Übungen PVK Analysis

MB & LB, Vorlage gemäss SeSc

January 2, 2018

Die Verweise auf Theoreme und Propositionen beziehen sich auf das Skript der Vorlesung, welches Sie *hier* finden können. Die Verweise auf Serien beziehen sich auf das HS 15. Es handelt sich bei dieser Übungssammlung um eine überarbeitete Version der von SeSc zur Verfügung gestellten Vorlage.

1 sup, inf, max, min von Mengen

Aufgabe 1. *Berechnen Sie das Supremum (kleinste obere Schranke) der Menge:*

$$S := \left\{ \frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N}_0 \right\} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots \right\}.$$

Was gilt für das Supremum der Menge $M := S \cup \{1\}$?

Aufgabe 2. *Es sei $A \subset \mathbb{R}$ und $A \neq \emptyset$, desweiteren definieren wir $-A := \{x \in \mathbb{R} : -x \in A\}$. Entscheiden Sie für jede Aussage, ob sie wahr oder falsch ist.*

i.) A *unbeschränkt* $\Longleftrightarrow \sup A = \infty$.

ii.) A *ist endlich* $\Longrightarrow maxA = supA$.

iii.) $minA$ *existiert* $\Longrightarrow minA = -max(-A)$.

iv.) $supA \notin A$.

Aufgabe 3. *Finden Sie das max, min, sup und inf der folgenden Menge und beweisen Sie ihre Aussage.*

$$S := \left\{ \frac{2n+1}{n+1} : n \in \mathbb{N}_{\geq 1} \right\} = \left\{ \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{9}{5}, \frac{11}{6}, \dots \right\}.$$

Aufgabe 4. *Es sei $S := (1, 5]$. Beweisen Sie, dass* $\inf S = 1$.

2 Vollständige Induktion

Aufgabe 5.

i.) *Beweisen Sie die Bernoulli-Ungleichung:*

$$\forall x > -1\ ,\ \forall n \in \mathbb{N} : (1+x)^n \geq 1 + nx.$$

mittels Induktion.

ii.) *Seien* $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ *und* $x_1, \ldots, x_n \geq 0$. *Zeigen Sie:*

$$\prod_{i=1}^{n} (1 + x_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Aufgabe 6. *Zeigen Sie, dass:*

$$\frac{4^{2n} - 3^n}{13} \in \mathbb{N}.$$

für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.

Aufgabe 7.

i) *Zeigen Sie, dass der kleinste, nicht triviale Teiler einer natürlichen Zahl* $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ *stets eine Primzahl ist. Hier ist keine vollständige Induktion notwendig, ein Beweis per Widerspruch genügt völlig.*

ii) *Zeigen Sie, dass jede natürliche Zahl* $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ *als Produkt von Primzahlen in der kanonischen Form* $n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$, *wobei* $p_1 < p_2 < \cdots < p_k \in \mathbb{P}$ *und* $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{N}_0$, *geschrieben werden kann. Diese Darstellung ist desweiteren eindeutig, dies muss jedoch nicht gezeigt werden.*

Aufgabe 8 ($\star$ Trig Heavy)**.** *Wir definieren die Chebyshev Polynome für alle* $x \in \mathbb{R}$ *wie folgt:*

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1. \\ P_1(x) &= x. \\ P_{n+1}(x) &= xP_n(x) - P_{n-1}(x),\ \text{für } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass gilt:

$$P_n(2\cos(\theta)) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)},\ \theta \in (0, \pi).$$

Aufgabe 9. ($\star$) *Sei* $n \in \mathbb{N}$ *und* $a_{jk} \in \mathbb{C}$ *für* $j = 0, \ldots, n+1$, $k = 0, \ldots, n$. *Zeigen Sie, dass:*

$$\sum_{j=0}^{n+1} \sum_{k=0}^{n} a_{jk} = \sum_{0 \leq j \leq k \leq n} a_{jk} + \sum_{0 \leq k < j \leq n+1} a_{jk}.$$

3 Folgen

Aufgabe 10. *Seien* $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ *und* $x \in \mathbb{R}$.

i.) *Zeigen Sie, falls jede Teilfolge* $(x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ *eine Teilfolge* $(x_{n_{i_j}})_{j\in\mathbb{N}}$ *besitzt, die gegen* x *konvergiert, dann gilt* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

ii.) *Finden Sie eine Folge* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *so, dass für jede Teilfolge* $(x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ *eine konvergente Teilfolge* $(x_{n_{i_j}})_{j\in\mathbb{N}}$ *existiert, aber* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *nicht konvergiert.*

Aufgabe 11. *Sei* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C}$. *Entscheiden Sie für jede Aussage, ob sie wahr oder falsch ist.*

i.) $z_n \longrightarrow z \Longleftrightarrow Re(z_n) \longrightarrow Re(z)$ *und* $Im(z_n) \longrightarrow Im(z)$.

ii.) $|z_n| \longrightarrow |z| \Longrightarrow z_n \longrightarrow z$.

iii.) $z_n \longrightarrow z \Longrightarrow |z_n| \longrightarrow |z|$.

iv.) $z_n \in \mathbb{R}$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *und* $z_n \longrightarrow z \Longrightarrow z \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 12. *Seien* $m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^m$ *and* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Entscheiden Sie für jede der folgenden Aufgaben, ob sie wahr oder falsch sind (mit Beweis oder Gegenbeispiel).*

i.) $(\|x_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert* $\Longrightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert.*

ii.) $(x_n \cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert* $\Longrightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert.*

iii.) $(\lambda x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert* $\Longrightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert.*

iv.) *Jede beschränkte Folge konvergiert.*

Aufgabe 13. *Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:*

i.)

$$\limsup_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n} - n).$$

ii.)

$$\lim_{n\to\infty} \big(1 - \frac{5}{n-3}\big)^{(n+\sqrt{n})/2}.$$

iii.)

$$\liminf_{n\to\infty}(-1)^n \frac{\sqrt{n} - 5n^3}{n^3 + n(n+1)(n+2)}.$$

Aufgabe 14. *Entscheiden Sie für jede Aussage, ob sie wahr oder falsch ist.*
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ *mit Häufungspunkt* $h \in \mathbb{R}$.

i.) h *ist der Grenzwert von* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

ii.) h *ist der einzige Häufungspunkt in* $\mathbb{R} \Longrightarrow a_n \longrightarrow h$.

iii.) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert* $\Longrightarrow a_n \longrightarrow h$.

iv.) *Es existiert eine Teilfolge von* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *die gegen* h *konvergiert.*

v.) $\forall\ \epsilon > 0\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n > N : |a_n - h| < \epsilon$.

Aufgabe 15. ($\star$)

i.) Berechnen Sie alle Häufungspunkte der Folge:

$$a_n = \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)\left(1+\frac{3}{n}\right)^{n+1}.$$

ii.) Seien $a_i > 0$ für alle $i = 1, \ldots, p$. Zeigen Sie, dass:

$$\lim_{n\to\infty}(a_1^n + \cdots + a_p^n)^{1/n} = \max_{i=1,\ldots,p} a_i.$$

Aufgabe 16. ($\star$) *Sei eine reelle Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ rekursiv definiert durch:*

$$a_0 = 1, \quad a_{k+1} = \sqrt{|a_k|} + \frac{15}{4} \text{ für } k \in \mathbb{N}.$$

i.) Zeigen Sie, dass $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

ii.) Berechnen Sie den Grenzwert von $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Aufgabe 17. ($\star$)

i.) Berechnen Sie den folgenden Grenzwert:

$$\lim_{n\to\infty} \log\left(\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right).$$

ii.) Berechnen Sie alle Häufungspunkte der komplexen Folge:

$$z_n = (n^4 - n^2 + 2)^{1/n}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) + i\frac{n+e}{2n+1}(-1)^n.$$

iii.) Zeigen Sie:

$$\lim_{n\to\infty}\left[(n+1)\cos\left(\frac{1}{n+1}\right) - n\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right] = 1.$$

Aufgabe 18 ($\star$).

i) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge derart, dass für ihre Inkremente gilt $|a_{n+1} - a_n| \leq 2^{-n}$. Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy Folge ist. Bedeutet dies, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert? Warum?

ii) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge, welche rekursiv definiert ist mittels:

$$a_{n+2} = \frac{a_n + a_{n+1}}{2}, \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, dass dies eine Cauchy Folge ist. Verwenden Sie Teil i).

iii) Berechnen Sie den Grenzwert der Folge aus Teil ii).

4 Reihen

Aufgabe 19. *Verwenden Sie den Cauchy'schen Verdichtungssatz (Kondensationssatz) um zu zeigen, dass die nachfolgenden Reihen divergieren respektive konvergieren:*

i)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

ii)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

iii)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \text{ wobei } s > 1.$$

Aufgabe 20. ($\star$) *Bestimmen Sie für die folgenden Reihen, ob sie konvergent und ob sie absolut konvergent sind:*

i.)

$$\sum_{k \geq 0} \frac{2k}{3k^3 + 1}.$$

ii.)

$$\sum_{k \geq 2} \frac{\sin(k\pi/2)}{\log(k)}.$$

iii.)

$$\sum_{k \geq 1} \frac{2^k k!}{k^k}.$$

Aufgabe 21. ($\star$) *Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:*

i.)

$$\sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+1}.$$

ii.)

$$\sum_{n \geq 0} \left(\frac{n+5}{3n-2}\right)^{3n}.$$

iii.)

$$\sum_{n \geq 0} \frac{\exp(3n \log(n))}{(k!)^2}.$$

Aufgabe 22. ($\star$) *Berechnen Sie*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{(n-1) \cdot n}\right).$$

Aufgabe 23.

i) Existiert ein $s > 0$ sodass die nachfolgende Reihe konvergiert?

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log(n)^s}.$$

ii) Für welche $s \in \mathbb{R}$ ist die nachfolgende Reihe konvergent?

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^s(n)}.$$

Aufgabe 24. *Zeigen Sie, dass die nachfolgende Reihe konvergiert:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k^2 + 2k + 3}{6k^5 + 6}.$$

Aufgabe 25. *Zeigen Sie, dass die folgende Reihe konvergiert:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}.$$

Aufgabe 26. *Bestimmen Sie, ob die nachfolgende Reihe konvergiert:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} n e^{-n^2}.$$

5 Stetigkeit und Grenzwerte von Funktionen

Aufgabe 27. *Zeigen Sie, mit Hilfe der Definition der Stetigkeit, dass die folgende Funktion in* $x = 1$ *stetig ist:*

$$h : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{-1\} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \frac{x^2+x+1}{x+1}. \end{cases}$$

Aufgabe 28. *Sind die 3 nachfolgenden Funktionen Lipschitz-stetig?*

i) $f : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \frac{1}{1+x^2}$.

ii) $f : [0, 1) \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \sqrt{x}$.

iii) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \sin x$.

iv) Finden Sie eine Funktion, welche gleichmässig stetig, aber nicht Lipschitz-stetig ist.

v) Finden Sie eine Funktion, die Lipschitz-stetig, aber nicht differenzierbar ist.

Aufgabe 29. *Beweisen Sie, falls* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *stetig und injektiv ist, dann ist* f *streng monoton.*

Aufgabe 30. $(\star)$ *Sei* $f_n : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *eine Funktionenfolge und* $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$. *Entscheiden Sie für jede der folgenden Aussagen, ob sie wahr oder falsch ist.*

i.) Alle f_n *sind stetig und* $f_n \longrightarrow f$ *punktweise* $\Longrightarrow$ f *ist stetig.*

ii.) Alle f_n *sind stetig und* $f_n \longrightarrow f$ *gleichmässig* $\Longrightarrow$ f *ist stetig.*

iii.) Alle f_n *sind differenzierbar auf* $(0, 1)$ *und* $f_n \longrightarrow f$ *gleichmässig* $\Longrightarrow$ f *ist differenzierbar auf* $(0, 1)$.

Aufgabe 31. *Beweisen Sie, falls* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *stetig und beschränkt ist, dann besitzt* f *einen Fixpunkt.*

Aufgabe 32. $(\star)$ *Sei* $f : (0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *gleichmässig stetig. Zeigen Sie: Es existiert ein* $c \in \mathbb{R}$, *sodass für jede Folge* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *in* $(0, 1]$ *mit* $x_n \longrightarrow 0$ *gilt:*

$$f(x_n) \longrightarrow c \quad \text{für } n \longrightarrow \infty.$$

Bemerkung (nicht Teil der Aufgabe): Das bedeutet, dass $\lim_{x\downarrow 0} f(x) = c$.

Aufgabe 33. *Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:*

i)

$$\lim_{x\to 0} \frac{sin(ax)}{x}.$$

ii)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x x^5}{x^x}.$$

iii)

$$\lim_{x\to\infty} \big(x^2 + 3 - \sqrt{x^4 + 6x^2}\big)x^2.$$

Aufgabe 34. *Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte (möglicherweise $\pm\infty$):*

i)

$$\lim_{x\to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

ii)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2-\cos x}{x+3}.$$

iii)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2(2+\sin^2 x)}{x+100}.$$

iv)

$$\lim_{x\to 0} x^2 e^{\sin^3\left(\frac{1}{x}\right)}.$$

Aufgabe 35. *Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:*

i)

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\sqrt{x^2+1}\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}.$$

ii)

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\sqrt{x+4}-2}.$$

Aufgabe 36. *Berechnen Sie den folgenden Grenzwert:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\int_0^{\tan x} \log(2+t)dt.$$

Aufgabe 37. *Berechnen Sie den folgenden Grenzwert. Tipp: Verwenden sie einen Fundamentallimes.*

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+2x}{x^2-3x+2}\right)^{\frac{x^2+1}{x-3}}.$$

6 Potenzreihen

Aufgabe 38. *Sei* $f : \mathbb{R}_{>-1} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = \log(1+x)$*.*

i.) Bestimmen Sie die Taylorreihe von f *um* $x_0 = 0$*. Bestimmen Sie den Konvergenzradius* ρ *dieser Reihe.*

ii.) Sei $R_2 f(x)$ *das Restglied des Taylorpolynoms zweiter Ordnung. Zeigen Sie:*

$$R_2 f(x) \geq 0, \quad \forall\ 0 \leq x < R.$$

iii.) Zeigen Sie für alle $n > 1$*:*

$$1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} \left(1 + \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) \leq \frac{1}{2n^2}.$$

Aufgabe 39. *Es sei* $f_n : [1, \infty) \longrightarrow \mathbb{R},\ f_n(x) = 2n\left((2x)^{1/n} - 1\right)$*.*

i.) Zeigen Sie, dass $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *punktweise konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert* $f : [1, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$*.*
Hinweise: Schreiben Sie $(2x)^{1/n} = \exp(1/n \cdot \log(2x))$*.*

ii.) Zeigen Sie, dass die Konvergenz auf dem Intervall $[1, 2]$ *gleichmässig ist.*

iii.) Ist die Konvergenz gleichmässig auf $[1, \infty)$*?*

Aufgabe 40. $(\star)$ *Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen in* $z \in \mathbb{C}$*.*

i.)

$$\sum_{m \geq 1} \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j}\right) z^m.$$

ii.)

$$\sum_{k \geq 0} 4k^5 3^k z^{k^2}.$$

iii.)

$$\sum_{n \geq 1} \left(5 - \frac{2}{n}\right)^n z^n.$$

iv.)

$$\sum_{n \geq 0} i^{n-1} n^n z^n.$$

v.)

$$\sum_{n \geq 0} \frac{2^n}{n!} z^n.$$

Aufgabe 41. $(\star)$ *Entscheiden Sie für die folgenden Aussagen, ob sie wahr oder falsch sind:*

i.) Sei $\rho > 0$ *der Konvergenzradius von* $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$*. Dann ist* f *auf* $\{z \in \mathbb{C} \ :\ |z| < \rho\}$ *stetig.*

ii.) Sei $\rho > 0$ *der Konvergenzradius von* $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$*. Dann*
$p_m(z) = \sum_{n=0}^{m} a_n z^n \longrightarrow f(z)$ *gleichmässig auf* $\{z \in \mathbb{C} \ :\ |z| \leq r\}$ *für alle* $r < \rho$*.*

Aufgabe 42. *Berechnen Sie den folgenden Grenzwert mit Hilfe der Lagrange'schen Fehlerabschätzung:*

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x}\right).$$

7 Differentialrechnung

Aufgabe 43. $(\star)$ *Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine gerade (d.h. $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$), differenzierbare Funktion. Zeigen Sie, dass $f' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine ungerade Funktion ist, d.h. $f'(-x) = -f'(x)$.*

Aufgabe 44. *Beweisen Sie die verallgemeinerte Bernoulli-Ungleichung, welche besagt, dass für alle $r \geq 1,\ x \geq 0$ gilt:*

$$(1+x)^r \geq 1 + rx.$$

Hint: Betrachten Sie die Funktion $h(x) = (1+x)^r - (1+rx)$.

Aufgabe 45. $(\star)$ *Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

i.) Zeigen Sie, dass f auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar ist und berechnen Sie $f'(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

ii.) Ist f' an der Stelle $x = 0$ stetig?

Aufgabe 46. *Sei $\epsilon > 0$. Wir definieren $f_\epsilon : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f_\epsilon(x) = |x|^{1+\epsilon}$. Zeigen Sie, dass f_ϵ auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar ist.*

Aufgabe 47. *Bestimmen Sie alle Punkte, in denen:*

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

i.) stetig ist.

ii.) differenzierbar ist.

Aufgabe 48. $(\star)$ *Berechnen Sie die Ableitungen $f'(x)$ der folgenden Funktionen:*

i.)

$$f(x) = \log\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right) \quad \text{für } x \in (0,1).$$

ii.)

$$f(x) = \sqrt{\frac{a+bx}{a-bx}} \quad \text{für } a,b > 0, \text{ für } x \in \left(\frac{-\alpha}{\beta}, \frac{\alpha}{\beta}\right).$$

iii.)

$$f(x) = x^{1/3}(1-x)^{2/3}(1+x)^{1/2} \quad \text{für } x \in (0,1).$$

iv.)

$$f(x) = x^{\sqrt{x}} \quad \text{für } x > 0.$$

v.)

$$f(x) = \log(\tan(x)^{-1/3}) \quad \text{für } x \neq k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Aufgabe 49. $(\star)$ *Seien $f, g : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen.*

i.) Zeigen Sie, dass in allen Punkten $x \in (a,b)$ mit $f(x) \neq g(x)$ die Funktion $\max(f,g)$ differenzierbar ist.

ii.) Unter welcher Bedingung ist $\max(f,g)$ differenzierbar in einem Punkt $x \in (a,b)$ mit $f(x) = g(x)$.

Aufgabe 50. *Seien* $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, $f \in C^n([0,1],\mathbb{R})$ *und* $b \in \mathbb{R}$. *Seien* $0 \leq x_1 < \cdots < x_{n+1} \leq 1$ *sodass* $f(x_i) = b$ *für alle* $i \in \{1, \dots, n+1\}$. *Zeigen Sie, es existiert ein* $\xi \in (x_1, x_{n+1})$ *sodass* $f^{(n)}(\xi) = 0$.
Hint: Induktion.

Aufgabe 51. *Sei* $K > 0$. *Wir definieren:*

$$f_n : [-K,K] \longrightarrow \mathbb{R},\ f_n(x) := \begin{cases} \frac{n}{2}x^2 + \frac{1}{2n}, & x \in (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \\ |x|, & \textit{sonst.} \end{cases}$$

i.) *Zeigen Sie, dass* $f_n \in C^1([-K,K],\mathbb{R})$.

ii.) *Berechnen Sie den Limes von* $(f_n)_{n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}}$ *in* $(C^0([-K,K],\mathbb{R}), \|\cdot\|_{C^0([-K,K],\mathbb{R})})$.

iii.) *Schliessen Sie, dass* $(C^1([-K,K],\mathbb{R}), \|\cdot\|_{C^0([-K,K],\mathbb{R})})$ *nicht vollständig ist.*

Aufgabe 52. ($\star$)

i.) *Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:*

(a)
$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{3x + 2}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{2}{3}\}.$$

(b)
$$g(x) = \log((x + \sin(x))^2), \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

(c)
$$h(x) = x^{\sin(\sqrt{x})}, \quad x > 0.$$

ii.) *Finden Sie alle lokalen Extrema der Funktion* $f(x) := (1+x)\sqrt{|x|}$, $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 53. *Zeigen Sie, dass die Exponentialabbildung auf* $\mathbb{R}$ *konvex ist und zeigen Sie* $e^x \geq 1 + x$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 54. ($\star$) *Zeigen Sie, dass für alle* $x, y \in \mathbb{R}$ *mit* $0 \leq y < x$ *gilt:*

$$ny^{n-1} \leq \frac{x^n - y^n}{x - y} \leq nx^{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Aufgabe 55. ($\star$) *Entscheiden Sie für jede der folgenden Aussagen, ob Sie wahr oder falsch ist:*

i.) *Als Folge in* $C^0([0,1],\mathbb{R})$ *hat* $f_n(x) = x^n$ *keine konvergente Teilfolge.*

ii.) *Die Funktion* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *definiert durch* $f(x) = x^2\cos(1/x)$ *für* $x \neq 0$ *und* $f(0) = 0$ *ist in* $x = 0$ *differenzierbar.*

iii.) *Sei* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *konvex. Dann ist* f *auf* $\mathbb{R}$ *differenzierbar.*

iv.) *Ist* $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *gleichmässig stetig und auf* $(0,1)$ *differenzierbar, dann ist* f' *beschränkt.*

v.) *Ist* $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *differenzierbar und es gibt ein* $x_0 \in (0,1)$ *mit* $f'(x_0) = 0$, *so hat* f *in* x_0 *ein lokales Extremum.*

Aufgabe 56. *Sei im folgenden* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *stetig und auf* (a,b) *differenzierbar.*

i) *Verwenden Sie den Satz von Rolle um den Mittelwertsatz zu beweisen.*

ii) *Sei* $f'(x) = 0$ *für alle* $x \in (a,b)$, *dann gilt:* $f(x)$ *ist auf* (a,b) *konstant.*

iii) *Beweisen Sie die folgende Identität*

$$\arctan(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}.$$

iv) *Es gilt* $f'(x) > 0$ *für alle* $x \in (a,b)$, *dann ist* f *auf* (a,b) *monoton wachsend.*

8 Integrationsrechnung

Aufgabe 57. *Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind, begründen Sie Ihre Antwort.*

i) *Es sei* $f : [a,b] \longrightarrow [0,\infty)$*. Dann gilt:* $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx = 0 \iff f \equiv 0.$

ii) *Seien* $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *sodass* $f \leq g$*. Dann gilt:* $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx \leq \int_a^b f(x)\ dx.$

iii) *Sei* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$*. Dann impliziert* $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx > 0$*, dass* $f > 0$*.*

iv) *Sei* $f : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *monoton fallend mit* $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\ dx < \infty$*. Dann gilt:* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f(n) < \infty.$

Aufgabe 58. *Es sei* $t \in \mathbb{R}_{>}1$*. Berechnen Sie die folgenden Integrale:*

i)

$$\int_0^t x^2(\ln(x))^2\ dx.$$

ii)

$$\int_1^3 \frac{2x+3}{x^2+3x+2}\ dx.$$

iii)

$$\int_0^t \sin(3x)\cos(5x)\ dx.$$

iv)

$$\int_{-2}^3 \frac{56x^7\cos(\ln(x^8+6))}{x^8+6}\ dx.$$

v)

$$\int_0^3 \frac{\cos(x)}{1+\cos(x)}\ dx.$$

vi)

$$\int_{-1}^1 \cos(3x)\sqrt{x^4+3x^2+4}\ dx.$$

vii)

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}}\ dx.$$

viii)

$$\int_0^1 \ln(1+x^2)\ dx.$$

ix)

$$\int_2^4 \frac{x^4+x^3+x^2+1}{x^2+x-2}\ dx.$$