

Übungen PVK Analysis

MB & LB, Vorlage gemäss SeSc

January 2, 2018

Die Verweise auf Theoreme und Propositionen beziehen sich auf das Skript der Vorlesung, welches Sie *hier* finden können. Die Verweise auf Serien beziehen sich auf das HS 15. Es handelt sich bei dieser Übungssammlung um eine überarbeitete Version der von SeSc zur Verfügung gestellten Vorlage.

1 sup, inf, max, min von Mengen

Aufgabe 1. Berechnen Sie das Supremum (kleinste obere Schranke) der Menge

$$S := \left\{ \frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N}_0 \right\} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots \right\}$$

Was gilt für das Supremum der Menge $M := S \cup \{1\}$?

Aufgabe 2. Es sei $A \subset \mathbb{R}$ und $A \neq \emptyset$, desweiteren definieren wir $-A := \{x \in \mathbb{R} : -x \in A\}$. Entscheiden Sie für jede Aussage, ob sie wahr oder falsch ist.

i.) A unbeschränkt $\Leftrightarrow \sup A = \infty$.

ii.) A ist endlich $\Rightarrow \max A = \sup A$.

iii.) $\min A$ existiert $\Rightarrow \min A = -\max(-A)$.

iv.) $\sup A \notin A$.

Aufgabe 3. Finden Sie das \max , \min , \sup und \inf der folgenden Menge und beweisen Sie ihre Aussage.

$$S := \left\{ \frac{2n+1}{n+1} : n \in \mathbb{N}_{\geq 1} \right\} = \left\{ \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{9}{5}, \frac{11}{6}, \dots \right\}$$

Aufgabe 4. Es sei $S := (1, 5]$. Beweisen Sie, dass $\inf S = 1$.

2 Vollständige Induktion

Aufgabe 5. i.) Beweisen Sie die Bernoulli-Ungleichung

$$\forall x > -1 \quad \forall n \in \mathbb{N} : (1+x)^n \geq 1+nx$$

mittels Induktion.

ii.) Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und $x_1, \dots, x_n \geq 0$. Zeigen Sie

$$\prod_{i=1}^n (1+x_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^n x_i$$

.

Aufgabe 6. Zeigen Sie, dass

$$\frac{4^{2n} - 3^n}{13} \in \mathbb{N}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.

Aufgabe 7.

- i) Zeigen Sie, dass der kleinste, nicht triviale Teiler einer natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ stets eine Primzahl ist. Hier ist keine vollständige Induktion notwendig, ein Beweis per Widerspruch genügt völlig.
- ii) Zeigen Sie, dass jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ als Produkt von Primzahlen in der kanonischen Form $n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$ wobei $p_1 < p_2 < \cdots < p_k \in \mathbb{P}$ und $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{N}_0$ geschrieben werden kann. Diese Darstellung ist desweiteren eindeutig, dies muss jedoch nicht gezeigt werden.

Aufgabe 8 (★ Trig Heavy). Wir definieren die Chebyshev Polynome für alle $x \in \mathbb{R}$ wie folgt

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 \\ P_1(x) &= x \\ P_{n+1}(x) &= xP_n(x) - P_{n-1}(x), \text{ für } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass gilt:

$$P_n(2 \cos(\theta)) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}, \quad \theta \in (0, \pi)$$

Aufgabe 9. (★) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $a_{jk} \in \mathbb{C}$ für $j = 0, \dots, n+1$, $k = 0, \dots, n$. Zeigen Sie, dass

$$\sum_{j=0}^{n+1} \sum_{k=0}^n a_{jk} = \sum_{0 \leq j \leq k \leq n} a_{jk} + \sum_{0 \leq k < j \leq n+1} a_{jk}.$$

3 Folgen

Aufgabe 10. Seien $m \in \mathbb{N}$, $(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^m$ und $x \in \mathbb{R}^m$.

- i.) Zeigen Sie, falls jede Teilfolge $(x_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge $(x_{n_{i_j}})_{j \in \mathbb{N}}$ besitzt, die gegen x konvergiert, dann gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.
- ii.) Finden Sie eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ so, dass für jede Teilfolge $(x_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge $(x_{n_{i_j}})_{j \in \mathbb{N}}$ existiert, aber $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht konvergiert.

Aufgabe 11. Sei $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C}$. Entscheiden Sie für jede Aussage, ob sie wahr ist oder falsch.

- i.) $z_n \rightarrow z \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z_n) \rightarrow \operatorname{Re}(z)$ und $\operatorname{Im}(z_n) \rightarrow \operatorname{Im}(z)$.
- ii.) $|z_n| \rightarrow |z| \Rightarrow z_n \rightarrow z$.
- iii.) $z_n \rightarrow z \Rightarrow |z_n| \rightarrow |z|$.
- iv.) $z_n \in \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $z_n \rightarrow z \Rightarrow z \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 12. Seien $m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^m$ and $\lambda \in \mathbb{R}$. Entscheiden Sie für jede der folgenden Aufgaben, ob sie wahr oder falsch sind (mit Beweis oder Gegenbeispiel).

- i.) $(\|x_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert $\Rightarrow (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert.
- ii.) $(x_n \cdot y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert $\Rightarrow (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert.
- iii.) $(\lambda x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert $\Rightarrow (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert.
- iv.) Jede beschränkte Folge konvergiert.

Aufgabe 13. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

- i.)
$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n} - n)$$
- ii.)
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{5}{n-3}\right)^{(n+\sqrt{n})/2}$$
- iii.)
$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n} - 5n^3}{n^3 + n(n+1)(n+2)}$$

Aufgabe 14. Entscheiden Sie für jede Aussage, ob sie wahr oder falsch ist.

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ mit Häufungspunkt $h \in \mathbb{R}$.

- i.) h ist der Grenzwert von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- ii.) h ist der einzige Häufungspunkt in $\mathbb{R} \Rightarrow a_n \rightarrow h$.
- iii.) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert $\Rightarrow a_n \rightarrow h$.
- iv.) Es existiert eine Teilfolge von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die gegen h konvergiert.
- v.) $\forall \epsilon > 0 \forall N \in \mathbb{N} \exists n > N : |a_n - h| < \epsilon$.

Aufgabe 15. (★)

i.) Berechnen Sie alle Häufungspunkte der Folge

$$a_n = \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) \left(1 + \frac{3}{n}\right)^{n+1}.$$

ii.) Seien $a_i > 0$ für alle $i = 1, \dots, p$. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1^n + \dots + a_p^n)^{1/n} = \max_{i=1, \dots, p} a_i.$$

Aufgabe 16. (★) Sei eine reelle Folge $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ rekursiv definiert durch

$$a_0 = 1, \quad a_{k+1} = \sqrt{|a_k|} + \frac{15}{4} \text{ für } k \in \mathbb{N}.$$

i.) Zeigen Sie, dass $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert.

ii.) Berechnen Sie den Grenzwert von $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

Aufgabe 17. (★)

i.) Berechnen Sie den folgenden Grenzwert:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log \left(\left(\frac{n}{n+1} \right)^n \right).$$

ii.) Berechnen Sie alle Häufungspunkte der komplexen Folge

$$z_n = (n^4 - n^2 + 2)^{1/n} \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) + i \frac{n+e}{2n+1} (-1)^n.$$

iii.) Zeigen Sie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[(n+1) \cos\left(\frac{1}{n+1}\right) - n \cos\left(\frac{1}{n}\right) \right] = 1.$$

Aufgabe 18 (★).

i) Es sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle Folge derart, dass für ihre Inkremente gilt $|a_{n+1} - a_n| \leq 2^{-n}$. Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy Folge ist. Bedeutet dies, dass $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert? Warum?

ii) Es sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle Folge, welche rekursiv definiert ist mittels

$$a_{n+2} = \frac{a_n + a_{n+1}}{2}, \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

Zeigen Sie, dass dies eine Cauchy Folge ist. Verwenden Sie Teil i).

iii) Berechnen Sie den Grenzwert der Folge aus Teil ii).

4 Reihen

Aufgabe 19. Verwenden Sie den Cauchy'schen Verdichtungssatz (Kondensationssatz) um zu zeigen, dass die nachfolgenden Reihen divergieren respektive konvergieren

i)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

ii)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

iii)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \text{ wobei } s > 1.$$

Aufgabe 20. (★) Bestimmen Sie für die folgenden Reihen, ob sie konvergent und ob sie absolut konvergent sind:

i.)

$$\sum_{k \geq 0} \frac{2k}{3k^3 + 1}$$

ii.)

$$\sum_{k \geq 2} \frac{\sin(k\pi/2)}{\log(k)}$$

iii.)

$$\sum_{k \geq 1} \frac{2^k k!}{k^k}$$

Aufgabe 21. (★) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

i.)

$$\sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+1}.$$

ii.)

$$\sum_{n \geq 0} \left(\frac{n+5}{3n-2} \right)^{3n}.$$

iii.)

$$\sum_{n \geq 0} \frac{\exp(3n \log(n))}{(k!)^2}.$$

Aufgabe 22. (★) Berechnen Sie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} \right).$$

Aufgabe 23.

i) Existiert ein $s > 0$ sodass die nachfolgende Reihe konvergiert?

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log(n)^s}$$

ii) Für welche $s \in \mathbb{R}$ ist die nachfolgende Reihe konvergent?

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^s(n)}$$

Aufgabe 24. Zeigen Sie, dass die nachfolgende Reihe konvergiert

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k^2 + 2k + 3}{6k^5 + 6}$$

Aufgabe 25. Zeigen Sie, dass die folgende Reihe konvergiert

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$$

Aufgabe 26. Bestimmen Sie, ob die nachfolgende Reihe konvergiert

$$\sum_{n=0}^{\infty} n e^{-n^2}$$

5 Stetigkeit und Grenzwerte von Funktionen

Aufgabe 27. Zeigen Sie, mit Hilfe der Definition der Stetigkeit, dass die folgende Funktion in $x = 1$ stetig ist

$$h : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{-1\} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \frac{x^2+x+1}{x+1} \end{cases}$$

Aufgabe 28. Sind die 3 nachfolgenden Funktionen Lipschitz-stetig?

i) $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$

ii) $f : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x}$

iii) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sin x$

iv) Finden Sie eine Funktion, welche gleichmässig stetig, aber nicht Lipschitz-stetig ist.

v) Finden Sie eine Funktion, die Lipschitz-stetig, aber nicht differenzierbar ist.

Aufgabe 29. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und injektiv, dann ist f streng monoton.

Aufgabe 30. (\star) Sei $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktionenfolge und $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Entscheiden Sie für jede der folgenden Aussagen, ob sie wahr oder falsch ist.

i.) Alle f_n sind stetig und $f_n \rightarrow f$ punktweise $\Rightarrow f$ ist stetig.

ii.) Alle f_n sind stetig und $f_n \rightarrow f$ gleichmässig $\Rightarrow f$ ist stetig.

iii.) Alle f_n sind differenzierbar auf $(0, 1)$ und $f_n \rightarrow f$ gleichmässig $\Rightarrow f$ ist differenzierbar auf $(0, 1)$.

Aufgabe 31. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und beschränkt, dann besitzt f einen Fixpunkt.

Aufgabe 32. (\star) Sei $f : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ gleichmässig stetig. Zeigen Sie: Es existiert ein $c \in \mathbb{R}$, sodass für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $(0, 1]$ mit $x_n \rightarrow 0$ gilt:

$$f(x_n) \rightarrow c \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Bemerkung (nicht Teil der Aufgabe): Das bedeutet, dass $\lim_{x \downarrow 0} f(x) = c$.

Aufgabe 33. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte

i)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{x}$$

ii)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x x^5}{x^x}$$

iii)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 + 3 - \sqrt{x^4 + 6x^2})x^2.$$

Aufgabe 34. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte (möglicherweise $\pm\infty$).

i)

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

ii)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \cos x}{x + 3}$$

iii)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(2 + \sin^2 x)}{x + 100}$$

iv)

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 e^{\sin^3(\frac{1}{x})}$$

Aufgabe 35. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte

i)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\sqrt{x^2 + 1} \right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$$

ii)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sqrt{x+4}-2}$$

Aufgabe 36. Berechnen Sie den folgenden Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^{\tan x} \log(2+t) dt$$

Aufgabe 37. Berechnen Sie den folgenden Grenzwert. Tipp: Verwenden sie einen Fundamentallimes.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 2x}{x^2 - 3x + 2} \right)^{\frac{x^2+1}{x-3}}$$

6 Potenzreihen

Aufgabe 38. Sei $f : \mathbb{R}_{>-1} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log(1+x)$.

i.) Bestimmen Sie die Taylorreihe von f um $x_0 = 0$. Bestimmen Sie den Konvergenzradius ρ dieser Reihe.

ii.) Sei $R_2 f(x)$ das Restglied des Taylorpolynoms zweiter Ordnung. Zeigen Sie:

$$R_2 f(x) \geq 0, \quad \forall 0 \leq x < R.$$

iii.) Zeigen Sie für alle $n > 1$

$$1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} \left(1 + \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) \leq \frac{1}{2n^2}.$$

Aufgabe 39. Es sei $f_n : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = 2n \left((2x)^{1/n} - 1\right)$.

i.) Zeigen Sie, dass $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ punktweise konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$.

Hinweise: Schreiben Sie $(2x)^{1/n} = \exp(1/n \cdot \log(2x))$.

ii.) Zeigen Sie, dass die Konvergenz auf dem Intervall $[1, 2]$ gleichmässig ist.

iii.) Ist die Konvergenz gleichmässig auf $[1, \infty)$?

Aufgabe 40. (★) Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen in $z \in \mathbb{C}$.

i.)

$$\sum_{m \geq 1} \left(\sum_{j=1}^m \frac{1}{j} \right) z^m.$$

ii.)

$$\sum_{k \geq 0} 4k^5 3^k x^{k^2}.$$

iii.)

$$\sum_{n \geq 1} \left(5 - \frac{2}{n}\right)^n z^n.$$

iv.)

$$\sum_{n \geq 0} i^{n-1} n^n z^n.$$

v.)

$$\sum_{n \geq 0} \frac{2^n}{n!} z^n.$$

Aufgabe 41. (★) Entscheiden Sie für die folgenden Aussagen, ob sie wahr oder falsch sind:

i.) Sei $\rho > 0$ der Konvergenzradius von $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$. Dann ist f auf $\{z \in \mathbb{C} : |z| < \rho\}$ stetig.

ii.) Sei $\rho > 0$ der Konvergenzradius von $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$. Dann

$p_m(z) = \sum_{n=0}^m a_n z^n \rightarrow f(z)$ gleichmässig auf $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$ für alle $r < \rho$.

Aufgabe 42. Berechnen Sie den folgenden Grenzwert mit Hilfe der Lagran'schen Fehlerabschätzung

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \right).$$

7 Differentialrechnung

Aufgabe 43. (★) Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine gerade (d.h. $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$), differenzierbare Funktion. Zeigen Sie, dass $f' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine ungerade Funktion ist, d.h. $f'(-x) = -f'(x)$.

Aufgabe 44. Beweisen Sie die verallgemeinerte Bernoulli-Ungleichung, diese besagt, dass für alle $r \geq 1$, $x \geq 0$ gilt:

$$(1+x)^r \geq 1+rx.$$

Hint: Betrachten Sie die Funktion $h(x) = (1+x)^r - (1+rx)$.

Aufgabe 45. (★) Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

i.) Zeigen Sie, dass f auf ganz \mathbb{R} differenzierbar ist und berechnen Sie $f'(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

ii.) Ist f' an der Stelle $x = 0$ stetig?

Aufgabe 46. Sei $\epsilon > 0$. Wir definieren $f_\epsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_\epsilon(x) = |x|^{1+\epsilon}$. Zeigen Sie, dass f_ϵ auf ganz \mathbb{R} differenzierbar ist.

Aufgabe 47. Bestimmen Sie alle Punkte, in denen

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

i.) stetig ist.

ii.) differenzierbar ist.

Aufgabe 48. (★) Berechnen Sie die Ableitungen $f'(x)$ der folgenden Funktionen:

i.)

$$f(x) = \log\left(\frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{x}\right) \quad \text{für } x \in (0, 1).$$

ii.)

$$f(x) = \sqrt{\frac{a+bx}{a-bx}} \quad \text{für } a, b > 0, \text{ für } x \in \left(\frac{-a}{b}, \frac{a}{b}\right).$$

iii.)

$$f(x) = x^{1/3}(1-x)^{2/3}(1+x)^{1/2} \quad \text{für } x \in (0, 1).$$

iv.)

$$f(x) = x^{\sqrt{x}} \quad \text{für } x > 0.$$

v.)

$$f(x) = \log(\tan(x)^{-1/3}) \quad \text{für } x \neq k\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Aufgabe 49. (★) Seien $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen.

i.) Zeigen Sie, dass in allen Punkten $x \in (a, b)$ mit $f(x) \neq g(x)$ die Funktion $\max(f, g)$ differenzierbar ist.

ii.) Unter welcher Bedingung ist $\max(f, g)$ differenzierbar in einem Punkt $x \in (a, b)$ mit $f(x) = g(x)$.

Aufgabe 50. Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, $f \in C^n([0, 1], \mathbb{R})$ und $b \in \mathbb{R}$. Seien $0 \leq x_1 < \dots < x_{n+1} \leq 1$ sodass $f(x_i) = b$ für alle $i \in \{1, \dots, n+1\}$. Zeigen Sie, es existiert ein $\xi \in (x_1, x_{n+1})$ sodass $f^{(n)}(\xi) = 0$.

Hint: Induktion.

Aufgabe 51. Sei $K > 0$. Wir definieren

$$f_n : [-K, K] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) := \begin{cases} \frac{n}{2}x^2 + \frac{1}{2n}, & x \in (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \\ |x|, & \text{sonst.} \end{cases}$$

- i.) Zeigen Sie, dass $f_n \in C^1([-K, K], \mathbb{R})$.
- ii.) Berechnen Sie den Limes von $(f_n)_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ in $(C^0([-K, K], \mathbb{R}), \|\cdot\|_{C^0([-K, K], \mathbb{R})})$.
- iii.) Schliessen Sie, dass $(C^1([-K, K], \mathbb{R}), \|\cdot\|_{C^0([-K, K], \mathbb{R})})$ nicht vollständig ist.

Aufgabe 52. (★)

i.) Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:

(a)

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{3x + 2}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{3}\right\}.$$

(b)

$$g(x) = \log((x + \sin(x))^2), \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

(c)

$$h(x) = x^{\sin(\sqrt{x})}, \quad x > 0.$$

ii.) Finden Sie alle lokalen Extrema der Funktion $f(x) := (1+x)\sqrt{|x|}$, $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 53. Zeigen Sie, dass die Exponentialabbildung auf \mathbb{R} konvex ist und zeigen Sie $e^x \geq 1+x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 54. (★) Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq y < x$ gilt:

$$ny^{n-1} \leq \frac{x^n - y^n}{x - y} \leq nx^{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Aufgabe 55. (★) Entscheiden Sie für jede der folgenden Aussagen, ob Sie wahr oder falsch ist.

- i.) Als Folge in $C^0([0, 1], \mathbb{R})$ hat $f_n(x) = x^n$ keine konvergente Teilfolge.
- ii.) Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = x^2 \cos(1/x)$ für $x \neq 0$ und $f(0) = 0$ ist in $x = 0$ differenzierbar
- iii.) Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ konvex. Dann ist f auf \mathbb{R} differenzierbar.
- iv.) Ist $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ gleichmässig stetig und auf $(0, 1)$ differenzierbar, dann ist f' beschränkt.
- v.) Ist $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und es gibt ein $x_0 \in (0, 1)$ mit $f'(x_0) = 0$, so hat f in x_0 ein lokales Extremum.

Aufgabe 56. Sei im folgenden $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar.

- i) Verwenden Sie den Satz von Rolle um den Mittelwertsatz zu beweisen.
- ii) Sei $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a, b)$, dann gilt $f(x)$ ist auf (a, b) konstant.
- iii) Beweisen Sie die folgende Identität

$$\arctan(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$$

iv) Es gilt $f'(x) > 0$ für alle $x \in (a, b)$, dann ist f auf (a, b) monoton wachsend.

8 Integrationsrechnung

Aufgabe 57. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind, begründen Sie Ihre Antwort.

i) Es sei $f : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$. Dann gilt $\int_a^b f(x) \, dx = 0 \iff f \equiv 0$

ii) Seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sodass $f \leq g$. Dann gilt $\int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b g(x) \, dx$.

iii) Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Dann impliziert $\int_a^b f(x) \, dx > 0$ dass $f > 0$.

iv) Sei $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$ monoton fallend mit $\int_0^\infty f(x) \, dx < \infty$. Dann gilt $\sum_{n=0}^\infty f(n) < \infty$.

Aufgabe 58. Es sei $t \in \mathbb{R}_1$. Berechnen Sie die folgenden Integrale.

i)

$$\int_0^t x^2 (\ln(x))^2 \, dx$$

ii)

$$\int_1^3 \frac{2x+3}{x^2+3x+2} \, dx$$

iii)

$$\int_0^t \sin(3x) \cos(5x) \, dx$$

iv)

$$\int_{-2}^3 \frac{56x^7 \cos(\ln(x^8+6))}{x^8+6} \, dx$$

v)

$$\int_0^3 \frac{\cos(x)}{1+\cos(x)} \, dx$$

vi)

$$\int_{-1}^1 \cos(3x) \sqrt{x^4+3x^2+4} \, dx$$

vii)

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}} \, dx$$

viii)

$$\int_0^1 \ln(1+x^2) \, dx$$

ix)

$$\int_2^4 \frac{x^4+x^3+x^2+1}{x^2+x-2} \, dx$$