Filtres numériques à réponse impulsionnelle infinie (IIR) simples à implémenter

Remi100fa1000

8 juillet 2023

1 Objectif

On s'intéresse aux filtres à réponse impulsionnelle infinie (IIR de l'anglais Infinite Impulse Response). On cherche des filtres simples à implémenter sur FPGA.

2 Filtres d'ordre 1

Commençons par les filtres d'ordre 1 dont la réponse dans le domaine de Laplace s'écrit :

$$H(p) = \frac{1}{1 + \frac{p}{2\pi f_c}}. \tag{1}$$

Dans cette équation, f_c est la fréquence de coupure du filtre.

Pour obtenir la représentation numérique de ce filtre, on utilise la transformée bilinéaire du plan :

$$p \approx 2f_e \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}. \tag{2}$$

Où f_e est la fréquence d'échantillonnage. On obtient alors :

$$H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 + z^{-1} + \frac{f_e}{\pi f_c}(1 - z^{-1})}. \tag{3}$$

On a alors :

$$y(z)(1 + \frac{f_e}{\pi f_c}) + y(z)z^{-1}(1 - \frac{f_e}{\pi f_c}) = (1 + z^{-1})x(z). \tag{4}$$

On peut ensuite passer dans le domaine temporel pour avoir l'expression du filtre :

$$y(n)(1+\frac{f_e}{\pi f_c}) = y(n-1)(\frac{f_e}{\pi f_c}-1)+x(n)+x(n-1). \tag{5}$$

En choisissant $\frac{f_e}{\pi f_c} = 2^N - 1$ $(N > 1)$, on obtient l'expression suivante :

$$y(n)2^N = y(n-1)(2^N-2)+x(n)+x(n-1). \tag{6}$$

On peut donc calculer la valeur de $y(n)$ avec la formule :

$$y(n) = y(n-1) - \frac{y(n-1)}{2^{N-1}} + \frac{(x(n)+x(n-1))}{2^N}. \tag{7}$$

Ce filtre est simple à calculer sur FPGA car il n'utilise que des divisions par des puissances de 2 (décalage à droite des données binaires).

3 Filtres d'ordre 2

3.1 Développements préliminaires

On cherche maintenant à trouver l'expression de filtres d'ordre 2 qui sont eux aussi simples à implémenter.

L'expression générale d'un filtre d'ordre 2 de pulsation propre ω_0 a pour expression dans le domaine de Lapalce :

$$H(p) = \frac{1}{1+\frac{p}{\omega_0 Q}+\frac{p^2}{\omega_0^2}}. \tag{8}$$

En utilisant la transformée bilinéaire du plan, on se retrouve avec l'expression :

$$H(z) = \frac{(1+z^{-1})^2}{\left(1+\frac{\alpha}{Q}+\alpha^2\right)+(2-2\alpha^2)\,z^{-1}+\left(1+\frac{\alpha}{Q}-\alpha^2\right)z^{-2}}, \tag{9}$$

dans cette équation $\alpha = \frac{2f_e}{\omega_0} = \frac{f_e}{\pi f_c}$.

On peut alors obtenir l'expression du filtre en z dans le domaine temporel :

$$y(n)\left(1+\frac{\alpha}{Q}+\alpha^2\right)+2y(n-1)\left(1-\alpha^2\right)+y(n-2)\left(1+\frac{\alpha}{Q}-\alpha^2\right) \\ = x(n)-x(n-2). \tag{10}$$

On a trois coefficients dans ce filtre :

$$1+\frac{\alpha}{Q}+\alpha^2, \tag{11}$$

$$1-\alpha^2, \tag{12}$$

$$1-\frac{\alpha}{Q}+\alpha^2. \tag{13}$$

3.2 Un cas particulier

On remarque assez rapidement le cas où $Q = \frac{1}{2}$, dans ce cas là, les équations précédentes deviennent :

$$(1+\alpha)^2, \tag{14}$$

$$(1+\alpha)(1-\alpha), \tag{15}$$

$$(1-\alpha)^2. \tag{16}$$

En choisissant $\alpha = 2^N - 1$, on obtient les coefficients : 2^{2N}, $2^{N+1} - 2^{2N}$ et $2^{2N} - 2^{N+2} + 4$.

Dans ce cas là, on obtient un filtre dont les coefficients s'écrivent simplement comme des somme de puissances de 2 :

$$\begin{aligned} y(n)2^{2N} + 2y(n-1)(2^{N+1} - 2^{2N}) + y(n-2)(2^{2N} - 2^{N+2} + 4) \\ = x(n) + 2x(n-1) + x(n-2). \end{aligned} \tag{17}$$

On a ainsi un filtre IIR d'ordre 2 dont l'implémentation numérique utilise peu de ressources.

On peut noter que la fonction de transfert de ce filtre est exactement le carré de la fonction de transfert du filtre d'ordre 1 présenté dans la section précédente. En effet, cette fonction de transfert peut s'écrire :

$$H(z) = \left[\frac{(1+z^{-1})}{(2^N) + z^{-1}(2-2^N)}\right]^2. \tag{18}$$

3.3 Généralisation du cas particulier à l'ordre N

On peut obtenir un filtre d'ordre N relativement simple à implémenter à partir des résultats obtenus précédemment. Bien entendu, les ressources requises pour ces filtres sont plus importantes que pour les filtres d'ordre 1 et 2 explicités ci-dessus.

Le filtre de fonction transfert

$$H(z) = \left[\frac{(1+z^{-1})}{(2^N) + z^{-1}(1-\alpha)}\right]^K, \tag{19}$$

est un filtre d'ordre K dont l'implémentation ne requiert que des multiplications par des entiers (coefficients binomiaux ou produit de coefficients binomiaux et de puissance de 2) et une division finale par une puissance de 2.

3.4 Cas plus général pour $N = 2$

Le cas particulier présenté ci-dessus ne permet de réaliser qu'un nombre limité de filtres.

Pour qu'un filtre d'ordre 2 soit simple à implémenter il suffit que :

— tous les coefficients du filtre soit des entiers ;

— le terme de degré zero du dénominateur soit égal à 2^N.

La deuxième condition s'écrit :

$$Q = \frac{\alpha}{2^N - \alpha^2 - 1}. \tag{20}$$

Tout d'abord, avec Q sous cette forme

$$1 - \frac{\alpha}{Q} + \alpha^2 = 2 + 2\alpha^2 - 2^N. \tag{21}$$

Cette dernière équation nous permet de conclure que si α^2 est entier, tous les coefficients du filtre seront entiers.

Ensuite, une étude de la dérivée de Q par rapport à α pour $\alpha \geq 0$ montre que cette fonction est strictement croissante sur $[0 : \sqrt{2^N - 1}[\to \mathbb{R}^+$.

Ces deux analyses nous permettent de conclure que pour construire un filtre d'odre 2 relativement simple à implémenter. Il suffit de :

— choisir une valeur de N ;

— choisir un $\alpha < \sqrt{2^N - 1}$ de sorte que α^2 soit entier ;

— calculer les coefficients du filtre avec $Q = \frac{\alpha}{2^N - \alpha^2 - 1}$.