

Mise à niveau en mathématique.

Les dérivées.

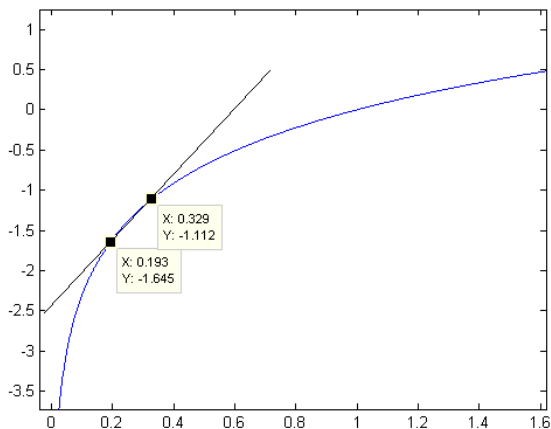
P. Létourneau

Département de Finance
HEC Montréal

21 août 2018

- 1 Rappels de base
- 2 Les règles de dérivation
 - Exercices
- 3 Dérivées de fonctions multivariées
 - Exercices
 - La dérivée totale
- 4 Exercices et applications
 - Exercice 6 (mini exercices)
- 5 Théorie du marché des capitaux (TMC)
 - Maximisation et minimisation sous contraintes
- 6 L'expansion de Taylor
- 7 Références

Introduction



Définition

Définition

La dérivée d'une fonction au point x . Soit f , une fonction définie dans un intervalle ouvert contenant le nombre x . Si la limite

$$\lim_{w \rightarrow x} \left[\frac{f(w) - f(x)}{w - x} \right],$$

existe, elle est appelée la dérivée de f au point x .

Dérivée en un point

La dérivée de f au point a , notée $f'(a)$, est :

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (1.1)$$

C'est donc aussi le taux de changement de $y = f(x)$ par rapport à x quand $x = a$.

Diverses notations

- $\frac{df}{dx}$
- $D(f(x))$
- $f'(x)$
- $\frac{\partial f}{\partial x}$
- $D[\cdot]$ dans Mathématica

Les règles de dérivation ♥

La dérivée d'une constante

$$\frac{d}{dx}(c) = 0 \quad (2.1)$$

Exemples

$$\frac{d}{dx}(4) = 0.$$

Les règles de dérivation ♥

La dérivée d'une fonction puissance

$$\frac{d}{dx} (x^n) = n \times x^{n-1} \quad (2.2)$$

Exemples

$$\frac{d}{dx} x^3 = 3x^2$$

Les règles de dérivation ♥

La dérivée d'une fonction multipliée par une constante

$$\frac{d}{dx} (c \times f(x)) = c \times \frac{d}{dx} f(x) = c \times f'(x) \quad (2.3)$$

Exemples

$$\frac{d}{dx} 5x^2 = 5 \times 2 \times x = 10x$$

Les règles de dérivation ♥

La dérivée d'un produit

$$\frac{d}{dx} (g(x) \times f(x)) = \frac{d}{dx} g(x) \times f(x) + \frac{d}{dx} f(x) \times g(x) \quad (2.4)$$

Exemples

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left((5x^2) \times e^{4x^4} \right) &= \frac{d}{dx} (5x^2) \times e^{4x^4} + 5x^2 \times \frac{d}{dx} e^{4x^4} \\ &= 10x \times e^{4x^4} + 5x^2 \times \frac{d}{dx} e^{4x^4} \end{aligned}$$

Les règles de dérivation ♥

La dérivée d'une somme

$$\frac{d}{dx} (g(x) + f(x)) = \frac{d}{dx} f(x) + \frac{d}{dx} g(x) \quad (2.5)$$

Exemples

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left((5x^2) + e^{4x^4} \right) \frac{d}{dx} &= \frac{d}{dx} (5x^2) + \frac{d}{dx} e^{4x^4} \\ &= 10x + \frac{d}{dx} e^{4x^4} \end{aligned}$$

Les règles de dérivations ♥

La dérivée de la fonction exponentielle

$$\frac{d}{dx} e^{f(x)} = e^{f(x)} \times \frac{d}{dx} f(x) \quad (2.6)$$

Exemples

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} e^{4x^4} &= e^{4x^4} \times \frac{d}{dx} (4x^4) \\ &= e^{4x^4} \times 16x^3 \end{aligned}$$

Les règles de dérivations ♥

La dérivée d'un quotient

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{g(x) \times \frac{d}{dx} f(x) - f(x) \frac{d}{dx} g(x)}{(g(x))^2} \quad (2.7)$$

Exemples

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{e^{4x^4}}{5x^2} \right) &= \frac{5x^2 \times (16x^3 \times e^{4x^4}) - e^{4x^4} \times (10x)}{(5x^2)^2} \\ &= \frac{80x^5 \times e^{4x^4} - 10x \times e^{4x^4}}{(25x^4)} \end{aligned}$$

Les règles de dérivations ♥

La dérivée de la fonction logarithme

$$\frac{d}{dx} \ln(f(x)) = \frac{1}{f(x)} \times \frac{d}{dx} f(x) \quad (2.8)$$

Exemples

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \ln(5x^2) &= \frac{1}{5x^2} (10x) \\ &= \frac{2}{x} \end{aligned}$$

Les règles de dérivations ♥

La dérivée d'une fonction composée (règle de la chaîne)

$$\frac{d}{dx} (f(g(x))) = \frac{df(g(x))}{dg(x)} \times \frac{d}{dx} g(x) \quad (2.9)$$

Exemples

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (\ln(5x^2)) &= \frac{d}{dg(x)} \ln(g(x)) \times \frac{d}{dx} g(x) \\ &= \frac{1}{g(x)} \frac{d}{dx} g(x) \\ &= \frac{1}{5x^2} 10x^1 \\ &= \frac{2}{x} \end{aligned}$$

Les règles de dérivations ♥

La dérivée n-ième

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} f(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^n}{dx^n} f(x) \right) \quad (2.10)$$

Exemples

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} \ln(5x^2) &= \frac{d}{dx} \left(\frac{2}{x} \right) \\ &= 2 \times \frac{-1}{x^2} \\ &= \frac{-2}{x^2} \end{aligned}$$

Exercices

Calculez les dérivées par rapport à x des équations suivantes :

1 x^3

2 \sqrt{x}

3 $(2x - 2)(e^x)$

4 $5x^2 + 3x^3 + 2$

5 e^{5x^2+3}

6 e^{x^3+5x}

Réponses : Exercices

- ❶ $\frac{d}{dx}x^3 = 3x^2$
- ❷ $\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{d}{dx}x^{1/2} = \frac{1}{2}x^{-1/2}$
- ❸ $\frac{d}{dx}(2x-2)e^x = 2e^x + (2x-2)e^x = 2xe^x$
- ❹ $\frac{d}{dx}5x^2 + 3x^3 + 2 = 10x + 9x^2$
- ❺ $\frac{d}{dx}e^{5x^2+3} = e^{5x^2+3}10x$
- ❻ $\frac{d}{dx}e^{x^3+5x} = e^{x^3+5x}(3x^2 + 5)$

Exercices (suite)

Calculez les dérivées par rapport à x des équations suivantes :

- $5x + 2 + e^4$
- $5x + 3y$
- $\frac{5x^2+2}{3x-3}$
- $\ln(-5x^2 + 3)$
- $(x^2 + 2)^2$
- $\frac{d^2}{dx^2} [3x^2 + x + 2 + e^{2x}]$

Réponses : Exercices

$$① \frac{d}{dx} 5x + 2^4 = 5$$

$$② \frac{d}{dx} 5x + y = 5$$

$$③ \frac{d}{dx} \frac{5x^2+2}{3x-3} = \frac{(3x-3)(10x)-(5x^2+2)3}{(3x-3)^2} = \frac{15x^2-30x-6}{9x^2-18x+9}$$

$$④ \frac{d}{dx} \ln(-5x^2 + 3) = \frac{10x}{3-5x^2}$$

$$⑤ \frac{d}{dx} (x^2 + 2)^2 = 4x(x^2 + 2)$$

$$⑥ \frac{d^2}{dx^2} [3x^2 + x + 2 + e^{2x}] = 6 + 4e^{2x}$$

Exercices (suite)

Calculez les dérivées par rapport à x des équations suivantes :

- $\frac{e^{2x} + e^{x^2}}{e^{\sqrt{x}}}$
- $A(x) e^{B(x) \times x}$
- $A(x) \times \ln(B(x) \times x)$
- $x \times \exp\{A(x) / B(x)\}$
- $\frac{A(f(x))}{B(x)}$

Réponses : Exercices

$$1 \quad \frac{d}{dx} \frac{e^{2x} + e^{x^2}}{e^{\sqrt{x}}} = \frac{(e^{\sqrt{x}})(2e^{2x} + 2xe^{x^2}) - (\frac{1}{2}x^{-1/2}e^{\sqrt{x}})(e^{2x} + e^{x^2})}{e^x}$$

$$2 \quad \frac{d}{dx} A(x) e^{B(x) \times x} = A'(x) e^{B(x) \times x} + A(x)(B(x) + B'(x)x) e^{B(x) \times x}$$

$$3 \quad \frac{d}{dx} A(x) \times \ln(B(x) \times x) = A'(x) \times \ln(B(x) \times x) + \frac{A(x)(B(x) + B'(x)x)}{B(x) \times x}$$

$$4 \quad \frac{d}{dx} x \times \exp\{A(x)/B(x)\} = \exp\{A(x)/B(x)\} + x \times \exp\{A(x)/B(x)\} \frac{B(x)A'(x) - A(x)B'(x)}{B(x)^2}$$

$$5 \quad \frac{A(f(x))}{B(x)} = \frac{B(x)A'(f(x))f'(x) - B'(x)A(f(x))}{B(x)^2}$$

Dérivées de fonctions multivariées

Définition

Soit une fonction $f(x, z)$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{R}$, tel que :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, z) \rightarrow f(x, z) \end{cases}$$

Exemples

Par exemple, $f(x, z) = x^2 + 1/z$.

Lorsqu'une fonction dépend de plusieurs variables, la notation $\frac{d}{dx}[f]$ devient $\frac{\partial}{\partial x}[f]$ et l'on parle alors de dérivée partielle de la fonction f par rapport à x .

Exercices

Pour la fonction $f(x, z) = x^2 + \frac{1}{z}$ trouvez :

- $\frac{\partial f(x, z)}{\partial x}$
- $\frac{\partial f(x, z)}{\partial z}$
- $\frac{\partial^2 f(x, z)}{\partial x \partial z}$

Exercices

- $\frac{\partial f(x,z)}{\partial x} = 2x$
- $\frac{\partial f(x,z)}{\partial z} = -\frac{1}{z^2}$
- $\frac{\partial^2 f(x,z)}{\partial x \partial z} = 0$

La dérivée totale

Définition

La dérivée d'une fonction d'état à plusieurs variables indépendantes est appelé différentielle totale. C'est la somme de ses différentielles par rapport à chaque variables.

Exemples

Dans l'exemple précédent, la différentielle totale de $f(x, z) = x^2 + \frac{1}{z}$ est :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial z} dz = 2x dx - \frac{1}{z^2} dz$$

Exercice 1

Dérivée de a^x ?

(Suggestion : $e^{\ln x} = x$)

Exercice 2

Application : Théorie du marché des Capitaux (TMC)

Soit un agent économique ayant une utilité représentée par la fonction exponentielle :

$u(w) = -\frac{e^{-aw}}{a}$ avec $a \in \mathbb{R}^{*+}$ et w est la variable. Montrons que :

- ❶ $u(w)$ est une fonction croissante de w
- ❷ $u(w)$ est concave ($u''(w) < 0$)
- ❸ L'aversion au risque absolu de l'agent définit par $A(w) = -\frac{u''(w)}{u'(w)}$ est une constante

Rappel

Rappel :

- Si $f'(x) > 0$ pour $x \in \mathbb{D} \Rightarrow f$ est croissante sur \mathbb{D}
- Si $f'(x) < 0$ pour $x \in \mathbb{D} \Rightarrow f$ est décroissante sur \mathbb{D}
- Si $f''(x) > 0$ pour $x \in \mathbb{D} \Rightarrow f$ est convexe sur \mathbb{D}
- Si $f''(x) < 0$ pour $x \in \mathbb{D} \Rightarrow f$ est concave sur \mathbb{D}

Exercice 3

Dérivées partielles : Calculez $\frac{\partial^2(z \times \ln x)}{\partial x \partial z}$?

Exercice 4

Titres à revenus fixes : Le prix du zéro-coupon au temps $t \in [0, T]$ et qui a une échéance T peut être exprimé sous la forme :

$$P(t, r(t)) = e^{A(t, T) + B(t, T) \times r(t)}$$

Sachant que :

$$\begin{aligned} B(t, T) &= \left(1 - e^{-k(T-t)}\right) \\ A(t, T) &= (\theta - (T - t)), \end{aligned}$$

où $k, \theta \in \mathbb{R}$.

- Montrez que la durée de l'obligation est : $\frac{\partial P(t, r(t))}{\partial r(t)} = B(t, T) \times P(t, r(t))$

La durée est obtenu par la dérivée première du prix de l'obligation par rapport au taux d'intérêt.

Exercice 4 (suite)

- En utilisant la définition de la différentielle totale d'une fonction de plusieurs variables d'états, montrons que :

$$\frac{dP(t, r(t))}{dt} = \frac{\partial P(t, r(t))}{\partial r(t)} \frac{dr(t)}{dt} + \frac{\partial P(t, r(t))}{\partial t}$$

Exercice 5

Gestion de portefeuille :

Nous savons que la variance d'un portefeuille constitué de deux actifs risqués E et D , de variance respective σ_E^2 et σ_D^2 , et de covariance σ_{ED} s'écrit :

$$\sigma^2(PF) = w_E^2 \sigma_E^2 + (1 - w_E)^2 \sigma_D^2 + 2w_E(1 - w_E) \sigma_{ED}$$

Note : $\text{Var}(a\tilde{X} + b\tilde{Y}) = a^2 \text{Var}(\tilde{X}) + b^2 \text{Var}(\tilde{Y}) + 2ab \text{Cov}(\tilde{X}, \tilde{Y})$

- Problème de minimisation : Quelle est la quantité w_E à investir dans l'actif E afin de minimiser la variance du portefeuille ?

Exercice 5 (suite)

Pour les fonctions convexes et concaves, une solution optimale peut-être trouvée. Pour une fonction $f(x)$, elle correspond au x solution de $f'(x) = 0$.

Donc,

$$\min_{w_E} \sigma^2(w_E)$$

Ceci correspond à résoudre $\frac{\partial \sigma^2(w_E)}{\partial w_E} = 0$.

Exercice 5 Réponse

$$\frac{d\sigma_{w_E}^2}{dw_e} = 2w_E\sigma_E^2 - 2(1 - w_E)\sigma_D^2 + (2 - 4w_E)\sigma_{ED}$$

$$w_E(2\sigma_E^2 + 2\sigma_D^2 - 4\sigma_{ED}) - 2\sigma_D^2 + 2\sigma_{ED} = 0$$

$$w_E = \frac{\sigma_D^2 - \sigma_{ED}}{\sigma_E^2 + \sigma_D^2 - 2\sigma_{ED}}$$

Exercice 1

$$\frac{d}{dx} \left(e^{2x^2+3x+\ln x} \right) = ?$$

Exercice 2

$$\frac{d}{dx} [\ln(a)^x] = ?$$

Exercice 3

$$\frac{d}{dt} \left[e^{-r(T-t)} \right] = ?$$

Exercice 1 Solution

$$\frac{d}{dx} \left(e^{2x^2+3x+\ln x} \right) = \left(4x + 3 + \frac{1}{x} \right) e^{2x^2+3x+\ln x}$$

Exercice 2 Solution

$$\frac{d}{dx} [\ln(a)^x] = [\ln(a)^x] \ln(\ln(a))$$

Exercice 3

$$\frac{d}{dt} \left[e^{-r(T-t)} \right] = r \left[e^{-r(T-t)} \right]$$

Exercice 4

Soit $f(x) = e^{2x^2+3}$.

1. $\frac{d}{dx} [e^{2x^2+3}] = ?$

2. $\frac{d^2}{dx^2} [e^{2x^2+3}] = ?$

3. Que pouvez vous en conclure sur le graph de la courbe ?

4. Calculez $\min_x e^{2x^2+3}$

Exercice 4 : Solution

Soit $f(x) = e^{2x^2+3}$.

$$1. \frac{d}{dx} \left[e^{2x^2+3} \right] = 4x \left[e^{2x^2+3} \right]$$

$$2. \frac{d^2}{dx^2} \left[e^{2x^2+3} \right] = 4 \left[e^{2x^2+3} \right] + 16x^2 \left[e^{2x^2+3} \right]$$

3. Que pouvez vous en conclure sur le graph de la courbe ?

Le graphique est convexe sur tout le domaine et décroissant sur \mathbb{R}^- et croissant sur \mathbb{R}^+

4. Calculez $\min_x e^{2x^2+3}$

$$4x \left[e^{2x^2+3} \right] = 0$$

$$x = 0$$

Exercice 5

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial z} [e^x \times \ln z] = ?$$

Exercice 6

$$\frac{d}{dx} \left[e^{(2x^2+6)^2} \right] = ?$$

Exercice 7

$$\frac{d}{dx} [\sqrt{e^x + \ln x}] = ?$$

Exercice 5 : Réponse

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial z} [e^x \times \ln z] = \frac{e^x}{z}$$

Exercice 6 : Réponse

$$\frac{d}{dx} \left[e^{(2x^2+6)^2} \right] = (8x(2x^2 + 6))e^{(2x^2+6)^2}$$

Exercice 7 : Réponse

$$\frac{d}{dx} \left[\sqrt{e^x + \ln x} \right] = \frac{e^x + 1/x}{2(e^x + \ln x)^{1/2}}$$

Maximisation et minimisation sous contraintes

Introduction à la maximisation/minimisation sous contraintes

Lorsque l'on veut maximiser (ou minimiser) une fonction d'une ou plusieurs variables d'états, sujet à un certain nombre de contraintes (comme une contraintes de budget), la logique est la suivante :

- 1 Soit $f(x, y)$ la fonction à maximiser par rapport aux variables x et y dont les valeurs optimales de maximisation seront notées x^* et y^* .
- 2 Imaginons 1 contraintes :
 $x + y = 1$. Cette contrainte peut représenter une contraintes de budget où la somme des poids doit être égal à 1.
Notons la contraintes sous la forme $x + y - 1 = 0$

Maximisation et minimisation sous contraintes

Le problème de maximisation s'écrit alors :

$$\max_{x,y} f(x,y) \quad \text{subject to } x + y = 1 \quad (5.1)$$

équivalent à

$$\max_{x,y} M(x,y) = f(x,y) - \overset{\text{le Lagrangien}}{\lambda} (x + y - 1) \quad (5.2)$$

Maximisation et minimisation sous contraintes

À partir de 5.2 , nous allons obtenir 3 équations qui vont nous permettre de trouver x^* et y^* .

Donc,

$$\max_{x,y} M(x,y) = f(x,y) - \lambda(x+y-1)$$

$$1 : \frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} - \lambda = 0$$

$$2 : \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} - \lambda = 0$$

$$3 : \frac{\partial M}{\partial \lambda} = -(x+y) + 1 = 0$$

Il suffit ensuite de résoudre le système d'équation.

Maximisation et minimisation sous contraintes

Note : si au lieu d'avoir une seule contrainte, nous en avons deux ou plus, le raisonnement serait le même ; sauf que le nombre de Lagrangien serait égal au nombre de contraintes.

$$\max_{x,y,z} M(x,y,z) = f(x,y,z) - \lambda(\text{Contrainte 1}) - \kappa(\text{Contrainte 2})$$

$$1 : \frac{\partial M}{\partial x} = 0$$

$$2 : \frac{\partial M}{\partial y} = 0$$

$$3 : \frac{\partial M}{\partial z} = 0$$

$$4 : \frac{\partial M}{\partial \lambda} = 0$$

$$5 : \frac{\partial M}{\partial \kappa} = 0$$

Exercice

Application de minimisation avec contrainte.
Retrouvons le résultats obtenu plus tôt.

$$\min_{w_e, w_d} \sigma^2(w_e, w_d) \quad \text{subject to } w_e + w_d = 1$$

Exercice (suite)

Nous pouvons donc réécrire le problème en incorporant un Lagrangien afin d'inclure la contrainte de budget.

$$\min_{w_e, w_d} L(w_e, w_d) = \sigma^2(w_e, w_d) - \lambda(w_e + w_d - 1),$$

$$\text{où } \sigma^2(w_e, w_d) = w_e^2 \sigma_e^2 + w_d^2 \sigma_d^2 + 2w_e w_d \sigma_{ed}$$

$$\frac{\partial L}{\partial w_e} = 0 \implies 2w_e \sigma_e^2 + 2w_d \sigma_{ed} - \lambda = 0 \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial w_d} = 0 \implies 2w_d \sigma_d^2 + 2w_e \sigma_{ed} - \lambda = 0 \quad (5.4)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \implies w_e + w_d = 1 \quad (5.5)$$

Exercice (suite)

À partir de (5.3) et (5.4) :

$$2w_e\sigma_e^2 + 2w_d\sigma_{ed} = \lambda = 2w_d\sigma_d^2 + 2w_e\sigma_{ed} \quad (5.6)$$

$$2w_e\sigma_e^2 + 2w_d\sigma_{ed} = 2w_d\sigma_d^2 + 2w_e\sigma_{ed} \quad (5.7)$$

d'après (5.5), $w_d = w_e - 1$, que l'on remplace dans (5.7)

$$2w_e\sigma_e^2 + 2(1 - w_e)\sigma_{ed} = 2(1 - w_e)\sigma_d^2 + 2w_e\sigma_{ed} \quad (5.8)$$

$$2w_e\sigma_e^2 + 2\sigma_{ed}^2 - 2w_e\sigma_{ed} = 2\sigma_d^2 - 2w_e\sigma_d^2 + 2w_e\sigma_{ed} \quad (5.9)$$

on regroupe les termes en w_e

$$w_e(\sigma_e^2 + \sigma_d^2 - 2\sigma_{ed}) = \sigma_d^2 - \sigma_{ed}$$

Exercice (suite)

finale

$$w_e^* = \frac{\sigma_d^2 - \sigma_{ed}}{\sigma_e^2 + \sigma_d^2 - 2\sigma_{ed}} \quad (5.10)$$

L'expansion de Taylor

Définition

Pour une fonction $f(x)$, indéfiniment dérivable sur \mathbb{R} et a un réel, la fonction $f(x)$ peut-être approximé au niveau du point a selon :

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^i(a) \times (x-a)^i}{i!} \quad (6.1)$$

$$= f(a) + \frac{\partial f(a)}{\partial x} (x-a) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x^2} (x-a)^2 + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 f(a)}{\partial x^3} (x-a)^3 + \dots (6.2)$$

où $f^n(a)$ est la dérivée " n "ième évalué au point a et $n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times n$ avec $0! = 1$.

L'expansion de Taylor

Exemple

Quelle est l'expansion de Taylor de la fonction $\ln x$ de deuxième degré, au point $a = 1$.

L'expansion de Taylor

$$\begin{aligned}
 f(x) &\approx \sum_{i=0}^2 \frac{f^{(i)}(a) \times (x-a)^i}{i!} \\
 &\approx f(a) + \frac{\partial f(a)}{\partial x} (x-a) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x^2} (x-a)^2 \\
 &\approx \ln(a) + \frac{1}{a} (x-a) + \frac{1}{2} \left(\frac{-1}{a^2} \right) (x-a)^2 \\
 &\approx \ln(1) + \frac{1}{1} (x-1) + \frac{1}{2} \left(\frac{-1}{1^2} \right) (x-1)^2 \\
 &\approx 0 + (x-1) - \frac{1}{2} (x-1)^2
 \end{aligned}$$

$$\ln(1,1) = 0,0953102$$

$$f(1,1) = 0,095$$

Exercice

Utilisez l'expansion de Taylor du deuxième degré pour approximer la fonction e^x au point $a = 0$.

Solution

$$\begin{aligned}
 f &\approx \sum_{i=0}^2 \frac{f^i(x) \times (x-a)^i}{i!} \\
 &\approx f(a) + f'(a)(x-a) + 1/2 f''(x-a)^2 \\
 e^x &\approx e^a + e^a(x-a) + 1/2 e^a(x-a)^2
 \end{aligned}$$

Références



Calcul différentiel et intégral 1, S.K. Stein, traduit de l'anglais par F. Allard, McGraw-Hill, 1986.



www.wolframalpha.com