschitz-stetig?*

i) $f : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \frac{1}{1+x^2}$.

ii) $f : [0, 1) \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \sqrt{x}$.

iii) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \sin x$.

iv) Finden Sie eine Funktion, welche gleichmässig stetig, aber nicht Lipschitz-stetig ist.

v) Finden Sie eine Funktion, die Lipschitz-stetig, aber nicht differenzierbar ist.

Aufgabe 33. *Beweisen Sie, falls $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und injektiv ist, dann ist f streng monoton.*

Aufgabe 34. ($\star$) *Sei $f_n : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktionenfolge und $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$. Entscheiden Sie für jede der folgenden Aussagen, ob sie wahr oder falsch ist:*

i.) Alle f_n sind stetig und $f_n \longrightarrow f$ punktweise $\Longrightarrow$ f ist stetig.

ii.) Alle f_n sind stetig und $f_n \longrightarrow f$ gleichmässig $\Longrightarrow$ f ist stetig.

iii.) Alle f_n sind differenzierbar auf $(0, 1)$ und $f_n \longrightarrow f$ gleichmässig $\Longrightarrow$ f ist differenzierbar auf $(0, 1)$.

Aufgabe 35. *Beweisen Sie, falls $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und beschränkt ist, dann besitzt f einen Fixpunkt.*

Aufgabe 36. ($\star$) *Sei $f : (0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ gleichmässig stetig. Zeigen Sie: Es existiert ein $c \in \mathbb{R}$, sodass für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $(0, 1]$ mit $x_n \longrightarrow 0$ gilt:*

$$f(x_n) \longrightarrow c \quad \text{für } n \longrightarrow \infty.$$

Bemerkung (nicht Teil der Aufgabe): Das bedeutet, dass $\lim_{x\downarrow 0} f(x) = c$.

Aufgabe 37. *Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:*

i)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{x}.$$

ii)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x x^5}{x^x}.$$

iii)

$$\lim_{x\to\infty} \left(x^2 + 3 - \sqrt{x^4 + 6x^2}\right)x^2.$$

Aufgabe 38. *Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte (möglicherweise $\pm\infty$):*

i)

$$\lim_{x\to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

ii)

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2 - \cos x}{x + 3}.$$

iii)

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2(2 + \sin^2 x)}{x + 100}.$$

iv)

$$\lim_{x \to 0} x^2 e^{\sin^3\left(\frac{1}{x}\right)}.$$

Aufgabe 39. *Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:*

i)

$$\lim_{x \to 0^+} \left(\sqrt{x^2 + 1}\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}.$$

ii)

$$\lim_{x \to 0^+} x^{\sqrt{x+4}-2}.$$

Aufgabe 40. *Berechnen Sie den folgenden Grenzwert:*

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \int_0^{\tan x} \log(2 + t) dt.$$

Aufgabe 41. *Berechnen Sie den folgenden Grenzwert: Tipp: Verwenden sie einen Fundamentallimes.*

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2 + 2x}{x^2 - 3x + 2}\right)^{\frac{x^2+1}{x-3}}.$$

6 Potenzreihen

Aufgabe 42. *Sei* $f : \mathbb{R}_{>-1} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = \log(1+x)$.

i.) *Bestimmen Sie die Taylorreihe von* f *um* $x_0 = 0$. *Bestimmen Sie den Konvergenzradius* ρ *dieser Reihe.*

ii.) *Sei* $R_2 f(x)$ *das Restglied des Taylorpolynoms zweiter Ordnung. Zeigen Sie:*

$$R_2 f(x) \geq 0, \quad \forall\ 0 \leq x < \rho.$$

iii.) *Zeigen Sie für alle* $n > 1$:

$$1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} \left(1 + \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) \leq \frac{1}{2n^2}.$$

Aufgabe 43. *Es sei* $f_n : [1,\infty) \longrightarrow \mathbb{R},\ f_n(x) = 2n\left((2x)^{1/n} - 1\right)$.

i.) *Zeigen Sie, dass* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *punktweise konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert* $f : [1,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$.
Hinweise: Schreiben Sie $(2x)^{1/n} = \exp(1/n \cdot \log(2x))$.

ii.) *Zeigen Sie, dass die Konvergenz auf dem Intervall* $[1,2]$ *gleichmässig ist.*

iii.) *Ist die Konvergenz gleichmässig auf* $[1,\infty)$*?*

Aufgabe 44. $(\star)$ *Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen in* $z \in \mathbb{C}$:

i.)

$$\sum_{m\geq 1} \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j}\right) z^m.$$

ii.)

$$\sum_{k\geq 0} 4k^5 3^k z^{k^2}.$$

iii.)

$$\sum_{n\geq 1} \left(5 - \frac{2}{n}\right)^n z^n.$$

iv.)

$$\sum_{n\geq 0} i^{n-1} n^n z^n.$$

v.)

$$\sum_{n\geq 0} \frac{2^n}{n!} z^n.$$

Aufgabe 45. $(\star)$ *Entscheiden Sie für die folgenden Aussagen, ob sie wahr oder falsch sind:*

i.) *Sei* $\rho > 0$ *der Konvergenzradius von* $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$. *Dann ist* f *auf* $\{z \in \mathbb{C} : |z| < \rho\}$ *stetig.*

ii.) *Sei* $\rho > 0$ *der Konvergenzradius von* $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$. *Dann* $p_m(z) = \sum_{n=0}^{m} a_n z^n \longrightarrow f(z)$ *gleichmässig auf* $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$ *für alle* $r < \rho$.

Aufgabe 46. *Berechnen Sie den folgenden Grenzwert mit Hilfe der Lagrange'schen Fehlerabschätzung:*

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x}\right).$$

7 Differentialrechnung

Aufgabe 47. ($\star$) *Sei $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ eine gerade (d.h. $f(x)=f(-x)$ für alle $x\in\mathbb{R}$), differenzierbare Funktion. Zeigen Sie, dass $f':\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ eine ungerade Funktion ist, d.h. $f'(-x)=-f'(x)$.*

Aufgabe 48. *Beweisen Sie die verallgemeinerte Bernoulli-Ungleichung, welche besagt, dass für alle $r\geq 1,\ x\geq 0$ gilt:*

$$(1+x)^r\geq 1+rx.$$

Hint: Betrachten Sie die Funktion $h(x)=(1+x)^r-(1+rx)$.

Aufgabe 49. ($\star$) *Sei $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definiert durch:*

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right), & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}.$$

i.) Zeigen Sie, dass f auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar ist und berechnen Sie $f'(x)$ für alle $x\in\mathbb{R}$.

ii.) Ist f' an der Stelle $x=0$ stetig?

Aufgabe 50. *Sei $\epsilon>0$. Wir definieren $f_\epsilon:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}, f_\epsilon(x)=|x|^{1+\epsilon}$. Zeigen Sie, dass f_ϵ auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar ist.*

Aufgabe 51. *Bestimmen Sie alle Punkte, in denen:*

$$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} x^2, & x\in\mathbb{Q}\\ 0, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$$

i.) stetig ist.

ii.) differenzierbar ist.

Aufgabe 52. ($\star$) *Berechnen Sie die Ableitungen $f'(x)$ der folgenden Funktionen:*

i.)

$$f(x)=\log\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right)\qquad \textit{für } x\in(0,1).$$

ii.)

$$f(x)=\sqrt{\frac{a+bx}{a-bx}}\qquad \textit{für } a,b>0,\ \textit{für } x\in\left(\frac{-\alpha}{\beta},\frac{\alpha}{\beta}\right).$$

iii.)

$$f(x)=x^{1/3}(1-x)^{2/3}(1+x)^{1/2}\qquad \textit{für } x\in(0,1).$$

iv.)

$$f(x)=x^{\sqrt{x}}\qquad \textit{für } x>0.$$

v.)

$$f(x)=\log(\tan(x)^{-1/3})\qquad \textit{für } x\neq k\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}.$$

Aufgabe 53. ($\star$) *Seien $f,g:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen.*

i.) Zeigen Sie, dass in allen Punkten $x\in(a,b)$ mit $f(x)\neq g(x)$ die Funktion $\max(f,g)$ differenzierbar ist.

ii.) Unter welcher Bedingung ist $\max(f,g)$ differenzierbar in einem Punkt $x\in(a,b)$ mit $f(x)=g(x)$.

Aufgabe 54. *Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, $f \in C^n([0,1],\mathbb{R})$ und $b \in \mathbb{R}$. Seien $0 \leq x_1 < \cdots < x_{n+1} \leq 1$ sodass $f(x_i) = b$ für alle $i \in \{1,\ldots,n+1\}$. Zeigen Sie, es existiert ein $\xi \in (x_1, x_{n+1})$ sodass $f^{(n)}(\xi) = 0$.*
Hint: Induktion.

Aufgabe 55. *Sei $K > 0$. Wir definieren:*

$$f_n : [-K,K] \longrightarrow \mathbb{R},\ f_n(x) := \begin{cases} \frac{n}{2}x^2 + \frac{1}{2n}, & x \in (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \\ |x|, & \textit{sonst.} \end{cases}$$

i.) Zeigen Sie, dass $f_n \in C^1([-K,K],\mathbb{R})$.

ii.) Berechnen Sie den Limes von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ in $(C^0([-K,K],\mathbb{R}), \|\cdot\|_{C^0([-K,K],\mathbb{R})})$.

iii.) Schliessen Sie, dass $(C^1([-K,K],\mathbb{R}), \|\cdot\|_{C^0([-K,K],\mathbb{R})})$ nicht vollständig ist.

Aufgabe 56. $(\star)$

i.) Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:

(a)

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{3x + 2}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{2}{3}\}.$$

(b)

$$g(x) = \log((x + \sin(x))^2), \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

(c)

$$h(x) = x^{\sin(\sqrt{x})}, \quad x > 0.$$

ii.) Finden Sie alle lokalen Extrema der Funktion $f(x) := (1+x)\sqrt{|x|}$, $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 57. *Zeigen Sie, dass die Exponentialabbildung auf $\mathbb{R}$ konvex ist und zeigen Sie $e^x \geq 1 + x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.*

Aufgabe 58. $(\star)$ *Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq y < x$ gilt:*

$$ny^{n-1} \leq \frac{x^n - y^n}{x - y} \leq nx^{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Aufgabe 59. $(\star)$ *Entscheiden Sie für jede der folgenden Aussagen, ob Sie wahr oder falsch ist:*

i.) Als Folge in $C^0([0,1],\mathbb{R})$ hat $f_n(x) = x^n$ keine gleichmässig konvergente Teilfolge.

ii.) Die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = x^2\cos(1/x)$ für $x \neq 0$ und $f(0) = 0$ ist in $x = 0$ differenzierbar.

iii.) Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ konvex. Dann ist f auf $\mathbb{R}$ differenzierbar.

iv.) Ist $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ gleichmässig stetig und auf $(0,1)$ differenzierbar, dann ist f' beschränkt.

v.) Ist $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und es gibt ein $x_0 \in (0,1)$ mit $f'(x_0) = 0$, so hat f in x_0 ein lokales Extremum.

Aufgabe 60. *Sei im folgenden $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und auf (a,b) differenzierbar.*

i) Verwenden Sie den Satz von Rolle um den Mittelwertsatz zu beweisen.

ii) Sei $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a,b)$, dann gilt: $f(x)$ ist auf (a,b) konstant.

iii) Beweisen Sie die folgende Identität

$$\arctan(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}.$$

iv) Es gilt $f'(x) > 0$ für alle $x \in (a,b)$, dann ist f auf (a,b) monoton wachsend.

8 Integrationsrechnung

Aufgabe 61. *Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind, begründen Sie Ihre Antwort:*

i) *Es sei* $f : [a,b] \longrightarrow [0,\infty)$. *Dann gilt:* $\int_a^b f(x)\, dx = 0 \iff f \equiv 0$.

ii) *Seien* $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *sodass* $f \leq g$. *Dann gilt:* $\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx$.

iii) *Sei* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. *Dann impliziert* $\int_a^b f(x)\, dx > 0$, *dass* $f > 0$.

iv) *Sei* $f : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *monoton fallend mit* $\int_0^\infty f(x)\, dx < \infty$. *Dann gilt:* $\sum_{n=0}^{\infty} f(n) < \infty$.

Aufgabe 62. *Es sei* $t \in \mathbb{R}_{>}1$. *Berechnen Sie die folgenden Integrale:*

i)

$$\int_1^t x^2(\ln(x))^2\, dx.$$

ii)

$$\int_1^3 \frac{2x+3}{x^2+3x+2}\, dx.$$

iii)

$$\int_0^t \sin(3x)\cos(5x)\, dx.$$

iv)

$$\int_{-2}^3 \frac{56x^7\cos(\ln(x^8+6))}{x^8+6}\, dx.$$

v)

$$\int_0^3 \frac{\cos(x)}{1+\cos(x)}\, dx.$$

vi)

$$\int_{-1}^1 \cos(3x)\sqrt{x^4+3x^2+4}\, dx.$$

vii)

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}}\, dx.$$

viii)

$$\int_0^1 \ln(1+x^2)\, dx.$$

ix)

$$\int_2^4 \frac{x^4+x^3+x^2+1}{x^2+x-2}\, dx.$$