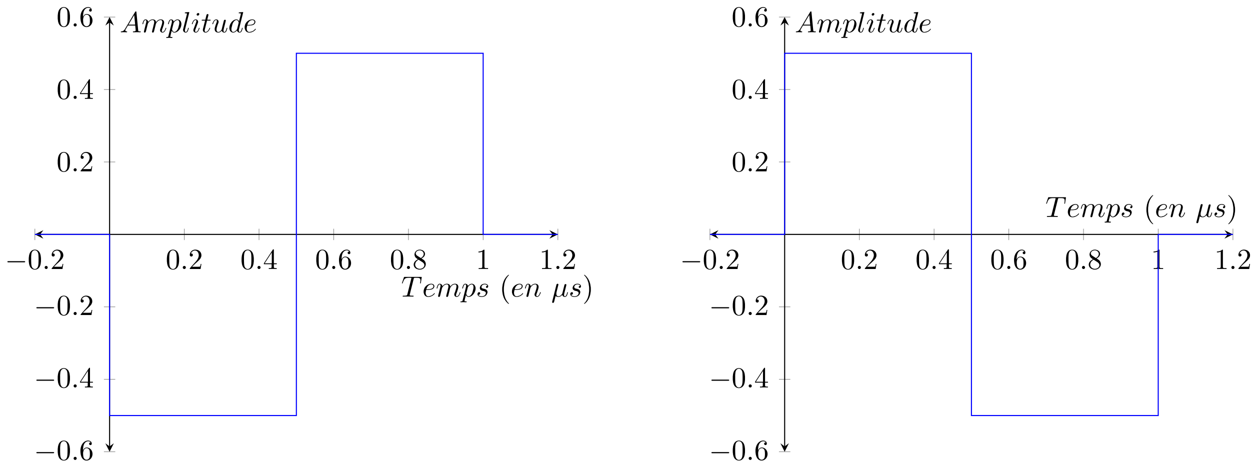
Novembre 2015
Communications numériques
TS226

TS 226 : ADS-B

Thibaut Gourdel
Perrot Rémi
`tgourdel@enseirb-matmeca.fr`
`rperrot@enseirb-matmeca.fr`



(a) $p_{0\_int}(t)$ (b) $p_{1\_int}(t)$

Figure 1: Représentation de $p_{b_k\_int}(t)$

Part I
Couche physique ADS-B

1 Travail préliminaire

Question 1 On a le signal $s_l(t) = \sum_{k \in Z} p_{b_k}(t - kT_s)$, avec $p_{b_k}(t)$ défini par $p_0(t)$ pour $b_k = 0$, et $p_1(t)$ pour $b_k = 1$.

Soit les fonctions intermédiaires :

$$p_{0\_int}(t) = p_0(t) \tag{1}$$
$$p_{1\_int}(t) = p_1(t) \tag{2}$$

On obtient les fonctions de la figure 1.
Ainsi, on peut définir la fonction $s_{int}(t)$, elle aussi intermédiaire :

$$\begin{aligned} s_{int}(t) = s_l(t) - 0,5 &= \left(\sum_{k \in Z} p_{b_k}(t - kT_s) \right) - 0,5 \\ &= \sum_{k \in Z} p_{b_k\_int}(t - kT_s) \end{aligned} \tag{3}$$

On remarque aux sous-figures de la figure 1 que :

$$\begin{cases} \text{Pour } b_k{=}0 & \rightarrow p_{0\_int}(t) = p(t) \\ \text{Pour } b_k{=}1 & \rightarrow p_{1\_int}(t) = -p(t) \end{cases} \tag{4}$$

Grâce aux symboles A_k

$$Ak = \begin{cases} 1 & \text{pour } b_k = 0 \\ -1 & \text{pour } b_k = 1 \end{cases}$$

On peut directement remplacer dans l'équation 3 $p_{b_k\_int}(t)$ par $p(t)$, en utilisant A_k :

```
// TODO : Add le +0.5
```

Figure 2: Architecture pour une modulation avec $s_l(t) - 0,5$

(a)
//TODO
:
Juste
wait-
ing
for
a
sub-
float

$$s_{int}(t) = \sum_{k \in Z} A_k p(t - kT_s) \tag{5}$$

Soit finalement $s_l(t) = s_{int}(t) + 0,5 = 0,5 + \sum_{k \in Z} A_k p(t - kT_s)$.

Modulation obtenue : La modulation obtenue avec $s_l(t)$ nous mets face à un code biphase (Manchester), standardisé par l'IEEE 802.3[1]. Ce code est lié à une modulation en bande de base : PSK, Phase Shift Keying, où le signal est un signal carré (plutôt que - habituellement - une sinusoïde).

Avec ce code, la modulation est effectuée en faisant une convolution entre les symboles A_k et le filtre $p(t)$.

Pour retrouver les bits d'entrées, on peut donc convoluer avec le filtre adapté $p^*(-t)$. Cela à pour effet de créer une sorte de signal triangulaire, dont les points aux moments d'échantillonnage correspondent aux symboles. Voir figure 2.

Remarque Il faut garder à l'esprit que cette modulation fonctionne pour $s_l(t) - 0,5$, pour l'implémenter dans Matlab il faudra soustraire $0,5$ au signal $s_l(t)$.

Question 2 $p_0^*(-t)$ et $p_1^*(-t)$ sont, respectivement, les filtres de mise en forme de $p_0(t)$ et $p_1(t)$. Ce sont les filtres adaptés ; l'utilisation de tels filtres permet de maximiser le SNR (Signal-to-Noise Ratio).

De ce fait, on minimise la probabilité qu'il y ait une erreur binaire.

Question 3 On calcule les convolutions entre chaque filtre, pour prouver le fait qu'ils vérifient les critères de Nyquist.

// TODO (soit graphiquement, soit calculatoirement)

Question 4 Calculons le moment d'ordre 1 du signal $s_l(t)$.

On peut sortir, dans 6, $p(t - kT_S)$ puisqu'elle n'est pas aléatoire.

$$\begin{aligned}
m_{s_l}(t) = E\left[s_l(t)\right] &= E\left[0,5 + \sum_{k \in Z} A_k p(t - kT_s)\right] \\
&= 0,5 + \sum_{k \in Z} E\left[A_k\right] p(t - kTs) \qquad (6) \\
&= 0,5 = m_{s_l} \qquad (7)
\end{aligned}$$

[1] http://docwiki.cisco.com

$m_{s_l}(t)$ ne dépend donc pas de t, et de plus m_{s_l} est égal à 0,5 (puisque $E[A_k] = 0$).

Question 5 Calcul de la fonction d'autocorrélation.
À la ligne 8, on peut enlever le terme de conjugué (*), puisque le signal est réel.

$$\begin{aligned}
R_{s_l}(t,\tau) &= E\left[s_l(t)s_l^*(t+\tau)\right] &(8)\\
&= E\left[\left(0,5+\sum_{k\in Z}A_k p(t-kT_s)\right)\left(0,5+\sum_{k'\in Z}A_{k'}p(t+\tau-k'T_s)\right)\right]\\
&= E[0,25+\sum_k\sum_{k'}A_kA_{k'}p(t-kT_s)p(t+\tau-k'T_s)\\
&\quad \underbrace{+\,0,5\sum_{k\in Z}A_k p(t-kT_s)+0,5\sum_{k'\in Z}A_{k'}p(t+\tau-k'T_s)]}_{=0,\text{ puisque } E[A_k]=0}\\
&= 0,25+\sum_k\sum_{k'}E\left[A_kA_{k'}\right]p(t-kT_s)p(t+\tau-k'T_s) &(9)
\end{aligned}$$

Lorsque $k \neq k'$, on a $E\left[A_kA_{k'}\right] = E\left[A_k\right]E\left[A_{k'}\right] = 0$, et donc $R_{s_l}(t,\tau) = 0,25$. Par contre, pour $k = k'$, on est face à $E\left[A_k^2\right]$, la variance des A_k (σ^2). Soit :

$$\boxed{R_{s_l}(t,\tau) = 0,25+\sum_k \sigma^2 p(t-kT_s)p(t+\tau-kT_s)} \tag{10}$$

À noter que la variance σ^2 est égale à 1.

Question 6 On utilise les résultats des questions précédentes pour prouver la cyclostationnarité.
Un processus aléatoire $x(t)$ est cyclo-stationnaire, avec T_s la période de cyclo-stationnarité, lorsque $R_{xx}(t+T_s,\tau) = R_{xx}(t,\tau)$. Soit, dans notre cas :

$$R_{s_l}(t+T_s,\tau) = E\left[\left(0,5+\sum_{k\in Z}A_k p(t+T_s-kT_s)\right)\left(0,5+\sum_{k'\in Z}A_{k'}p(t+T_s+\tau-k'T_s)\right)\right] \tag{11}$$

Il suffit alors, dans l'équation 11, de faire le changement de valeur suivant : $k = k-1$ et $k' = k'-1$. On trouve ainsi la relation :

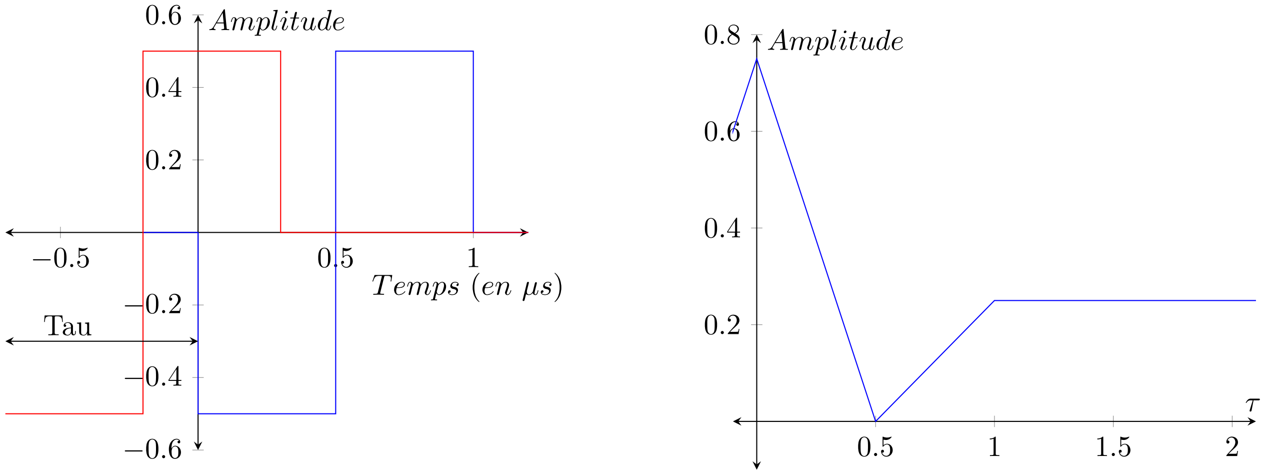
$$\boxed{R_{s_l}(t+T_s,\tau) = R_{s_l}(t,\tau)} \tag{12}$$

Le processus est donc cyclo-stationnaire de période T_s (temps symbole).

Question 7 La formule de l'autocorrélation moyennée d'un signal $s_l(t)$ est donnée ci-après :

$$\tilde{R_{s_l}}(\tau) = \frac{1}{T_s}\int_0^{T_S} R_{s_l}(t,\tau)dt \tag{13}$$

Soit, en développant (on rappelle que le symbole du conjugué disparait en raison de la nature réelle du signal) :



(a) *Calcul graphique de l'autocorrlation de* $p(\frac{t}{T_s})$ (b) $\tilde{R_{s_l}}(\frac{\tau}{T_s})$

Figure 3: Calcul graphique de l'autocorrélation moyennée

$$\begin{aligned}
\tilde{R_{s_l}}(\tau) &= \frac{1}{T_s}\int_0^{T_s}\left(0,25+\sum_k p(t-kT_s)p(t+\tau-kT_s)\right)dt \\
&= \frac{1}{T_s}\left(0,25T_s+\int_0^{T_s}\sum_k p(t-kT_s)p(t+\tau-kT_s)\right)dt \\
&= 0,25+\frac{1}{T_s}\sum_k\int_0^{T_s} p(t-kT_s)p(t+\tau-kT_s)dt
\end{aligned} \tag{14}$$

On pose $\nu = t - kT_s$. Ainsi, en remplaçant à la ligne 14 :

$$\begin{aligned}
\tilde{R_{s_l}}(\tau) &= 0,25+\frac{1}{T_s}\sum_k\int_{-kT_s}^{(-k+1)T_s} p(\nu)p(\nu+\tau)d\nu \\
&= 0,25+\frac{1}{T_s}\int_R p(\nu)p(\nu+\tau)d\nu
\end{aligned} \tag{15}$$

En observant la ligne 15, on remarque qu'il y a la présence de la fonction d'autocorrélation de p : $R_{pp}(\tau) = \int_R p(\nu)p^*(\nu+\tau)d\nu$. Ainsi :

$$\boxed{\tilde{R_{s_l}}(\tau) = 0,25+\frac{1}{T_s}R_{pp}(\tau)} \tag{16}$$

Tout d'abord, calculons la fonction d'autocorrélation de $p(\frac{t}{T_s})$. Graphiquement, on trouve l'autocorrélation de la fonction (voir figure 3.a). On prend t/T_s pour pouvoir gérer tous les T_s, même si dans notre exemple $T_s = 1$. En la moyennant par T_s (le temps symbole donné dans l'énoncé correspond à $1\mu s$), puis en ajoutant $0,25$, on trouve finalement la représentation de $\tilde{R_{s_l}}(\tau)$, présentée figure 3.b.

Question 8 En utilisant la formule donnée dans l'énoncé, on trouve :

$$
\begin{aligned}
\mathit{\Gamma}_{s_l}(f) &= \int {}_R\tilde{R}_{s_l}(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau \\
&= \int_R [0,25 + \frac{1}{T_s}R_p(\tau)e^{-j2\pi f\tau}]d\tau \\
&= \int_R 0.25e^{-j2\pi f\tau}d\tau + \frac{1}{T_s}\int_R R_p(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau \\
&= 0.25\delta(f) + \frac{1}{T_s}\left|P(f)\right|^2
\end{aligned} \tag{17}
$$

On remplace la transformée de Fourier de $R_p(\tau)$ par le module au carré de la transformée de Fourier de $p(t)$ dans l'équation 17, en utilisant le théorème de Wiener Khintchine.

Il nous reste donc à calculer $P(f)$.

$p(t)$ est la combinaison de deux portes (on prend bien garde à ne pas oublier T_s) : $p(t) = -0.5 \times \Pi_{0.5T_s}(t - \frac{T_s}{4}) + 0.5 \times \Pi_{0.5T_s}(t - \frac{3T_s}{4})$. On rappelle la transformée de Fourier d'une porte :

$$
\mathcal{F}\left(\Pi_T(t)\right) = T\mathrm{sinc}(\nu T) \tag{18}
$$

On défini le sinus cardinal comme : $\mathrm{sinc}(x) = \frac{sin(\pi x)}{\pi x}$.

Ainsi :

$$
\begin{aligned}
\left|P(f)\right|^2 &= \left|\mathcal{F}\left(-0.5 \times \Pi_{0.5T_s}(t - {}^{T_s}\!/4) + 0.5 \times \Pi_{0.5T_s}(t - {}^{3T_s}\!/4)\right)\right|^2 \\
&= \Bigg|0.5T_s \times \Bigg(-0.5\mathrm{sinc}(0.5T_s \times f) \times \exp(-i2\pi f \times \frac{T_s}{4}) \\
&\quad +0.5\mathrm{sinc}(0.5T_s \times f) \times \exp(-i2\pi f \times \frac{3T_s}{4})\Bigg)\Bigg|^2 \\
&= \left|0.25T_s\mathrm{sinc}(0.5T_s \times f)\left(\exp(-i\pi f \times \frac{3T_s}{2}) - \exp(-i2\pi f \times \frac{T_s}{2})\right)\right|^2 \\
&= \left|\frac{T_s\mathrm{sinc}(0.5T_s \times f)}{4}\left(e^{-i\pi f T_s}\left(e^{-i\pi f \times 0.5T_s} - e^{+i\pi f \times 0.5T_s}\right)\right)\right|^2 && (19) \\
&= \left|\frac{T_s\mathrm{sinc}(0.5T_s \times f)}{4}\left(e^{-i\pi f T_s} \times \sin(\frac{1}{2}\pi f T_s) \times 2i\right)\right|^2 && (20)
\end{aligned}
$$

Pour passer de 19 à 20, on utilise la formule d'Euler : $\frac{eix - e^{-ix}}{2i} = \sin(x)$. On remarque qu'à la ligne 20, on peut remplacer le module de l'exponentielle par 1. De même, $|i| = 1$. Soit finalement :

$$
\begin{aligned}
\left|P(f)\right|^2 &= \left(\frac{T_s}{2}\mathrm{sinc}(\frac{T_s f}{2}) \times \sin(\frac{T_s f\pi}{2})\right)^2 \\
&= \left(\frac{T_s^2 f\pi}{4} \times \mathrm{sinc}^2(\frac{T_s f}{2})\right)^2 \\
&= \frac{T_s^4\left(f\pi\right)^2}{16} \times \mathrm{sinc}^4(\frac{T_s f}{2})
\end{aligned} \tag{21}
$$

D'où, ainsi, l'expression de la densité spectrale de puissance de $s_l(t)$, en 22 :

$$
\mathit{\Gamma}_{s_l}(f) = 0.25\delta(f) + \frac{1}{T_s}\left(\frac{T_s^4\left(f\pi\right)^2}{16} \times \mathrm{sinc}^4(\frac{T_s f}{2})\right)
$$

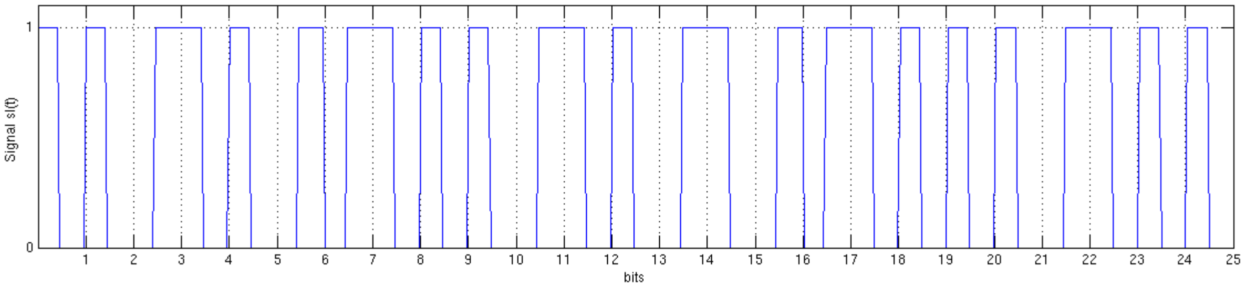


Figure 4: $s_l(t)$ sur les 25 premiers bits

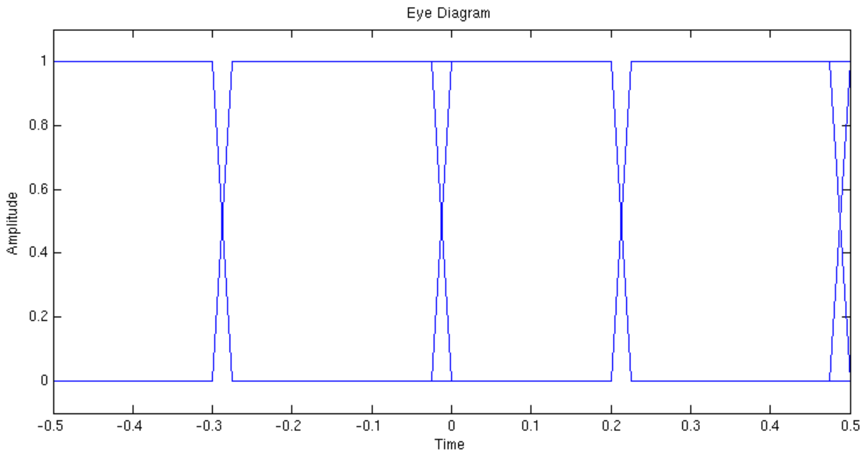


Figure 5: Diagramme de l'œil de de $s_l(t)$, d'une durée de $2T_s$, des 100 premiers bits

$$\boxed{\Gamma_{s_l}(f) = 0.25\delta(f) + \frac{T_s^3\,(f\pi)^2}{16} \times \mathrm{sinc}^4(\frac{T_s f}{2})} \tag{22}$$

Question 9

Question 11 $s_l(t)$ sur les 25 premier bits est représenté figure 4.

À noter que, pour sélectionner les 25 premiers bits, il faut prendre en compte le suréchantillonnage. On prend donc les $25 \times \frac{T_s}{T_e}$ premiers éléments du vecteur.

Question 12 Le diagramme de l'œil de $s_l(t)$ est présenté à la figure 5.

Question 13 On trace la densité spectrale de puissance théorique de $s_l(t)$ sans fenêtre ni chevauchement.