UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
FIRENZE

Scuola di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Elaborato di Calcolo Numerico

Candidato: Giulio Fagioli (matricola 6006222)

A.A. 2018/2019

Esercizio 1

Verificare che, per h sufficientemente piccolo:

$\frac{3}{2}f(x) - 2f(x-h) + \frac{1}{2}f''(x0)h \ + O(h^3)$

Soluzione

Iniziamo con lo sviluppo di $f(x)$ utilizzando il polinomio di Taylor al secondo ordine:

$f(x) = f(x0) \ - f'(x)(x - x0) + \frac{h^2}{2}f''(x0) + O(h^3)$

Possiamo applicarlo a $f(x-h)$ ed uno per $f(x \ -2h)$ sostituendo rispettivamente $x \ = \ (x0 \ - h)$ ed $x = (x0 - 2h)$.

$$f(x0 \ - h) = f(x0) \ - \ hf'(x0) + \frac{h^2}{2}f''(x0) + O(h^3)$$
$$f(x0 \ - 2h) = f(x0) \ - \ 2hf'(x0) + \frac{4h^2}{2}f''(x0) + O(h^3)$$

Utilizziamo questi due sviluppi avendo quindi:

$\frac{3}{2}f(x0) - 2\,[\,f(x0) \ - hf'(x0) \ + \frac{h^2}{2}f''(x0) \ + \ O(h^3)\,] \ + \frac{1}{2}[\,f(x0) \ - 2hf'(x0) + \frac{4h^2}{2}f''(x0) \ + O(h^3)$

$\frac{3}{2}f(x0) - 2\,f(x0) \ + 2hf'(x0) \ - \frac{2h^2}{2}f''(x0) \ + \ O(h^3) \ \ + \frac{1}{2}\,f(x0) \ - \frac{1}{2}2hf'(x0) + \frac{1}{2}\frac{4h^2}{2}f''(x0) \ + O(h^3)$

$\frac{3}{2}f(x0) - 2\,f(x0) \ + 2hf'(x0) \ - h^2f''(x0) \ + \ O(h^3) \ \ + \frac{1}{2}\,f(x0) \ - hf'(x0) + h^2f''(x0) \ + O(h^3)$

Eseguendo alcune semplificazioni si arriva ad:

$[\frac{3}{2}f(x0) - 2\,f(x0) + \frac{1}{2}\,f(x0)] \ + 2hf'(x0) - hf'(x0)\,[-h^2f''(x0) \ + h^2f''(x0)] + O(h^3)$

$+ 2hf'(x0) - hf'(x0) + O(h^3) \ = hf'(x0) + O(h^3)$

Esercizio 2

Quanti sono i numeri di macchina normalizzati della doppia precisione IEEE? Argomentare la risposta.

Soluzione

Nella rappresentazione IEEE754 abbiamo:

- 1 bit per il segno;
- 53 bit per la mantissa;
- 11 bit per l'esponente;

Inoltre abbiamo:

- Shift v= $2^{11-1} - 1 = 1023$;
- Base $b = 2$;

I numeri di macchina normalizzati della doppia precisione (64 bit) IEEE 754 sono

$$2^{52} * (2^{11} - 2) = 2^{63} - 2 = 9.223372036854776 * 10^{18}$$

Possiamo notare che vengono esclusi due casi dal range dei possibili valori :

$e = 0$, $f \neq 0$ Mantissa Denormalizzata

$e = 2047$, $f \neq 0$ NaN (Not a Number)

Esercizio 3

Eseguire il seguente script Matlab:

```
format long e
n=75;
u=1e-300;
for i=1:n,u=u*2;end,for i=1:n,u=u/2;end,u
u=1e-300;
for i=1:n,u=u/2;end,for i=1:n,u=u*2;end,u
```

Spiegare i risultati ottenuti.

Soluzione

Nel primo caso abbiamo prima la moltiplicazione seguita dalla divisione, in questo contesto non si presentano errori poiché *u* non assume un valore minore del valore minimo rappresentabile da matlab (2.225073858507201e-308).
Differente è il secondo caso in cui effettuando prima le divisioni si arriva ad una condizione di underflow e il numero viene approssimato.
Matlab in questo caso usa un sistema di recovery (*gradual underflow*) che diminuisce i bit della mantissa a favore dell'esponente.
L'errore generato dal primo ciclo di divisioni viene propagato dal successivo ciclo di moltiplicazioni.

Tabella rappresentativa dei risultati del primo ciclo:

Iterazione	Moltiplicazione	Divisione
1.00000000000000e-300	3.77789318629572e-278	1.00000000000000e-300

Tabella rappresentativa dei risultati del secondo ciclo:

Iterazione	Moltiplicazione	Divisione
1.00000000000000e-300	2.96439387504748e-323	1.11991634220386e-300

Esercizio 4

Eseguire le seguenti istruzioni Matlab:

```
format long e
a=1.111111111111111
b=1.11111111111111
a+b
a-b
```

Soluzione

Possiamo studiare il condizionamento di queste somme algebriche come segue:

$$k = (|x1| + |x2|)/(|x1 + x2)$$

Identifichiamo due casi significativi:

- $x1 * x2 > 0$
  In questo caso si hanno addendi di segno concorde e k=1, questa operazione è sempre ben condizionata.

- $x1 \approx -x2$
  In questo caso il numero di condizionamento potrebbe essere grande, un'operazione di somma algebrica fra due numeri quasi opposti è un'operazione mal condizionata che da luogo al fenomeno chiamato *cancellazione numerica*.

Esercizio 5

Scrivere function Matlab distinte che implementino efficientemente i seguenti metodi per la ricerca degli zeri di una funzione:

1) Metodo di Bisezione
2) Metodo di Newton
3) Metodo delle Secanti
4) Metodo delle Corde

Detta xi l'approssimazione al passo i-esimo, utilizzare come criterio di arresto:

$$| xi + 1 - xi | \leq tol \cdot (1 + |xi|)$$

essendo *tol* una opportuna tolleranza specificata in ingresso.

Soluzione

Di seguito si riportanoi codici delle funzioni relative ad i quattro metodi per la ricerca degli zeri di una funzione:

```
function [iterazioni,x] = metodoBisezione(f, a, b, tolx)
% Utilizzo: [iterazioni,x] = metodoBisezione(f, a, b, tolx, itmax)
% Calcola dell'approssimazione di una radice della funzione
% METODO: Bisezione
%
% Parametri:
%   f: Funzione utilizzata
%   a: Estremo sinistro dell'intervallo di condifenza iniziale
%   b: Estremo destro dell'intervallo di condifenza iniziale
%   tolx: Tolleranza prefissata
% Restituisce:
%   iterazioni: numero di iterazioni eseguite
%   x: Radice approssimata
    x = inf;
```

```
    fa = feval(f,a);
    fb = feval(f,b);
    if fa*fb > 0
        error("L'intervallo non contiene alcuna radice");
    end
    imax = ceil(log2(b-a)-log2(tolx));
    for i = 2:imax
        xi = (a+b)/2;
        fx = feval(f,x);
        if abs(xi-x) <= tolx*(1+abs(xi))
            break;
        elseif fa*fx < 0
            b = xi;
            fb = fx;
        else
            a = xi;
            fa = fx;
        end
        x = xi;
    end
    iterazioni = i;
end

function [iterazioni,x] = metodoNewton(f, f_der, x0, tolx, itmax)
% Utilizzo: [iterazioni,x] = metodoNewton(f, f_der, x0, tolx, itmax)
% Calcola dell'approssimazione di una radice della funzione
% METODO: Newton
%
% Parametri:
%   f: Funzione utilizzata
%   f_der: Derivata della funzione designata
%   x0: Punto di innesco
%   tolx: Tolleranza prefissata
%   itmax: Numero di iterazioni massime
% Restituisce:
%   iterazioni: numero di iterazioni eseguite ( -1 nel caso di una non
%   convergenza)
%   x: Radice approssimata

    fx = feval(f, x0);
    f_derx = feval(f_der, x0);
    x = x0 - fx/f_derx;
    i = 0;
    while (i<itmax) && (abs(x-x0)>tolx)
        i = i+1;
        x0 = x;
        fx = feval(f, x0);
        f_derx = feval(f_der, x0);
        x = x0 - fx/f_derx;
    end
    if abs(x-x0) <= tolx * (1 + x0) % Convergenza ottenuta
        iterazioni = i;
    else  % Convergenza non ottenuta
        warning("Il metodo (Newton) non converge");
```

```
        iterazioni = -1;
    end
end

function [iterazioni,x] = metodoCorde(f, f_der, x0, tolx, itmax)
% Utilizzo: [iterazioni,x] = metodoCorde(f, f_der, x0, tolx, itmax)
% Calcola dell'approssimazione di una radice della funzione
% METODO: Corde
%
% Parametri:
%   f: Funzione utilizzata
%   f_der: Derivata della funzione designata
%   x0: Punto di innesco
%   tolx: Tolleranza prefissata
%   itmax: Numero di iterazioni massime
% Restituisce:
%   iterazioni: numero di iterazioni eseguite ( -1 nel caso di una non
%   convergenza)
%   x: Radice approssimata

    fx = feval(f, x0);
    f_derx = feval(f_der, x0);
    x = x0 - fx/f_derx;
    i = 0;
    while (i<itmax) && (abs(x-x0)>tolx*(1+x0))
        i = i+1;
        x0 = x;
        fx = feval(f, x0);
        x = x0 - fx/f_derx;
    end
    iterazioni = i;
    if abs(x-x0)> tolx*(1+x0) % Convergenza non ottenuta
        warning("Il metodo (Corde) non converge");
        iterazioni = -1;
    end
end

function iterazioni = metodoSecanti(f, f_der, x0, tolx, itmax)
    fx = feval(f, x0);
    f_derx = feval(f_der, x0);
    x = x0 - fx/f_derx;
    i = 0;
    while (i<itmax) && (abs(x-x0)>tolx*(1+x0))
        i = i+1;
        fx0 = fx;
        fx = feval(f, x);
        x1 = (fx*x0-fx0*x)/(fx-fx0);
        x0 = x;
        x = x1;
    end

    if abs(x-x0) <= tolx*(1+x0)  % Convergenza ottenuta
        iterazioni = i;
    else % Convergenza non ottenuta
```

```
        warning("Il metodo (Secanti) non converge");
        iterazioni = -1;
    end
end
```

Esercizio 6

Utilizzare le function del precedente esercizio per determinare una approssimazione della radice della funzione $f(x) = x - e^{-x}cos(x - 100)$ per partendo da $x0 = -1$
Per il metodo di bisezione, utilizzare [-1,1], come intervallo di confidenza iniziale.
Tabulare i risultati, in modo da confrontare le iterazioni richieste da ciascun metodo.
Commentare il relativo costo computazionale.

Soluzione

Risultati per l'approssimazione della radice:

Tolx	Bisezione	Newton	Corde	Secanti
0.1	5	2	3	3
0.01	8	3	6	4
0.001	11	3	1	4
0.0001	15	4	15	5
1e-05	18	4	19	5
1e-06	21	4	23	6
1e-07	25	5	27	6
1e-08	28	5	31	6
1e-09	31	5	36	6
1e-10	35	5	40	7
1e-11	38	5	44	7
1e-12	41	6	48	7

Analizziamo i rispettivi costi:

- *Metodo di Bisezione*:
  Il metodo di bisezione effettua due valutazioni di funzione iniziali e una valutazione di funzione per ogni iterazione del metodo. L'ordine di convergenza è lineare verso radici semplici.
- *Metodo di Newton*:
  Questo metodo effettua due valutazioni di funzione iniziali e altrettante due valutazioni ad ogni iterazione. L'ordine di convergenza è quadratico verso radici semplici, per funzioni sufficientemente regolari.
- *Metodo delle Secanti e delle Corde*:
  Questi due metodi, come il metodo di Bisezione, effettuano due valutazioni di funzione iniziali e una valutazione di funzione per ogni iterazione del metodo. L'ordine di convergenza è comunque lineare.

Come possiamo notare dalla tabella il metodo di Newton impiega il minor numero di iterazioni per convergere alla migliore approssimazione; seguito dal metodo delle secanti.
I metodi di Bisezione e delle Corde, invece, impiegano molte piú iterazioni rispetto ai precedenti.

Esercizio 7

Calcolare la molteplicità della radice nulla della funzione $f(x) = x^2 sin(x^2)$.
Confrontare, quindi, i metodi di *Newton*, *Newton modificato*, e di *Aitken*, per approssimarla per gli stessi valori di tol del precedente esercizio (ed utilizzando il medesimo criterio di arresto), partendo da $x0 = 1$.
Tabulare e commentare i risultati ottenuti.

Soluzione

Il codice relativo ad i metodi di *Newton*, *Newton modificato* e *Aitken* è il seguente:

```
function [iterazioni,x] = newton(f, f_der, x0, tolx, itmax)
% Utilizzo [iterazioni,x] = newton_mod(f, f_der, x0, tolx, itmax)
% Calcola dell'approssimazione di una radice della funzione
% Metodo: Newton
% Parametri:
%   f: funzione utilizzata
%   f_der: derivata della funzione utilizzata f
%   x0: punto di innesco
```

```
%   molteplicità: molteplicità nota della radice
%   tolx: tolleranza prefissata
%   itmax: numero massimo di iterazioni
% Restituisce:
%   i: numero di iterazioni eseguite (-1 nel caso non converga)
%   x: radice approssimata
    fx = feval(f, x0);
    f_derx = feval(f_der, x0);
    x = x0 - fx/f_derx;
    i = 0;
    while (i<itmax) && (abs(x-x0)>tolx)
        i = i+1;
        x0 = x;
        fx = feval(f, x0);
        f_derx = feval(f_der, x0);
        x = x0 - fx/f_derx;
    end
    if abs(x-x0)<=tolx
        iterazioni = i;
    else
        % Non abbiamo raggiunto la convergenza entro itmax iterazioni
        iterazioni = -1;
    end
end
```

```
function [iterazioni,x] = newton_mod(f, f_der, x0, molteplicita, tolx, itmax)
% Utilizzo [iterazioni,x] = newton_mod(f, f_der, x0, tolx, itmax)
% Calcola dell'approssimazione di una radice della funzione
% Metodo: Newton Modificato
% Parametri:
%   f: funzione utilizzata
%   f_der: derivata della funzione utilizzata f
%   x0: punto di innesco
%   molteplicità: molteplicità nota della radice
%   tolx: tolleranza prefissata
%   itmax: numero massimo di iterazioni
% Restituisce:
%   i: numero di iterazioni eseguite (-1 nel caso non converga)
%   x: radice approssimata
    fx = feval(f, x0);
    f_derx = feval(f_der, x0);
    x = x0 - fx/f_derx;
    i = 0;
    while (i<itmax) && (abs(x-x0)>tolx)
        i = i+1;
        x0 = x;
        fx = feval(f, x0);
        f_derx = feval(f_der, x0);
        x = x0 - molteplicita*fx/f_derx;
    end
    if abs(x-x0)>tolx
```

```
        % Non abbiamo raggiunto la convergenza entro itmax iterazioni
        i = -1;
    end
    iterazioni = i;
end

function [iterazioni,x] = aitken(f, f_der, x0, tolx, itmax)
% Utilizzo [iterazioni,x] = aitken(f, f_der, x0, tolx, itmax)
% Calcola dell'approssimazione di una radice della funzione
% Metodo: Aitken
% Parametri:
%   f: funzione utilizzata
%   f_der: derivata della funzione utilizzata f
%   x0: punto di innesco
%   molteplicità: molteplicità nota della radice
%   tolx: tolleranza prefissata
%   itmax: numero massimo di iterazioni
% Restituisce:
%   i: numero di iterazioni eseguite (-1 nel caso non converga)
%   x: radice approssimata
    i = 0;
    x = x0;
    vai = 1;
    while (i<itmax) && vai
        i = i + 1;
        x0 = x;
        fx = feval(f, x0);
        f_derx = feval(f_der, x0);
        x1 = x0 - fx/f_derx;
        fx = feval(f, x1);
        f_derx = feval(f_der, x1);
        x = x1 - fx/f_derx;
        x = (x*x0-x1^2)/(x-2*x1+x0);
        vai = abs(x-x0)>tolx;
    end
    if ~vai
        iterazioni = i;
    else
        % Non abbiamo raggiunto la convergenza entro itmax iterazioni
        iterazioni = -1;
    end
end
```

Confrontiamo risultati ottenuti utilizzando i vari metodi:

Tolleranza	It Newton	x Newton	It Newton Mod	x Newton Mod
1.0000e-01	3.0000e+00	2.8789e-01	2.0000e+00	3.2423e-09
1.0000e-02	1.1000e+01	2.8805e-02	3.0000e+00	0.0000e+00
1.0000e-03	1.9000e+01	2.8838e-03	3.0000e+00	0.0000e+00
1.0000e-04	2.7000e+01	2.8870e-04	3.0000e+00	0.0000e+00
1.0000e-05	3.5000e+01	2.8903e-05	3.0000e+00	0.0000e+00
1.0000e-06	4.3000e+01	2.8935e-06	3.0000e+00	0.0000e+00
1.0000e-07	5.1000e+01	2.8968e-07	3.0000e+00	0.0000e+00
1.0000e-08	5.9000e+01	2.9001e-08	3.0000e+00	0.0000e+00
1.0000e-9	6.7000e+01	2.9034e-09	4.0000e+00	NaN
1.0000e-10	7.5000e+01	2.9066e-10	4.0000e+00	NaN
1.0000e-11	8.3000e+01	2.9099e-11	4.0000e+00	NaN
1.0000e-12	9.1000e+01	2.9132e-12	4.0000e+00	NaN

Tolleranza	It Aitken	x Aitken
1.0000e-01	3.0000e+00	6.4929e-19
1.0000e-02	3.0000e+00	6.4929e-19
1.0000e-03	3.0000e+00	6.4929e-19
1.0000e-04	4.0000e+00	0.0000e+00
1.0000e-05	4.0000e+00	0.0000e+00
1.0000e-06	4.0000e+00	0.0000e+00
1.0000e-07	4.0000e+00	0.0000e+00
1.0000e-08	4.0000e+00	0.0000e+00
1.0000e-9	4.0000e+00	0.0000e+00
1.0000e-10	4.0000e+00	0.0000e+00
1.0000e-11	4.0000e+00	0.0000e+00
1.0000e-12	4.0000e+00	0.0000e+00

Siamo nel caso di radici multiple poiché m=4, il problema dunque, si presenta mal condizionato. In questo caso il metodo di Newton ha una convergenza soltanto lineare.
Utilizzando invece il metodo di Newton Modificato, con la molteplicità nota viene ripristinata la convergenza quadratica e il metodo di Newton Modificato converge verso la soluzione corretta con un solo passaggio.
Per ultimo utilizziamo il metodo di accelerazione di Aitken, con il quale si ripristina la convergenza quadratica per il metodo di Newton con molteplicità non nota e radici multiple.

Esercizio 8

Scrivere una function Matlab che, data in ingresso una matrice A, restituisca una matrice, LU, che contenga l'informazione sui suoi fattori L ed U, ed un vettore p contenente la relativa permutazione, della fattorizzazione LU con pivoting parziale di A:

```
function [LU,p] = palu(A)
```

Curare particolarmente la scrittura e l'efficienza della function.

Soluzione

Il codice della funzione `palu(A)` è il seguente:

```
function [LU, p] = palu(A)
% Utilizzo: [LU, p] = palu(A)
% Calcola la fattorizzazione LU della matrice A con
% pivoting parziale di A

% Parametri:
% - A: la matrice da fattorizzare.
% Restituisce:
% - LU: la matrice fattorizzata LU;
% - p: vettore di permutazione

    n=size(A,1);
    p=(1:n);
    for i=1:n-1
        [mi, ki] = max(abs(A(i:n, i)));
        if mi==0 % Controllo il caso in cui la matrice sia singolare
            error('Matrice singolare');
        end
```

```
        ki = ki+i-1;
        if ki>i
            A([i ki], :) = A([ki i], :);
            p([i ki]) = p([ki i]);
        end
        A(i+1:n, i) = A(i+1:n, i)/A(i, i);
        A(i+1:n, i+1:n) = A(i+1:n, i+1:n) -A(i+1:n, i)*A(i, i+1:n);
    end
    LU = A;
end
```

```
function [b]= sistemaLUpivot(A,b,p)
    % [b]= sistemaLUpivot(A,b,p)
    % Calcola la soluzione di Ax=b con A matrice LU con pivoting
    % Parametri:
    %   A: Matrice matrice LU con pivoting (generata da palu)
    %   b: vettore colonna
    % Restituisce:
    %   b: soluzione del sistema
    P = zeros(length(A));
    for i = 1:length(A)
        P(i, p(i)) = 1;
    end
    b = tri_inf_unit(tril(A,-1)+eye(length(A)), P*b);
    b = triangSup(triu(A), b);
end
```

Esercizio 9

Scrivere una function Matlab che, data in ingresso la matrice LU ed il vettore p creati dalla function del precedente esercizio, ed il termine noto del sistema lineare `Ax = b`, ne calcoli la soluzione:

```
function x = lusolve(LU,p,b)
```

Soluzione

Il codice della funzione `lusolve(LU,p,b)` è il seguente:

```
% Esercizio: 9
% Scrivere una function Matlab che, data in ingresso la matrice LU ed il
% vettore p creati dalla function del precedente esercizio (palu), ed il termine
noto del sistema
% lineare Ax = b, ne calcoli la soluzione:
```

```
% function x = lusolve(LU,p,b)

function b = lusolve(LU,p,b)
    % x = lusolve(A,b,p)
    % Calcola la soluzione di Ax=b con A matrice LU con la tecnica del pivoting
    % Parametri:
    %   A: Matrice matrice LU con pivoting (generata dalla funzione palu)
    %   b: vettore colonna
    % Restituisce:
    %   b: soluzione del sistema
    P = zeros(length(LU));
    for i = 1:length(LU)
        P(i, p(i)) = 1;
    end
    b = triangInfUnit(tril(LU,-1)+eye(length(LU)), P*b);
    b = triangSup(triu(LU), b);

end



function b = triangInfUnit(A, b)
    % Utilizzo: b = tri_inf_unit(A, b)
    % Calcola la soluzione del sistema Ax=b con A matrice triangolare inferiore a
    % diagonale unitaria.
    % Parametri:
    %   A: Matrice triangolare inferiore
    %   b: vettore dei termini noti
    % Restituisce:
    %  b: soluzione del sistema

    [n,m] = size(A);
    if n~=m
        error('Errore: Matrice non quadrata.')
    end
    if ~istril(A)
        error('Errore: Matrice non triangolare inferiore')
    end
    if ~all(diag(A)==1)
        error('Errore: Matrice non a diagonale unitaria')
    end
    for i=1:n
        for j=1:i-1
            b(i) = b(i) - A(i,j)*b(j);
        end
        if A(i,i)==0  % Controllo se la matrice è singolare
            error('Errore: La matrice è singolare')
        else
            b(i) = b(i)/A(i,i);
        end
    end
end
```

```
function [b] = triangSup(A, b)
    % Utilizzo: [b] = diagonale(A, b)
    % Calcola la soluzione di Ax=b con A matrice triangolare superiore
    % Parametri:
    %   A: Matrice triangolare superiore
    %   b: vettore colonna
    % Restituisce:
    %  b: soluzione del sistema
    for i=length(A):-1:1
        for j=i+1:length(A)
            b(i)=b(i)-A(i,j)*b(j);
        end
        if A(i,i)==0 % Controllo se la matrice è singolare
            error('Errore: La matrice è singolare')
        else
            b(i)=b(i)/A(i,i);
        end
    end
end
```

Esercizio 10

Scaricare la function *cremat* al sito:

http://web.math.unifi.it/users/brugnano/appoggio/cremat.m

che crea sistemi lineari n × n la cui soluzione è il vettore $x = (1 \ldots n)^T$.
Eseguire, quindi, lo script Matlab:

```
n = 10;
x = zeros(n,15);
 for i = 1:15
       [A,b] = cremat(n,i);
       [LU,p] = palu(A);
       x(:,i) = lusolve(LU,p,b);
end
```

Confrontare i risultati ottenuti con quelli attesi, e dare una spiegazione esauriente degli stessi

Soluzione

Si riporta le tabelle con i risultati del codice precedente:

Iterazione 1	Iterazione 2	Iterazione 3	Iterazione 4	Iterazione 5
1.0000e+00	1.0000e+00	1.0000e+00	1.0000e+00	1.0000e+00
2.0000e+00	2.0000e+00	2.0000e+00	2.0000e+00	2.0000e+00
3.0000e+00	3.0000e+00	3.0000e+00	3.0000e+00	3.0000e+00
4.0000e+00	4.0000e+00	4.0000e+00	4.0000e+00	4.0000e+00
5.0000e+00	5.0000e+00	5.0000e+00	5.0000e+00	5.0000e+00
6.0000e+00	6.0000e+00	6.0000e+00	6.0000e+00	6.0000e+00
7.0000e+00	7.0000e+00	7.0000e+00	7.0000e+00	7.0000e+00
8.0000e+00	8.0000e+00	8.0000e+00	8.0000e+00	8.0000e+00
9.0000e+00	9.0000e+00	9.0000e+00	9.0000e+00	9.0000e+00
1.0000e+01	1.0000e+01	1.0000e+01	1.0000e+01	1.0000e+01

Iterazione 6	Iterazione 7	Iterazione 8	Iterazione 9	Iterazione 10
1.0000e+00	1.0000e+00	1.0000e+00	1.0000e+00	1.0000e+00
2.0000e+00	2.0000e+00	2.0000e+00	2.0000e+00	2.0000e+00
3.0000e+00	3.0000e+00	3.0000e+00	3.0000e+00	3.0000e+00
4.0000e+00	4.0000e+00	4.0000e+00	4.0000e+00	4.0000e+00
5.0000e+00	5.0000e+00	5.0000e+00	5.0000e+00	5.0000e+00
6.0000e+00	6.0000e+00	6.0000e+00	6.0000e+00	6.0000e+00
7.0000e+00	7.0000e+00	7.0000e+00	7.0000e+00	7.0000e+00
8.0000e+00	8.0000e+00	8.0000e+00	8.0000e+00	8.0000e+00
9.0000e+00	9.0000e+00	9.0000e+00	9.0000e+00	9.0000e+00
1.0000e+01	1.0000e+01	1.0000e+01	1.0000e+01	1.0000e+01

Iterazione 11	Iterazione 12	Iterazione 13	Iterazione 14	Iterazione 15
1.0000e+00	9.9999e-01	9.9928e-01	1.0000e+00	9.8668e-01
2.0000e+00	2.0000e+00	2.0021e+00	2.0000e+00	2.0388e+00
3.0000e+00	3.0000e+00	2.9993e+00	3.0000e+00	2.9876e+00
4.0000e+00	4.0000e+00	4.0022e+00	4.0000e+00	4.0411e+00
5.0000e+00	4.9999e+00	4.9944e+00	5.0000e+00	4.8964e+00
6.0000e+00	6.0000e+00	6.0028e+00	6.0000e+00	6.0513e+00
7.0000e+00	7.0000e+00	7.0021e+00	7.0000e+00	7.0394e+00
8.0000e+00	8.0000e+00	8.0002e+00	8.0000e+00	8.0037e+00
9.0000e+00	9.0000e+00	9.0019e+00	9.0000e+00	9.0357e+00
1.0000e+01	1.0000e+01	1.0001e+01	1.0000e+01	1.0014e+01

Nella colonna 13 e 15 si notano delle perturbazioni sui dati in uscita, queste perturbazioni sono dovute al condizionamento nelle matrici.

$$\frac{\| \Delta x \|}{\| x \|} \leq \| A \| * \| A^{-1} \| * (\frac{\| \Delta b \|}{\| b \|} + \frac{\| \Delta A \|}{\| A \|})$$

In dettaglio:

$\frac{\| \Delta x \|}{\| x \|}$ è l'errore relativo nei dati in uscita

$\frac{\| \Delta A \|}{\| A \|}$ e $\frac{\| \Delta b \|}{\| b \|}$ sono gli errori relativi sui dati di ingresso

$\| A \| * \| A^{-1} \|$ indicabile con k(A) è il numero di condizionamento della matrice

Quando k(A) è piccolo si parla di problema ben condizionato, differente è il caso in cui k(A) >> 1, in questo caso invece si parla di problema mal condizionato.
Possiamo notare questo mal condizionamento nelle colonne 13 e 15.

Esercizio 11

Scrivere una function Matlab che, data in ingresso una matrice $A \in R^{m \times n}$, con $m \geq n = rank(A)$, restituisca una matrice, QR.
Che contenga l'informazione sui fattori Q ed R della fattorizzazione QR di A:

`function QR = myqr(A)`

Soluzione

Si riporta il codice della funzione `myqr(A)` di seguito:

```
function QR = myqr(A)
% Utilizzo: [A] = myqr(A)
% Calcola la fattorizzazione QR della matrice A.
% Parametri:
%    A: la matrice da fattorizzare
% Restituisce:
%    QR: una matrice QR scritta con la parte significativa di R e la parte
%       significativa dei vettori di Householder normalizzati con la prima
%       componente unitaria
    [m,n]=size(A); % Inizializzo m ed n con la grandezza di A
    for i=1:n
    alpha = norm(A(i:m, i), 2); % Rank della matrice
    if alpha==0
        error('La matrice non ha rank massimo');
    end
    if(A(i,i))>=0
        alpha = -alpha;
    end
    v1 = A(i,i)-alpha;
    A(i,i) = alpha;
    A(i+1:m, i) = A(i+1:m, i)/v1;
    beta = -v1/alpha;
    A(i:m, i+1:n) = A(i:m, i+1:n) -(beta*[1; A(i+1:m, i)])*([1 A(i+1:m, i)']*...
                    A(i:m,i+1:n));
    end
    QR = A;
end
```

Esercizio 12

Scrivere una function Matlab che, data in ingresso la matrice QR creata dalla function del precedente esercizio, ed il termine noto del sistema lineare `Ax = b`, ne calcoli la soluzione nel senso dei minimi quadrati:

`function x = qrsolve(QR,b)`

Soluzione

Viene mostrato il codice della funzione `qrsolve(QR,b)` di seguito:

```
function x = qrsolve(QR,b)
    % x = qrsolve(QR,b)
    % Calcola la soluzione di Ax=b con A matrice QR
    % Parametri:
    %   A: Matrice QR
    %   b: vettore colonna
    % Restituisce:
    %  b: soluzione del sistema lineare sovradeterminato
    [m,n] = size(QR);
    qtrasp=eye(m);
    for i=1:n
        qtrasp = [eye(i-1) zeros(i-1, m-i+1); zeros(i-1, m-i+1)' ...
                  (eye(m-i+1)-(2/norm([1; QR(i+1:m, i)], 2)^2)*([1; QR(i+1:m, i)]...
                  *[1 QR(i+1:m, i)']))]*qtrasp;
    end
    x = triangSup(triu(QR(1:n, :)), qtrasp(1:n,:)*b);
end
```

Esercizio 13

Scaricare la function *cremat1* al sito:
http://web.math.unifi.it/users/brugnano/appoggio/cremat1.m che crea sistemi lineari m × n, con m ≥ n, la cui soluzione (nel senso dei minimi quadrati) è il vettore x = (1 . . . n)^T
Eseguire, quindi, il seguente script Matlab per testare le function dei precedenti esercizi.

Soluzione

Viene riportata la tabella con i risultati:

m	n	norma	norma(x-xx)
1	5	2.24748192067106e-14	5
2	5	1.75320351399483e-14	6
3	5	1.61223344547346e-14	7
4	5	5.37402993480137e-14	8
5	5	5.37054250957417e-15	9
6	5	8.62551123839374e-15	10
7	5	1.23034552927593e-14	11
8	5	4.37377147912526e-15	12
9	5	5.86740001550182e-15	13
10	5	6.14646579662655e-15	14
11	5	6.71294862268067e-15	15
12	6	1.54193791514084e-13	6
13	6	1.87233114247782e-14	7
14	6	6.49661685660984e-14	8
15	6	3.3083901009315e-15	9
16	6	9.03587868944547e-15	10
17	6	1.72567375746672e-14	11
18	6	1.04242788572733e-14	12
19	6	6.61771155244849e-15	13
20	6	1.11249665373964e-14	14
21	6	2.04293103816182e-14	15
22	6	8.25157905384712e-15	16

23	7	4.96224983026092e-14	7
24	7	1.06572158103885e-13	8
25	7	1.92872294697368e-14	9
26	7	1.96719490091217e-14	10
27	7	2.35241562019244e-14	11
28	7	2.94207006757785e-14	12
29	7	8.59114651514807e-15	13
30	7	1.65482829223001e-14	14
31	7	2.79714516348279e-14	15
32	7	1.0981671588864e-14	16
33	7	1.48570906318214e-14	17
34	8	1.26952825645372e-13	8
35	8	3.18082287270531e-14	9
36	8	4.76175677732291e-14	10
37	8	2.96080057903009e-14	11
38	8	3.43690692906712e-14	12

m	**n**	**norma**	**norma(x-xx)**
39	8	1.20032515914493e-14	13
40	8	1.3427733265506e-14	14
41	8	3.68787947797593e-14	15
42	8	1.83438948940332e-14	16
43	8	2.59785070850544e-14	17
44	8	2.1302689071571e-14	18
45	9	3.54361206919172e-14	9
46	9	6.76766312379184e-14	10
47	9	5.3532555080452e-14	11
48	9	1.02492287656922e-13	12
49	9	1.53580405866465e-14	13
50	9	5.34349545934035e-14	14
51	9	4.16272937617989e-14	15
52	9	2.76550293366644e-14	16
53	9	3.48348286554738e-14	17
54	9	2.89938308624056e-14	18
55	9	3.14224498798056e-14	19
56	10	9.68300345595875e-14	10
57	10	8.36283185233534e-14	11

m	n	norma	norma(x-xx)
58	10	6.53475423806255e-14	12
59	10	3.04761781435309e-14	13
60	10	8.78887916759733e-14	14
61	10	4.67845400655906e-14	15
62	10	2.23637611753954e-14	16
63	10	3.92567074798158e-14	17
64	10	2.89836261085267e-14	18
65	10	2.6052182275762e-14	19
66	10	3.70929151223012e-14	20

Esercizio 14

Scrivere un programma che implementi efficientemente il calcolo del polinomio interpolante di Lagrange su un insieme di ascisse distinte

Soluzione

Si riporta in seguito il codice per il calcolo del polinomio interpolante di Lagrange:

```
function y = lagrange(xi, fi, x)
% y = lagrange(xi, fi, x)
% Calcolo del polinomio interpolante per le coppie di dati (xi,fi) nei
% punti del vettore x, con il metodo di lagrange.
% Metodo utilizzato: Lagrange.
%
% Parametri:
% xi: ascisse di interpolazione
% fi: valori della funzione nelle ascisse di interpolazione
% x: ascisse dove valutare il polinomio, Metodo: lagrange
% Restituisce:
% y: valutazione delle ascisse in x
%
   if length(xi) - length(fi) ~= 0
       error("La lunghezza dei vettori xi e fi non é la stessa.")
   end
   if isempty(x)
      error("Vettore x vuoto.")
   end
   n = length(xi)-1;
   for i=1:n % Controllo che tutte le ascisse siano distinte
        for j=i+1:n
```

```
            if xi(i)==xi(j)
                error("Le ascisse non sono tutte distinte");
            end
        end
    end
    y = zeros(size(x));
    % per ogni ascissa in x
    for i=1:length(x)
        % calcolo del valore del polinomio
        for k=1:n+1
            lkn = 1;
            % calcolo di lkn
            for j=1:n+1
                if (j~=k)
                    lkn = lkn.*((x(i)-xi(j))/(xi(k)-xi(j)));
                end
            end
            y(i) = y(i) + fi(k)*lkn;
        end
    end
    return
end
```

Esercizio 15

Scrivere un programma che implementi efficientemente il calcolo del polinomio interpolante di Hermite su un insieme di ascisse distinte

Soluzione

Si riporta in seguito il codice per il calcolo del polinomio interpolante di Lagrange:

```
function y = hermite(xi, fi, fi1, x)
% y = hermite(xi, fi, fi1, x)
% Funzione che calcola il polinomio interpolante per una data coppia di dati
% (xi,fi) nei punti del vettore x, utilizzando il metodo di Hermite
%
% Parametri:
%    xi: ascisse di interpolazione
%    fi: valori della funzione e la sua derivata nelle ascisse di interpolazione
%    x: ascisse dove valutare il polinomio, con il metodo di hermite
% Restituisce:
%    y: valutazione delle ascisse in x
%
   if (length(xi) - length(fi) ~= 0) | (length(xi) - length(fi1) ~= 0)
       error("La lunghezza dei vettori xi, fi e fi1 deve essere la medesima")
```

```
   end
   if isempty(x)
      error("Il vettore x non deve essere vuoto")
   end
   for u=1:length(x)-1
       if(x(u) == x(u+1))
           fprintf("Ascisse uguali in posizione %d - %d \n",x(u),x(u+1));
           error("Le ascisse devono essere distinte");
       end
   end
   xi = reshape([xi; xi], [], 1)';
   fi = reshape([fi; fi1], [], 1)';
   n = length(xi)-1;
   % Calcolo differenze divise
   for i=n:-2:3
       fi(i) = (fi(i)-fi(i-2))/((xi(i)-xi(i-1)));
   end
   for j=2:n
       for i=n+1:-1:j+1
           fi(i) = (fi(i)-fi(i-1))/((xi(i)-xi(i-j)));
       end
   end
   % Algoritmo di Horner
   y = fi(n+1)*ones(size(x));
   for k=1:length(x)
       for i=n:-1:1
           y(k) = y(k)*(x(k)-xi(i))+fi(i);
       end
   end
   return
end
```

Esercizio 16

Scrivere un programma che implementi efficientemente il calcolo di una spline cubica naturale interpolante su una partizione assegnata.

Soluzione

Si riporta in seguito il codice per il calcolo di una spline cubica naturale:

```
function y = splineCubicaNaturale(xi, fi, x)
% Utilizzo: splineNaturale = naturalSpline(xi, fi, x)
% Funzione che calcola e valuta i valori della spline cubica naturale
% relativa alle coppie di dati assegnati.
%
% Parametri:
%   xi: punti di interpolazione
```

```
%   fi: valori della funzione, valutati nelle ascisse xi
%   x: punti di valutazione della spline
%
% Restituisce:
%   splineNaturale: valori di interpolazione della spline cubica naturale
%

    n = length(xi);
    splineNaturale = zeros(n, 1)';
    widthI = xi(2 : n) - xi(1 : n - 1);
    subDiag = (widthI(1 : end - 1)) ./ (widthI(1 : end - 1) + widthI(2 : end));
    superDiag = (widthI(2 : end)) ./ (widthI(1 : end - 1) + widthI(2 : end));
    divdiff = (fi(2 : n) - fi(1 : n - 1)) ./ widthI;
    divdiff = 6 * ((divdiff(2 : end) - divdiff(1 : end - 1)) ./ (xi(3 : end) - xi(1
: end - 2)));
    m = sistemaSplineNaturale(subDiag, superDiag, divdiff);
    [primaConst, secondaConst] = costantiIntegrazione(m, xi,fi, widthI);
    k=2;
    for j = 1 : length(x)
        for i = 2 : length(xi)
            if x(j) <= xi(i)
                k = i;
                break;
            end
        end
        y(j) = (((x(j) - xi(k - 1)) ^ 3) * m(k) + ...
          ((xi(k) - x(j)) ^ 3) * m(k - 1)) / ...
          (6 * widthI(k - 1)) + secondaConst(k - 1) * ...
          (x(j) - xi(k - 1)) + primaConst(k - 1);
    end
    return
end


function m = sistemaSplineNaturale(subDiag, superDiag, divDiff)
    % m = sistemaSplineNaturale(subDiagCoeff, superDiagCoeff, divdiff)
    % Funzione che ritorna i coefficienti necessari per il calcolo della spline
    % cubica
    %
    % Parametri:
    %   subDiag: coeffiencenti della sotto diagonale della matrice
    %   superDiag: coeffiencenti della sopra diagonale della matri
    %   diffDiv: differenze divise
    %
    % Restituisce:
    %   m: coefficienti necessari a calcolare l'espressione della spline
    %    cubica
    %
    n = length(superDiag) + 1;
    u(1) = 2;
    l = zeros(1, n - 2);
    m = zeros(1, n - 1);
    for i = 2 : n - 1
        l(i) = subDiag(i) / u(i - 1);
```

```
        u(i) = 2 - l(i) * superDiag(i - 1);
    end
    f(1) = divDiff(1);
    for i = 2:n - 1
        f(i) = divDiff(i) - l(i) * f(i - 1);
    end
    m(n - 1) = f(n - 1) / u(n - 1);
    for j = n - 2 : - 1 : 1
        m(j) = (f(j) - superDiag(j + 1) * m(j + 1)) / u(j);
    end
    m = [0 m 0];
    return
end

function [primaConst, secondaConst] = costantiIntegrazione(m, xi, fi, valI)
    % Utilizzo[ri, qi] = costantiIntegrazione(m, fi, xi, widthI)
    % Funzione che ritorna le costanti di integrazione della spline.
    %
    % Parametri:
    %   m: fattore m calcolato
    %   fi: valori della funzione, valutati nelle ascisse xi
    %   xi: ascisse di interpolazione
    %   valI: valore dell'i-esimo intervallo
    %
    % Restituisce:
    %   primaConst: valore della costante prima integrazione
    %   secondaConst: valore della costane seconda integrazione

    n = length(xi);
    primaConst = zeros(1, n-1);
    secondaConst = primaConst;
    for i = 2 : n
        primaConst(i - 1) = fi(i - 1) - (valI(i - 1) ^ 2) / 6 * m(i - 1);
        secondaConst(i - 1) = (fi(i) - fi(i - 1)) / ...
                    valI(i - 1) - valI(i - 1) / 6 * (m(i) - m(i - 1));
    end
    return
end
```

Esercizio 17

Scrivere un programma che implementi il calcolo di una spline cubica not-a-knot interpolante su una partizione assegnata.

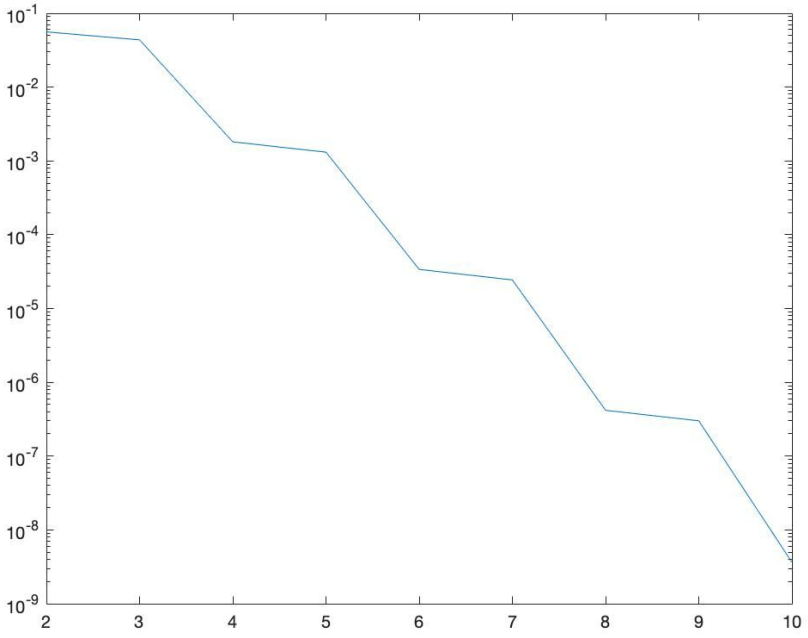
(Facoltativo)

Esercizio 18

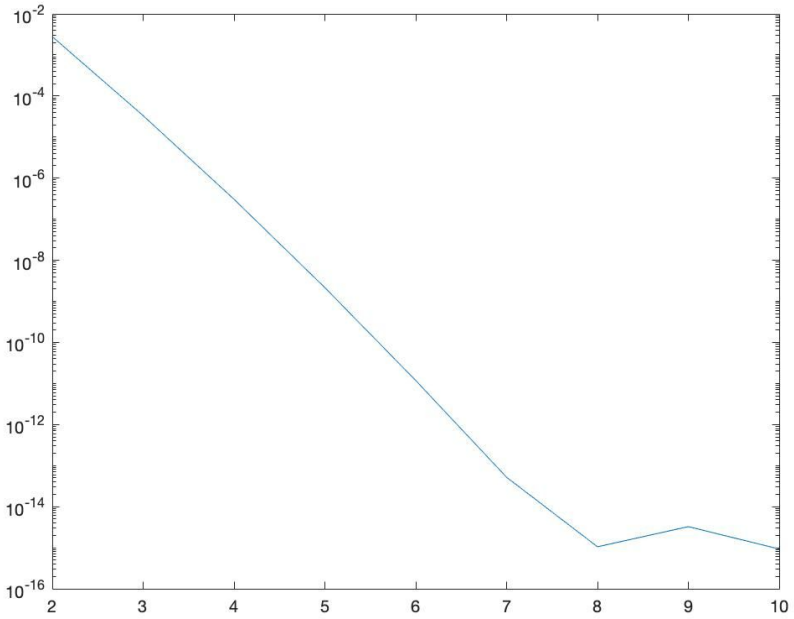
Confrontare i codici degli esercizi 14–17 per approssimare la funzione f(x) = sin(x) sulle ascisse xi = iπ/n, i = 0, 1, . . . , n, per n = 1, 2, . . . , 10. Graficare l'errore massimo di approssimazione verso n (in semilogy), calcolato su una griglia uniforme di 10001 punti nell'intervallo [0, π].

Soluzione

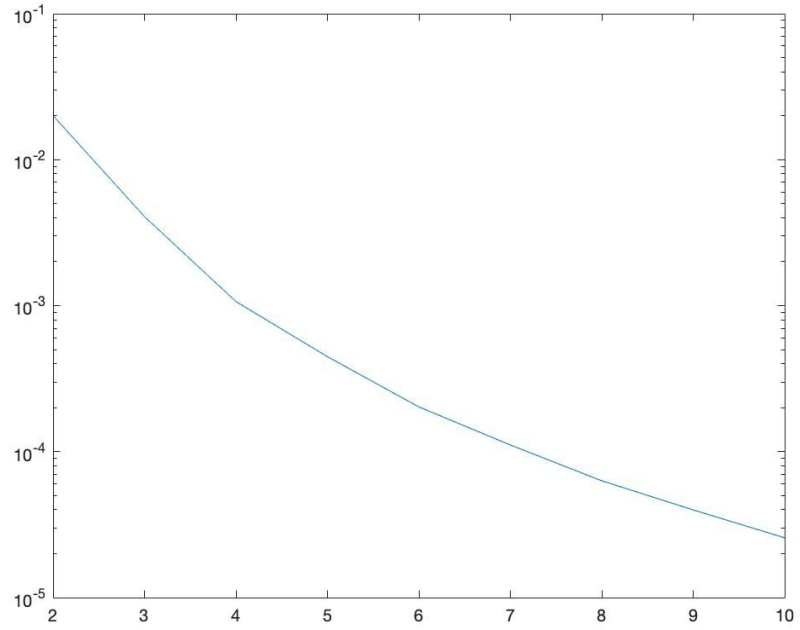
Per ottenere i seguenti grafici ho utilizzato il codice degli esercizi 14-16 riportati precedentemente. Sull'asse Y abbiamo i valori dell'errore massimo, mentre sull'asse X abbiamo i valori di *n.* Si mostrano in seguito i risultati ottenuti:



Valori dell'errore massimo ottenuto valutando la funzione $f(x)$ utilizzando il Metodo di Lagrange.



Valori dell'errore massimo ottenuto valutando la funzione $f(x)$ utilizzando il Metodo di Hermite.



Valori dell'errore massimo ottenuto valutando la funzione $f(x)$ utilizzando la Spline Cubica Naturale.

Esercizio 19

Calcolare (numericamente) la costante di Lebesgue per i polinomi interpolanti di grado n = 2, 4, 6, . . . , 40, sia sulle ascisse equidistanti che su quelle di Chebyshev (utilizzare 10001 punti equispaziati per valutare la funzione di Lebesgue).
Graficare convenientemente i risultati ottenuti.
Spiegare, quindi, i risultati ottenuti approssimando la funzione

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad x \in [-5, 5]$$

Soluzione

Si mostrano in seguito la funzione per il calcolo della costante di Lebesgue:

```
function lebEqui = lebesgueEquidistanti(f,z,lebesgueConstanti)
% Utilizzo: lebesgueEquidistanti(f,z,lebesgueConstanti)
% Funzione che calcola la costante di lebesgue per polinomi
% interpolanti di grado n:2...40 su ascisse equidistanti
%
% Parametri:
%   f: Funzione da approssimare
%   z: punti di valutazione
%   lebesgueConstanti: vettore per memorizzare le costanti calcolate
%
iteraz=0;
    for n=2:2:40
        xi = zeros (1 , n+1);
        fxi = zeros(1,n+1);
        for i = 1:n+1
            xi(i) = -5+(i-1)*(10/n);
        end
        for i = 1:n+1
            fxi(i) = feval(f, xi(i));
        end
        fx=zeros(1, 10001); %valori nelle 10001 ascisse uniformi
        lebesgueConstanti(n/2) = norm(lebesgue(xi),inf);
        for k=1:10001
            fx(k)=feval(f,z(k));
        end
        y=lagrange(xi, fxi,z);
        err=max(abs(fx-y'));
        iteraz = iteraz +1;
        rst(iteraz,1) = n;
        rst(iteraz,2)= err;
        rst(iteraz,3)=lebesgueConstanti(n/2);
    end
    x=2:2:40
    plot(x,lebesgueConstanti);
```

```
    title('Costante di Lebesgue (Ascisse Equidistanti)');
     colNames = {'n','errore','norma'};
tableResult = array2table(rst,...,
    'VariableNames',colNames);
disp(tableResult);
end

function lebCheb = lebesgueCheby(f,z,lebesgueConstanti)
% Utilizzo: lebesgueEquidistanti(f,z,lebesgueConstanti)
% Funzione che calcola la costante di lebesgue per polinomi
% interpolanti di grado n:2...40 su ascisse equidistanti
%
% Parametri:
%   f: Funzione da approssimare
%   z:
%   lebesgueConstanti: vettore per memorizzare le costanti calcolate
%
    iteraz = 0;
    for n=2:2:40
        xi = zeros (1 , n+1);
        fxi = zeros(1,n+1);
        for i = 1:n+1
            xi = chebyshev(n, -5, 5);
            xi = sort(xi);
        end
        for i = 1:n+1
            fxi(i) = feval(f, xi(i));
        end
        fx=zeros(1, 10001); %valori nelle 10001 ascisse uniformi
        lebesgueConstanti(n/2) = norm(lebesgue(xi),inf);
        for k=1:10001
            fx(k)=feval(f,z(k));
        end
        y=lagrange(xi, fxi,z);
        err=max(abs(fx-y'));
        iteraz = iteraz +1;
        rst(iteraz,1) = n;
        rst(iteraz,2)= err;
        rst(iteraz,3)=lebesgueConstanti(n/2);
    end
    x=2:2:40
    plot(x,lebesgueConstanti);
    title('Costante di Lebesgue (Ascisse di Chebyshev)');
    colNames = {'n','errore','norma'};
tableResult = array2table(rst,...,
    'VariableNames',colNames);
disp(tableResult);
end
```

```
function leb = lebesgue(puntiInterp)
% Utilizzo: leb = lebesgue(puntiInterp)
% Funzione per il calcolo della costante di lebesgue
%
% Parametri:
% puntiInterp: punti di interpolazione
%
% Restituisce:
% y: Costante di lebesgue
       npunti = length(puntiInterp);
       lin=zeros(10001,1);
       x=linspace(-5,5,10001);
       for j=1:10001
           k=0;
           for i=1:npunti
               val=abs(lagrangePol(puntiInterp,x(j),i));
               k=k+val;
           end
           lin(j,1)=k;
       end
           leb=lin;
return
end


function valPol = lagrangePol(z,x,i)
% Utilizzo: lagrangePol(z,x,i)
% Funzione per il calcolo dell' i-esimo polinomio di Lagrange
%
% Parametri:
%
%   z: punti di interpolazione
%   x: punto su cui effettuare la valutazione
%   i: indice del polinomio
%
% Restituisce:
%   valPol: Valore del polinomio in x

    n = length(z); m = length(x);
    valPol = prod(repmat(x,1,n-1)-repmat(z([1:i-1,i+1:n]),m,1),2)/...
    prod(z(i)-z([1:i-1,i+1:n]));
return
end
```

Tabella rappresentativa dell'errore massimo nell'approssimazione del polinomio di grado ***n*** con le ***ascisse di Chebyshev***:

n	**errore**	**norma**
2	6.0060e-01	1.6667e+00
4	4.0202e-01	1.9889e+00
6	2.6423e-01	2.2022e+00
8	1.7084e-01	2.3619e+00
10	1.0915e-01	2.4894e+00
12	6.9216e-02	2.5957e+00
14	4.6602e-02	2.6867e+00
16	3.2614e-02	2.7664e+00
18	2.2492e-02	2.8371e+00
20	1.5334e-02	2.9008e+00
22	1.0359e-02	2.9587e+00
24	6.9484e-03	3.0118e+00
26	4.6349e-03	3.0608e+00
28	3.0782e-03	3.1063e+00
30	2.0616e-03	3.1487e+00
32	1.4017e-03	3.1885e+00
34	9.4933e-04	3.2260e+00
36	6.4075e-04	3.2613e+00
38	4.3121e-04	3.2948e+00
40	2.8946e-04	3.3267e+00

Tabella rappresentativa dell'errore massimo nell'approssimazione del polinomio di grado ***n*** con le ***ascisse equidistanti***:

n	**errore**	**norma**
2	6.4623e-01	1.2500e+00
4	4.3836e-01	2.2078e+00
6	6.1695e-01	4.5493e+00
8	1.0452e+00	1.0946e+01
10	1.9157e+00	2.9900e+01
12	3.6634e+00	8.9325e+01
14	7.1949e+00	2.8321e+02
16	1.4394e+01	9.3453e+02
18	2.9190e+01	3.1714e+03
20	5.9822e+01	1.0987e+04
22	1.2362e+02	3.8671e+04
24	2.5721e+02	1.3785e+05
26	5.3817e+02	4.9651e+05
28	1.1314e+03	1.8038e+06
30	2.3883e+03	6.6011e+06
32	5.0590e+03	2.4309e+07
34	1.0749e+04	9.0009e+07
36	2.2901e+04	3.3489e+08
38	4.8907e+04	1.2512e+09
40	1.0467e+05	4.6924e+09

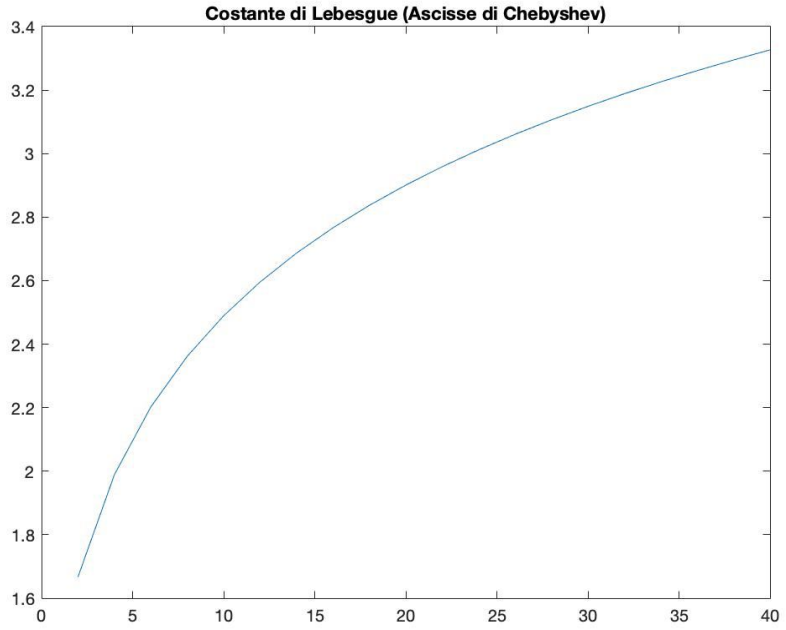


Grafico rappresentativo dei valori assunti dalla costante di Lebesgue con ascisse di Chebyshev per polinomi interpolanti di grado n = 2,4,...,40.

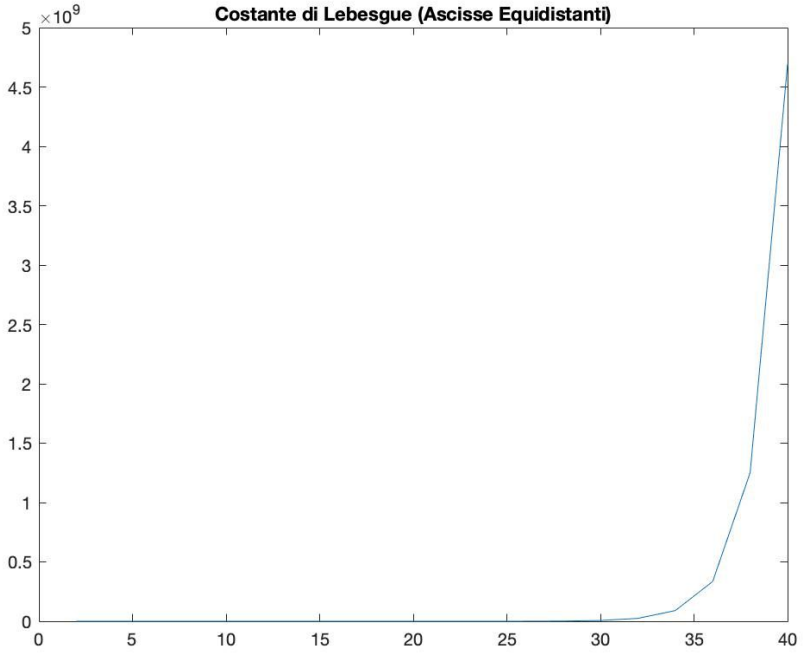


Grafico rappresentativo dei valori assunti dalla costante di Lebesgue con ascisse equidistanti per polinomi interpolanti di grado n = 2,4,...,40.

Dai grafici ottenuti notiamo che la costante di Lebesgue ha una crescita esponenziale quando utilizziamo come ascisse di interpolazione ascisse equidistanti, mentre utilizzando le ascisse di Chebyshev la crescita della costante di Lebesgue è logaritmica.

Esercizio 20

Con riferimento al precedente esercizio, tabulare il massimo errore di approssimazione (calcolato come sopra indicato), sia utilizzando le ascisse equidistanti che quelle di Chebyshev summenzionate, relativo alla spline cubica naturale interpolante f(x) su tali ascisse.

Soluzione

Si riporta la tabella rappresentativa dei massimi errori di approssimazione facendo uso delle ascisse di Chebyshev, relativa alla spline cubica naturale interpolante tali ascisse.

n	errore
0	0.00000000000000e+00
2	1.66801884123322e+00
4	2.36333087904880e+01
6	1.23813862105251e+01
8	1.37230832603283e+01
10	1.99696716295697e+00
12	8.72055877352552e+00
14	8.99444490393491e+00
16	1.15412817296127e+01
18	1.39494563894473e+01
20	1.66701539239381e+01
22	1.96949127548847e+01
24	2.29780622330274e+01
26	2.65460939278198e+01
28	3.03869404084138e+01
30	3.45044878860488e+01

32	3.88971574605510e+01
34	4.35652015167386e+01
36	4.85083907881600e+01
38	5.37266704542546e+01
40	5.92199678303044e+01

Si riporta la tabella rappresentativa dei massimi errori di approssimazione facendo uso di ascisse equidistanti, relativa alla spline cubica naturale interpolante tali ascisse.

n	**errore**
0	0.00000000000000e+00
2	6.01194546811499e-01
4	2.79313407519679e-01
6	1.29300088354098e-01
8	5.60738528785616e-02
10	2.19738257495818e-02
12	6.90880143772588e-03
14	2.48286347571702e-03
16	3.74540283339586e-03
18	3.71799871804135e-03
20	3.18285764317361e-03
22	2.52965308897213e-03
24	1.92579236161883e-03
26	1.42704786366254e-03
28	1.03905328085696e-03
30	8.24362333267215e-04
32	6.55498681241262e-04
34	5.23708228635011e-04
36	4.21003570779233e-04
38	3.40837796214299e-04
40	2.77976540596248e-04

Esercizio 21

Uno strumento di misura ha una accuratezza di 10^{-6} (in opportune unità di misura). I dati misurati nelle posizioni x_i sono dati da y_i , come descritto dalla seguente tabella:

i	x_i	y_i
0	0.010	1.003626
1	0.098	1.025686
2	0.127	1.029512
3	0.278	1.029130
4	0.547	0.994781
5	0.632	0.990156
6	0.815	1.016687
7	0.906	1.057382
8	0.913	1.061462
9	0.958	1.091263
10	0.965	1.096476

Calcolare il grado minimo, ed i relativi coefficienti, del polinomio che meglio approssima i precedenti dati nel senso dei minimi quadrati con una adeguata accuratezza.
Graficare convenientemente i risultati ottenuti.

Soluzione

Si mostrano in seguito la funzione per il calcolo del grado minimo nel senso dei minimi quadrati:

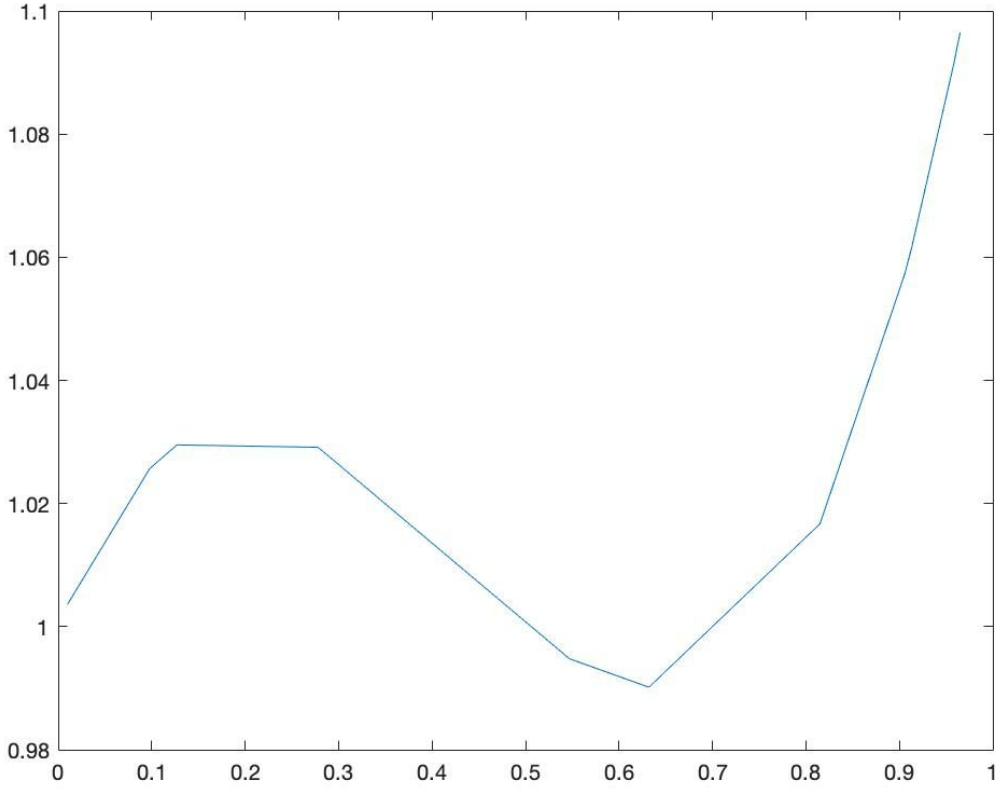
```
function gradoMinimo = calcolaGradoMinimo(n,xi,yi,tol)
% Utilizzo: gradoMinimo = calcolaGradoMinimo(n,xi,yi,tol)
% Calcola il grado minimo del polinomio nel senso dei minimi quadrati
%
% Parametri:
%   n: Grado della matrice Vandermonde n*n
%   xi: Ascisse per la creazione della matrice di Vandermonde
%   yi: Valore assunto dalla
%   tol: tolleranza prefissata
%
% Restituisce:
```

```
%   gradoMinimo: grado minimo calcolato nel senso dei minimi quadrati

    for gradoMinimo=1:10
        V=vandermondeMatrix(n,gradoMinimo,xi);
        QR=myqr(V);
        a=qrsolve(QR,yi);
        if(norm(V*a-yi,2)<tol)
            break;
        end
    end
    gradoMinimo=gradoMinimo-1;
    return
end


function VanderMatrix = vandermondeMatrix(n,m,xi)
% Utilizzo: VanderMatrix = vandermonde(m,xi)
% Funzione per la creazione della matrice di vandermonde V
% partendo da un vettore xi
%
% Parametri:
%   n: numero righe di V
%   m: numero colonne di V
%   xi: elementi noti per la costruzione  della matrice
%
% Resistuisce:
%   V: matrice di Vandermonde
    for i=1:n-1
        for j=i+1:n
            if(xi(i)==xi(j))
                error("Errore: Le ascisse non sono tutte distinte");
            end
        end
    end
    for i=1:n
        for j=1:m
            z=j-1;
            VanderMatrix(i,j)=xi(i)^z;
        end
    end
    return
end
```

Il polinomio ha grado minimo 3 e il sottostante grafico riporta l'andamento delle coppie (x_i,y_i) delle misure sperimentali:



Esercizio 22

Scrivere due functions che implementino efficientemente le formule adattive dei trapezi e di Simpson.

Soluzione

Funzione che implementa la formula adattiva di Simpson:

```
function If = simpad( a, b, f, tol, fa, f1, fb )
% If = simpad( a, b, f, tol)
% Funzione che calcola ricorsivamente l'integrale della funzione data,
% in un intervallo specificato, utilizzando la formula adattiva di Simpson
%
% Parametri:
%   a: estremo sinistro dell?intervallo
%   b: estremo destro dell?intervallo
%   f: funzione integranda
%   tol: tolleranza prefissata ( Obbligatoriamente diversa da 0 )
% Restituisce:
%  If: Approssimazione dell?integrale definito della funzione in un dato
%  intervallo

   if tol >= 0, error("Tolleranza specificata non corretta"), end
   if a >= b, error("Intervallo di integrazione non corretto."), end
   x1 = (a + b) / 2; % Calcolo del punto medio x1
   if nargin <= 4 % Prima iterazione non ricorsiva
       fa = f(a); % Valutazione della funzione nei punti a,b,x1
       fb = f(b);
       f1 = f(x1);
    end
    h = (b - a) / 6;
    x2 = (a + x1) / 2;
    x3 = (x1 + b) / 2;
    f2 = f(x2);
    f3 = f(x3);
    I1 = h*(fa+4*f1+fb); % Formula di Simpson
    If = .5*h*(fa+4*f2+2*f1+4*f3+fb); % Formula di Simpson Adattiva
    e = abs(If-I1)/15; % Calcolo dell?errore
    if e>tol % Chiamata ricorsiva alla funzione Simpad con nuovi intervalli
       If = simpad( a, x1, f, tol/2, fa, f2, f1) ...
           + simpad( x1, b, f, tol/2, f1, f3, fb);
    end
end
```

Funzione che implementa la formula adattiva di Trapezi:

```
function If = trapad( a, b, f, tol, fa, fb )
% If = trapad( a, b, f, tol)
% Funzione che calcola ricorsivamente l'integrale della funzione data,
% in un intervallo specificato, utilizzando la formula dei Trapezi adattiva
%
% Parametri:
%   a: estremo sinistro dell'intervallo
%   b: estremo destro dell'intervallo
%   f: funzione integranda
%   tol: tolleranza prefissata ( Obbligatoriamente diversa da 0 )
% Restituisce:
%   If: Approssimazione dell?integrale definito della funzione in un dato
%   intervallo
      if tol >= 0, error("Tolleranza specificata non corretta"), end
      if a >= b, error("Intervallo di integrazione non corretto."), end
      if nargin<=4 % Prima iterazione non ricorsiva
        fa = f(a); % Valutazione della funziona in a e b
        fb = f(b);
      end
      h = b-a;
      x1 = (a+b)/2; % Calcolo del punto medio fra a e b
      f1 = f(x1);
      I1 = (h/2)*(fa+fb); % Formula dei Trapezi
      If = (I1+h*f1)/2; % Formula dei Trapezi adattiva
      e = abs(If-I1)/3;
      if e>tol
        If =  trapad( a, x1, f, tol/2, fa, f1) ...
        + trapad( x1, b, f, tol/2, f1,fb);
      end
end
```

Esercizio 23

Sapendo che:

$$I(f) = \int_{0}^{atan(30)} (1 + tan2(x))dx$$

Tabulare il numero dei punti richiesti dalle formule adattive dei trapezi e di Simpson per approssimare $I(f)$, utilizzate con tolleranze $tol = 10^{-i}\ i = 2, ..., 8$ assieme ai relativi errori.

Soluzione

Nelle funzioni precedentemente esposte, è stata aggiunta una variabile globale di nome *count*, essa permette di tenere traccia del numero di punti necessari per la valutazione della funzione.
Per una migliore fruibilità della variabile, è stata usata la funzione :

```
assignin('base',’nPoint’,count)
```

Questa funzione permette di assegnare la variabile, nel nostro caso globale, countGlobal alla variabile ’nPoint’ presente nel workspace ’base’.

```
function If = trapad( a, b, f, tol, fa, fb )
% Utilizzo: If = trapad( a, b, f, tol)
% Calcola ricorsivamente l'integrale della funzione, nell'intervallo prescelto,
% usando la formula dei trapezi adattiva.
%
% Input:
%   a: estremo sinistro
%   b: estremo destro
%   f: funzione integranda
%   tol: tolleranza prefissata
% Output:
%  If: l’approssimazione dell’integrale definito della funzione

    % Controlli di robustezza:
    % - a deve essere minore di b
    if a>=b
        error("Intervallo di integrazione non corretto.")
    end
    global count;
    if nargin<=4
        fa = f(a);
        fb = f(b);
        count = 2;
    end
    h = b-a;
    x1 = (a+b)/2;
    f1 = f(x1);
    count = count + 1;
    I1 = (h/2)*(fa+fb);
    If = (I1+h*f1)/2;
    e = abs(If-I1)/3;
    if e>tol
       If =  trapad( a, x1, f, tol/2, fa, f1) + trapad( x1, b, f, tol/2, f1, fb);
    end
    assignin('base',"nPoint",count)
end
```

```
function If = simpad( a, b, f, tol, fa, f1, fb )
% If = simpad( a, b, f, tol)
% Funzione che calcola ricorsivamente l'integrale della funzione data,
```

```
% in un intervallo specificato, utilizzando la formula adattiva di Simpson
%
% Parametri:
%   a: estremo sinistro dell?intervallo
%   b: estremo destro dell?intervallo
%   f: funzione integranda
%   tol: tolleranza prefissata ( Obbligatoriamente diversa da 0 )
% Restituisce:
%  If: Approssimazione dell?integrale definito della funzione in un dato
%  intervallo

   if tol <= 0, error("Tolleranza specificata non corretta"), end
   if a >= b, error("Intervallo di integrazione non corretto."), end
   x1 = (a + b) / 2; % Calcolo del punto medio x1
   global count;
   if nargin <= 4 % Prima iterazione non ricorsiva
       fa = f(a); % Valutazione della funzione nei punti a,b,x1
       fb = f(b);
       f1 = f(x1);
     count = 2; % Inizializzo count a 2 per i punti passati come arg.
    end
    h = (b - a) / 6;
    x2 = (a + x1) / 2;
    x3 = (x1 + b) / 2;
    count = count + 3; % Aggiungo a count il calcolo dei punti x1,x2,x3
    f2 = f(x2);
    f3 = f(x3);
    I1 = h*(fa+4*f1+fb); % Formula di Simpson
    If = .5*h*(fa+4*f2+2*f1+4*f3+fb); % Formula di Simpson Adattiva
    e = abs(If-I1)/15; % Calcolo dell?errore
    if e>tol % Chiamata ricorsiva alla funzione Simpad con nuovi intervalli
       If1 = simpad( a, x1, f, tol/2, fa, f2, f1);
       If2 = simpad( x1, b, f, tol/2, f1, f3, fb);
       If = If1 + If2;
    end
    assignin('base',"nPoint",count);
end
```

Tabella relativa alla funzione che implementa la formula adattiva di Simpson:

Toll.	Valore ottenuto	Punti necessari	Err. Relativo
10^-2	30.0024	71	$8.000 * 10^{-5}$
10^-3	30.0006	113	$2.000 * 10^{-5}$
10^-4	30.0001	203	$3.3333 * 10^{-6}$
10^-5	30.0000	371	0
10^-6	30.0000	635	0

10^-7	30.0000	1145	0
10^-8	30.0000	2045	0

Tabella relativa alla funzione che implementa la formula adattiva dei Trapezi:

Toll.	Valore ottenuto	Punti necessari	Err. Relativo
10^-2	30.0048	375	$1.6000 * 10^{-4}$
10^-3	30.0006	1181	$2.0000 * 10^{-5}$
10^-4	30.0001	3687	$3.3333 * 10^{-6}$
10^-5	30.0000	11883	0
10^-6	30.0000	37273	0
10^-7	30.0000	116747	0
10^-8	30.0000	375793	0

La funzione *trapad*, che implementa la formula adattiva dei trapezi, nella prima iterazione usa i due punti passati come argomenti della funzione 'a' e 'b', in seguito calcola un nuovo punto medio di 'a' e 'b' chiamato 'x1'.
Nelle successive chiamate, verrà calcolato solamente un nuovo punto medio del nuovo intervallo.

La funzione *simpad*, che implementa la formula di Simpson adattiva, nella prima iterazione usa 3 punti 'a','b' e 'x1' che viene calcolato, essendo il punto medio di 'a' e 'b'; inoltre vengono calcolati altri due punti 'x2' ed 'x3' rispettivamente punti medi fra 'a' ed 'x1' e tra 'x1' ed 'b'.
Nelle successive chiamate di funzione, solo i punti 'x1', 'x2' ed 'x3' verranno calcolati nuovamente.

Esercizio 24

Scrivere una function che implementi efficientemente il metodo delle potenze.

Soluzione

Il codice della function è il seguente:

```
function [lambda, i] = metodoPotenze(A, tol, x0, maxit)
```

```
% [lambda, i] = metodoPotenze(A, [tol, [x0, [maxit]]])
% Restituisce l'autovalore dominante della matrice A e il numero di
% iterazioni necessarie per calcolarlo.
%
% Parametri:
%    - A: matrice utilizzata per il calcolo
%    - [tol]: tolleranza dell' approssimazione (specificata o omessa)
%    - [x0]: vettore di partenza (specificato o omesso)
%    - [maxit]: numero massimo di iterazioni
% Restituisce:
%    - lambda: matrice quadrata nxn sparsa
%    - i: numero di iterazioni
%
    [m,n] = size(A); % Inizializzo m ed n con la dimensione della matrice
    if m ~= n % Controllo se la matrice è una matrice quadrata
        error('La matrice deve essere quadrata.');
    end
    if nargin <= 1
        tol = 10^(-6);
    elseif (tol >= 0.1) || (tol <= 0)
            error("Tolleranza specificata non corretta");
    end
    if nargin <= 2 % Genero il vettore iniziale se non specificato
        x=rand(n,1);
    else
        x = x0;
    end
    if nargin <= 3 % Inizializzo il numero di iterazioni massime se non specificate
        maxit = ceil(-log(tol))*n;
    end
    x = x/norm(x);
    lambda = inf;
    for i = 1:maxit
        lambda0 = lambda;
        v = A*x;
        lambda = x'*v;
        err = abs(lambda-lambda0); % Calcolo dell'errore
        if err < tol*(1+abs(lambda)) % Se il valore dell'errore è accettabile
interrompo il ciclo
            break;
        end
        x = v/norm(v);
    end
    if err > tol*(1+abs(lambda)) % Se il valore dell'errore non è accettabile dopo
le iterazioni termino
        warning('la tolleranza richiesta non è stata raggiunta.');
    end
end

function A = matrSparsa(n)
% A = matrSparsa(n)
% Genera la matrice quadrata sparsa nxn, con n maggiore di 10.
%
% Parametri:
```

```
%    - n: numero di righe/colonne della matrice quadrata sparsa
% Restituisce:
%    - A: matrice quadrata nxn sparsa
%
    if n < 10
        error('n deve essere maggiore di 10.');
    end

    d = ones(n,1)*4;
    A = spdiags(d,0,n,n);

    d = ones(n,1)*(-1);
    A = spdiags(d,1,A);
    A = spdiags(d,-1,A);

    if n >= 10
        A = spdiags(d,9,A);
        A = spdiags(d,-9,A);
    end
end
```

Esercizio 25

Sia data la matrice di Toeplitz simmetrica:

$$A_N = \begin{pmatrix} 4 & -1 & & -1 & & \\ -1 & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & -1 \\ -1 & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & & -1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N\times N}, \qquad N \geq 10, \qquad (1)$$

in cui le extra-diagonali pi`u esterne sono le none.
Partendo dal vettore u0 = (1, . . . , 1)> ∈ R N , applicare il metodo delle potenze con tolleranza tol = 10−10 per N = 10 : 10 : 500, utilizzando la function del precedente esercizio.
Graficare il valore dell'autovalore dominante, e del numero di iterazioni necessarie per soddisfare il criterio di arresto, rispetto ad N.
Utilizzare la function *spdiags* di Matlab per creare la matrice e memorizzarla come matrice sparsa.

Soluzione

La function che implementa il metodo delle potenze è la seguente:

```
function [lambda, i] = metodoPotenze(A, tol, x0, maxit)
% [lambda, i] = metodoPotenze(A, [tol, [x0, [maxit]]])
% Restituisce l'autovalore di modulo massimo della matrice A e il numero di
% iterazioni necessarie per il suo calcolo.
% Parametri:
%   A: matrice utilizzata per il calcolo
%   [tol]: tolleranza dell' approssimazione (specificata o omessa)
%   [x0]: vettore di partenza (specificato o omesso)
%   [maxit]: numero massimo di iterazioni
% Restituisce:
%    lambda: matrice quadrata nxn sparsa
%    i: numero di iterazioni eseguite
%
    [m,n] = size(A); %Inizializzo m ed n con la dimensione della matrice
    if m ~= n  % Controllo se la matrice è una matrice quadrata
        error('La matrice deve essere quadrata.');
    end
    if nargin <= 1 % Inizializzo la tolleranza se non è specificata
```

```
        tol = 10^(-6);
    elseif (tol >= 0.1) || (tol <= 0) % Controllo di robustezza sulla tolleranza
        error("Tolleranza specificata non corretta");
    end
    if nargin <= 2 % Genero il vettore iniziale se non specificato
        x=rand(n,1);
    else
        x = x0;
    end
    if nargin <= 3 % Inizializzo il numero di iterazioni massime se non specificate
        maxit = ceil(-log(tol))*n;
    end
    x = x/norm(x);
    lambda = inf; % Inizializzo lambda con il valore infinito
    for i = 1:maxit
        lambda0 = lambda;
        v = A*x;
        lambda = x'*v;
        err = abs(lambda-lambda0); % Calcolo dell'errore
        if err < tol*(1+abs(lambda))% Se il valore dell'errore è accettabile
interrompo il ciclo
            break;
        end
        x = v/norm(v);
    end
    if err > tol*(1+abs(lambda))  % Valore dell'errore non accettabile dopo le
iterazioni
        warning('la tolleranza richiesta non è stata raggiunta.');
    end
end

function A = matrSparsa(n)
% A = matrSparsa(n)
% Genera la matrice quadrata sparsa nxn, con n maggiore di 10.
%
% Parametri:
%    n: numero di righe/colonne della matrice quadrata sparsa
% Restituisce:
%    A: matrice quadrata nxn sparsa
%
    if n < 10
        error('n deve essere maggiore di 10.');
    end

    d = ones(n,1)*4;
    A = spdiags(d,0,n,n);

    d = ones(n,1)*(-1);
    A = spdiags(d,1,A);
    A = spdiags(d,-1,A);

    if n >= 10
        A = spdiags(d,9,A);
        A = spdiags(d,-9,A);
```

```
    end
end
```

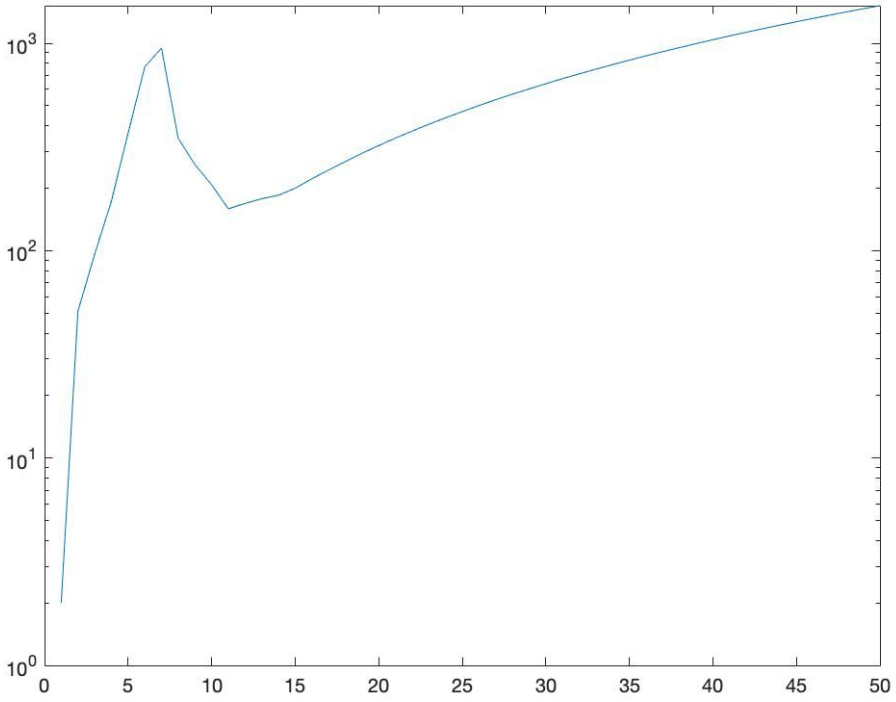


Grafico che rappresenta il numero di iterazioni effettuate.

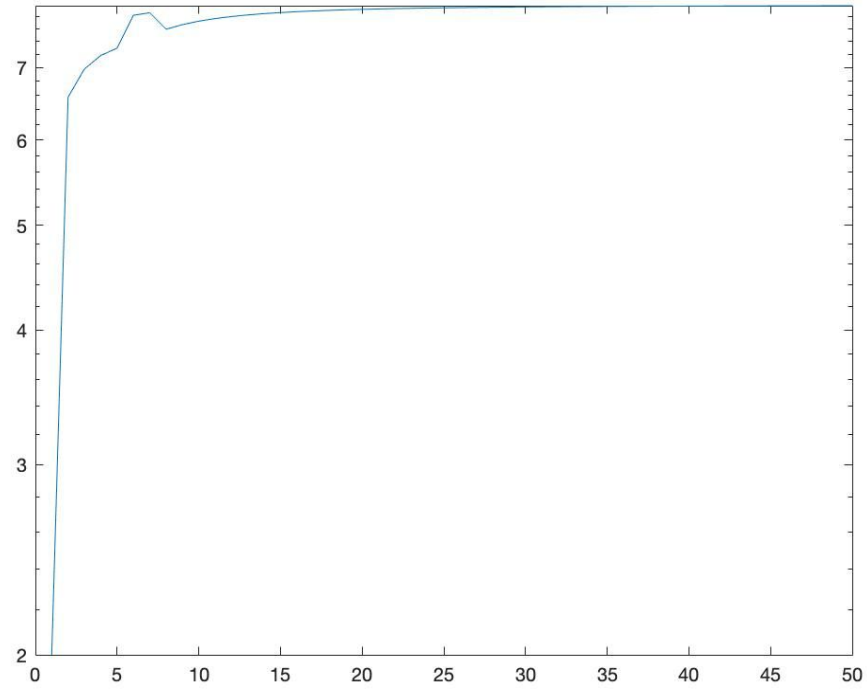


Grafico che rappresenta l'approssimazione dell'autovalore dominante.

Esercizio 26

Scrivere una function che implementi efficientemente un metodo iterativo, per risolvere un sistema lineare, definito da un generico splitting della matrice dei coefficienti.

Soluzione

Si riporta di seguito la function relativa alla risoluzione di un sistema lineare:

```
function [x,i,nr] = splittingGenerico(A, b, Msolve, tol, x0, maxit)
% [x,i] = jacobi(A, b, [tol, [xo, [maxit]]])
% Restituisce la soluzione del sistema lineare Ax=b approssimata con il
% metodo utilizzato dalla funzione Msolve e il numero di iterazioni eseguite.
% Parametri:
%    A: matrice utilizzata per il calcolo
%    b: vettore dei termini noti
%    Msolve: funzione che implementa il metodo di risoluzione
%    [tol]: tolleranza dell' approssimazione (specificata o omessa)
%    [x0]: vettore di partenza (specificato o omesso)
%    [maxit]: numero massimo di iterazioni (specificato o omesso)
% Restituisce:
%    x: soluzione approssimata del sistema
%
    D = diag(A);
    if ~all(D) % Controllo la diagona principale non sia nulla
        error('La diagonale di A non deve avere elementi nulli');
    end
    n = length(b); %Inizializzo n con la lunghezza del vettore dei termini noti
    if nargin <= 3
        tol = 10^(-6);
    elseif (tol >= 0.1) || (tol <= 0)
            error("Tolleranza specificata non corretta");
    end
    if nargin <= 4 % Genero il vettore iniziale se non specificato
        x=rand(n,1);
    else
        x = x0;
    end
    if nargin <= 5 % Inizializzo il numero di iterazioni massime se non specificate
        maxit = ceil(-log(tol))*n;
    end

    for i = 1:maxit
        r = A*x - b;
        err = norm(r,inf);
        nr(i) = err;
        if err<=tol % Se l'errore è inferiore alla tolleranza termino il ciclo
            break;
        end
```

```
        r = Msolve(A,r); % Risolvo il sistema con il metodo implementato dalla
Msolve
        x = x-r;

    end
    if err>tol % Se l
        warning('La tolleranza richiesta non è stata raggiunta.');
    end
end

function A = matrSparsa(n)
% A = matrSparsa(n)
% Genera la matrice quadrata sparsa nxn, con n maggiore eo uguale di 10.
%
% Parametri:
%    n: numero di righe/colonne della matrice quadrata sparsa
% Restituisce:
%    A: matrice quadrata nxn sparsa
%
    if n < 10
        error('n deve essere maggiore di 10.');
    end

    d = ones(n,1)*4;
    A = spdiags(d,0,n,n);

    d = ones(n,1)*(-1);
    A = spdiags(d,1,A);
    A = spdiags(d,-1,A);

    if n >= 10
        A = spdiags(d,10,A);
        A = spdiags(d,-10,A);
    end
end
```

Esercizio 27

Scrivere le function ausiliarie, per la function del precedente esercizio, che implementano i metodi iterativi di Jacobi e Gauss-Seidel.

Soluzione

La funzione splittingGenerico andrà ad usare una di queste due funzioni per il calcolo di un approssimazione del sistema lineare Ax=b.

Viene riportato il codice inseguito:

```
function y = MsolveGauss(M, r)
    % y = MsolveGauss(M, r)
    % Restituisce la soluzione del sistema lineare Mx=r.
    % Ogni iterazione risolve un sistema triangolare inferiore
    y=r;
    n = length(r);
    for i = 1:n
       y(i) = y(i)/M(i,i);
       y(i+1 : n) = y(i+1 : n) - M(i+1 : n,i)*y(i);
    end
end


function y = MsolveJacobi(M, r)
    % y = MsolveJacobi(M, r)
    % Restituisce la soluzione del sistema lineare Mx=r.
    % Ogni iterazione risolve un sistema diagonale
    y = r./diag(M);
end
```

Esercizio 28

Con riferimento alla matrice A_N risolvere il sistema:

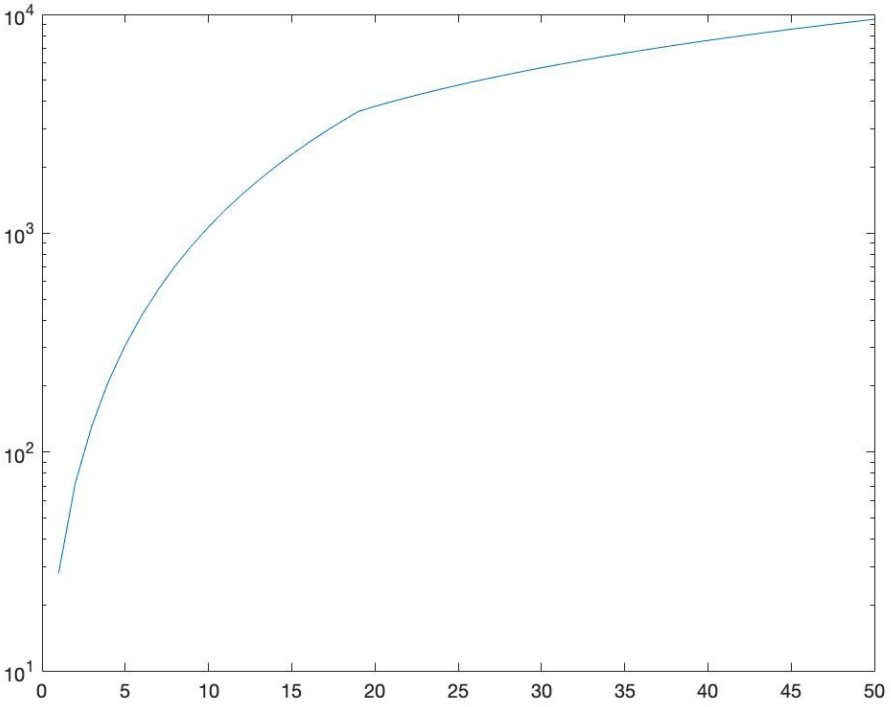
$$A_N \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N,$$

con i metodi di Jacobi e Gauss-Seidel, per N = 10 : 10 : 500, partendo dalla approssimazione nulla della soluzione, ed imponendo che la norma del residuo sia minore di 10−8 .
Utilizzare, a tal fine, la function dell'esercizio 26, scrivendo function ausiliarie ad hoc (vedi esercizio 27) che sfruttino convenientemente la struttura di sparsit`a (nota) della matrice AN .
Graficare il numero delle iterazioni richieste dai due metodi iterativi, rispetto ad N, per soddisfare il criterio di arresto prefissato.

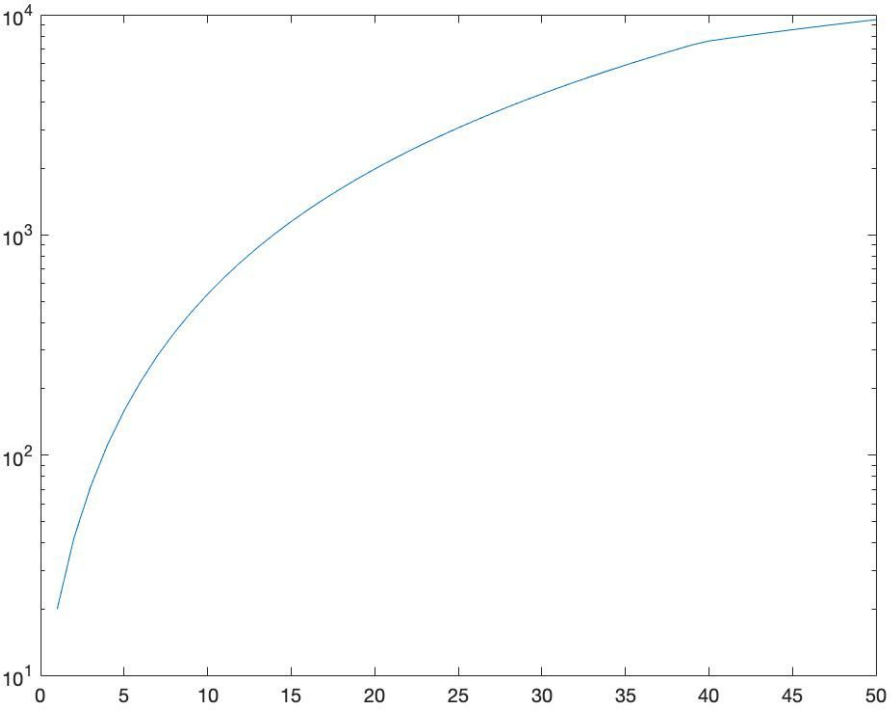
Soluzione

Viene riportato solo il codice relativo alla funzione prodMatVec, che è stato scritto ad-hoc per la matrice data:

```
function y = prodMatVec(A,x)
    y=4*x;
    y(1:end-1)=y(1:end-1)-x(2:end);
    y(2:end)=y(2:end)-x(1:end-1);
    y(10:end)=y(10:end)-x(1:end-9);
    y(1:end-9)=y(1:end-9)-x(10:end);
end
```



Rappresenta il numero di iterazioni effettuate, con il metodo di Jacobi.



Rappresenta il numero di iterazioni effettuate, con il metodo di Gauss-Seidel.