Mise à niveau en mathématique.

Les intégrales.

P. Létourneau

Département de Finance
HEC Montréal

22 août 2018

Sommaire

HEC MONTRĒAL

Introduction

Définition

L'intégration et le procédé inverse de la dérivée
Soit F, une fonction. On note f sa dérivée. c'est à dire $F^{'} = f$.

$$F \xrightarrow{\textit{dérivation}} f$$

$$f \xrightarrow{\textit{intégration}} F$$

HEC MONTRĒAL

Introduction

Nous noterons l'intégrale indéfinie

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + k,$$

où k est une constante.

- $\int$ est le symbole d'intégration
- $f(x)$ s'apelle l'intégrande ou fonction à intégrer
- $\mathrm{d}x$ est l'élément différentiel ; il indique par rapport à quelle variable on intègre
- $F(x)$ est une primitive de $f(x)$
- k est une constante d'intégration

L'intégrale de Riemann

Définition

Pour une fonction f continue sur $[a, b]$, l'intégrale de f entre a et b est :

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x)\,\Delta x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\,|_a^b = F(b) - F(a)\,, \tag{1.1}$$

où $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.

HEC MONTRÉAL

Règles de base ♡

Règle 1

$$\int \mathrm{d}u = u + k$$

Règle 2

$$\int k \times u \times \mathrm{d}u = k \times \int u \times \mathrm{d}u$$

Règle 3

$$\int (u + v)\,\mathrm{d}u = \int u\mathrm{d}u + \int v\mathrm{d}u$$

HEC MONTRĒAL

Formules d'intégration ♡

Formule 1

$$\int u^n \mathrm{d}u = \frac{u^{n+1}}{n+1} + k, \quad n \neq -1$$

Formule 2

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln|u| + k$$

Formule 3

$$\int a^u \mathrm{d}u = \frac{a^u}{\ln a} + k$$

HEC MONTRĒAL

Formules d'intégration ♡

Formule 4

$$\int e^u \mathrm{d}u = e^u + k$$

Exercices résolus

$$\int x^{15}\mathrm{d}x = \frac{x^{16}}{16} + k$$

$$\begin{aligned}\int \left(3x^2 + 6x + 1\right)\mathrm{d}x &= \int 3x^2\mathrm{d}x + \int 6x\mathrm{d}x + \int 1\mathrm{d}x \\ &= x^3 + 3x^2 + x + k\end{aligned}$$

HEC MONTRĒAL

Exercices résolus

$$\begin{aligned}\int 2\sqrt{x}\mathrm{d}x &= 2\int x^{1/2}\mathrm{d}x \\ &= 2\left(\frac{x^{3/2}}{3/2}\right) + k \\ &= \frac{4x^{3/2}}{3} + k\end{aligned}$$

Exercices résolus

$$\int \left(4x^3 + 7x\right)^8 \left(12x^2 + 7\right) \mathrm{d}x = ?$$

changement de variable

Soit $u = \left(4x^3 + 7x\right)$ et $\mathrm{d}u = \left(12x^2 + 7\right) \mathrm{d}x$,

$$\begin{aligned}\int \left(4x^3 + 7x\right)^8 \left(12x^2 + 7\right) \mathrm{d}x &= \int u^8 \times \mathrm{d}u \\ &= \frac{u^9}{9} + k \\ &= \frac{1}{9}\left(4x^3 + 7x\right)^9 + k\end{aligned}$$

HEC MONTRÉAL

Exercices résolus

$$\int \frac{1}{2x+13}\mathrm{d}x = ?$$

changement de variable

Soit $u = 2x + 13$ et $\mathrm{d}u = 2\mathrm{d}x$, alors $\frac{1}{2}\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{2x+13}\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{u} \\
&= \frac{1}{2}\ln u + k \\
&= \frac{1}{2}\ln|2x+13| + k \\
&= \ln\sqrt{|2x+13|} + k
\end{aligned}$$

HEC MONTRĒAL

Exercices résolus

$$
\begin{aligned}
\int xe^{x^2}dx &= \\
u &= \qquad x^2 \\
du &= \qquad 2xdx \\
\int xe^{x^2}dx &= \frac{1}{2}\int e^u du \\
&= \frac{1}{2}e^u + k \\
&= \frac{1}{2}e^{x^2} + k
\end{aligned}
$$

HEC MONTRÉAL

Exercices

1. $\int x^7 dx$
2. $\int x^{12} dx$
3. $\int \left(x^3 + x^2 + x + 1\right) dx$
4. $\int \left(x^3 + 1\right)^2 3x^2 dx$
5. $\int \left(x^3 - 2\right)^2 dx$
6. $\int 7\sqrt{x} dx$
7. $\int \frac{2x}{\sqrt{1+2x^2}} dx$

HEC MONTRĒAL

Exercices résolu

1. $\int x^7 dx = \frac{x^8}{8}$
2. $\int x^{12} dx = \frac{x^{13}}{13}$
3. $\int \left(x^3 + x^2 + x + 1\right) dx = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x$
4. $\int \left(x^3 + 1\right)^2 3x^2 dx = \frac{x^6}{2} = \frac{x^9}{3} + x^6 + x^3$
5. $\int \left(x^3 - 2\right)^2 dx = \frac{x^7}{7} - x^4 + 4x$
6. $\int 7\sqrt{x} dx = \frac{21}{2} x^{3/2}$
7. $\int \frac{2x}{\sqrt{1+2x^2}} dx = \sqrt{1 + 2x^2}$

HEC MONTRÉAL

Intégration par partie ♡

Définition

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} d(uv) &= \quad udv + vdu \\ udv &= \quad d(uv) - vdu \\ \int udv &= \int d(uv) - \int vdu \\ \int udv &= \quad uv - \int vdu \end{aligned}$$

□

HEC MONTRÉAL

Example résolu

Exemples

$$\int x^4 \ln x \mathrm{d}x$$

Posons $u = \ln x$ et $dv = x^4 dx$. alors, $du = \frac{dx}{x}$ et $v = \frac{x^5}{5}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \int x^4 \ln x \mathrm{d}x &= \frac{x^5}{5} \ln x - \int \frac{x^5}{5} \times \frac{dx}{x} \\ &= \frac{x^5}{5} \ln x - \frac{1}{5} \int x^4 dx \\ &= \frac{x^5}{5} \ln x - \frac{x^5}{25} + k \end{aligned}$$

Exercice

$$\int x^2 e^x dx$$

Posons $u = \square$ et $dv = \square$. Alors, $du = \square$ et $v = e^x$.
Ainsi,

$$\begin{aligned} \int x^2 e^x dx &= \square - \int \square \\ &= \square - \square \end{aligned}$$

... (à compléter en classe.)

HEC MONTRĒAL

L'intégrale selon Riemann

Définition

Pour une fonction f continue sur $[a, b]$, l'intégrale de f entre a et b est :

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x)\,\Delta x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\,|_a^b = F(b) - F(a)\,, \tag{4.1}$$

où $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.

HEC MONTRÉAL

Propriétés des intégrales définies

Propriété 1

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Propriété 2

$$\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Propriété 3

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Propriété 4

$$\int_a^b -f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

HEC MONTRĒAL

Propriétés des intégrales définies

Propriété 5

$$\int_a^b k \times f(x)\,\mathrm{d}x = k \times \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Propriété 6

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

Propriété 7
Si f est une fonction continue et si on pose

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t,$$

alors $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$. Il s'en suit que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = f(x).$$

HEC MONTRĒAL

La substitution (et changement de bornes)

Méthode permettant de résoudres des intégrales via un procédé de changement de variables.

Exemple

$$\int_a^b 2x\sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x$$

À première vue, nous sommes incapable de résoudre analytiquement, cependant, en effectuant le bon changement de variables...

HEC MONTRĒAL

La substitution (suite)

Posons

$$\begin{aligned} u &= 1+x^2 \\ \mathrm{d}u &= 2x\mathrm{d}x \\ x=a &\implies u=1+a^2 \\ x=b &\implies u=1+b^2 \end{aligned}$$

donc,

$$\begin{aligned} \int_a^b 2x\sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x &= \int_{1+a^2}^{1+b^2} \sqrt{u}\mathrm{d}u \\ &= \int_{1+a^2}^{1+b^2} u^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}u \\ &= \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\Big|_{1+a^2}^{1+b^2} \\ &= \frac{2}{3}\left[\left(1+b^2\right)^{\frac{3}{2}} - \left(1+a^2\right)^{\frac{3}{2}}\right] \end{aligned}$$

Exercices

1- $\int_0^S t^{1/2} \mathrm{d}t$

2- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} \mathrm{d}t$

3- $\int_0^T e^{-r(T-u)} \mathrm{d}u$

4- $\int_a^b \frac{x}{\frac{x^2}{2}+3} \mathrm{d}x$

Solutions

1- $\int_0^S t^{1/2}\mathrm{d}t = 2/3t^{3/2}$

2- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{-\infty}^x e^{-t^2/2}\mathrm{d}t = e^{-x^2/2}$

3- $\int_0^T e^{-r(T-u)}\mathrm{d}u = \frac{e^{-r(T-u)}}{r}$

4- $\int_a^b \frac{x}{\frac{x^2}{2}+3}\mathrm{d}x = ln(x^2/2+3)$

HEC MONTRĒAL

Exercices

5- $\int e^{-r(T-t)} \mathrm{d}t$

6- $\int e^{-r(T-t)} \mathrm{d}r$

7- $\int_a^b \frac{1}{b-a} \mathrm{d}x$

HEC MONTRĒAL

Application numérique

Soit la fonction

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} e^{\frac{-(x-5)^2}{8}},$$

Trouver $F(5) - F(-\infty) = \int_{-\infty}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x$.
À faire en Excel (ou Matlab, ou Mathematica, ou ...)

HEC MONTRĒAL

Références

- Calcul 2, G. Oullet, Les éditions : Le griffon d'argile, 1982.
- www.wolframalpha.com

HEC MONTRÉAL