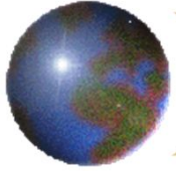


# 제11장

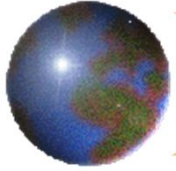
## 변동성 모형



## 제11장 변동성 모형

### ❁ 변동성 분석(analysis of volatility)

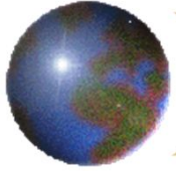
- 전통적인 계량분석 또는 경제시계열 분석은 다른 변수 또는 그 변수 자체의 과거값의 변화에 대응하는 종속변수의 평균적인 변화(평균값) 분석에 초점을 맞춤.
  - 따라서 회귀모형 또는 시계열 모형에 포함되는 오차항에 관한 정보는 계수추정값에 대한 통계적 추론을 위해 보조적인 역할을 함.
- 금융시장의 변동성은 시간에 걸쳐 변화(time varying)하는 것이 일반적임. 변동성이 커진다는 것은 일반적으로 시장으로 유입되는 정보의 양이 많아짐을 의미함.
- 금융시장에서 변동성(위험과 불확실성)에 대한 관심이 증가함에 따라 자산가격결정, 이자율의 기간구조, 옵션가격결정 등을 분석하기 위해서는 금융시계열의 분산(variance) 및 공분산(covariance) 등 변동성에 대한 정교한 추정과 예측이 필요함.



## 제11장 변동성 모형

### ❁ 변동성 분석(analysis of volatility)

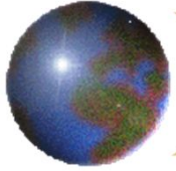
- 금융시계열은 일반적으로 다음과 같은 특성을 가짐.
  - 금융시계열은 두터운 분포꼬리(fat tail)형태를 가짐.
    - 정규분포에 비해 꼬리부분에 위치하는 관찰값들의 비중이 높은 특징을 가짐.
    - 이상값(outlier)이 발생할 확률이 정규분포에 비해 높음.
    - 첨도(kurtosis)가 정규분포에서의 3보다 큰 첨예분포(leptokurtic)임. 즉, 관찰값들이 독립적이지 못하고 일정한 의존성을 가지고 있음.
  - 대부분의 금융시계열은 변동성집중(volatility clustering) 현상이 나타남. 즉, 충격에 의해 분산이 한 번 커지면 큰 상태로 어느 정도 지속되고 또한 상대적으로 분산이 작은 기간이 이를 뒤따르는 현상을 말함.



## 제11장 변동성 모형

### ⊕ 변동성 분석(analysis of volatility)

- 변동성은 자산수익의 표준편차 또는 분산으로 측정되며, 금융 자산의 전체적 위험에 대한 대체적인 척도로 종종 사용됨.
- 변동성 모형들은 다음과 같이 다양함.
  - 과거 변동성의 단순 평균을 통해 변동성의 예측값을 추정하는 모형(historical volatility models)
  - 단순평균이 아닌 지수적 가중치를 준 이동평균을 통해 예측값을 추정하는 모형(exponentially weighted moving average models)
  - 변동성에 대한 ARMA류의 모형을 추정하여 예측값을 만들어내는 모형(autoregressive volatility models)
  - 거래된 옵션가격들에서 시사되는(implied) 해당 옵션의 존재 기간 동안의 변동성에 대한 예측값을 만들어 내는 모형(implied volatility models)

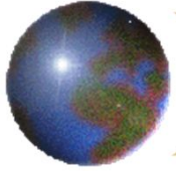


## 제11장 변동성 모형

### ❁ 변동성 분석(analysis of volatility)

#### ▪ [참고] 이분산(heteroskedasticity)

- 고전적인 회귀모형에 있어서 오차항에 대한 기본가정이 평균은 0이고( $\mu=0$ ) 분산은 동일하며( $E(\varepsilon_i^2)=\sigma^2$ ), 독립적인 분포를 하는 확률변수라고 하는 동분산(homoskedasticity) 가정과 달리 독립변수값이 변화할 때 이에 대응하여 변화하는 종속변수값의 분산이 상이하거나 어떤 형태(pattern)를 가지는 것을 이분산 현상이라 함.
- 이분산 현상은 일반적으로 오차항의 분산이 독립변수와 함수관계가 있을 때 발생하며 이러한 이분산 현상이 일어날 경우 통상최소제곱(ordinary least squares : OLS) 방법을 적용할 때 그 추정량은 더 이상 최량선형불편추정량(best linear unbiased estimator : BLUE)이 되지 못함.

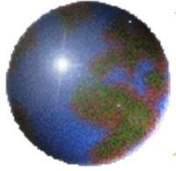


## 제11장 변동성 모형

### ⊕ 변동성 분석(analysis of volatility)

#### · [참고] 이분산(heteroskedasticity)

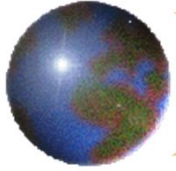
- 즉, 추정량은 불편성은 유지할 수 있지만 최소분산을 갖는 효율성은 지니지 못한다는 것임.
- 또한 분산이 과대평가되어 질 경우, 즉 최소분산을 가지지 못할 경우 추정량(estimator)에 대한 효율성이 떨어짐을 의미하기도 함.



## 제11장 변동성 모형

### ❁ 변동성 분석(analysis of volatility)

- 금융시계열의 변동성 추정
  - 본 장에서 제시하는 모형은 해당 확률변수의 조건부 분산 또는 변동성을 모형화하는 것임.
    - ARCH(Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) 모형은 조건부 분산을 모형화하고 예측하기 위해 고안된 모형임.
    - 종속변수의 분산은 그 자신의 과거값과 독립변수들의 함수로 모형화됨.
    - ARCH 모형은 잉글(Robert F. Engle, 1982)에 의해 제시되었고, 볼러스레브(Tim P. Bollerslev, 1986)에 의해 GARCH(Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) 모형으로 일반화됨.



## 제11장 변동성 모형

### ❁ 변동성 분석(analysis of volatility)

- 금융시계열의 변동성 추정

- ARCH 모형

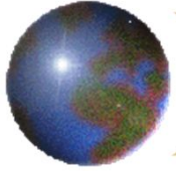
- ARCH 모형은 자기회귀 조건부 이분산성 모형을 말함.
    - 이 모형은  $t$ 시점의 조건부 분산을 모형화하고 예측하기 위해 고안된 모형임.
    - ARCH(1) 모형은 다음과 같이  $t$ 기의 조건부 분산이  $t-1$ 기의 잔차제곱에 의존하는 모형임.

평균방정식 :  $y_t = \mu_t + u_t$ ; 단,  $u_t = h_t^{1/2} \varepsilon_t$

분산방정식 :  $h_t = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2$

여기서  $\mu_t$ 는 조건부 평균(conditional mean),  $u_t$ 는 잔차항,  $\varepsilon_t$ 는 평균이 0이고 분산이 1인 백색잡음(white noise),  $h_t$ 는  $u_t$ 의 조건부 분산(conditional variance)임.





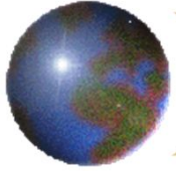
## 제11장 변동성 모형

### ❁ 변동성 분석(analysis of volatility)

- 금융시계열의 변동성 추정

- ARCH 모형

- 앞의 평균방정식(mean equation)에서 조건부 평균  $\mu_t$  는  $y_t$ 의 기대값(expected value)을 나타냄.
    - 일반적인 회귀모형이나 시계열 모형에서 잔차항  $u_t$ 는 모든  $t$ 시점에서 평균이 0이고 일정한 분산을 갖는 백색 잡음(white noise)으로 가정함.
    - 그러나 조건부 변동성 모형에서는  $\mu_t$ 가 시간가변적인(time varying) 분산  $h_t$ 의 제곱근과 평균이 0이고 분산이 1인 백색잡음  $\varepsilon_t$ 의 곱이기 때문에  $u_t$ 는 0의 평균과 시간가변적인 분산  $h_t$ 를 가짐.



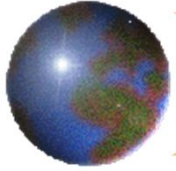
## 제11장 변동성 모형

### ❁ 변동성 분석(analysis of volatility)

- 금융시계열의 변동성 추정

- ARCH 모형

- 그리고 앞의 분산방정식(variance equation)은 시간가 변적인 분산  $h_t$ 의 정의식임.
    - ARCH(1) 모형에서  $h_t$ 는 잔차제곱의 시차값에 의해 결정됨.
      - 분산( $h_t$ )은 음(-)이 될 수 없기 때문에 모수  $\alpha_0$ 와  $\alpha_1$  역시 음(-)이 될 수 없으며(non-negative),  $\alpha_1$ 은 1보다 작아야 함.
      - 분산방정식은  $t-1$ 기에 커다란 충격, 즉  $u_{t-1}^2$ 이 크게 주어지면  $t$ 기에도 커다란 변동성이 예상된다는 것을 시사함.



## 제11장 변동성 모형

### ❁ 변동성 분석(analysis of volatility)

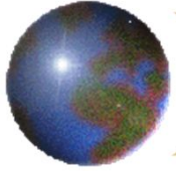
- 금융시계열의 변동성 추정

- GARCH 모형

- ARCH 모형의 한 가지 단점은 시계열의 조건부 변동성을 기술하기 위해 너무 많은 수의 모수를 필요로 한다는 것임.
    - 이와 같은 문제를 해결하기 위하여 볼러스레브(Tim P. Bollerslev, 1986)는 GARCH(Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity)라고 부르는 일반화된 모형을 제시함.
    - 가장 단순하고 널리 이용되는 GARCH 모형은 다음과 같은 GARCH(1,1) 모형임.

평균방정식 :  $y_t = \mu_t + u_t$ ; 단,  $u_t = h_t^{1/2} \varepsilon_t$

분산방정식 :  $h_t = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}$



## 제11장 변동성 모형

### ❁ 변동성 분석(analysis of volatility)

- 금융시계열의 변동성 추정

- GARCH 모형

- 앞의 분산방정식에서  $t-1$ 기까지의 정보에 기반한 조건부 분산의 예측값은 다음과 같이 세 가지 항의 함수로 표현됨.

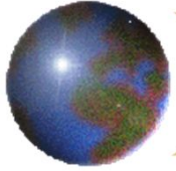
- 상수항 :  $\alpha_0$

- 전기의 변동성에 대한 새로운 정보 :  $u_{t-1}^2$ (ARCH 항)

- 조건부 평균에 대한 식으로부터의 잔차제곱으로 측정됨.

- 전기의 조건부 분산 :  $h_{t-1}$ (GARCH 항)

- GARCH(1,1)의 첫 번째 1은 GARCH 항의 차수, 두 번째 1은 ARCH 항의 차수를 의미함.



## 제11장 변동성 모형

### ❁ 변동성 분석(analysis of volatility)

- 금융시계열의 변동성 추정

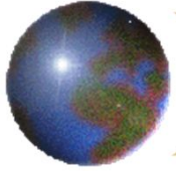
- GARCH 모형

- GARCH(1,1) 모형에도 ARCH 모형과 유사한 제약조건들이 적용됨.

- 분산( $h_t$ )은 음(-)이 될 수 없기 때문에 모수  $\alpha_0$ 와  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$  모두 음(-)이 될 수 없음(non-negative).

- 잔차항  $u_t$ 가 일정한 무조건부 분산을 갖기 위하여  $\beta_1 \leq 1$ ,  $\alpha_1 + \beta_1 < 1$ 의 (안정성) 조건을 만족해야 함.

- GARCH(1,1) 모형은 ARCH( $\infty$ ) 모형으로 표현될 수 있음.

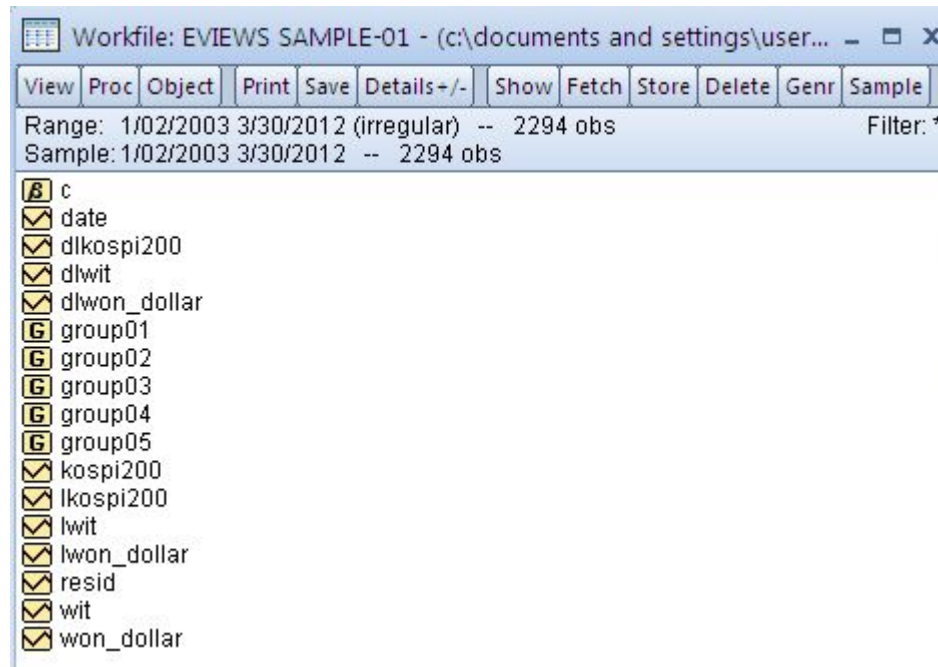


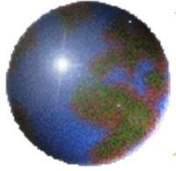
# 제11장 변동성 모형

## ❁ 변동성 분석(analysis of volatility)

### · 금융시계열의 변동성 추정

- 시계열 자료의 변동성을 분석하기 위하여 작업파일 eviews sample-01을 불러옴.



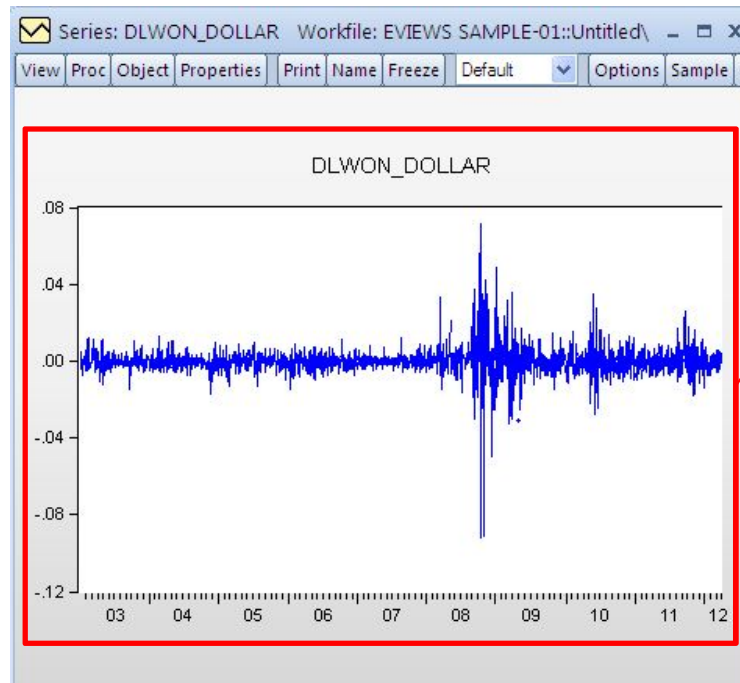


## 제11장 변동성 모형

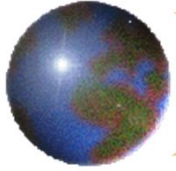
### ❁ 변동성 분석(analysis of volatility)

#### · 금융시계열의 변동성 추정

- 우선, 원/달러 환율의 변동성을 추정하기 전에 원/달러 환율의 로그 차분변수(dlwon\_dollar)에 대한 그래프를 살펴봄.



원/달러 환율의 수익률, 즉 1차 로그 차분변수(dlwon\_dollar)는 변동성집중(또는 변동성 군집 : volatility clustering) 현상이 나타나고 있음을 보이고 있음.

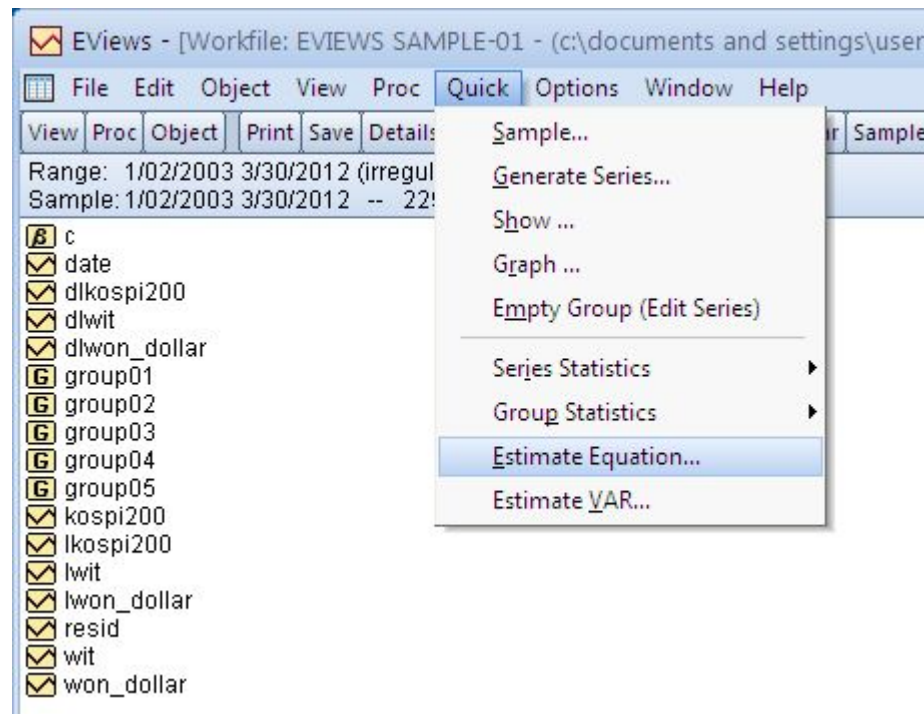


# 제11장 변동성 모형

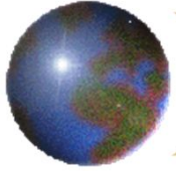
## ❁ 변동성 분석(analysis of volatility)

### · 금융시계열의 변동성 추정

- 원/달러 환율에 대한 GARCH(1,1) 모형을 추정하기 위하여 주 메뉴의 Quick/Estimate Equation...을 선택함.





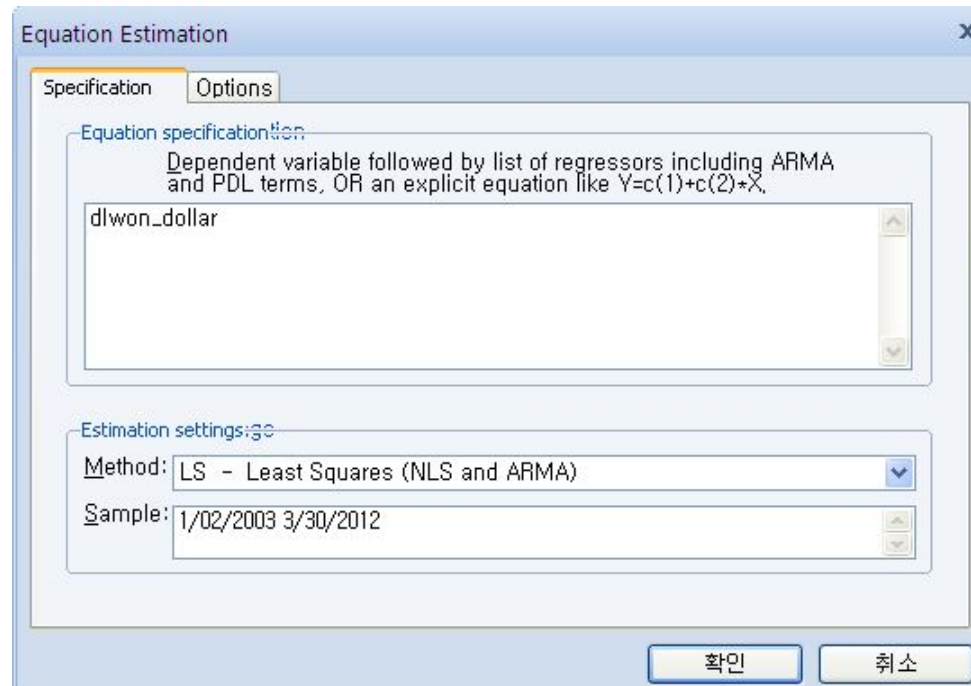


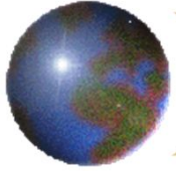
# 제11장 변동성 모형

## ❁ 변동성 분석(analysis of volatility)

### ▪ 금융시계열의 변동성 추정

- 방정식을 추정하기 위한 대화창에서 Equation specification의 공란에 dlwon\_dollar를 입력함.



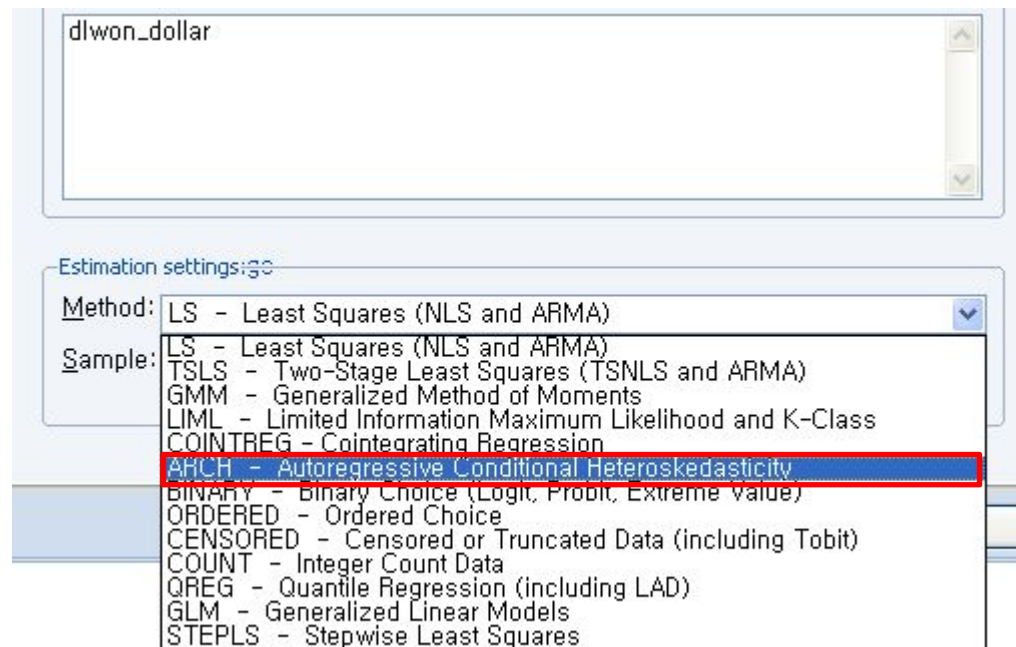


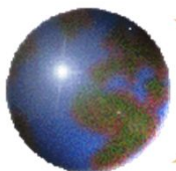
## 제11장 변동성 모형

### ❁ 변동성 분석(analysis of volatility)

- 금융시계열의 변동성 추정

- 다음으로 대화창의 Estimation settings/Method에서 ARCH를 선택함.





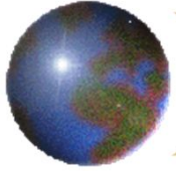
## 제11장 변동성 모형

### ❁ 변동성 분석(analysis of volatility)

- 금융시계열의 변동성 추정
- 다음의 대화창에서 적정값을 입력한 후 확인을 클릭함.

→ ARCH 항의 차수를 1, GARCH 항의 차수를 1을 입력함.  
즉, GARCH(1,1) 모형을 추정하는 것을 의미함.

이때 원/달러 환율에 대한 이분산성(heteroskedasticity)을 검정하려면 Options 버튼을 클릭한 후 이분산성이나 최적화 알고리즘(Optimization algorithm)을 지정하면 됨.  
그러나 여기서는 이들 옵션을 선택하지 않고 GARCH 모형을 분석함.



# 제11장 변동성 모형

GARCH=4.20E-07+0.1138\*RESID(-1)<sup>2</sup>+0.8765\*GARCH(-1)  
여기서 ARCH와 GARCH 계수들은 모두 유의함.

## ● 변동성 분석(analysis of volatility)

- 금융시계열의 변동성 추정
- 다음의 그림은 GARCH(1,1)을 추정한 결과임.

EViews - [Equation: UNTITLED Workfile: EIEWS SAMPLE-01::Untitled]

File Edit Object View Proc Quick Options Window Help

View Proc Object Print Name Freeze Estimate Forecast Stats Resids

Dependent Variable: DLWON\_DOLLAR  
Method: ML - ARCH (Marquardt) - Normal distribution  
Date: 06/09/13 Time: 18:07  
Sample (adjusted): 1/03/2003 3/30/2012  
Included observations: 2293 after adjustments  
Convergence achieved after 12 iterations  
Presample variance: backcast (parameter = 0.7)  
GARCH = C(1) + C(2)\*RESID(-1)<sup>2</sup> + C(3)\*GARCH(-1)

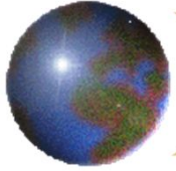
Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
Variance Equation				
C	4.20E-07	5.12E-08	8.191068	0.0000
RESID(-1) <sup>2</sup>	0.113798	0.007878	14.44592	0.0000
GARCH(-1)	0.876473	0.007139	122.7750	0.0000
R-squared	-0.000006	Mean dependent var	-1.88E-05	
Adjusted R-squared	0.000430	S.D. dependent var	0.007385	
S.E. of regression	0.007384	Akaike info criterion	-7.839182	
Sum squared resid	0.125015	Schwarz criterion	-7.831675	
Log likelihood	8990.622	Hannan-Quinn criter.	-7.836445	
Durbin-Watson stat	1.579637			

ARCH(1) :  $\alpha_1$

GARCH(1) :  $\beta_1$

옆의 분석 결과를 보면 ARCH( $\alpha_1$ )와 GARCH( $\beta_1$ )의 계수를 합한 값, 즉 GARCH 모형의 제약조건  $\alpha_1 + \beta_1 = 0.9903$ 으로 1보다 작으면서 1에 매우 근사값을 가짐. 따라서 이는 변동성 충격(volatility shocks)이 매우 지속적(persistent)이라는 것을 의미하며, 일별자료(daily data : 예를 들어 환율의 일별수익률 또는 주식의 일별수익률 등)와 같은 고빈도 자료(high frequency data)에서 관측됨.

R<sup>2</sup>값은 평균방정식에 어떠한 회귀계수도 존재하지 않을 때 의미가 없는 것으로 나타날 수 있음. 따라서 여기서 R<sup>2</sup>값은 음(-)의 값으로 나타나고 있음.

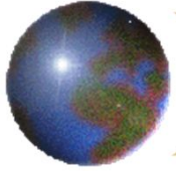


## 제11장 변동성 모형

### ❁ 변동성 분석(analysis of volatility)

#### · 금융시계열의 변동성 추정

- 다음으로 추정된 결과창에서 추정된 변동성을 그래프로 살펴보기 위하여 주 메뉴의 Proc/Make GARCH Variance Series...를 선택하면 Make GARCH Variance의 대화창에서 Conditional Variance(조건부 분산)에 garch01이 제시됨.
- 여기서 OK 버튼을 누르면 작업파일에 GARCH01이라는 변수가 생성됨.
- 작업파일에 생성된 garch01을 선택한 후 View/Graph에서 OK를 클릭하면 원/달러 환율수익률(dlwon\_dollar)의 변동성을 나타내는 조건부 분산의 그래프가 나타남.

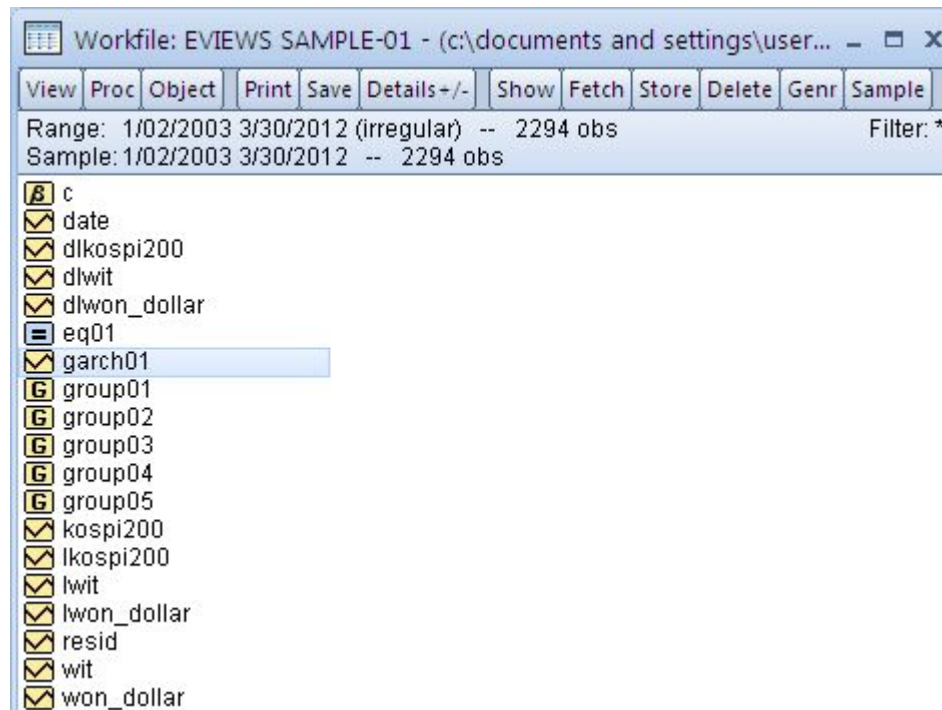


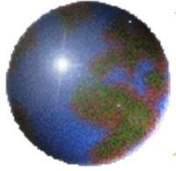
# 제11장 변동성 모형

## ❁ 변동성 분석(analysis of volatility)

### · 금융시계열의 변동성 추정

· 다음은 작업파일에 조건부 분산 garch01이 생성된 결과임.





## 제11장 변동성 모형

### ❁ 변동성 분석(analysis of volatility)

- 금융시계열의 변동성 추정
- 다음은 원/달러 환율 수익률의 변동성인 조건부 분산임.

