Mise à niveau en mathématique.

Les dérivées.

P. Létourneau

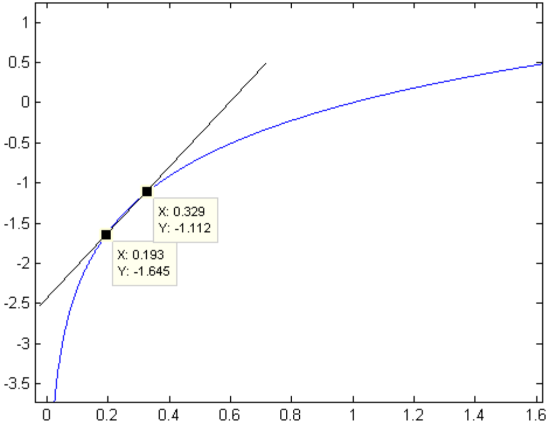
Département de Finance
HEC Montréal

22 août 2018

Sommaire

HEC MONTRĒAL

Introduction



HEC MONTRÉAL

Définition

Définition

La dérivée d'une fonction au point x. Soit f, une fonction définie dans un intervalle ouvert contenant le nombre x. Si la limite

$$\lim_{w \to x} \left[\frac{f(w) - f(x)}{w - x} \right],$$

existe, elle est apelée la dérivée de f au point x.

HEC MONTRĒAL

Dérivée en un point

La dérivée de f au point a, notée $f^{'}(a)$, est :

$$f^{'}(a) = \lim_{x \to a} \left[\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right] = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (1.1)$$

C'est donc aussi le taux de changement de $y = f(x)$ par rapport à x quand $x = a$.

Diverses notations

- $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$
- $D\left(f\left(x\right)\right)$
- $f^{'}\left(x\right)$
- $\frac{\partial f}{\partial x}$
- D[·] dans Mathématica

Les règles de dérivations ♡

La dérivée d'une constante

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(c) = 0 \tag{2.1}$$

Exemples

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(4) = 0.$$

HEC MONTRĒAL

Les règles de dérivations ♡

La dérivée d'une fonction puissance

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^n\right) = n \times x^{n-1} \tag{2.2}$$

Exemples

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^3 = 3x^2$$

HEC MONTRÉAL

Les règles de dérivations ♡

La dérivée d'une fonction multipliée par une constante

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(c \times f\left(x\right)\right) = c \times \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f\left(x\right) = c \times f^{'}\left(x\right) \tag{2.3}$$

Exemples

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} 5x^2 = 5 \times 2 \times x = 10x$$

HEC MONTRÉAL

Les règles de dérivations ♡

La dérivée d'un produit

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(g\left(x\right)\times f\left(x\right)\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g\left(x\right)\times f\left(x\right)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f\left(x\right)\times g\left(x\right) \tag{2.4}$$

Exemples

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\left(5x^2\right)\times e^{4x^4}\right)&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(5x^2\right)\times e^{4x^4}+5x^2\times\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^{4x^4}\\&=10x\times e^{4x^4}+5x^2\times\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^{4x^4}\end{aligned}$$

HEC MONTRĒAL

Les règles de dérivations ♡

La dérivée d'une somme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(g\left(x\right)+f\left(x\right)\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f\left(x\right)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g\left(x\right) \tag{2.5}$$

Exemples

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\left(5x^{2}\right)+e^{4x^{4}}\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(5x^{2}\right)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^{4x^{4}}\\ &= 10x+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^{4x^{4}}\end{aligned}$$

HEC MONTRĒAL

Les règles de dérivations ♡

La dérivée de la fonction exponentielle

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} e^{f(x)} = e^{f(x)} \times \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) \tag{2.6}$$

Exemples

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} e^{4x^4} &= e^{4x^4} \times \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(4x^4\right) \\ &= e^{4x^4} \times 16x^3 \end{aligned}$$

HEC MONTRÉAL

Les règles de dérivations ♡

La dérivée d'un quotient

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x) \times \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) - f(x) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} g(x)}{(g(x))^2} \tag{2.7}$$

Exemples

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{e^{4x^4}}{5x^2}\right) = \frac{5x^2 \times \left(16x^3 \times e^{4x^4}\right) - e^{4x^4} \times (10x)}{(5x^2)^2}$$

$$= \frac{80x^5 \times e^{4x^4} - 10x \times e^{4x^4}}{(25x^4)}$$

HEC MONTRĒAL

Les règles de dérivations ♡

La dérivée de la fonction logarithme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\left(f\left(x\right)\right)=\frac{1}{f\left(x\right)}\times\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f\left(x\right) \tag{2.8}$$

Exemples

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\left(5x^2\right)&=\frac{1}{5x^2}\left(10x\right)\\&=\frac{2}{x}\end{aligned}$$

HEC MONTRÉAL

Les règles de dérivations ♡

La dérivée d'une fonction composée (règle de la chaîne)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(f\left(g\left(x\right)\right)\right)=\frac{\mathrm{d}f\left(g\left(x\right)\right)}{\mathrm{d}g\left(x\right)}\times\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g\left(x\right) \tag{2.9}$$

Exemples

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\ln\left(5x^2\right)\right)&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}g\left(x\right)}\ln\left(g\left(x\right)\right)\times\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g\left(x\right)\\&=\frac{1}{g\left(x\right)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g\left(x\right)\\&=\frac{1}{5x^2}10x^1\\&=\frac{2}{x}\end{aligned}$$

HEC MONTRÉAL

Les règles de dérivations ♡

La dérivée n-ième

$$\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}} f(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}^{\mathrm{n}}}{\mathrm{d}x^{n}} f(x)\right) \tag{2.10}$$

Exemples

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \ln\left(5x^2\right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{2}{x}\right) \\
&= 2 \times \frac{-1}{x^2} \\
&= \frac{-2}{x^2}
\end{aligned}$$

Exercices

Calculez les dérivées par rapport à x des équations suivantes :

1. x^3
2. $\sqrt{x}$
3. $(2x-2)(e^x)$
4. $5x^2+3x^3+2$
5. e^{5x^2+3}
6. e^{x^3+5x}

HEC MONTRĒAL

Réponses : Exercices

1. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^3 = 3x^2$
2. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sqrt{x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^{1/2} = \frac{1}{2} x^{-1/2}$
3. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} (2x-2)e^x = 2e^x + (2x-2)e^x = 2xe^x$
4. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} 5x^2 + 3x^3 + 2 = 10x + 9x^2$
5. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} e^{5x^2+3} = e^{5x^2+3} 10x$
6. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} e^{x^3+5x} = e^{x^3+5x}(3x^2+5)$

HEC MONTRÉAL

Exercices (suite)

Calculez les dérivées par rapport à x des équations suivantes :

- $5x + 2 + e^4$
- $5x + 3y$
- $\frac{5x^2+2}{3x-3}$
- $\ln\left(-5x^2 + 3\right)$
- $\left(x^2 + 2\right)^2$
- $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left[3x^2 + x + 2 + e^{2x}\right]$

HEC MONTRĒAL

Réponses : Exercices

1. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} 5x + 2^4 = 5$
2. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} 5x + y = 5$
3. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{5x^2+2}{3x-3} = \frac{(3x-3)(10x)-(5x^2+2)3}{(3x-3)^2} = \frac{15x^2-30x-6}{9x^2-18x+9}$
4. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln\left(-5x^2+3\right) = \frac{10x}{3-5x^2}$
5. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(x^2+2\right)^2 = 4x(x^2+2)$
6. $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \left[3x^2 + x + 2 + e^{2x}\right] = 6 + 4e^{2x}$

Exercices (suite)

Calculez les dérivées par rapport à x des équations suivantes :

- $\frac{e^{2x}+e^{x^2}}{e^{\sqrt{x}}}$
- $A(x)\, e^{B(x)\times x}$
- $A(x) \times \ln(B(x) \times x)$
- $x \times exp\{A(x)/B(x)\}$
- $\frac{A(f(x))}{B(x)}$

HEC MONTRĒAL

Réponses : Exercices

1. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{e^{2x}+e^{x^2}}{e^{\sqrt{x}}} = \frac{(e^{\sqrt{x}})(2e^{2x}+2xe^{x^2})-(\frac{1}{2}x^{-1/2}e^{\sqrt{x}})(e^{2x}+e^{x^2})}{e^{2\sqrt{x}}}$
2. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}A(x)\, e^{B(x)\times x} = A^{'}(x)\, e^{B(x)\times x} + A(x)(B(x) + B^{'}(x)\, x)e^{B(x)\times x}$
3. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}A(x) \times \ln(B(x) \times x) = A^{'}(x) \times \ln(B(x) \times x) + \frac{A(x)\left(B(x)+B^{'}(x)x\right)}{B(x)\times x}$
4. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x \times exp\left\{A(x)/B(x)\right\} =$ $exp\left\{A(x)/B(x)\right\} + x \times exp\left\{A(x)/B(x)\right\}\frac{B(x)A^{'}(x)-A(x)B^{'}(x)}{B(x)^2}$
5. $\frac{A(f(x))}{B(x)} = \frac{B(x)A^{'}(f(x))f^{'}(x)-B^{'}(x)A(f(x))}{B(x)^2}$

HEC MONTRĒAL

Dérivées de fonctions multivariées

Définition

Soit une fonction $f(x,z)$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{R}$, tel que :

$$f \ : \ \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ (x,z) \rightarrow f(x,z) \end{cases}$$

Exemples

Par exemple, $f(x,z) = x^2 + 1/z$.
Lorsqu'une fonction dépend de plusieurs variables, la notation $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f]$ devient $\frac{\partial}{\partial x}[f]$ et l'on parle alors de dérivée partielle de la fonction f par rapport à x.

HEC MONTRĒAL

Exercices

Pour la fonction $f(x,z) = x^2 + \frac{1}{z}$ trouvez :

- $\frac{\partial f(x,z)}{\partial x}$
- $\frac{\partial f(x,z)}{\partial z}$
- $\frac{\partial^2 f(x,z)}{\partial x \partial z}$

Exercices

- $\frac{\partial f(x,z)}{\partial x} = 2x$
- $\frac{\partial f(x,z)}{\partial z} = -\frac{1}{z^2}$
- $\frac{\partial^2 f(x,z)}{\partial x \partial z} = 0$

La dérivée totale

Définition

La dérivée d'une fonction d'état à plusieurs variables indépendantes est appelé différentielle totale. C'est la somme de ses différentielles par rapport à chaque variables.

Exemples

Dans l'exemple précédent, la différentielle totale de $f(x,z) = x^2 + \frac{1}{z}$ est :

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z = 2x\ dx - \frac{1}{z^2}\mathrm{d}z$$

HEC MONTRÉAL

Exercice 1

Dérivée de a^x ?
(Suggestion : $e^{\ln x} = x$)

Exercice 2

Application : Théorie du marché des Capitaux (TMC)
Soit un agent économique ayant une utilité représentée par la fonction exponentielle : $u(w) = -\frac{e^{-aw}}{a}$ avec $a \in \mathbb{R}^{*+}$ et w est la variable. Montrons que :

1. $u(w)$ est une fonction croissante de w
2. $u(w)$ est concave ($u''(w) < 0$)
3. L'aversion au risque absolu de l'agent définit par $A(w) = -\frac{u''(w)}{u'(w)}$ est une constante

HEC MONTRÉAL

Rappel

Rappel :

- Si $f^{'}(x) > 0$ pour $x \in \mathbb{D} \Rightarrow f$ est croissante sur $\mathbb{D}$
- Si $f^{'}(x) < 0$ pour $x \in \mathbb{D} \Rightarrow f$ est décroissante sur $\mathbb{D}$
- Si $f^{''}(x) > 0$ pour $x \in \mathbb{D} \Rightarrow f$ est convexe sur $\mathbb{D}$
- Si $f^{''}(x) < 0$ pour $x \in \mathbb{D} \Rightarrow f$ est concave sur $\mathbb{D}$

Exercice 3

Dérivées partielles : Calculez $\frac{\partial^2 (z \times \ln x)}{\partial x \partial z}$?

HEC MONTRÉAL

Exercice 4

Titres à revenus fixes : Le prix du zéro-coupon au temps $t \in [0, T]$ et qui a une échéance T peut être exprimé sous la forme :

$$P(t, r(t)) = e^{A(t,T)+B(t,T)\times r(t)}$$

Sachant que :

$$\begin{aligned} B(t, T) &= \left(1 - e^{-k(T-t)}\right) \\ A(t, T) &= (\theta - (T - t)), \end{aligned}$$

où $k, \theta \in \mathbb{R}$.

• Montrez que la durée de l'obligation est : $\frac{\partial P(t,r(t))}{\partial r(t)} = B(t, T) \times P(t, r(t))$

La durée est obtenu par la dérivée première du prix de l'obligation par rapport au taux d'intérêt.

Exercice 4 (suite)

• En utilisant la définition de la différentielle totale d'une fonction de plusieurs variables d'états, montrons que :

$$\frac{\mathrm{d}P\left(t, r(t)\right)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial P\left(t, r(t)\right)}{\partial r(t)}\frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{dt}} + \frac{\partial P\left(t, r(t)\right)}{\partial t}$$

HEC MONTRĒAL

Exercice 5

Gestion de portefeuille :
Nous savons que la variance d'un portefeuille constitué de deux actifs risqués E et D, de variance respective σ_E^2 et σ_D^2, et de covariance σ_{ED} s'écrit :

$$\sigma^2\left(_{PF}\right) = w_E^2\sigma_E^2 + \left(1 - w_E\right)^2 \sigma_D^2 + 2w_E\left(1 - w_E\right)\sigma_{ED}$$

Note : $\mathrm{Var}\left(a\tilde{X} + b\tilde{Y}\right) = a^2\mathrm{Var}\left(\tilde{X}\right) + b^2\mathrm{Var}\left(\tilde{Y}\right) + 2ab\mathrm{Cov}\left(\tilde{X}, \tilde{Y}\right)$

• Problème de minimisation : Quelle est la quantité w_E à investir dans l'actif E afin de minimiser la variance du portefeuille ?

Exercice 5 (suite)

Pour les fonctions convexes et concaves, une solution optimale peut-être trouvé. Pour une fonction $f(x)$, elle correspond au x solution de $f^{'}(x) = 0$.
Donc,

$$\min_{w_E} \sigma^2(w_E)$$

Ceci correspond à résoudre $\frac{\partial \sigma^{\mathbf{2}}(w_E)}{\partial w_E} = 0$.

Exercice 5 Réponse

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_{w_E}^2}{\mathrm{d}w_e} = 2w_E\sigma_E^2 - 2(1-w_E)\sigma_D^2 + (2-4w_E)\sigma_{ED}$$

$$w_E(2\sigma_E^2 + 2\sigma_D^2 - 4\sigma_{ED}) - 2\sigma_D^2 + 2\sigma_{ED} = 0$$

$$w_E = \frac{\sigma_D^2 - \sigma_{ED}}{\sigma_E^2 + \sigma_D^2 - 2\sigma_{ED}}$$

HEC MONTRĒAL

Exercice 1

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^{2x^2+3x+\ln x}\right) = ?$$

Exercice 2

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\ln\left(a\right)^{x}\right] = ?$

Exercice 3

$$\frac{d}{dt}\left[e^{-r(T-t)}\right] = ?$$

Exercice 1 Solution

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^{2x^2+3x+\ln x}\right) = (4x+3+\tfrac{1}{x})e^{2x^2+3x+\ln x}$$

HEC MONTRĒAL

Exercice 2 Solution

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\ln\left(a\right)^{x}\right] = \left[\ln\left(a\right)^{x}\right]\ln(\ln(a))$$

HEC MONTRĒAL

Exercice 3

$$\frac{d}{dt}\left[e^{-r(T-t)}\right] = r\left[e^{-r(T-t)}\right]$$

Exercice 4

Soit $f(x) = e^{2x^2+3}$.

1. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[e^{2x^2+3}\right] = ?$
2. $\frac{d^2}{dx^2}\left[e^{2x^2+3}\right] = ?$
3. Que pouvez vous en conclure sur le graph de la courbe ?
4. Calculez $\min_x e^{2x^2+3}$

HEC MONTRÉAL

Exercice 4 : Solution

Soit $f(x) = e^{2x^2+3}$.

1. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[e^{2x^2+3}\right] = 4x\left[e^{2x^2+3}\right]$
2. $\frac{d^2}{dx^2}\left[e^{2x^2+3}\right] = 4\left[e^{2x^2+3}\right] + 16x^2\left[e^{2x^2+3}\right]$
3. Que pouvez vous en conclure sur le graph de la courbe ?

Le graphique est convex sur tout le domaine et décroissant sur $\mathbb{R}^-$ et croissant sur $\mathbb{R}^+$

4. Calculez $\min_x e^{2x^2+3}$

$$4x\left[e^{2x^2+3}\right] = 0$$

$$x = 0$$

Exercice 5

$\frac{\partial^2}{\partial x \partial z}\left[e^x \times \ln z\right] = ?$

Exercice 6

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[e^{\left(2x^2+6\right)^2}\right]=?$$

HEC MONTRĒAL

Exercice 7

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\sqrt{e^x + \ln x}\,\right] = ?$$

Exercice 5 : Réponse

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial z}\left[e^x \times \ln z\right] = \frac{e^x}{z}$$

HEC MONTRĒAL

Exercice 6 : Réponse

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[e^{\left(2x^2+6\right)^2}\right] = (8x(2x^2+6))e^{\left(2x^2+6\right)^2}$$

Exercice 7 : Réponse

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\sqrt{e^x + \ln x}\,\right] = \frac{e^x + 1/x}{2(e^x + \ln x)^{1/2}}$$

HEC MONTRĒAL

Maximisation et minimisation sous contraintes

Introduction à la maximisation/minimisation sous contraintes
Lorsque l'on veut maximiser (ou minimiser) une fonction d'une ou plusieurs variables d'états, sujet à un certain nombre de contraintes (comme une contraintes de budget), la logique est la suivante :

1. Soit $f(x, y)$ la fonction à maximiser par rapport aux variables x et y dont les valeurs optimales de maximisation seront notées x^* et y^*.
2. Imaginons 1 contraintes :
   $x + y = 1$. Cette contrainte peut représenter une contraintes de budget où la somme des poids doit être égal à 1.
   Notons la contraintes sous la forme $x + y - 1 = 0$

HEC MONTRĒAL

Maximisation et minimisation sous contraintes

Le problème de maximisation s'écrit alors :

$$\max_{x,y} f(x,y) \quad \textit{sujet à } x+y=1 \tag{5.1}$$

équivalent à

$$\max_{x,y} M(x,y) = f(x,y) - \overset{\textit{le Lagrangien}}{\lambda} (x+y-1) \tag{5.2}$$

HEC MONTRĒAL

Maximisation et minimisation sous contraintes

À partir de 5.2 , nous allons obtenir 3 équations qui vont nous permettre de trouver x^* et y^*.
Donc,

$$\max_{x,y} M(x,y) = f(x,y) - \lambda(x+y-1)$$

$$1: \ \frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} - \lambda = 0$$

$$2: \ \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} - \lambda = 0$$

$$3: \ \frac{\partial M}{\partial \lambda} = -(x+y) + 1 = 0$$

Il suffit ensuite de résoudre le système d'équation.

HEC MONTRĒAL

Maximisation et minimisation sous contraintes

Note : si au lieu d'avoir une seule contrainte, nous en avions deux ou plus, le raisonnement serait le même ; sauf que le nombre de Lagrangien serait égal au nombre de contraintes.

$$\max_{x,y,z} M(x,y,z) = f(x,y,z) - \lambda\,(Contrainte\ 1) - \kappa\,(Contrainte\ 2)$$

$$1:\ \frac{\partial M}{\partial x} = 0 \qquad 2:\ \frac{\partial M}{\partial y} = 0$$

$$3:\ \frac{\partial M}{\partial z} = 0 \qquad 4:\ \frac{\partial M}{\partial \lambda} = 0$$

$$5:\ \frac{\partial M}{\partial \kappa} = 0$$

HEC MONTRÉAL

Exercice

Application de minimisation avec contrainte.
Retouvons le résultats obtenu plus tôt.

$$\min_{w_e, w_d} \sigma^2 (w_e, w_d) \quad \textit{sujet à } w_e + w_d = 1$$

HEC MONTRĒAL

Exercice (suite)

Nous pouvons donc réécrire le problème en incorporant un Lagrangien afin d'inclure la contrainte de budget.

$$\min_{w_e, w_d} L(w_e, w_d) = \sigma^2(w_e, w_d) - \lambda(w_e + w_d - 1),$$

où $\sigma^2(w_e, w_d) = w_e^2\sigma_e^2 + w_d^2\sigma_d^2 + 2w_e w_d \sigma_{ed}$

$$\frac{\partial L}{\partial w_e} = 0 \quad \Longrightarrow 2w_e\sigma_e^2 + 2w_d\sigma_{ed} - \lambda = 0 \tag{5.3}$$

$$\frac{\partial L}{\partial w_d} = 0 \quad \Longrightarrow 2w_d\sigma_d^2 + 2w_e\sigma_{ed} - \lambda = 0 \tag{5.4}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \quad \Longrightarrow w_e + w_d = 1 \tag{5.5}$$

HEC MONTRĒAL

Exercice (suite)

À partir de (5.3) et (5.4) :

$$2w_e\sigma_e^2 + 2w_d\sigma_{ed} = \lambda = 2w_d\sigma_d^2 + 2w_e\sigma_{ed} \quad (5.6)$$

$$2w_e\sigma_e^2 + 2w_d\sigma_{ed} = 2w_d\sigma_d^2 + 2w_e\sigma_{ed} \quad (5.7)$$

d'après (5.5), $w_d = w_e - 1$, que l'on remplace dans (5.7)

$$2w_e\sigma_e^2 + 2\left(1 - w_e\right)\sigma_{ed} = 2\left(1 - w_e\right)\sigma_d^2 + 2w_e\sigma_{ed} \quad (5.8)$$

$$2w_e\sigma_e^2 + 2\sigma_{ed}^2 - 2w_e\sigma_{ed} = 2\sigma_d^2 - 2w_e\sigma_d^2 + 2w_e\sigma_{ed} \quad (5.9)$$

on regroupe les termes en w_e

$$w_e\left(\sigma_e^2 + \sigma_d^2 - 2\sigma_{ed}\right) = \sigma_d^2 - \sigma_{ed}$$

HEC MONTRĒAL

Exercice (suite)

finalement

$$w_e^* = \frac{\sigma_d^2 - \sigma_{ed}}{\sigma_e^2 + \sigma_d^2 - 2\sigma_{ed}} \tag{5.10}$$

HEC MONTRĒAL

L'expansion de Taylor

Définition

Pour une fonction $f(x)$, indéfiniement dérivable sur $\mathbb{R}$ et a un réel, la fonction $f(x)$ peut-être approximé au niveau du point a selon :

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{i}(a) \times (x-a)^{i}}{i!} && (6.1)\\
&= f(a) + \frac{\partial f(a)}{\partial x}(x-a) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(a)}{\partial x^2}(x-a)^2 + \frac{1}{3!}\frac{\partial^3 f(a)}{\partial x^3}(x-a)^3 + \ldots && (6.2)
\end{aligned}
$$

où $f^{n}(a)$ est la dérivée "n"ième évalué au point a et $n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \ldots \times n$ avec $0! = 1$.

HEC MONTRĒAL

L'expansion de Taylor

Exemple

Quelle est l'expansion de Taylor de la fonction $\ln x$ de deuxième degré, au point $a = 1$.

L'expansion de Taylor

$$
\begin{aligned}
f(x) &\approx \sum_{i=0}^{2} \frac{f^{i}(x) \times (x-a)^{i}}{i!} \\
&\approx f(a) + \frac{\partial f(a)}{\partial x}(x-a) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(a)}{\partial x^2}(x-a)^2 \\
&\approx \ln(a) + \frac{1}{a}(x-a) + \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{a^2}\right)(x-a)^2 \\
&\approx \ln(1) + \frac{1}{1}(x-1) + \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{1^2}\right)(x-1)^2 \\
&\approx 0 + (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\ln(1,1) &= 0,0953102 \\
f(1,1) &= 0,095
\end{aligned}
$$

HEC MONTRÉAL

Exercice

Utilisez l'expansion de Taylor du deuxième degré pour approximer la fonction e^x au point $a = 0$.

Solution

$$
\begin{aligned}
f &\approx \sum_{i=0}^{2} \frac{f^{i}(x) \times (x-a)^{i}}{i!} \\
&\approx f(a) + f^{'}(a)(x-a) + 1/2 f^{''}(x-a)^2 \\
e^x &\approx e^a + e^a(x-a) + 1/2 e^a (x-a)^2
\end{aligned}
$$

HEC MONTRÉAL

Références

- Calcul différentiel et intégral 1, S.K. Stein, traduit de l'anglais par F. Allard, McGraw-Hill, 1986.
- www.wolframalpha.com

HEC MONTRÉAL