Quelques manipulations de sommes

26 février 2022

1 Objectif

Soit $0 < k \leq N$ deux entiers positifs.On cherche à réduire la somme

$$\sum_{l=1}^{N-k+1} \binom{N-l}{k-1} l. \tag{1}$$

Pour calculer cette somme, nous allons utiliser le résultat suivant :
Soit $0 < k \leq N$ deux entiers positifs. On a

$$\sum_{l=1}^{N-k+1} \binom{N-l}{k-1} = \binom{N}{k} \tag{2}$$

2 Développements

On cherche à transformer l'équation (1) en sommes d'expressions de sorte à trouver des expressions de la forme de l'équation (2).

On écrit

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{N-k+1} \binom{N-l}{k-1} l = k \sum_{l=1}^{N-k+1} \binom{N-l}{k-1} \frac{l}{k} \\ + k \sum_{l=1}^{N-k+1} \binom{N-l}{k-1} \frac{(N+1)}{k} - k \sum_{l=1}^{N-k+1} \binom{N-l}{k-1} \frac{(N+1)}{k}. \end{aligned} \tag{3}$$

Les deux termes introduits étant opposés, leur somme est nulle. En utilisant (2), on a

$$(N+1) \sum_{l=1}^{N-k+1} \binom{N-l}{k-1} = (N+1) \binom{N}{k}. \tag{4}$$

Ensuite,

$$
\begin{aligned}
k \sum_{l=1}^{N-k+1} \binom{N-l}{k-1} \left(\frac{l}{k} - \frac{(N+1)}{k} \right) \\
&= -k \sum_{l=1}^{N-k+1} \frac{(N+1-l)}{k} \frac{(N-l)!}{(k-1)!(N+1-l-k)!} \\
&= -k \sum_{l=1}^{N+1-k} \binom{N+1-l}{k}. \qquad (5)
\end{aligned}
$$

Finallement, en utilisant (2), on a

$$
-k \sum_{l=1}^{N+1-k} \binom{N+1-l}{k} = -k \binom{N+1}{k+1}. \qquad (6)
$$

Donc,

$$
\sum_{l=1}^{N-k+1} \binom{N-l}{k-1} l = (N+1)\binom{N}{k} - k\binom{N+1}{k+1} \qquad (7)
$$