PVK Analysis I

Marco Bertenghi & Lukas Burch, Vorlage gemäss Severin Schraven

January 8, 2020

Die Verweise auf Theoreme und Propositionen beziehen sich auf das Skript der Vorlesung, welches Sie *hier* finden können. Die Verweise auf Serien beziehen sich auf das HS 15. Mit (*) markierte Aufgaben, sind im allgemeinen anspruchsvoller.

1 sup, inf, max, min von Mengen

Aufgabe 1. *Berechnen Sie das Supremum (kleinste obere Schranke) der Menge:*

$$S := \left\{ \frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots \right\}.$$

Was gilt für das Supremum der Menge $M := S \cup \{1\}$*?*

Aufgabe 2. *Es sei* $A \subset \mathbb{R}$ *und* $A \neq \emptyset$*, desweiteren definieren wir* $-A := \{x \in \mathbb{R} : -x \in A\}$*. Entscheiden Sie für jede Aussage, ob sie wahr oder falsch ist:*

i.) A *unbeschränkt* $\iff \sup A = \infty$.

ii.) A *ist endlich* $\implies \max A = \sup A$.

iii.) $\min A$ *existiert* $\implies \min A = -\max(-A)$.

iv.) $\sup A \notin A$.

Aufgabe 3. *Finden Sie das max, min, sup und inf der folgenden Menge und beweisen Sie ihre Aussage:*

$$S := \left\{ \frac{2n+1}{n+1} : n \in \mathbb{N}_{\geq 1} \right\} = \left\{ \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{9}{5}, \frac{11}{6}, \dots \right\}.$$

Aufgabe 4. *Es sei* $S := (1, 5]$*. Beweisen Sie, dass* $\inf S = 1$.

2 Vollständige Induktion

Aufgabe 5.

i.) *Beweisen Sie die Bernoulli-Ungleichung:*

$$\forall x > -1 \ , \ \forall n \in \mathbb{N} : (1+x)^n \geq 1 + nx.$$

mittels Induktion.

ii.) *Seien* $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ *und* $x_1, \ldots, x_n \geq 0$. *Zeigen Sie:*

$$\prod_{i=1}^{n} (1 + x_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Aufgabe 6. *Zeigen Sie, dass:*

$$\frac{4^{2n} - 3^n}{13} \in \mathbb{N}.$$

für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.

Aufgabe 7.

i) *Zeigen Sie, dass der kleinste, nicht triviale Teiler einer natürlichen Zahl* $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ *stets eine Primzahl ist. Hier ist keine vollständige Induktion notwendig, ein Beweis per Widerspruch genügt völlig.*

ii) *Zeigen Sie, dass jede natürliche Zahl* $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ *als Produkt von Primzahlen in der kanonischen Form* $n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$, *wobei* $p_1 < p_2 < \cdots < p_k \in \mathbb{P}$ *und* $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{N}_0$, *geschrieben werden kann. Diese Darstellung ist desweiteren eindeutig, dies muss jedoch nicht gezeigt werden.*

Aufgabe 8 ($\star$ Trig Heavy)**.** *Wir definieren die Chebyshev Polynome für alle* $x \in \mathbb{R}$ *wie folgt:*

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1. \\ P_1(x) &= x. \\ P_{n+1}(x) &= xP_n(x) - P_{n-1}(x), \ \text{für } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass gilt:

$$P_n(2\cos(\theta)) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}, \ \theta \in (0, \pi).$$

Aufgabe 9. ($\star$) *Sei* $n \in \mathbb{N}$ *und* $a_{jk} \in \mathbb{C}$ *für* $j = 0, \ldots, n+1$, $k = 0, \ldots, n$. *Zeigen Sie, dass:*

$$\sum_{j=0}^{n+1} \sum_{k=0}^{n} a_{jk} = \sum_{0 \leq j \leq k \leq n} a_{jk} + \sum_{0 \leq k < j \leq n+1} a_{jk}.$$

Aufgabe 10. *Zeigen Sie die* ***Vorwärts-Rückwärts Induktion*** *(auch bekannt als Cauchy-Induktion): Es sei* $P(n)$ *eine Aussage für* $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. *Falls* $P(2)$ *wahr ist und*

1. *Aus* $P(k)$ *lässt sich* $P(2k)$ *folgern (Vorwärts Schritt).*

2. *Aus* $P(k+1)$ *lässt sich* $P(k)$ *folgern (Rückwärts Schritt).*

Dann gilt die Aussage $P(n)$ *für alle* $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$.

Aufgabe 11. *($\star$) Es seien $0 \leq x_i \leq \pi$ für $i = 1, \ldots, n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie folgende Ungleichung für alle $n \in \mathbb{N}$ mit Hilfe der Vorwärts-Rückwärts Induktion:*

$$\sin x_1 + \sin x_2 + \cdots + \sin x_n \leq n \sin\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right).$$

Aufgabe 12. ($\star$) *Zeigen Sie mit Hilfe der Cauchy-Induktion die folgende Ungleichung, bekannt als Cauchy's Ungleichung (oder auch arithmetisches Mittel dominiert das geometrische Mittel): Es seien $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, dann gilt*

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}.$$

3 Folgen

Aufgabe 13. *Seien* $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ *und* $x \in \mathbb{R}$.

i.) *Zeigen Sie, falls jede Teilfolge* $(x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ *eine Teilfolge* $(x_{n_{i_j}})_{j\in\mathbb{N}}$ *besitzt, die gegen* x *konvergiert, dann gilt* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

ii.) *Finden Sie eine Folge* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *so, dass für jede Teilfolge* $(x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ *eine konvergente Teilfolge* $(x_{n_{i_j}})_{j\in\mathbb{N}}$ *existiert, aber* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *nicht konvergiert.*

Aufgabe 14. *Sei* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C}$. *Entscheiden Sie für jede Aussage, ob sie wahr oder falsch ist:*

i.) $z_n \longrightarrow z \iff Re(z_n) \longrightarrow Re(z)$ *und* $Im(z_n) \longrightarrow Im(z)$.

ii.) $|z_n| \longrightarrow |z| \implies z_n \longrightarrow z$.

iii.) $z_n \longrightarrow z \implies |z_n| \longrightarrow |z|$.

iv.) $z_n \in \mathbb{R}$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *und* $z_n \longrightarrow z \implies z \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 15. *Seien* $m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^m$ *and* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Entscheiden Sie für jede der folgenden Aufgaben, ob sie wahr oder falsch sind (mit Beweis oder Gegenbeispiel):*

i.) $(\|x_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert* $\implies (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert.*

ii.) $(x_n \cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert* $\implies (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert.*

iii.) $(\lambda x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert* $\implies (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert.*

iv.) *Jede beschränkte Folge konvergiert.*

Aufgabe 16. *Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:*

i.)

$$\limsup_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n} - n\right).$$

ii.)

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{5}{n-3}\right)^{(n+\sqrt{n})/2}.$$

iii.)

$$\liminf_{n\to\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n} - 5n^3}{n^3 + n(n+1)(n+2)}.$$

Aufgabe 17. *Entscheiden Sie für jede Aussage, ob sie wahr oder falsch ist:*
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ *mit Häufungspunkt* $h \in \mathbb{R}$.

i.) h *ist der Grenzwert von* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

ii.) h *ist der einzige Häufungspunkt in* $\mathbb{R} \implies a_n \longrightarrow h$.

iii.) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert* $\implies a_n \longrightarrow h$.

iv.) *Es existiert eine Teilfolge von* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *die gegen* h *konvergiert.*

v.) $\forall\, \epsilon > 0\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n > N : |a_n - h| < \epsilon$.

Aufgabe 18. ($\star$)

i.) Berechnen Sie alle Häufungspunkte der Folge:

$$a_n = \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)\left(1+\frac{3}{n}\right)^{n+1}.$$

ii.) Seien $a_i > 0$ für alle $i = 1, \dots, p$. Zeigen Sie, dass:

$$\lim_{n\to\infty}(a_1^n + \cdots + a_p^n)^{1/n} = \max_{i=1,\dots,p} a_i.$$

Aufgabe 19. ($\star$) *Sei eine reelle Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ rekursiv definiert durch:*

$$a_0 = 1, \quad a_{k+1} = \sqrt{|a_k|} + \frac{15}{4} \text{ für } k \in \mathbb{N}.$$

i.) Zeigen Sie, dass $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

ii.) Berechnen Sie den Grenzwert von $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Aufgabe 20. ($\star$) *Zeigen Sie, dass*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty.$$

Aufgabe 21. ($\star$)

i.) Berechnen Sie den folgenden Grenzwert:

$$\lim_{n\to\infty} \log\left(\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right).$$

ii.) Berechnen Sie alle Häufungspunkte der komplexen Folge:

$$z_n = (n^4 - n^2 + 2)^{1/n} \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) + i\frac{n+e}{2n+1}(-1)^n.$$

iii.) Zeigen Sie:

$$\lim_{n\to\infty}\left[(n+1)\cos\left(\frac{1}{n+1}\right) - n\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right] = 1.$$

Aufgabe 22 ($\star$).

i) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge derart, dass für ihre Inkremente gilt $|a_{n+1} - a_n| \le 2^{-n}$. Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy Folge ist. Bedeutet dies, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert? Warum?

ii) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge, welche rekursiv definiert ist mittels:

$$a_{n+2} = \frac{a_n + a_{n+1}}{2}, \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, dass dies eine Cauchy Folge ist. Verwenden Sie Teil i).

iii) Berechnen Sie den Grenzwert der Folge aus Teil ii).

4 Reihen

Aufgabe 23. *Wir wollen den Cauchy'schen Verdichtungssatz (Kondensationssatz von Cauchy) beweisen. Sei* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine nicht-negative Folge von monoton fallenden Termen. Zeige, dass*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} < \infty.$$

Aufgabe 24. *Es sei* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge monoton fallender, nicht-negativer reellen Zahlen. Zeige dass falls* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergiert, dann gilt* $na_n \to 0$ *als* $n \to \infty$. *Hinweis: Verwende den Cauchy'schen Verdichtungssatz.*

Aufgabe 25. *Verwenden Sie den Cauchy'schen Verdichtungssatz (Kondensationssatz) um zu zeigen, dass die nachfolgenden Reihen divergieren respektive konvergieren:*

i)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

ii)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

iii)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \text{ wobei } s > 1.$$

Aufgabe 26.

i) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *monoton wachsend,* $a_n > 0$. *Zeige, die Reihe*

$$\sum_n \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1 \right)$$

konvergiert genau dann, wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *beschränkt ist.*

ii) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine monoton fallende Nullfolge. Zeige dass gilt:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1 + na_n} < \infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty.$$

Hinweis: Verwende Aufgabe 24.

Aufgabe 27. ($\star$) *Bestimmen Sie für die folgenden Reihen, ob sie konvergent und ob sie absolut konvergent sind:*

i.)

$$\sum_{k\geq 0} \frac{2k}{3k^3 + 1}.$$

ii.)

$$\sum_{k\geq 2} \frac{\sin(k\pi/2)}{\log(k)}.$$

iii.)

$$\sum_{k\geq 1} \frac{2^k k!}{k^k}.$$

Aufgabe 28. $(\star)$ *Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:*

i.)

$$\sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+1}.$$

ii.)

$$\sum_{n\geq 0} \left(\frac{n+5}{3n-2}\right)^{3n}.$$

iii.)

$$\sum_{n\geq 0} \frac{\exp(3n\log(n))}{(n!)^2}.$$

Aufgabe 29. $(\star)$ *Berechnen Sie:*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{(n-1)\cdot n}\right).$$

Aufgabe 30.

i) Existiert ein $s > 0$ *sodass die nachfolgende Reihe konvergiert?*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log^s(n)}.$$

ii) Für welche $s \in \mathbb{R}$ *ist die nachfolgende Reihe konvergent?*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log^s(n)}.$$

Aufgabe 31. *Zeigen Sie, dass die nachfolgende Reihe konvergiert:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k^2+2k+3}{6k^5+6}.$$

Aufgabe 32. *Zeigen Sie mit Hilfe des Integralkriteriums, dass die folgende Reihe konvergiert:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}.$$

Aufgabe 33. *Bestimmen Sie, ob die nachfolgende Reihe konvergiert:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} ne^{-n^2}.$$

5 Topologie: Metrische Räume

Aufgabe 34. *Sei (X, d) ein metrischer Raum. Beweise, dass auch (X, d') mit $d' : X \times X \to \mathbb{R}$ spezifiziert als*

$$d'(x, y) := \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

ein metrischer Raum ist.

Aufgabe 35. *Sei X eine beliebige nicht leere Menge und definiere $d : X \times X \to \mathbb{R}$ als*

$$d(x, y) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y \\ 1 & \text{falls } x \neq y. \end{cases}$$

- *i) Zeige, dass (X, d) ein metrischer Raum ist.*
- *ii) Zeige dass eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X genau dann bezgülich d konvergiert, wenn sie konstant ist ab einem (endlichen) Index $N \in \mathbb{N}$.*
- *iii) Folgere, dass (X, d) vollständig ist.*
- *iv) Welche Teilmengen von X sind offen? Welche sind abgeschlossen? Was ist also die Topologie $\tau \subset \mathcal{P}(X)$ auf X?*
- *v) Sei (M, d') ein beliebiger metrischer Raum und $f : X \to M$ eine beliebige Funktion. Zeige, dass f stetig ist.*

Aufgabe 36. *Zeige, dass für alle $v \in \mathbb{R}^n$ gilt:*

$$\|v\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|v\|_p.$$

Aufgabe 37. *Beweise die Cauchy-Schwarz Ungleichung, das heisst für alle $v, w \in \mathbb{R}^n$ gilt*

$$\sum_{i=1}^{n} |v_i||w_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |v_i|^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} |w_i|^2}.$$

Aufgabe 38. *Sei ℓ_2 der Raum der quadratsummierbaren reellen Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, d.h. für welche die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ konvergiert. Zeige, dass*

$$d((a_n), (b_n)) = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)^2}$$

eine Metrik auf Q definiert.
Hinweis: Verwende die Cauchy-Schwarz Ungleichung um die Dreiecksungleichung zu beweisen.

Aufgabe 39. *Betrachte den $\mathbb{R}^n$ mit der Euklidischen Metrik. Zeige oder widerlege:*

- *i) $X := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 + 2xy = 5\}$ ist abgeschlossen.*
- *ii) $Y := \{\frac{\cos x}{x} \in \mathbb{R} \mid x \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ ist abgeschlossen.*

Aufgabe 40. *i.) Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie:*

(a) die umgekehrte Dreiecksungleichung

$$|d(x, y) - d(y, z)| \leq d(x, z).$$

(b) *die verallgemeinerte Dreiecksungleichung*

$$d(x_n, x_1) \leq \sum_{i=1}^{n-1} d(x_{i+1}, x_i).$$

(c) *die Vierecksungleichung*

$$|d(x,y) - d(u,v)| \leq d(x,u) + d(y,v).$$

ii.) Sei $(Y, \|\cdot\|)$ *ein normierter* $\mathbb{R}$*-Vektorraum. Zeigen Sie:*

(a) *die umgekehrte Dreiecksungleichung*

$$\big|\, \|x\| - \|y\| \,\big| \leq \|x - y\|.$$

(b) *die verallgemeinerte Dreiecksungleichung*

$$\|x_n - x_1\| \leq \sum_{i=1}^{n-1} \|x_{i+1} - x_i\|.$$

Aufgabe 41. *Seien* $(M_1, d_1), (M_2, d_2)$ *metrische Räume. Sei* $f : M_1 \to M_2$ *gleichmässig stetig. Zeigen Sie: Ist* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Cauchy-Folge in* $M_1 \Rightarrow (f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *ist eine Cauchy-Folge in* M_2.

Aufgabe 42. *In dieser Aufgabe wollen wir zeigen, dass* $\ell_p \subset \ell_q$ *für* $0 < p \leq q$.

i) Zeige zuerst, dass für $0 < a \leq 1$ *folgende Ungleichung gilt:*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|\right)^a \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^a.$$

ii) Folgere dass $\|a\|_q \leq \|a\|_p$.

Aufgabe 43. *Es sei*

$$A_n^{(m)} := \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{falls } n \leq m \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Betrachten Sie die Folge $(b^{(m)})_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *mit* $b^{(m)} := (A_n^m)_{n\in\mathbb{N}}$.

i) Für welche $p \in [1,\infty]$ *gilt* $b^{(m)} \in \ell_p$*?*

ii) Bestimmen Sie die Grenzfolge $b^{(\infty)}$.

iii) Zeigen Sie, dass $(b^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ *bezüglich* $\|\cdot\|_p$*, wobei* $p \in (1,\infty]$ *konvergiert.*

Aufgabe 44. *Es sei für* $n, m \in \mathbb{N}_{\geq 2}$*:*

$$A_n^{(m)} := \frac{m}{m + n^{3/4}}.$$

Betrachten Sie die Folge $(b^{(m)})_{m\in\mathbb{N}_{\geq 2}} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *mit* $b^{(m)} := A_n^{(m)}$.

i) Zeigen Sie $\|b^{(m)}\|_{\ell_\infty} < \infty$ *für alle* $m \in \mathbb{N}_{\geq 2}$.

ii) Zeigen Sie $\|b^{(m)}\|_{\ell_2} < \infty$ *für alle* $m \in \mathbb{N}_{\geq 2}$.

iii) Zeigen Sie $b^{(m)} \notin \ell_1$ *für alle* $m \in \mathbb{N}_{\geq 2}$*. Hinweis: Verwenden Sie für alle* $a, b \in \mathbb{R}_{\geq 2}$ *gilt* $\frac{a}{a+b} > \frac{1}{b}$.

6 Stetigkeit und Grenzwerte von Funktionen

Aufgabe 45. *Zeigen Sie, mit Hilfe der Definition der Stetigkeit, dass die folgende Funktion in $x = 1$ stetig ist:*

$$h : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{-1\} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \frac{x^2+x+1}{x+1}. \end{cases}$$

Aufgabe 46. *Sind die 3 nachfolgenden Funktionen Lipschitz-stetig?*

i) $f : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \frac{1}{1+x^2}$.

ii) $f : (0, 1) \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \sqrt{x}$.

iii) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \sin x$.

iv) Finden Sie eine Funktion, welche gleichmässig stetig, aber nicht Lipschitz-stetig ist.

v) Finden Sie eine Funktion, die Lipschitz-stetig, aber nicht differenzierbar ist.

Aufgabe 47. *Beweisen Sie, falls $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und injektiv ist, dann ist f streng monoton.*

Aufgabe 48. ($\star$) *Sei $f_n : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktionenfolge und $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$. Entscheiden Sie für jede der folgenden Aussagen, ob sie wahr oder falsch ist:*

i.) Alle f_n sind stetig und $f_n \longrightarrow f$ punktweise $\Longrightarrow f$ ist stetig.

ii.) Alle f_n sind stetig und $f_n \longrightarrow f$ gleichmässig $\Longrightarrow f$ ist stetig.

iii.) Alle f_n sind differenzierbar auf $(0, 1)$ und $f_n \longrightarrow f$ gleichmässig $\Longrightarrow f$ ist differenzierbar auf $(0, 1)$.

Aufgabe 49. *Beweisen Sie, falls $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und beschränkt ist, dann besitzt f einen Fixpunkt.*

Aufgabe 50. ($\star$) *Sei $f : (0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ gleichmässig stetig. Zeigen Sie: Es existiert ein $c \in \mathbb{R}$, sodass für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $(0, 1]$ mit $x_n \longrightarrow 0$ gilt:*

$$f(x_n) \longrightarrow c \quad \text{für } n \longrightarrow \infty.$$

Bemerkung (nicht Teil der Aufgabe): Das bedeutet, dass $\lim_{x\downarrow 0} f(x) = c$.

Aufgabe 51. *Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:*

i)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{x}.$$

ii)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x x^5}{x^x}.$$

iii)

$$\lim_{x\to\infty} \left(x^2 + 3 - \sqrt{x^4 + 6x^2}\right)x^2.$$

Aufgabe 52. *Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte (möglicherweise $\pm\infty$):*

i)

$$\lim_{x\to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

ii)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2-\cos x}{x+3}.$$

iii)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2(2+\sin^2 x)}{x+100}.$$

iv)

$$\lim_{x\to 0} x^2 e^{\sin^3\left(\frac{1}{x}\right)}.$$

Aufgabe 53. *Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:*

i)

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\sqrt{x^2+1}\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}.$$

ii)

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\sqrt{x+4}-2}.$$

Aufgabe 54. *Berechnen Sie den folgenden Grenzwert:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\int_0^{\tan x} \log(2+t)dt.$$

Aufgabe 55. *Berechnen Sie den folgenden Grenzwert: Tipp: Verwenden sie einen Fundamentallimes.*

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+2x}{x^2-3x+2}\right)^{\frac{x^2+1}{x-3}}.$$