Mise à niveau en mathématique.

Les fonctions de bases.

P. Létourneau

Département de Finance
HEC Montréal

20 août 2018

Sommaire

HEC MONTRÉAL

Outline

HEC MONTRÉAL

Introduction.

Considérons la question suivante :

$$3^{?} = 9.$$

À quel puissance doit-on élevé $3a + b$ pour obtenir 9 ?
La réponse à cette question est le logarithme de 9 dans la base 3.

HEC MONTRÉAL

Définition

Definition

Logarithme

Soit b, un nombre positif différent de 1. Si

$$b^x = c,$$

alors le nombre x est apellé le logarithme de c dans la base b.

$$x = \log_b c.$$

Le logarithme naturel, donc de base e, s'écrit soit comme $\log_e$ où plus communément ln.

Propriétés des logs

$$\begin{aligned} b^0 &= 1 \\ \log_b 1 &= 0 \\ b^1 &= b \\ \log_b b &= 1 \\ \log_e e = \ln e &= 1 \\ \log_b c &= \frac{\ln c}{\ln b} \end{aligned}$$

HEC MONTRÉAL

Propriétés des logs

Démonstration.

$$
\begin{aligned}
b^x &= c \\
e^{ln(b)x} &= c \\
\ln(e^{ln(b)x}) &= ln(c) \\
\ln(b)\,x &= \ln(c) \\
x &= \frac{\ln(c)}{\ln(b)}
\end{aligned}
$$

□

HEC MONTRÉAL

Choix du logarithme naturel

Theorem

La dérivée de la fonction $\log_b x$ *est*

$$(\log_b x)' = \frac{\log_b e}{x} = \frac{1}{x \ln b}.$$

HEC MONTRÉAL

Choix du logarithme naturel

Démonstration.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_b (x + \Delta x) - \log_b x}{\Delta x} \ldots$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \log \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) \ldots$$

$$\frac{1}{x} \lim_{\Delta x \to 0} \log \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x} \ldots$$

$$\frac{1}{x} \log_b \left(\lim_{\Delta x \to 0} \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x} \right) = \frac{1}{x} \log_b e$$

□

Choix du logarithme naturelle

Donc, en choisissant la base e,

$$(\log_e x)' = \frac{\log_e e}{x} = \frac{1}{x}.$$

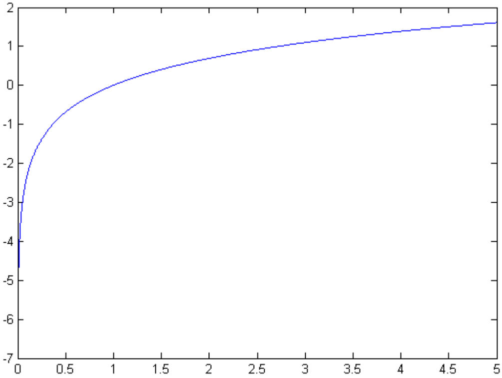
Le domaine de définition

Definition

Soit $f(x) = \ln(x)$, $\quad f : \begin{cases} \mathbb{R}^{*+} & \to \mathbb{R} \\ x & \to \ln\ x \end{cases}$

HEC MONTRÉAL

Graphique du logarithme



Proriétés du logarithme naturel

- $\ln(1) = 0$
- $\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$
- $\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$

HEC MONTRÉAL

Règles de calcul ♡

- $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$
- $\ln(a^n) = n \times \ln(a)$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(a \times b^{-1}\right) = \ln(a) + \ln\left(b^{-1}\right) = \ln(a) - \ln(b)$

HEC MONTRÉAL

Exercices : isolez x

1. $\ln\left(\frac{a\times b^x}{c}\right) = 0$
2. $\ln\left(\frac{b}{a^x}\right) = 0$
3. $\ln\left(\frac{b\times x}{a+b}\right) = \ln\left(x^x\right)$

HEC MONTRÉAL

Réponse : Exercice 1

$$\ln\left(\frac{a \times b^x}{c}\right) = 0$$

$$\ln(\frac{a}{c}) + \ln(b^x) = 0$$

$$\ln(\frac{a}{c}) + x\ln(b) = 0$$

$$x = \frac{\ln(\frac{c}{a})}{\ln(b)} = \log_b(\frac{c}{a}) = \log_b(c) - \log_b(a)$$

HEC MONTRÉAL

Réponse : Exercice 2

$$
\begin{aligned}
\ln\left(\frac{b}{a^x}\right) &= 0 \\
\ln(b) - x\ln(a) &= 0 \\
x &= \frac{\ln(b)}{\ln(a)} = \log_a(b)
\end{aligned}
$$

Dérivée ♡

Definition

La dérivée du logarithme

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

HEC MONTRÉAL

Outline

HEC MONTRÉAL

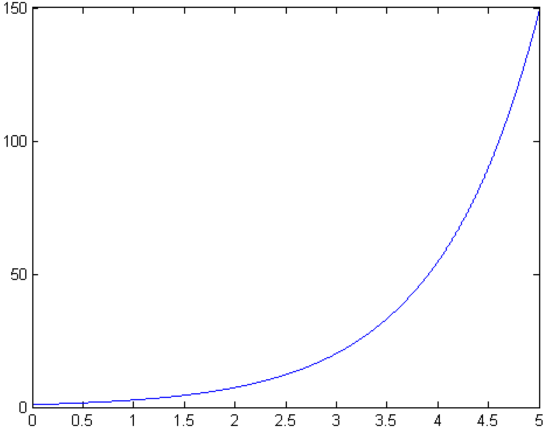
Domaine de définition

Definition

Soit $f\left(x\right)=e^{x}$, $\quad f:\begin{cases}\mathbb{R} & \rightarrow\mathbb{R}^{+}\\ x & \rightarrow e^{x}\end{cases}$

HEC MONTRĒAL

Graphique de l'exponentielle



Propriétés

- $e^0 = 1$
- $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$
- $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$
- $e^{\ln x} = x = \ln e^x$

HEC MONTRÉAL

Règle de calcul ♡

- $e^{a+b} = e^a \times e^b$
- $(e^a)^b = e^{a \times b}$

HEC MONTRÉAL

Dérivée de l'exponentielle ♡

- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} e^x = e^x$
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} \left(e^{u(x)} \right) = u'(x) \times e^{u(x)}$

HEC MONTRÉAL

Outline

Utilisations

Théorie du Marché des Capitaux (TMC) : Différentes fonctions permettent de représenter l'utilité des agents économiques. De par ses propriétés, la fonction logarithme peut-être utilisée.
Finance en temps continu : En temps continu, le taux d'intérêt continu entre 0 et t est représenté par la fonction exponentielle $e^{r \times t}$, où r est le taux d'intérêt instantané et t le temps.

Les taux d'intérêts

À la dernière diapositive, nous avons mentionné que l'utilisation du taux d'intérêt continu était courant en finance et qu'il se présente comme $e^{r \times t}$. Mais qu'est-ce que le taux d'intérêt continu ? En fait il y a plusieurs manière de représenter le même taux d'intérêt.

1. Le taux d'intérêt effectif annuel est le plus courant et le plus facile à visualiser. Ex : J'ai un placé 100$ à 5% effectif, donc à la fin de l'année j'ai $100\$ \times (1 + 5\%) = 105\$$.
2. Le taux annuel composé (semi-annuellement, trimestriellement, mensuellement etc...) se calcul comme $(1 + \frac{i}{n})^n$.

HEC MONTRÉAL

Le taux d'intérêt continu

Souvent en finance quantitaive nous parlons du taux d'intérêt continu, mais à quoi correspond-t-il ? En fait c'est un taux d'intérêt qui se compose à l'infini.

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{r}{n})^n = e^r.$$

HEC MONTRĒAL

Exercices : isolez x

1. $\ln(2x) = 4$
2. $e^{x+3} = 7$
3. $a^x = b$
4. $\ln(x/2) = -\ln(2)$
5. $e^{a+x} = b$
6. $\ln(a+x) = \ln x$
7. $\ln(2/x) = 4$
8. $e^{a+x} < b$
9. $e^{a-x} > b$
10. $se^{(a+b)-cx} < k$ [1]

HEC MONTRÉAL

1. ♡Cette exercice va revenir quelques fois durant la mise à niveau en mathématique.

Réponse : Exercice 1

$$
\begin{aligned}
\ln(2x) &= 4 \\
e^{\ln(2x)} &= e^4 \\
2x &= e^4 \\
x &= \frac{e^4}{2}
\end{aligned}
$$

HEC MONTRÉAL

Réponse : Exercice 2

$$
\begin{aligned}
e^{3+x} &= 7 \\
\ln(e^{3+x}) &= \ln(7) \\
3 + x &= \ln(7) \\
x &= \ln(7) - 3
\end{aligned}
$$

HEC MONTRÉAL

Réponse : Exercice 3

$$
\begin{aligned}
a^x &= b \\
\log_a(a^x) &= \log_a(b) \\
x &= \log_a(b)
\end{aligned}
$$

Réponse : Exercice 4

$$
\begin{aligned}
\ln(x/2) &= -\ln(2)\\
e^{\ln(x/2)} &= e^{-\ln(2)}\\
\frac{x}{2} &= \frac{1}{2}\\
x &= 1
\end{aligned}
$$

Réponse : Exercice 5

$$
\begin{aligned}
e^{a+x} &= b \\
\ln(e^{a+x}) &= \ln(b) \\
a + x &= \ln(b) \\
x &= \ln(b) - a
\end{aligned}
$$

HEC MONTRĒAL

Réponse : Exercice 6

$$
\begin{aligned}
\ln(a+x) &= \ln(x) \\
e^{\ln(a+x)} &= e^{\ln(x)} \\
a+x &= x \\
&???
\end{aligned}
$$

HEC MONTRÉAL

Réponse : Exercice 7

$$
\begin{aligned}
\ln(2/x) &= 4 \\
2/x &= e^4 \\
\frac{2}{e^4} &= x
\end{aligned}
$$

HEC MONTRÉAL

Réponse : Exercice 8

$$
\begin{aligned}
e^{a+x} &< b \\
a + x &< \ln(b) \\
x &< \ln(b) - a
\end{aligned}
$$

HEC MONTRÉAL

Réponse : Exercice 9

$$
\begin{aligned}
e^{a-x} &< b \\
a - x &< \ln(b) \\
x &> a - \ln(b)
\end{aligned}
$$

HEC MONTRÉAL

Réponse : Exercice 10

$$
\begin{aligned}
se^{(a+b)-cx} &< k \\
\ln(se^{(a+b)-cx}) &< \ln(k) \\
\ln(s) + (a+b) - cx &< \ln(k) \\
x &> \frac{\ln(s) + (a+b) - \ln(k)}{c}
\end{aligned}
$$

HEC MONTRÉAL

Exercices : Stein, Calcul différentiel et intégral 1

Résoudre les équations pour la valeur x :

- $2 \times 3^x = 7$
- $2^{5x} = 2^{7x}$
- $3 \times 5^x = 6^x$
- $10^{2x} \times 3^{2x} = 5$

HEC MONTRÉAL

Exercice : Le mouvement brownien géométrique

Soit le processus $\mathrm{d}X_t = \mu X_t \mathrm{d}t + \sigma X_t \mathrm{d}W_t$, un mouvement brownien géométrique ainsi que sa solution

$$\ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t + \sigma W_t.$$

Isolez S_t.

Exercice : Titres à revenus fixes

Soit le taux d'intérêt instantané $r = 0.06$. Trouvez la valeur actuelle de 1$ dans 6 mois, 1 an et 2 ans.
Rappel, le facteur d'escompte se calcul $\rho = e^{-r \times t}$.

Outline

HEC MONTRĒAL

Références

Calcul différentiel et intégral 1, S.K. Stein, traduit de l'anglais par F. Allard, McGraw-Hill, 1986.