Un exercice de dénombrement

27 janvier 2022

1 Objectif

On montre de deux manières différentes la proposition P :

P : Soit $0 < k \leq N$ deux entiers positifs. $\binom{N}{k} = \sum_{l=1}^{N-k+1} \binom{N-l}{k-1}$.

2 Première preuve : par récurrence

Soit $k \in \mathbb{N}^*$, on cherche à montrer que la propriété P est vraie pour tout $0 < k \leq N$. Pour cela, on fait une récurrence sur N en commençant par $N = k$ et en montrant que si la propriété est vraie pour N, elle est vraie pour $N + 1$.

Initialisation : l'égalité est vraie pour $N = k$, en effet,

$$\binom{k}{k} = 1,$$

et,

$$\sum_{l=1}^{k-k+1} \binom{k-l}{k-1} = \binom{k-1}{k-1} = 1.$$

Hérédité : on montre maintenant que, pour un k donné, si la propriété est vraie au rang N, elle est vraie pour $N + 1$. On cherche à réécrire

$$\sum_{l=1}^{N+1-k+1} \binom{N-l+1}{k-1},$$

pour cela, on fait un changement de variable $l = l - 1$, on obtient

$$\sum_{l=0}^{N-k+1} \binom{N-l}{k-1} = \sum_{l=1}^{N-k+1} \binom{N-l}{k-1} + \binom{N}{k-1}.$$

On utilise maintenant l'hypothèse de récurrence

$$\sum_{l=1}^{N-k+1} \binom{N-l}{k-1} + \binom{N}{k-1} = \binom{N}{k} + \binom{N}{k-1}$$

Finalement, on a

$$\binom{N}{k} + \binom{N}{k-1} = \frac{N!}{k!(N-k)!} + \frac{N!}{k!(N-k+1)!} = \frac{(N+1)!}{k!(N+1-k)!} = \binom{N+1}{k}.$$

Ce qui prouve l'hérédité, clos la récurrence et prouve la proposition.

3 Seconde preuve : dénombrement

On considère un ensemble E composé de $N > 0$ élément. Dans cet ensemble, on cherche le nombre d'ensembles de $0 < k \leq N$ éléments. Ce nombre est égal à

$$\binom{N}{k}.$$

On va maintenant compter autrement le nombre d'ensembles F à k éléments. Pour cela on numérote de 1 à N les éléments de E. Pour dénombrer les ensembles de k éléments, on compte ceux dont le premier élément est l'élément $l \in [\![1; N]\!]$.

Pour $l = 1$, le premier élément de l'ensemble F est en position 1. Dans ce cas là, on a

$$\binom{N-1}{k-1}$$

ensembles de k éléments. Pour $l = 2$, on a

$$\binom{N-2}{k-1}$$

ensembles F dont le premier élément est le deuxième de E. En continuant de dénombrer ainsi, on compte le nombre d'éléments F qui est égal à

$$\sum_{l=1}^{N-k+1} \binom{N-l}{k-1}$$

Finalement,

$$\binom{N}{k} = \sum_{l=1}^{N-k+1} \binom{N-l}{k-1}.$$