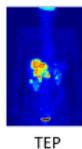


Imagerie Médicale

Partie 2: Formation, Reconstruction

Pierre Maurel

pierre.maurel@irisa.fr



TEP



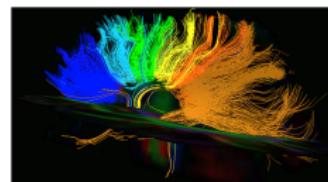
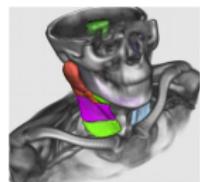
IRM



EEG



MEG



Préambule mathématique

Transformée de Radon

- 1917 : formulation mathématique d'une projection
- Utilisation
 - principalement : Scanner, Tomographie par émission de positons, Tomographie d'émission monophotonique
 - mais aussi : microscope électronique, sismique
- Pour une image volumique 3D : projection = une image plane 2D
- Pour une image plane 2D (une coupe) : projection = une fonction 1D

Transformée de Radon

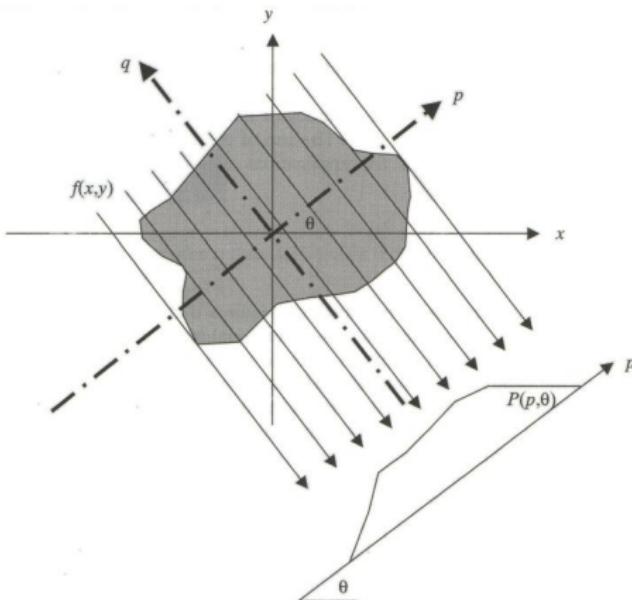
$$R\{f(x, y)\} = P(p, \theta) =$$

Transformée de Radon

$$R\{f(x, y)\} = P(p, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(p \cos \theta - q \sin \theta, p \sin \theta + q \cos \theta) dq$$

Transformée de Radon

$$R\{f(x, y)\} = P(p, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(p \cos \theta - q \sin \theta, p \sin \theta + q \cos \theta) dq$$



$$\begin{aligned} p &= x \cos \theta + y \sin \theta \\ q &= -x \sin \theta + y \cos \theta \end{aligned}$$

↓

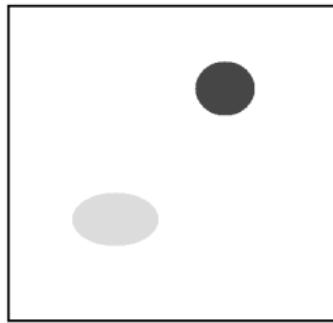
$$\begin{aligned} p \cos \theta - q \sin \theta &= x \\ p \sin \theta + q \cos \theta &= y \end{aligned}$$

↓

$$R\{f(x, y)\} = \int_{L_\theta} f(x, y) dL_\theta$$

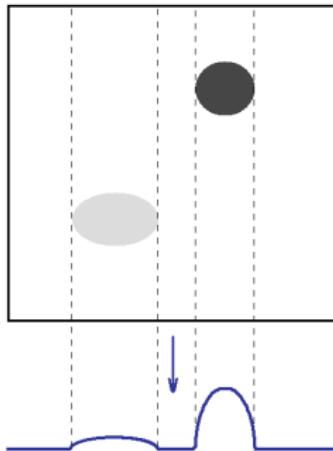
Transformée de Radon : exemple 1

$$R\{f(x, y)\} = P(p, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(p \cos \theta - q \sin \theta, p \sin \theta + q \cos \theta) dq$$



Transformée de Radon : exemple 1

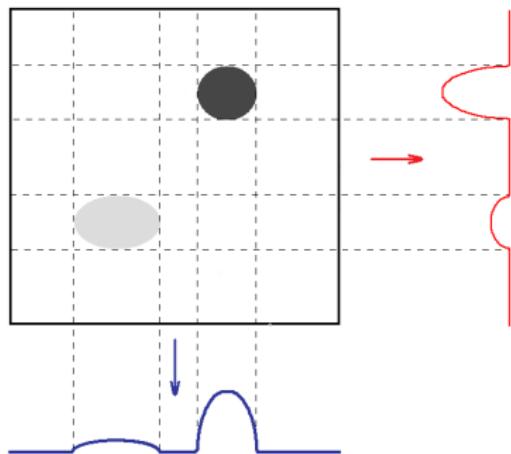
$$R\{f(x, y)\} = P(p, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(p \cos \theta - q \sin \theta, p \sin \theta + q \cos \theta) dq$$



$$P(p, 0)$$

Transformée de Radon : exemple 1

$$R\{f(x, y)\} = P(p, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(p \cos \theta - q \sin \theta, p \sin \theta + q \cos \theta) dq$$

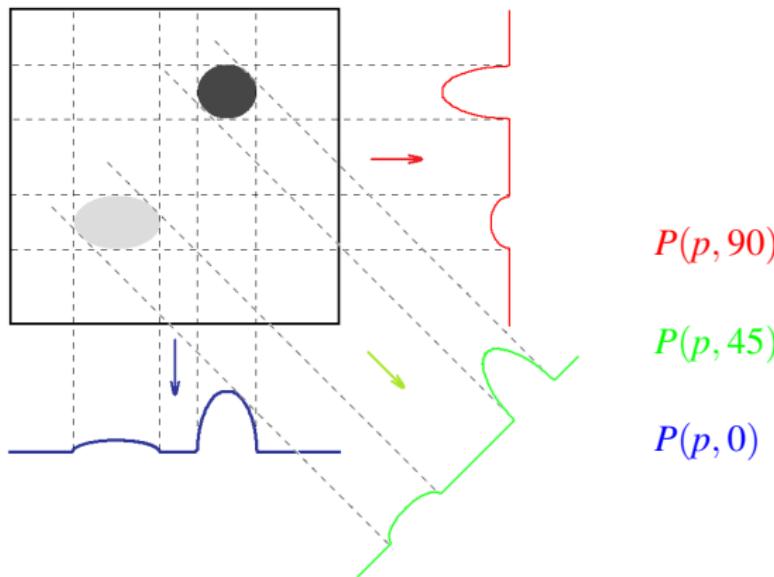


$$P(p, 90)$$

$$P(p, 0)$$

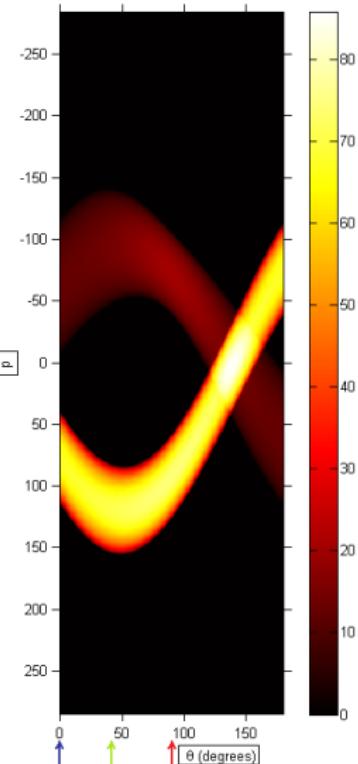
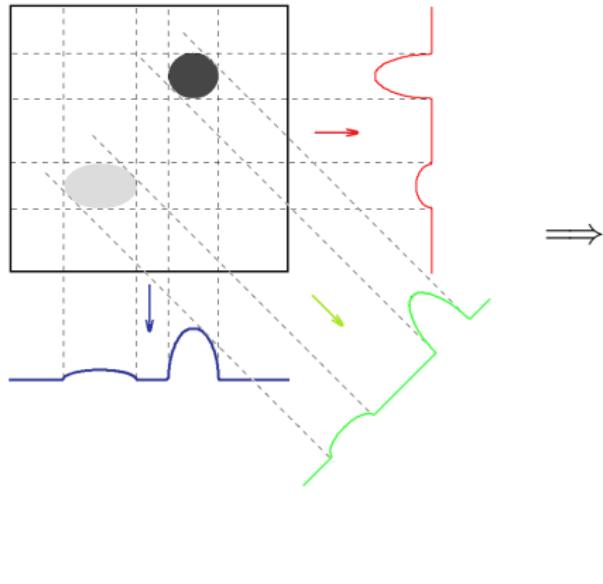
Transformée de Radon : exemple 1

$$R\{f(x, y)\} = P(p, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(p \cos \theta - q \sin \theta, p \sin \theta + q \cos \theta) dq$$

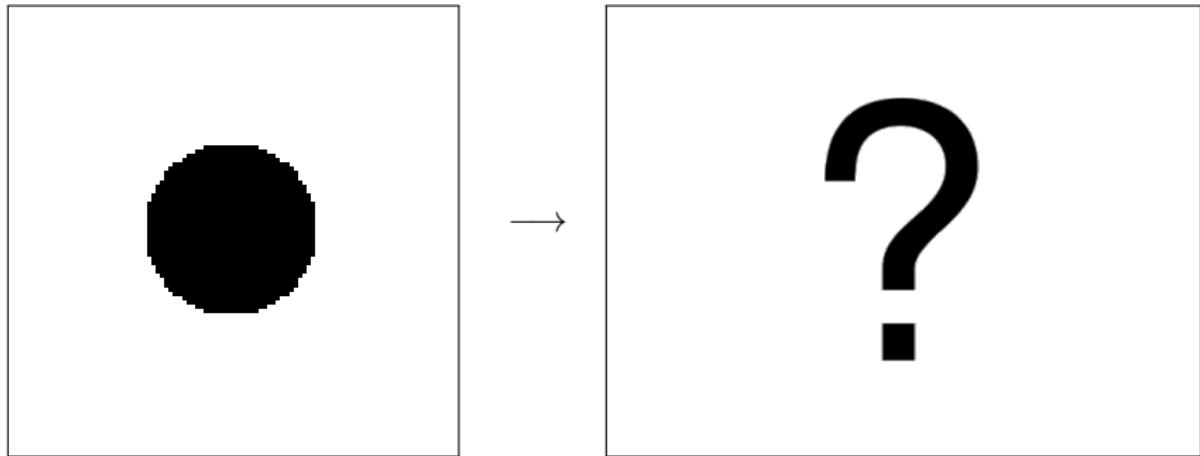


Transformée de Radon : exemple 1

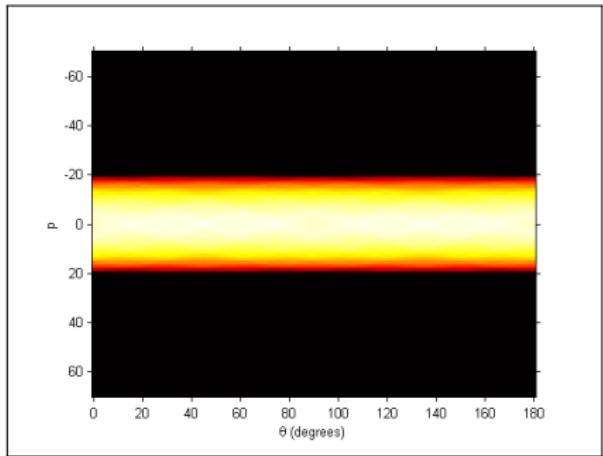
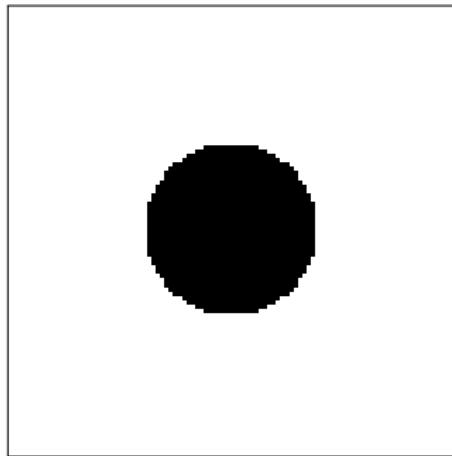
représentation de la transformée de Radon
Sinogramme



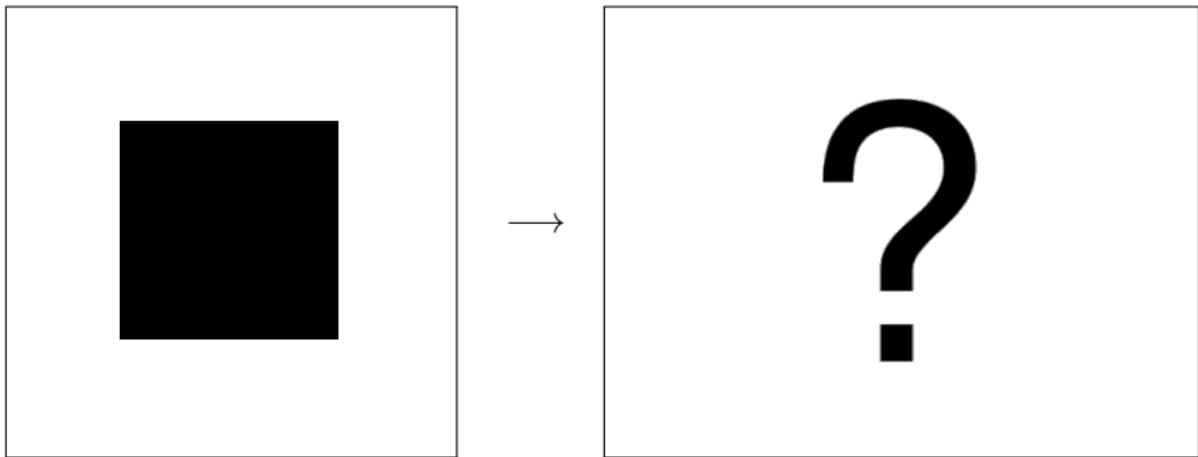
Transformée de Radon : exemple 2



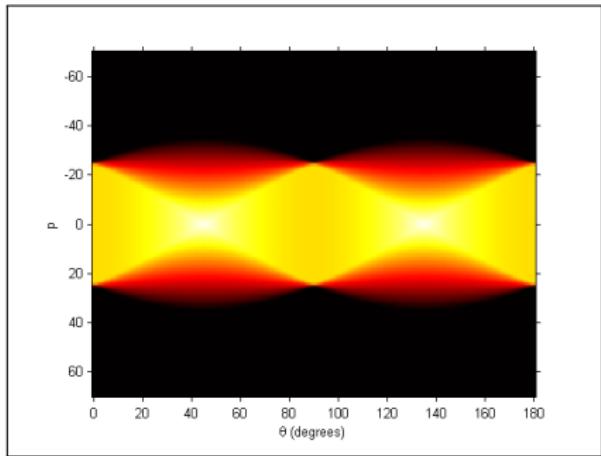
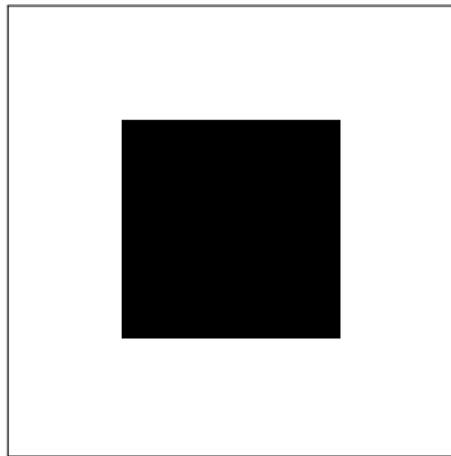
Transformée de Radon : exemple 2



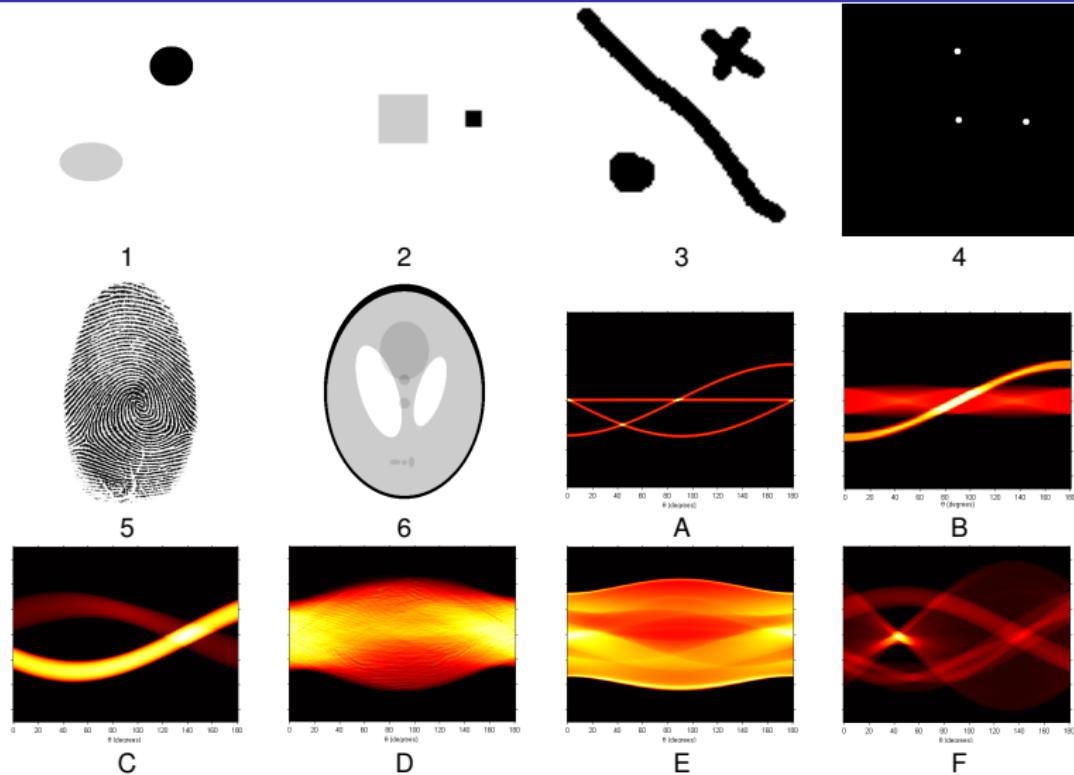
Transformée de Radon : exemple 3



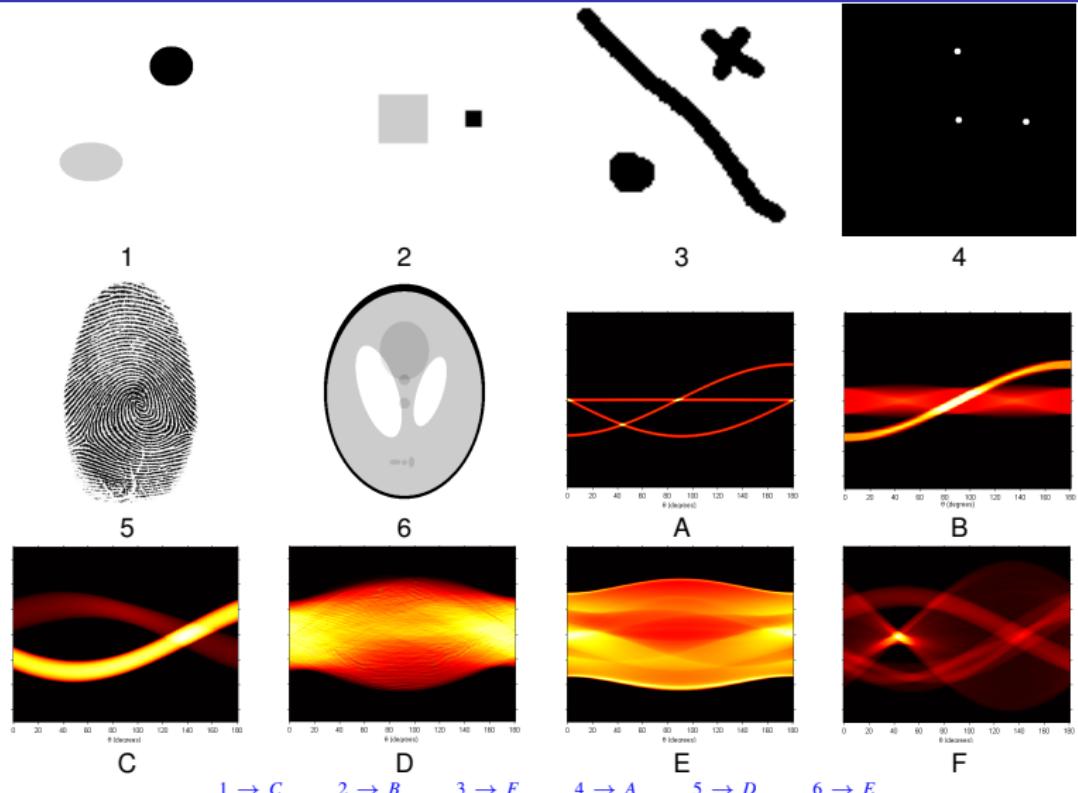
Transformée de Radon : exemple 3



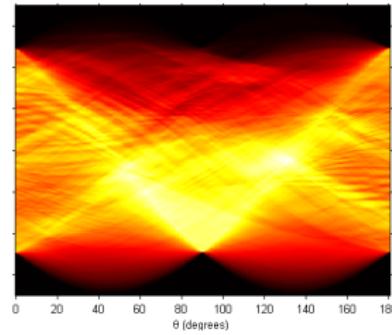
Transformée de Radon : exemples



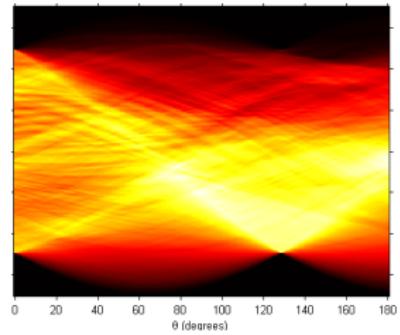
Transformée de Radon : exemples



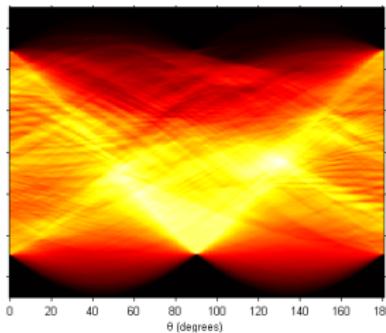
Transformée de Radon : exemples



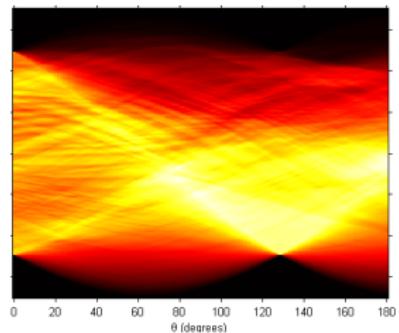
?



Transformée de Radon : exemples



?

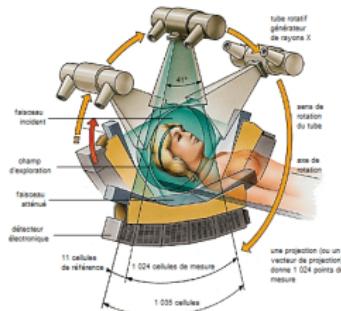


$$P(p, 0) \neq P(\text{end} - p, 180)$$

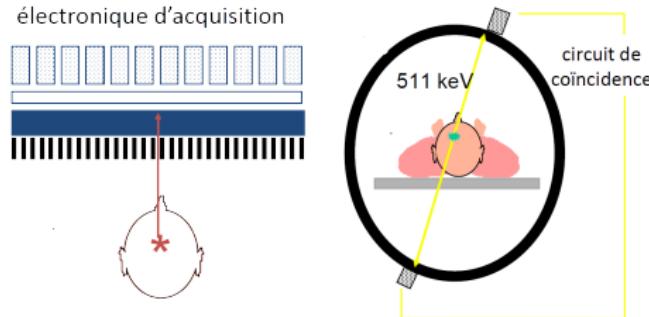


Lien avec l'imagerie médicale

- Scanner : projection des coefficients d'atténuation

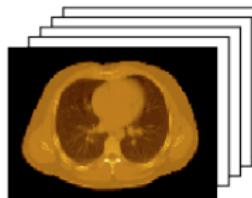


- TEP / SPECT : projection des concentrations locales du produit injecté

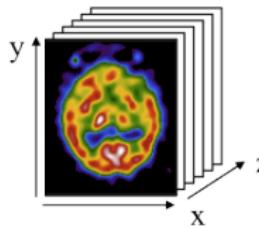


Problème : comment reconstruire l'image à partir des projections ?

- Scanner → objet à reconstruire : cartographie 3D des coefficients d'atténuation $\mu(x, y, z)$ du milieu traversé



- TEP / SPECT → objet à reconstruire : cartographie 3D des concentrations locales dans l'organisme



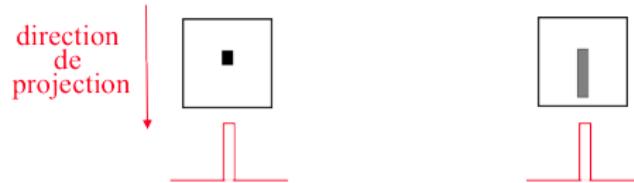
"Théorème de Radon"

- 1917 : Radon introduit la transformée
- Il donne également une formule de l'**inverse** de la transformée, faisant intervenir la transformée de Fourier
- Il a donc montré qu'il était possible de retrouver un objet à partir de toutes ses projections
- Mais il faut une infinité de projection : en pratique → seul un nombre fini

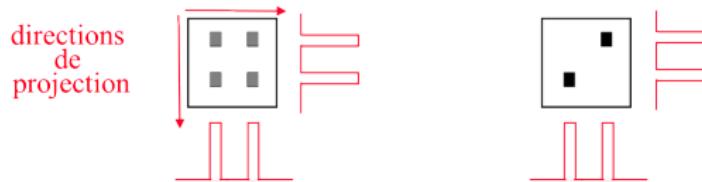
Reconstruction discrète : non unicité de la solution

- Pas de solution unique : toujours plusieurs objets compatibles avec un ensemble fini de projections

1 projection : plusieurs solutions possibles



2 projections : plusieurs solutions possibles



Irène Buvat

- → Unicité de la solution pour une infinité de projections seulement

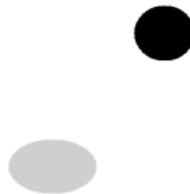
Théorème de la coupe centrale

- établit un lien entre transformée de Radon et transformée de Fourier

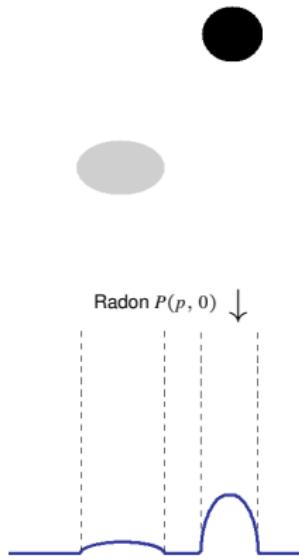
Théorème de la coupe centrale

La **transformée de Fourier 1D** de la projection parallèle d'un objet, dans une direction $\theta + \pi/2$, est égale à la coupe de la **transformée de Fourier 2D** de cet objet le long de la droite passant par l'origine des fréquences et inclinée d'un angle θ .

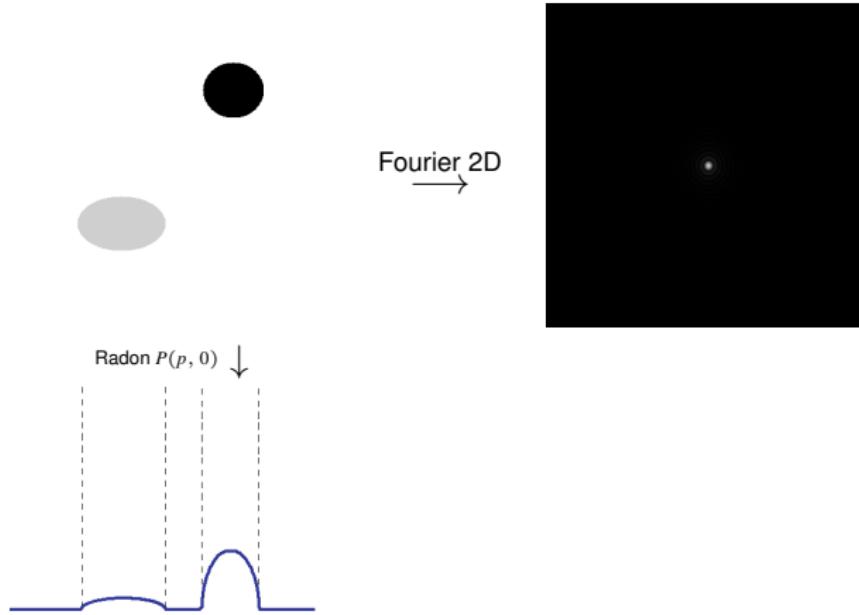
Théorème de la coupe centrale



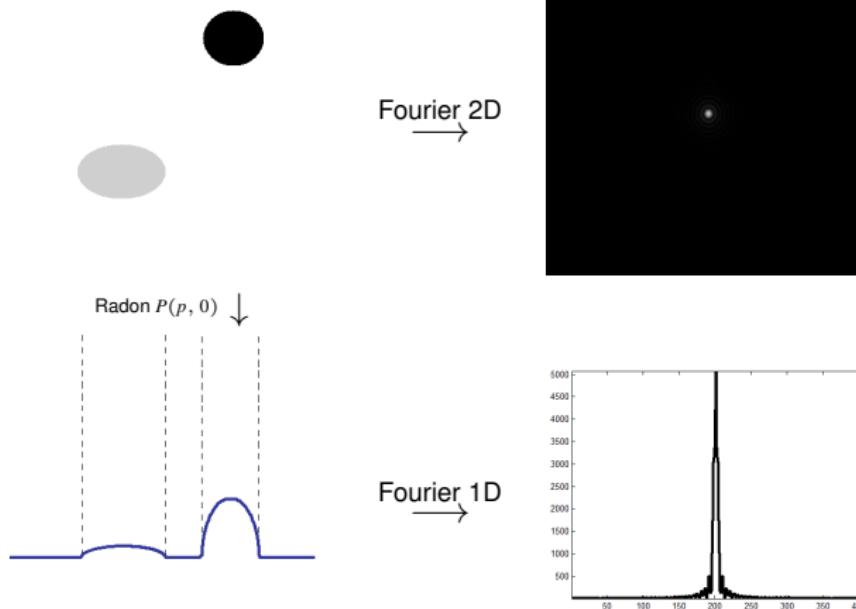
Théorème de la coupe centrale



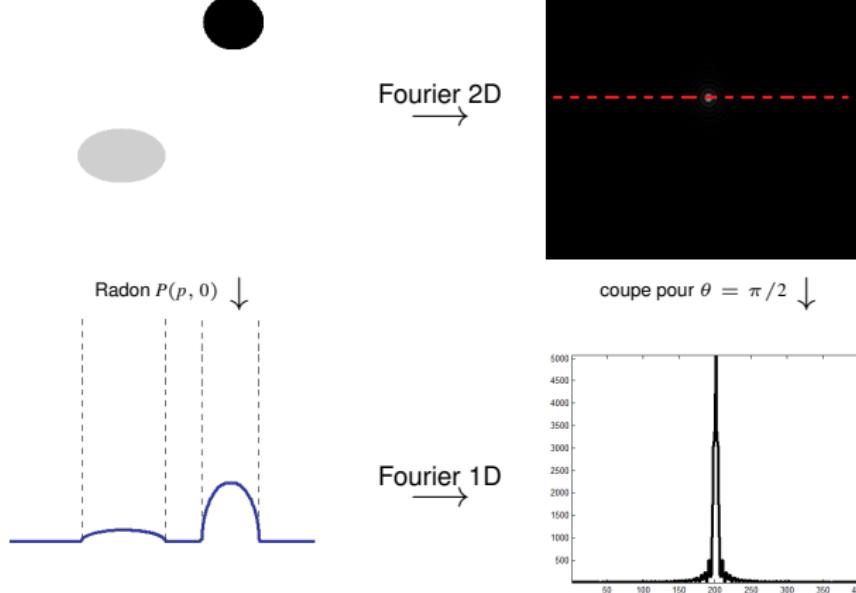
Théorème de la coupe centrale



Théorème de la coupe centrale

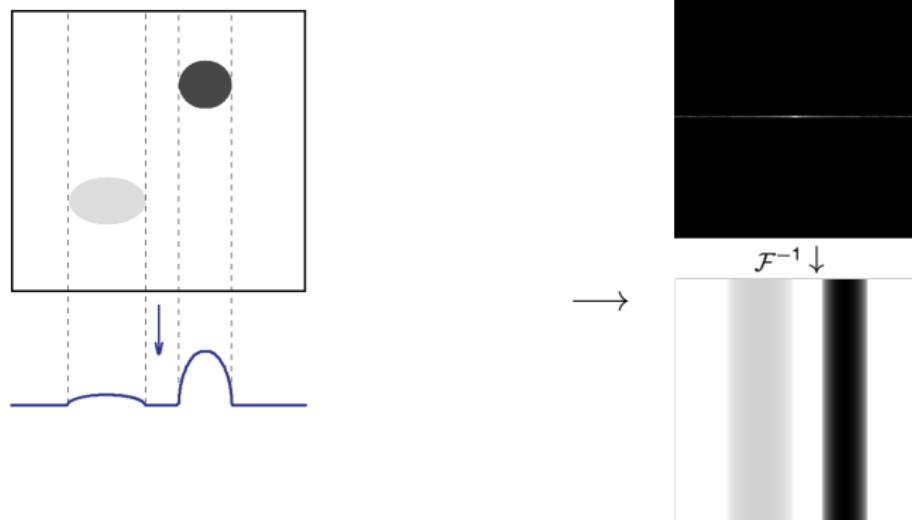


Théorème de la coupe centrale



Rétroprojection

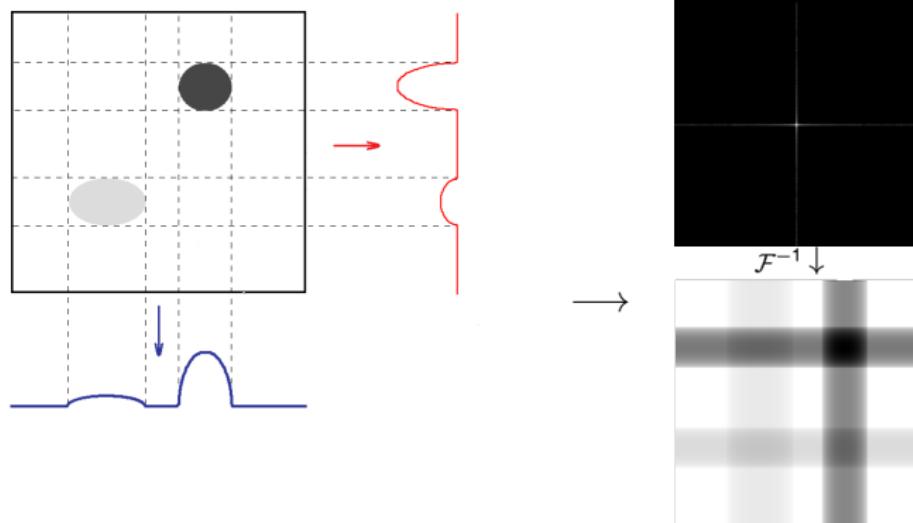
- un ensemble de projection (transformée de Radon) → permet de remplir partiellement l'espace de Fourier



DEMO MATLAB

Rétroprojection

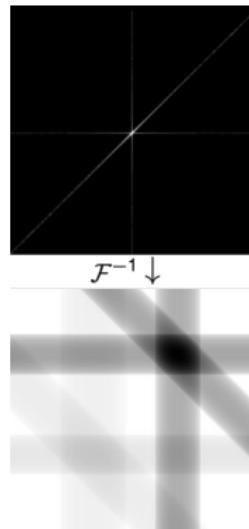
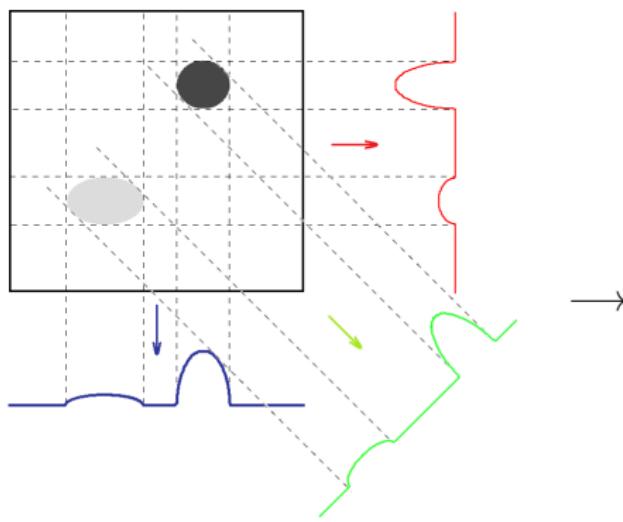
- un ensemble de projection (transformée de Radon) → permet de remplir partiellement l'espace de Fourier



DEMO MATLAB

Rétroprojection

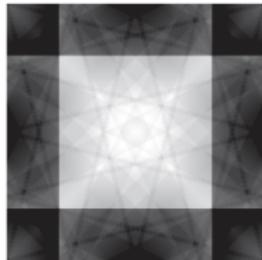
- un ensemble de projection (transformée de Radon) → permet de remplir partiellement l'espace de Fourier



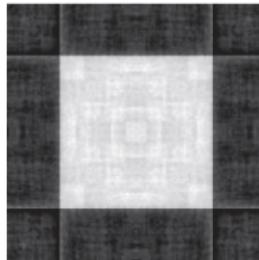
DEMO MATLAB

Compression d'une image avec la transformée de Radon

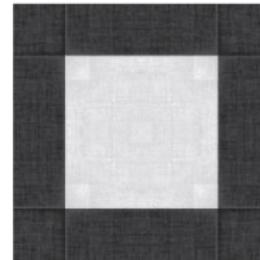
2% coefficients



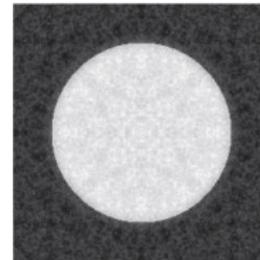
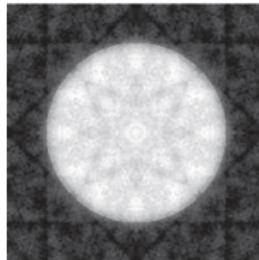
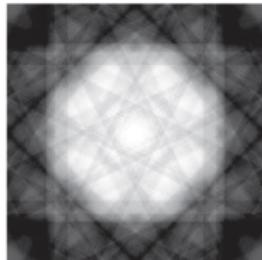
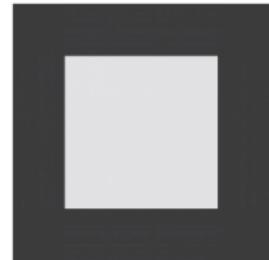
10% coefficients



30% coefficients

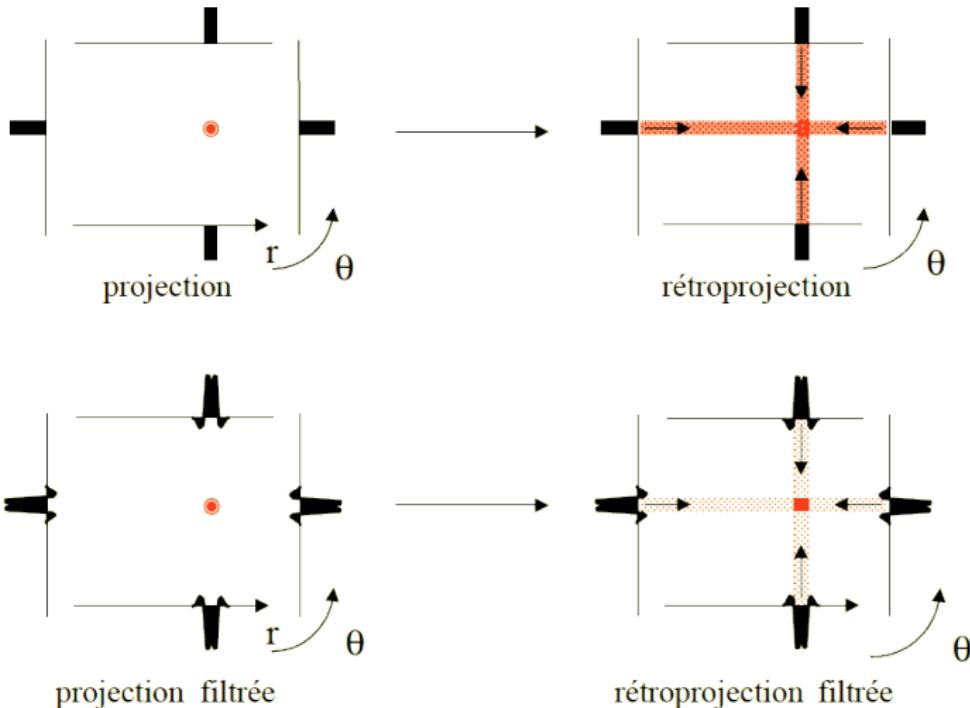


100% coefficients



Gabriel Peyré

Amélioration : rétroprojection filtrée



Irène Buvat

Rétroprojection

- On n'a pas assez de données (il en faut une infinité)
- une possibilité : interpoler pour les zones non remplies et faire la transformée de Fourier inverse
- problème : nécessité d'une interpolation, coûteuse en temps de calcul
- Méthodes algébriques

$p_1 \quad p_2$

$f_1 \quad f_2$

$f_3 \quad f_4$

$p_3 \quad p_4$

p_i

projection

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & r_{34} \\ r_{41} & r_{42} & r_{43} & r_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix}$$

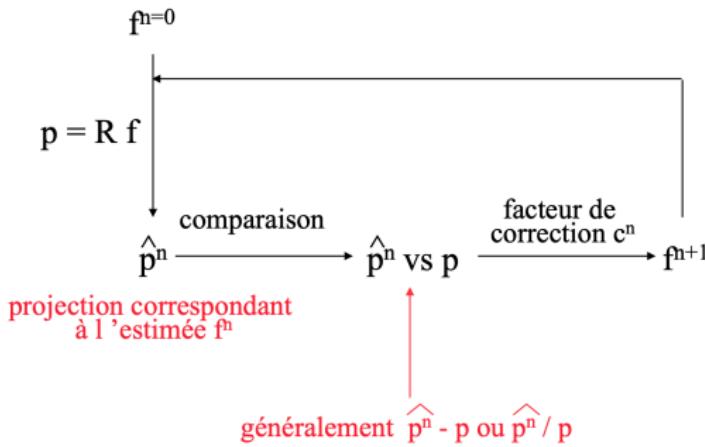
$$p = R f$$

Rétroprojection : méthodes algébriques

$$p = R f$$

Recherche d'une solution f minimisant une distance d
(p, Rf), p et R étant connus

estimée initiale de
l'objet à reconstruire



Irène Buvat

Rétroprojection : comparaison des 2 types de méthodes

- Reconstruction analytique : résolution du problème exprimé sous forme **continue**, via le théorème de la coupe centrale, en utilisant des approximations (filtrage)

$$R\{f(x, y)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(p \cos \theta - q \sin \theta, p \sin \theta + q \cos \theta) dq$$

Rétroprojection : comparaison des 2 types de méthodes

- Reconstruction analytique : résolution du problème exprimé sous forme **continue**, via le théorème de la coupe centrale, en utilisant des approximations (filtrage)

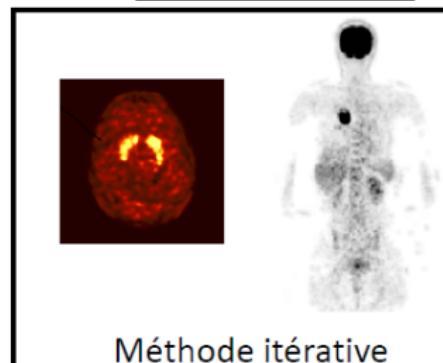
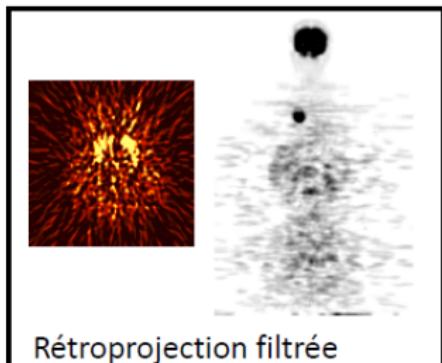
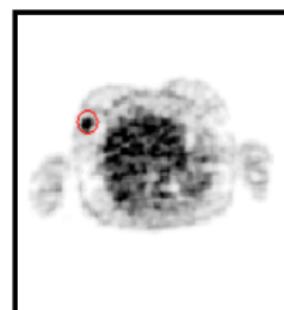
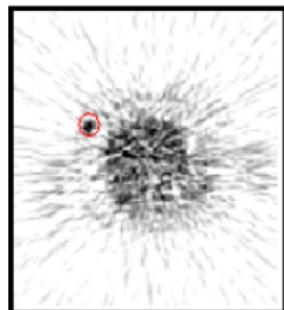
$$R\{f(x, y)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(p \cos \theta - q \sin \theta, p \sin \theta + q \cos \theta) dq$$

- Reconstruction itérative : résolution du problème exprimé sous forme **discrète**, via la résolution d'un système matriciel (résolution d'un problème inverse de grande taille)

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \dots \\ p_J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & \dots & r_{1I} \\ | & \ddots & | \\ r_{J1} & \dots & r_{JI} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_I \end{bmatrix}$$

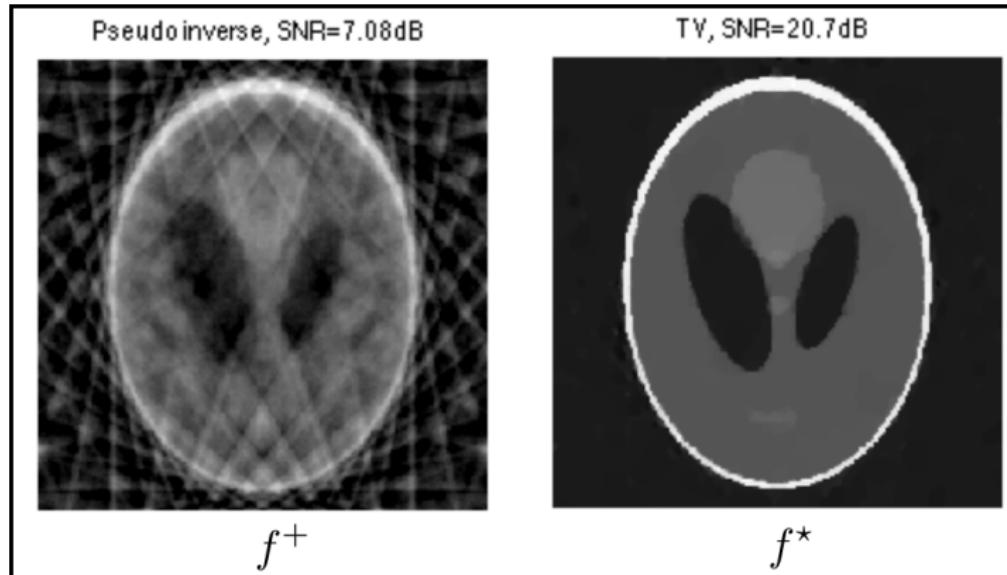
128 projections 128 x 128 → 2 097 152 équations à autant d'inconnues
→ pas de méthode de résolution autre qu'itérative

Rétroprojection : comparaison des deux types de méthodes



Rétroprojection : régularisation par variation totale

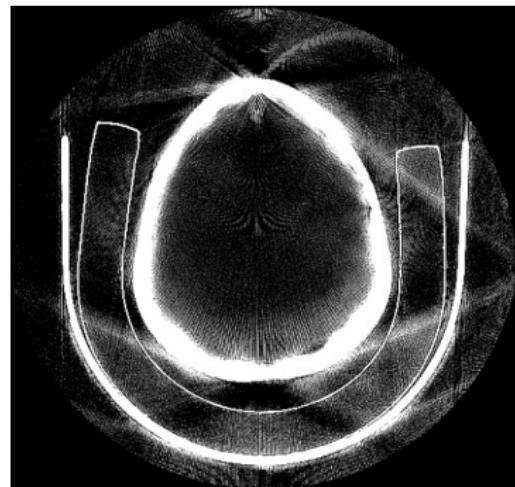
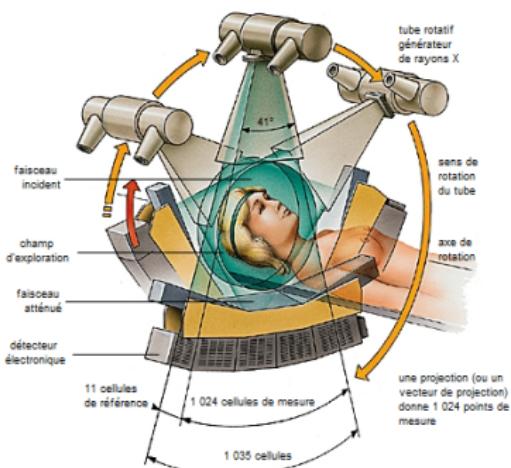
- variation totale : $\int \|\nabla f\|$



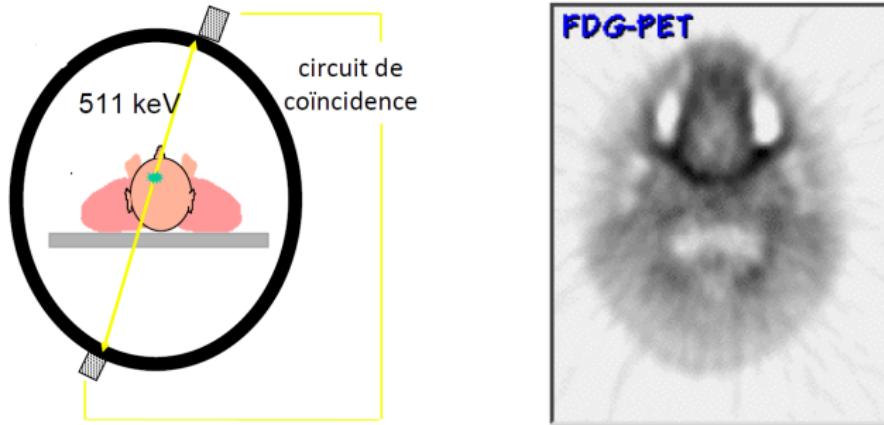
18 rayons sans et avec TV (Total Variation)
TV avec 18 rayons meilleur que 180 rayons sans

Application à la tomodensitométrie (CT-scan/scanner)

- on est exactement dans le cas d'une transformée de Radon
- la "projection" est effectuée directement par les rayons qui traversent l'objet
- les zones où il y a un objet "dense" (e.g.,les os) vont moins laisser passer de rayons X



Application à l'imagerie nucléaire (SPECT/PET)



- principe de base de la reconstruction → identique
- différent par le paramètre à reconstruire
 - Scanner : coefficient d'atténuation
 - SPECT/TEP : source de l'émission, mais atténuation également inconnue
- Le coefficient d'atténuation est donc soit supposé connu, soit estimé (préalablement ou simultanément)

Reconstruction en IRM

Reconstruction en IRM

- directement donnée par Fourier inverse !

Reconstruction en IRM

- directement donnée par Fourier inverse !
- plus évolué : on sous-échantillonne l'espace de Fourier pour accélérer l'acquisition → reconstruction plus complexe

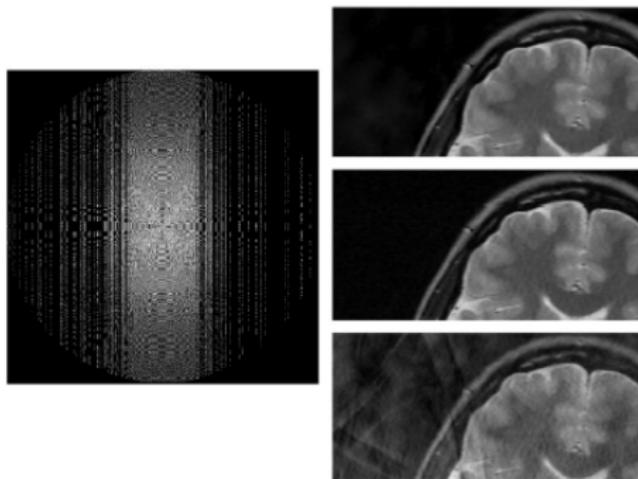
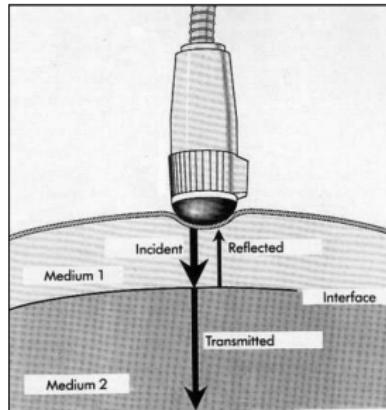


Fig. 9. CS experiment on a 512×512 T2 image. (left) Subsampling pattern in k-space. (right top) Reconstruction using proposed method. (right middle) Reconstruction using the method from [2]. (right bottom) Reconstruction using LS-NUFT.

Reconstruction en Ultrasonographie

- émission des ultrasons
- réception des ultrasons
- La reconstruction repose sur un certain nombre d'hypothèses : direction du faisceau → unique, une seule reflexion, ...



Reconstruction en Ultrasonographie

- La distance entre la sonde et l'endroit où s'est produit la réflexion (l'écho) est calculée en utilisant la vitesse de propagation moyenne des ultrasons dans les tissus mous = 1540 m/s. Dans l'air = 340 m/s, dans les os = 7000 m/s.
 - Lorsqu'une ou plusieurs de ces hypothèses sont fausses, des échos parasites, qui ne correspondent pas à une structure réelle, apparaissent sur l'image : ce sont des **artefacts**.



Pneumopéritoïne avec de l'air barrant la limite antérieure de l'abdomen avec des échos de répétition en raison de la forte réflexion ultrasonore

http://lsiit-miv.u-strasbg.fr/contenu/fichiers_page/Echographie.pdf

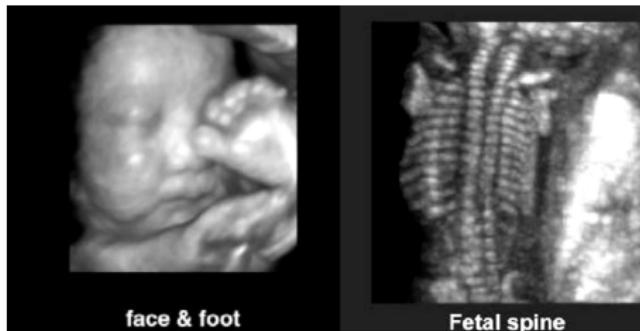
Echographie 3D

- But

- Obtenir une information 3D absente par défaut
- Améliorer les mesures (précision et reproductibilité)
- Eliminer la dépendance à l'opérateur

- Applications

- Télémédecine, analyse volumique, proposer plus de modes de visualisation, chirurgie assistée, système de réalité augmentée ...



face & foot

Fetal spine