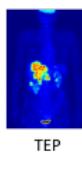


Imagerie Médicale

Partie 4: Recalage

partie 1/2

Pierre Maurel



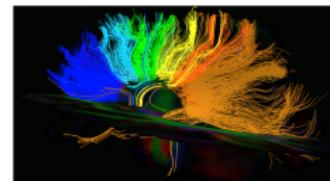
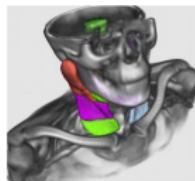
IRM



EEG



MEG



Recalage ?

Recalage

Mise en correspondance de deux images
(supposées représenter le même objet)

Sources

- Olivier Clatz : Fundamental of medical imaging registration. Lecture 1 & 2.
http://www.clatz.com/download/presentations/files/Registration_Fundamentals.pdf
- Caroline Petitjean : Recalage d'images <http://carolinepetitjean.free.fr/enseignement.php?langue=fra>
- Thèse d'Alexis Roche. <http://www.theses.fr/2001NICE5604>

Recalage ?

Deux Images S et C



Image source S

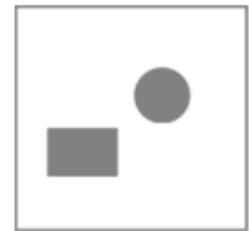
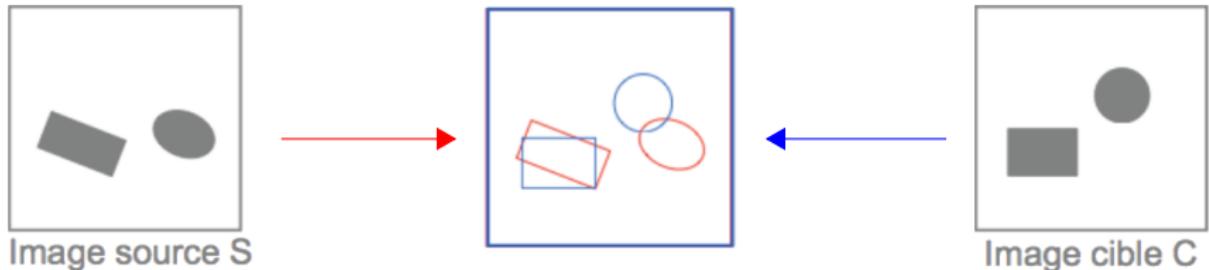


Image cible C

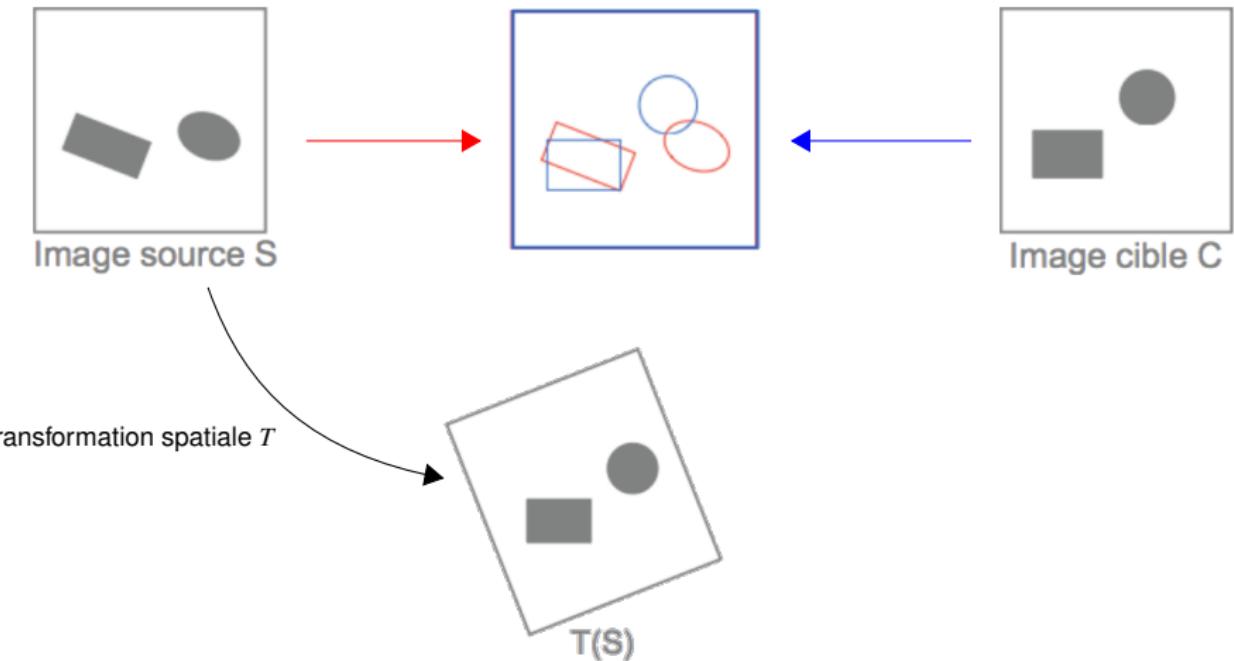
Recalage ?

Deux Images S et C



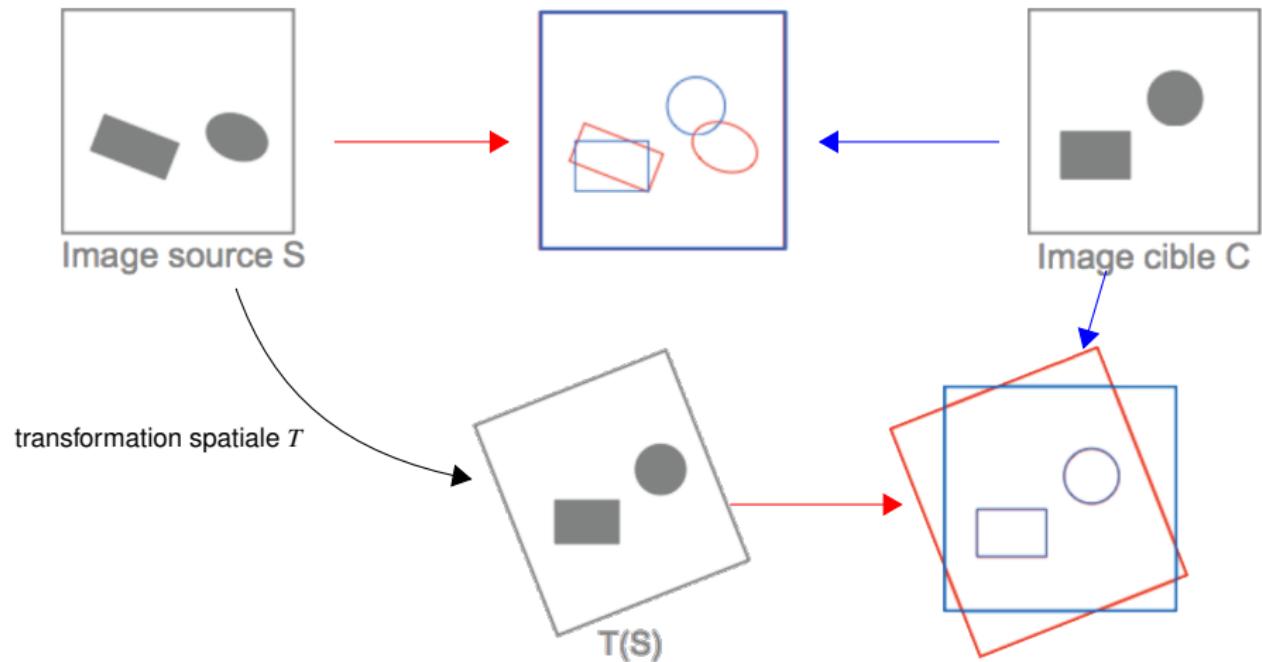
Recalage ?

Deux Images S et C



Recalage ?

Deux Images S et C



Recalage ?

RECALAGE

Deux Images S et C : $\overbrace{\text{on cherche } T \text{ tel que } T(S) \text{ ressemble à } C}$



Image source S

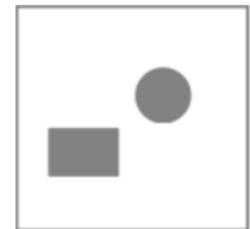
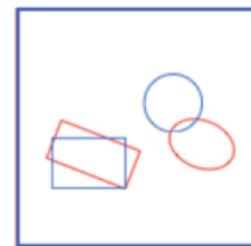
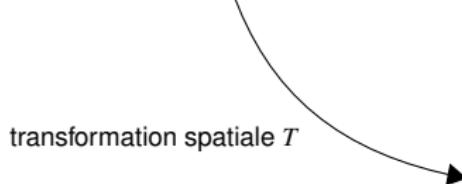
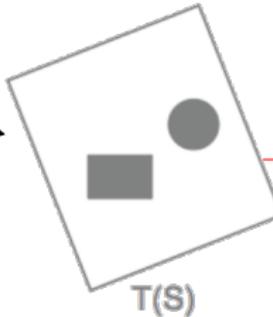


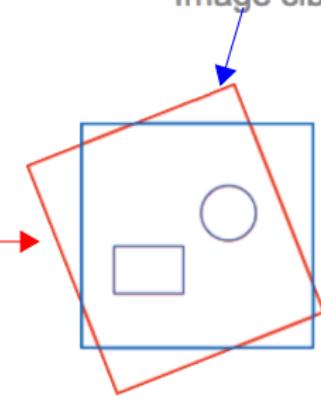
Image cible C



transformation spatiale T



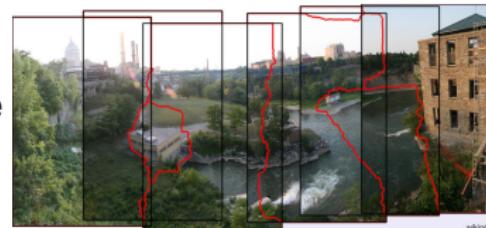
$T(S)$



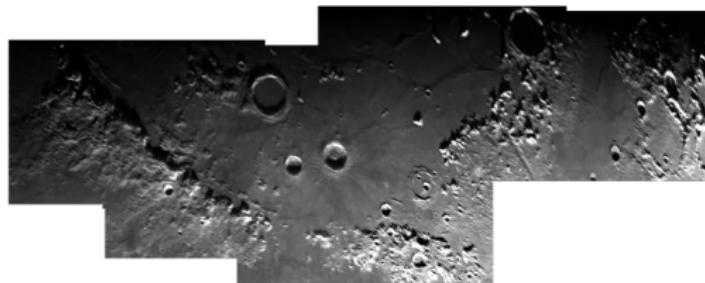
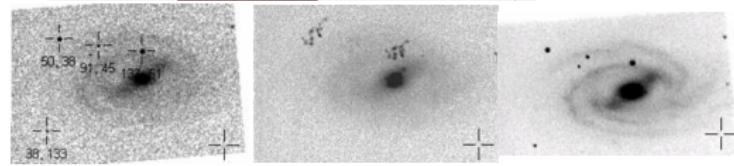
Recalage : Applications

- Outil fondamental en analyse d'images médicales, mais pas uniquement

- création de panoramique



- images astronomiques



<http://astrosurf.com/vboudon/>

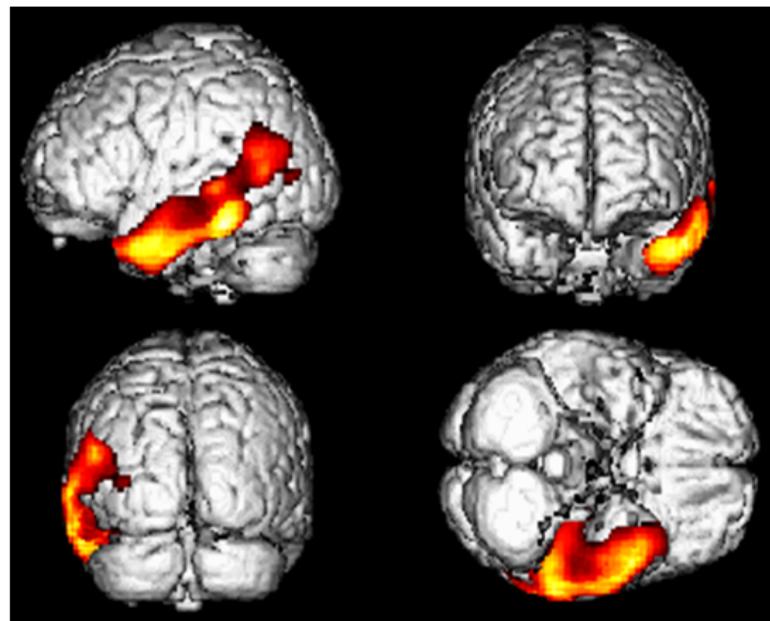
Illustration : la chirurgie de l'épilepsie

Illustration : la chirurgie de l'épilepsie

- Sélection du patient
- Sémiologie des crises et relation à l'anatomie
- Examens "statiques" (recherche d'une lésion)
- Examens "dynamiques" (caractère épileptogène)
- intercritique : imagerie fonctionnelle, Implantation d'électrodes
- critique : enregistrement et marquage des crises
- Planning pré-chirurgical
- Cortectomie (chirurgie)

Illustration : la chirurgie de l'épilepsie

Examen métabolique (PET)

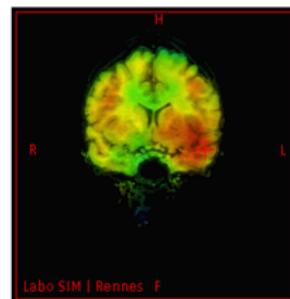
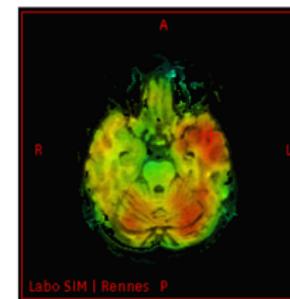
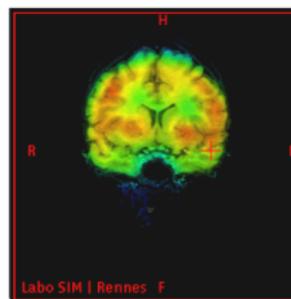
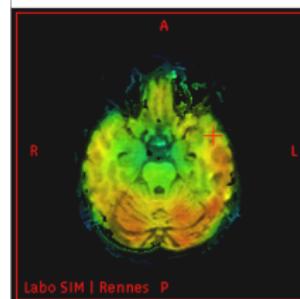
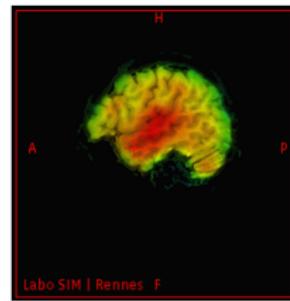
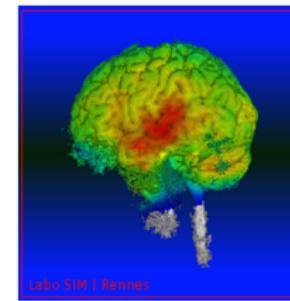
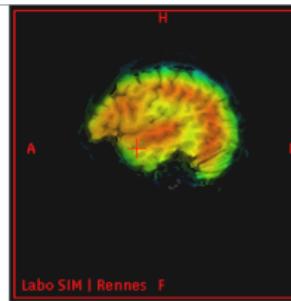
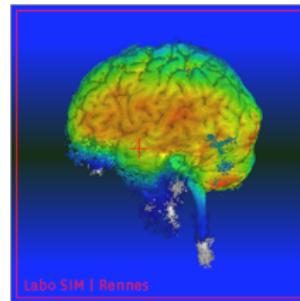


Hypométabolisme temporal étendu

(Source : [A. Biraben et al., Labo IDM, CHU Rennes])

Illustration : la chirurgie de l'épilepsie

Examen "dynamique"



TEMP inter-ictal

TEMP ictal

Illustration : la chirurgie de l'épilepsie

Implantation des électrodes (SEEG) en condition stéréotaxique

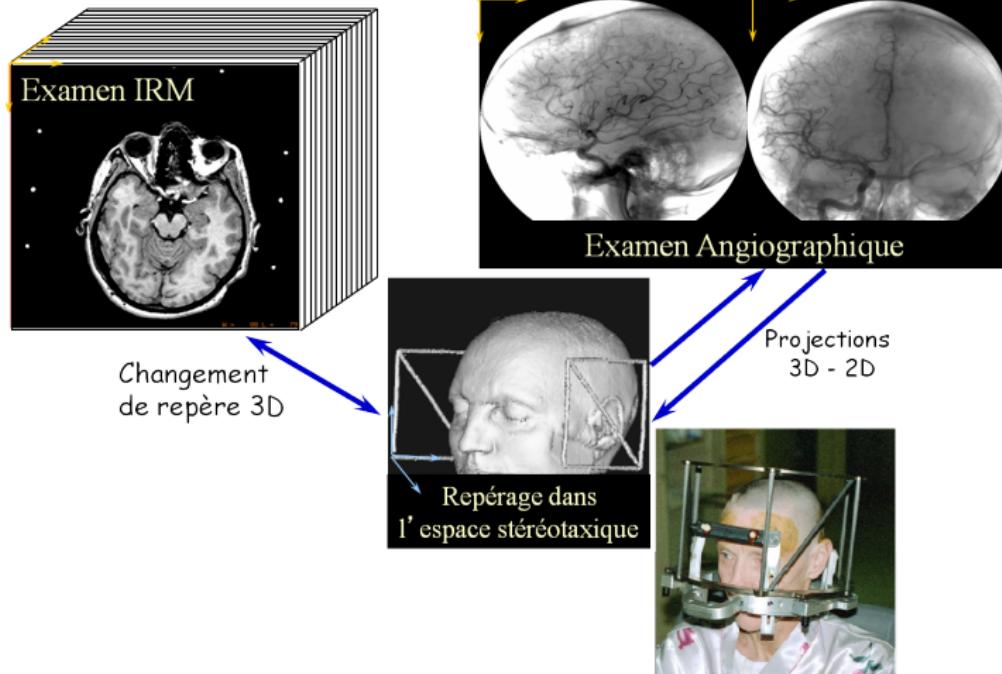


Illustration : la chirurgie de l'épilepsie

La SEEG : enregistrement des crises



Illustration : la chirurgie de l'épilepsie

planning pré-opératoire

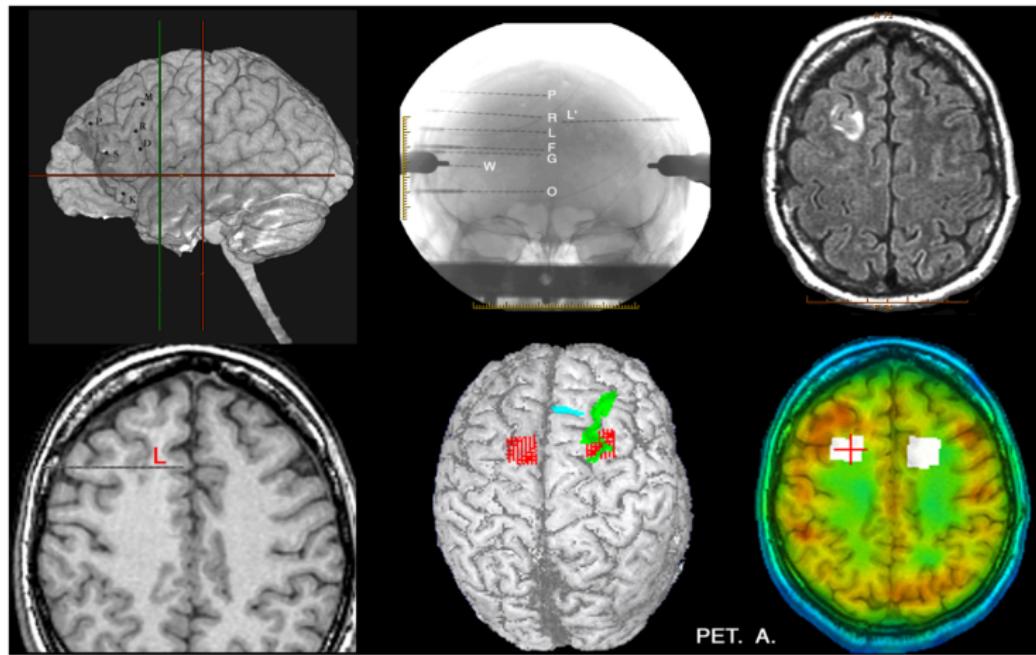


Illustration : la chirurgie de l'épilepsie

Délimitation de zones fonctionnelles en IRM fonctionnelle (IRMf)

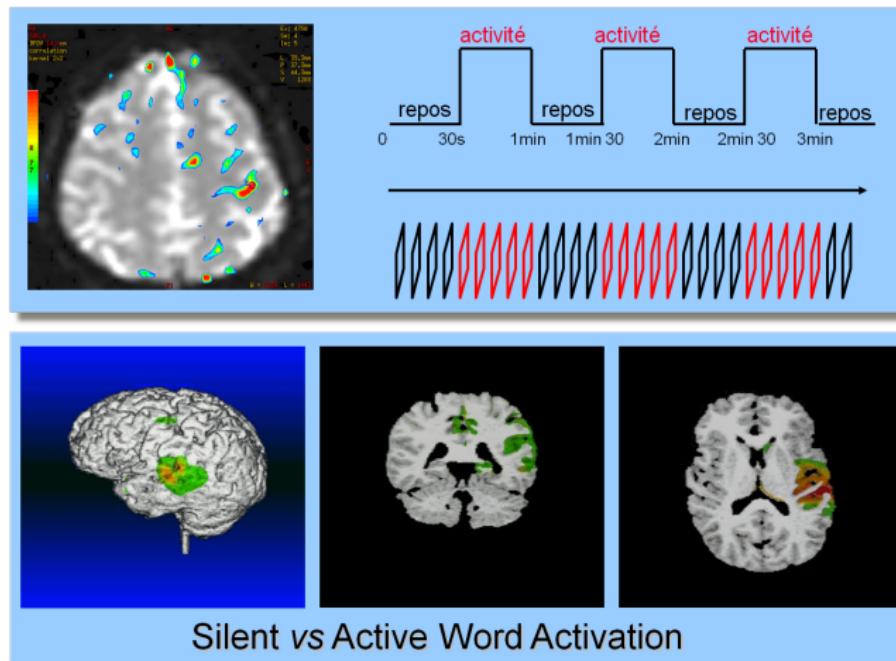


Illustration : la chirurgie de l'épilepsie

Procédure Interventionnelle en Neurochirurgie (Neuronavigation)

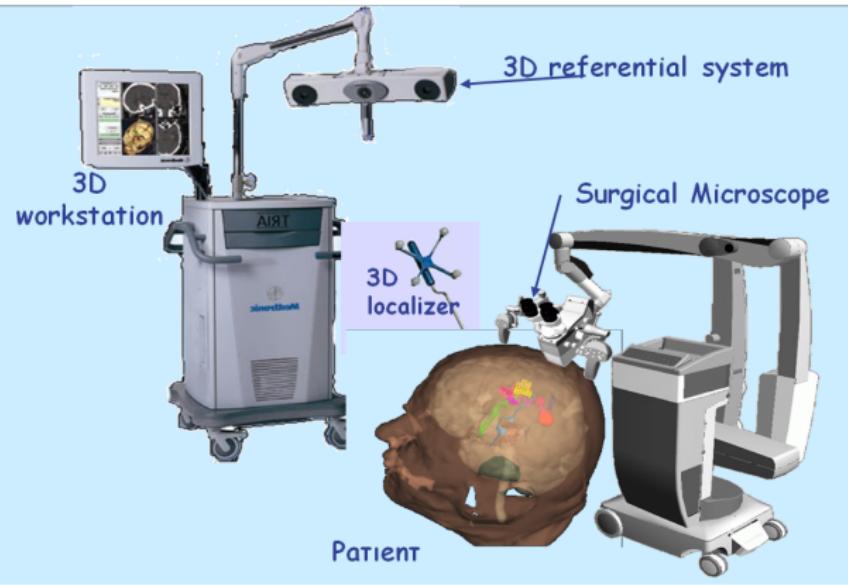
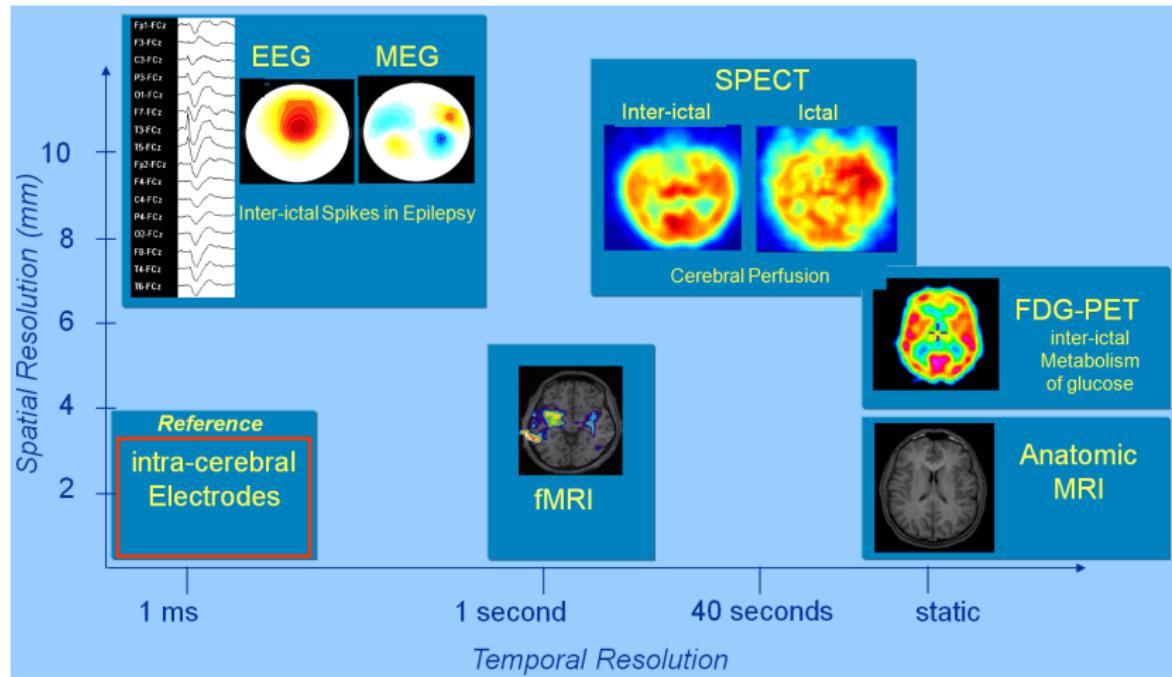


Illustration : la chirurgie de l'épilepsie

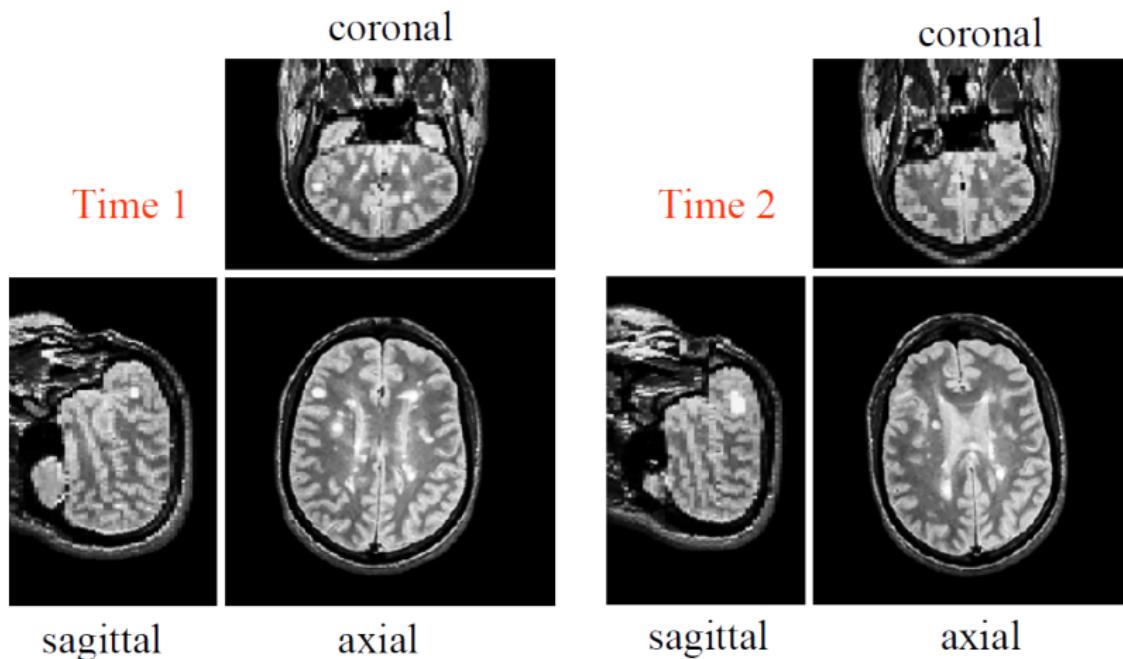
Bilan des différentes modalités impliquées dans le processus



Recalage en Imagerie Médicale

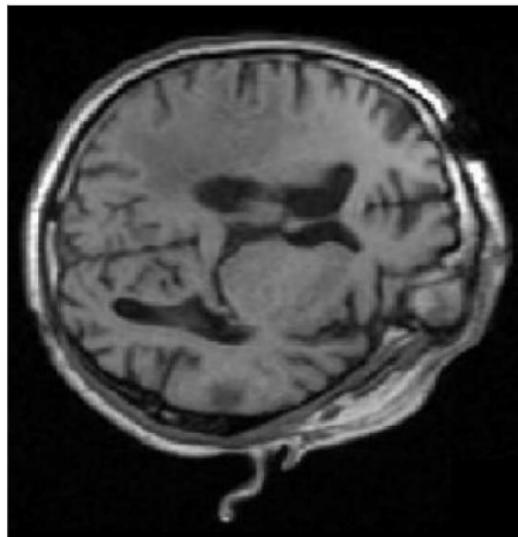
Recalage en Imagerie Médicale

Évolution temporelle

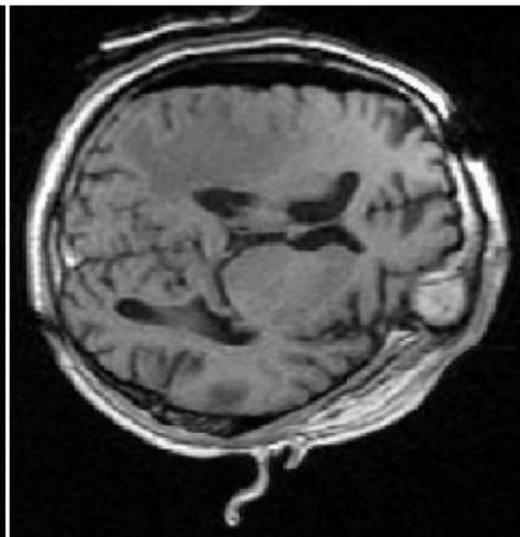


Recalage en Imagerie Médicale

Évolution temporelle ("Brain Shift")



Preoperative MRI

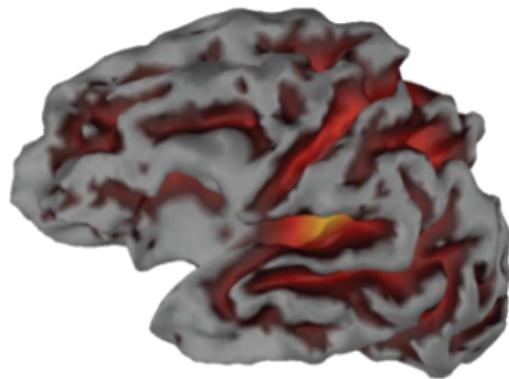


Intraoperative MRI

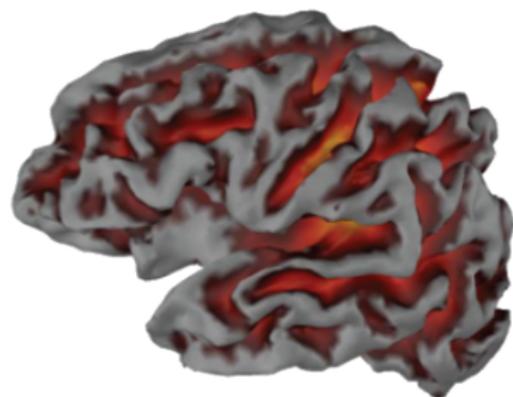
Olivier Clatz, Hervé Delingette, Ion-Florin Talos, Alexandra J. Golby, Ron Kikinis, Ferenc A. Jolesz, Nicholas Ayache, and Simon K. Warfield. Robust Non-Rigid Registration to Capture Brain Shift from Intra-Operative MRI. IEEE Transactions on Medical Imaging, 24(11):1417-1427, Nov. 2005.

Recalage en Imagerie Médicale

Évolution temporelle, étude longitudinale



Naissance

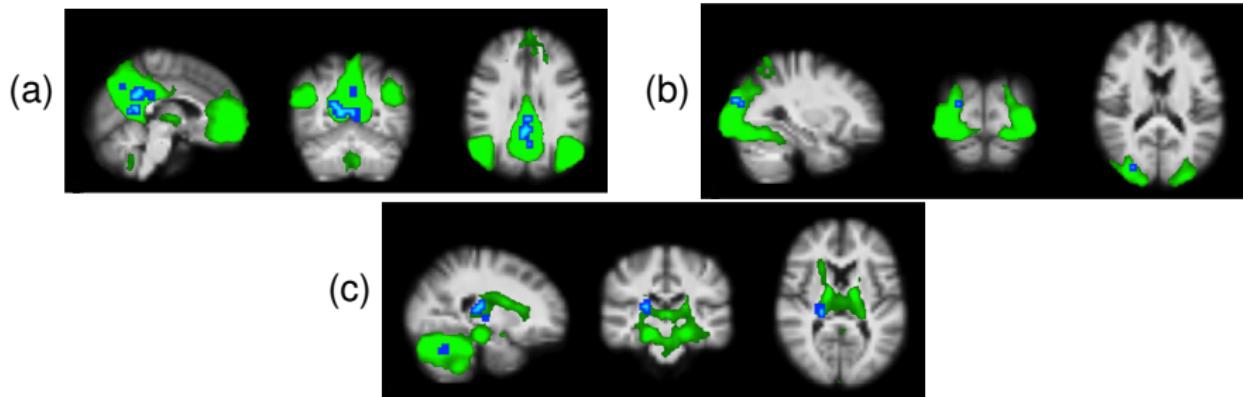


Naissance + 4 semaines

J. Lefèvre et al, IPMI, 2009

Recalage en Imagerie Médicale

Comparaison entre différents sujets

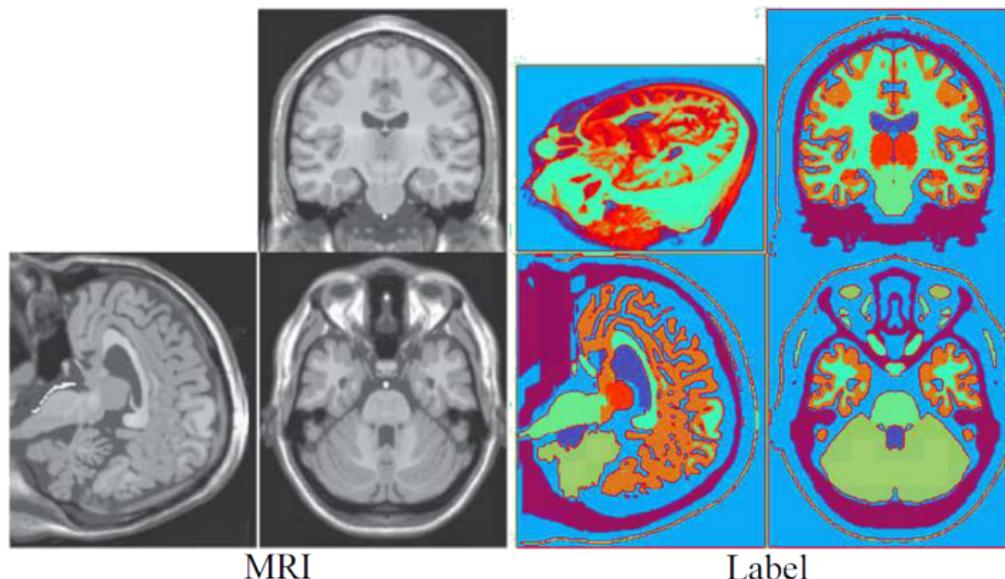


Green : (a) Default Mode Network, (b) secondary visual network, (c) network of basal ganglia and cerebellum .
Blue : clusters of decreased functional connectivity (FC) in Alzheimer's disease (AD) compared with controls ($p < 0.05$ family-wise error corrected). Results are corrected for age, sex, and origin of data set.

Maja Binnewijzenda et al. *Resting-state fMRI changes in Alzheimer's disease and mild cognitive impairment*. Neurobiology of Aging, 2012.

Recalage en Imagerie Médicale

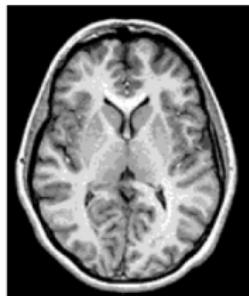
Superposition sur un atlas



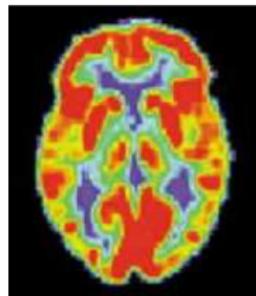
Pierre Yves Bondiau, Gregoire Malanda, Stephane Chanalet, Pierre-Yves Marcy, Jean-Louis Habrand, Francois Fauchon, Philippe Paquis, Adel Coudi, Olivier Commowick, Isabelle Rutten, and Nicholas Ayache. Atlas-based automatic segmentation of MR images: validation study on the brainstem in radiotherapy context. *Int J Radiat Oncol Biol Phys*, 61(1):289-98, January 2005.

Recalage en Imagerie Médicale

Fusion de modalités

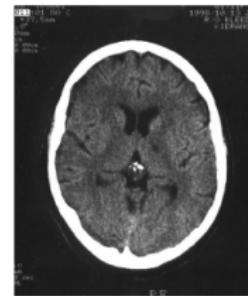


MRI



PET

(Positron emission tomography)



CAT



US



anatomical

Visible Man

Principe général

Principe

Approche générale

L'approche générale du recalage consiste à **optimiser** un **critère de similarité** entre les deux images, ce critère étant fonction de la **transformation** appliquée.

Principe

Approche générale

L'approche générale du recalage consiste à **optimiser** un **critère de similarité** entre les deux images, ce critère étant fonction de la **transformation** appliquée.

3 choix importants :

- ① Critère de similarité
- ② Transformations considérées
- ③ Méthode d'optimisation

Principe

- Supposons que l'on se donne un **critère de similarité**, $\text{Simil}(I, J)$ qui mesure la "ressemblance" entre deux images I et J

Principe

- Supposons que l'on se donne un **critère de similarité**, $\text{Simil}(I, J)$ qui mesure la "ressemblance" entre deux images I et J

$$\text{Simil}(\boxed{\text{Image 1}}, \boxed{\text{Image 2}}) = \text{:(sad face)}$$

$$\text{Simil}(\boxed{\text{Image 1' (rotated)}}, \boxed{\text{Image 2}}) = \text{:)(neutral face)}$$

Principe

- Supposons que l'on se donne un **critère de similarité**, $\text{Simil}(I, J)$ qui mesure la "ressemblance" entre deux images I et J

$$\text{Simil}(\boxed{\text{Image 1}}, \boxed{\text{Image 2}}) = \text{:(sad face)}$$

$$\text{Simil}(\boxed{\text{Image 1}}, \boxed{\text{Image 2}}) = \text{:)(smiley face)}$$

- On choisit également une "famille" de **transformations** \mathcal{F}

Principe

- Supposons que l'on se donne un **critère de similarité**, $\text{Simil}(I, J)$ qui mesure la "ressemblance" entre deux images I et J



- On choisit également une "famille" de **transformations** \mathcal{F}
- Le problème du recalage peut alors s'écrire comme :

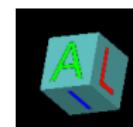
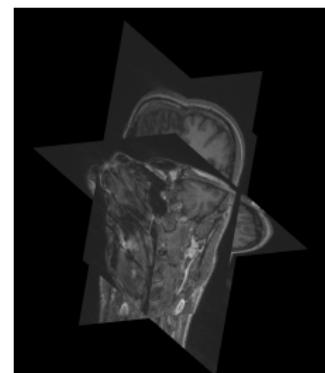
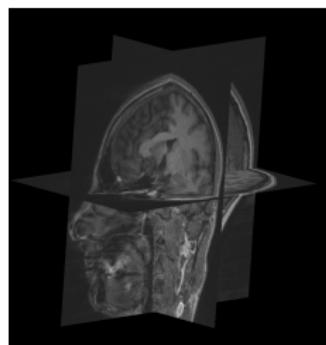
$$\arg \min_{T \in \mathcal{F}} \text{Simil} (T(I), J) = ?$$

"On cherche la transformation (dans \mathcal{F}) telle que le résultat de celle-ci appliquée à l'image source I ressemble le plus possible à l'image cible J "

Principe



Les illustrations sont en **2D** mais, en imagerie médicale, le recalage se fait généralement en **3D**



Critères de similarité

↪ Histogramme conjoint

Critères de Similarité

- comparaison des histogrammes de I et J ?

Critères de Similarité

- comparaison des histogrammes de I et J ?



&



&



Critères de Similarité

- comparaison des histogrammes de I et J ?



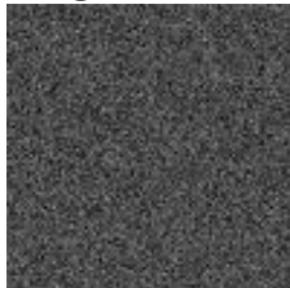
&



&



- Histogramme conjoint :



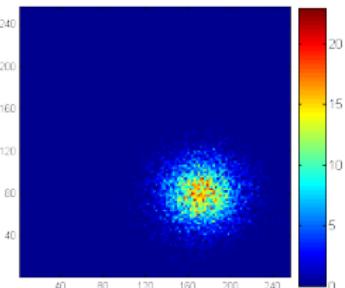
I

&



J

→



$H_{I,J}$

$$H_{I,J}(i,j) =$$

Critères de Similarité

- comparaison des histogrammes de I et J ?



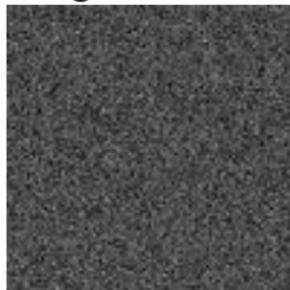
&



&



- Histogramme conjoint :



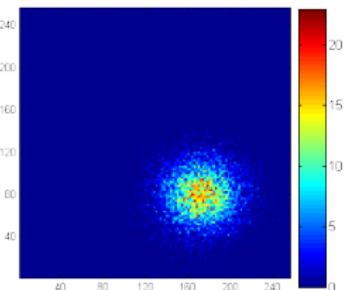
I

&



J

→

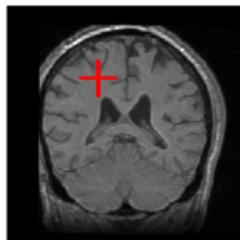


$H_{I,J}$

$$H_{I,J}(i,j) = \text{Card} \left\{ (x,y) \mid I(x,y) = i \text{ et } J(x,y) = j \right\}$$

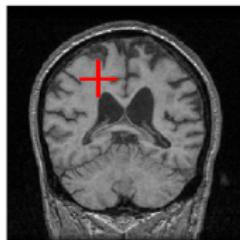
Histogramme conjoint

$$H_{I,J}(i,j) = \text{Card} \left\{ (x,y) \mid I(x,y) = i \text{ et } J(x,y) = j \right\}$$



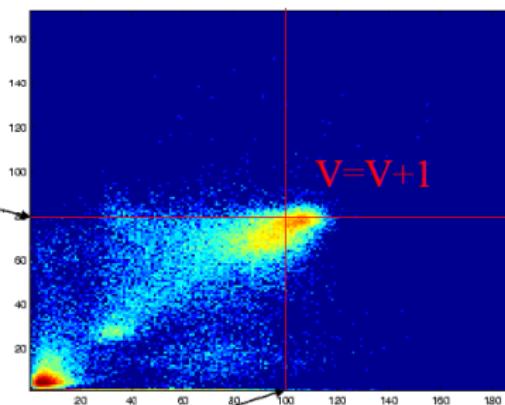
I

$$\rightarrow I(x,y) = 80$$



J

$$\rightarrow J(x,y) = 100$$



Histogramme conjoint

$$H_{I,J}(i,j) = \text{Card} \left\{ (x,y) \mid I(x,y) = i \text{ et } J(x,y) = j \right\}$$

si I et J sont de taille $n \times p$ à valeurs dans $\{1, \dots, 256\}$:

- Taille de $H_{I,J}$?

Histogramme conjoint

$$H_{I,J}(i,j) = \text{Card} \left\{ (x,y) \mid I(x,y) = i \text{ et } J(x,y) = j \right\}$$

si I et J sont de taille $n \times p$ à valeurs dans $\{1, \dots, 256\}$:

- Taille de $H_{I,J}$? → 256×256

Histogramme conjoint

$$H_{I,J}(i,j) = \text{Card} \left\{ (x,y) \mid I(x,y) = i \text{ et } J(x,y) = j \right\}$$

si I et J sont de taille $n \times p$ à valeurs dans $\{1, \dots, 256\}$:

- Taille de $H_{I,J}$? → 256×256

- $\sum_{i=1}^{256} \sum_{j=1}^{256} H_{I,J}(i,j) = ?$

Histogramme conjoint

$$H_{I,J}(i,j) = \text{Card} \left\{ (x,y) \mid I(x,y) = i \text{ et } J(x,y) = j \right\}$$

si I et J sont de taille $n \times p$ à valeurs dans $\{1, \dots, 256\}$:

- Taille de $H_{I,J}$? $\rightarrow 256 \times 256$

- $\sum_{i=1}^{256} \sum_{j=1}^{256} H_{I,J}(i,j) = ? \rightarrow n * p$

Histogramme conjoint

$$H_{I,J}(i,j) = \text{Card} \left\{ (x,y) \mid I(x,y) = i \text{ et } J(x,y) = j \right\}$$

si I et J sont de taille $n \times p$ à valeurs dans $\{1, \dots, 256\}$:

- Taille de $H_{I,J}$? $\rightarrow 256 \times 256$

- $\sum_{i=1}^{256} \sum_{j=1}^{256} H_{I,J}(i,j) = ? \rightarrow n * p$



,



I

I

$H_{I,I}$

Histogramme conjoint

$$H_{I,J}(i,j) = \text{Card} \left\{ (x,y) \mid I(x,y) = i \text{ et } J(x,y) = j \right\}$$

si I et J sont de taille $n \times p$ à valeurs dans $\{1, \dots, 256\}$:

- Taille de $H_{I,J}$? $\rightarrow 256 \times 256$

- $\sum_{i=1}^{256} \sum_{j=1}^{256} H_{I,J}(i,j) = ? \rightarrow n * p$

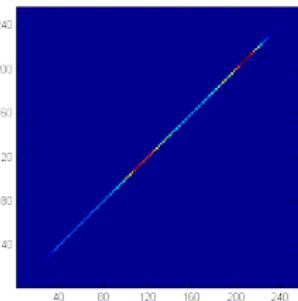


I



J

Diagonale =



$H_{I,J}$

Histogramme conjoint

$$H_{I,J}(i,j) = \text{Card} \left\{ (x,y) \mid I(x,y) = i \text{ et } J(x,y) = j \right\}$$

si I et J sont de taille $n \times p$ à valeurs dans $\{1, \dots, 256\}$:

- Taille de $H_{I,J}$? $\rightarrow 256 \times 256$

- $\sum_{i=1}^{256} \sum_{j=1}^{256} H_{I,J}(i,j) = ? \rightarrow n * p$

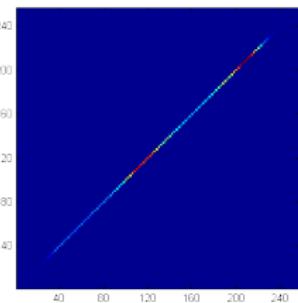


I



I

Diagonale = histogramme de I

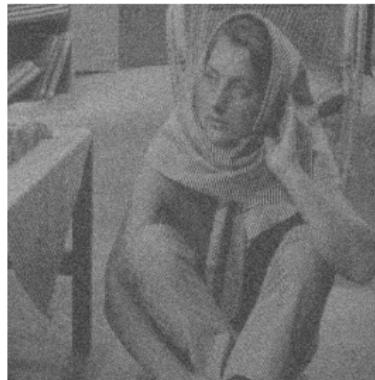


$H_{I,J}$

Histogramme conjoint



I



J

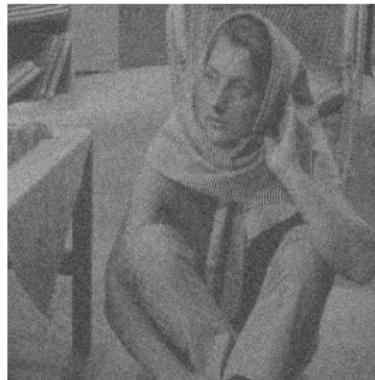


$H_{I,J}$

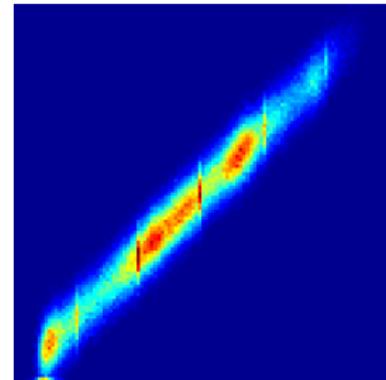
Histogramme conjoint



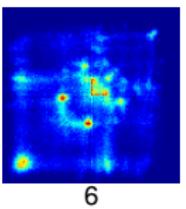
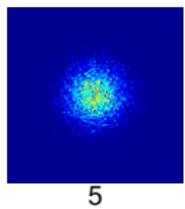
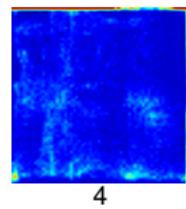
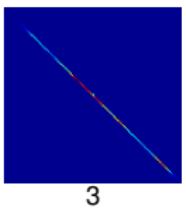
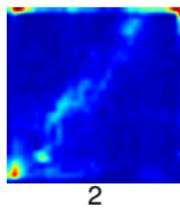
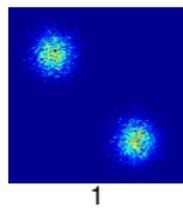
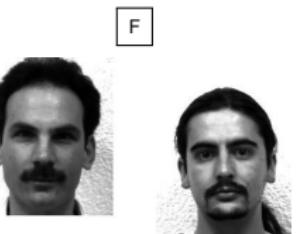
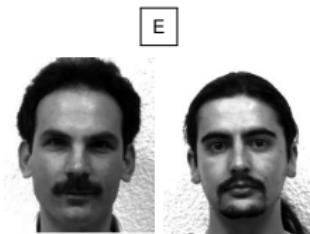
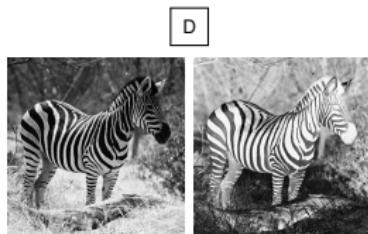
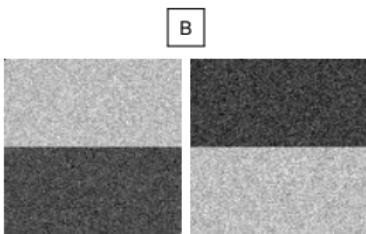
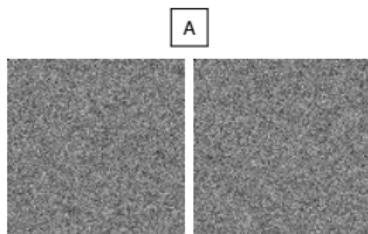
I

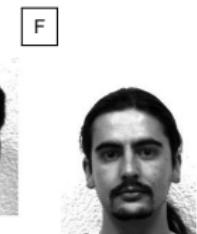
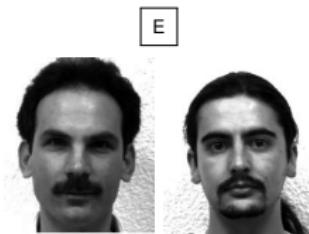
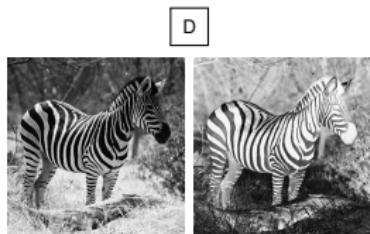
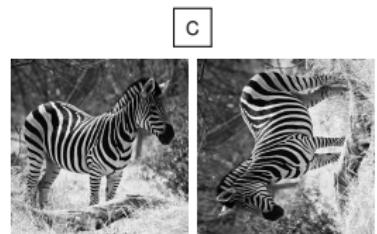
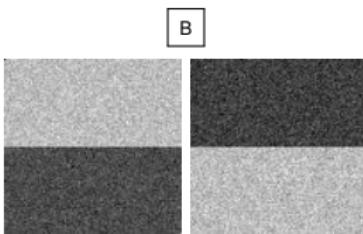
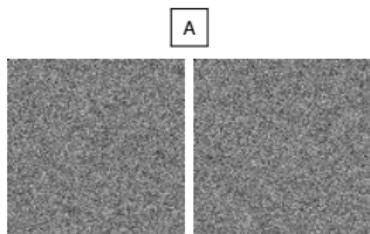


J



$H_{I,J}$





$A \rightarrow 5$

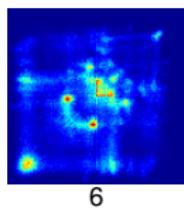
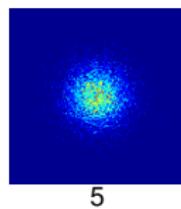
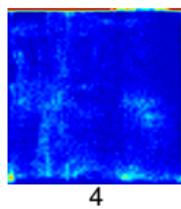
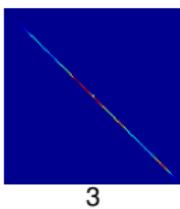
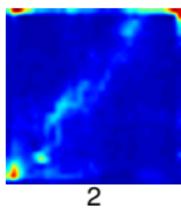
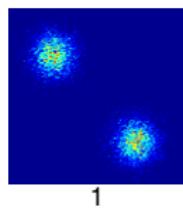
$B \rightarrow 1$

$C \rightarrow 6$

$D \rightarrow 3$

$E \rightarrow 2$

$F \rightarrow 4$



Histogramme conjoint

- Construction : Comme pour un histogramme classique : discrétisation ?
 - images encodées sur 1 octet : à valeurs dans $\{1, \dots, 256\}$ → OK
 - images encodées sur plusieurs octets : on regroupe les valeurs en divisant en intervalles
 - définition continue (somme → intégrale) : fenêtrage de Parzen

Histogramme conjoint

- Construction : Comme pour un histogramme classique : discréétisation ?

- images encodées sur 1 octet : à valeurs dans $\{1, \dots, 256\}$ → OK
- images encodées sur plusieurs octets : on regroupe les valeurs en divisant en intervalles
- définition continue (somme → intégrale) : fenêtrage de Parzen

- Interprétation statistique

- Si on divise par $n * p$, nombres de pixels dans l'image, définition alternative :

$$H_{I,J}(i,j) = \frac{1}{n * p} \operatorname{Card}\left\{(x,y) \mid I(x,y) = i \text{ et } J(x,y) = j\right\}$$

$$\sum_{i,j} H_{I,J}(i,j) = 1$$

- $H_{I,J}(i,j)$ = "probabilité qu'un pixel tiré aléatoirement ait l'intensité i dans l'image I et que son correspondant ait l'intensité j dans l'image J "

Histogramme conjoint et Recalage

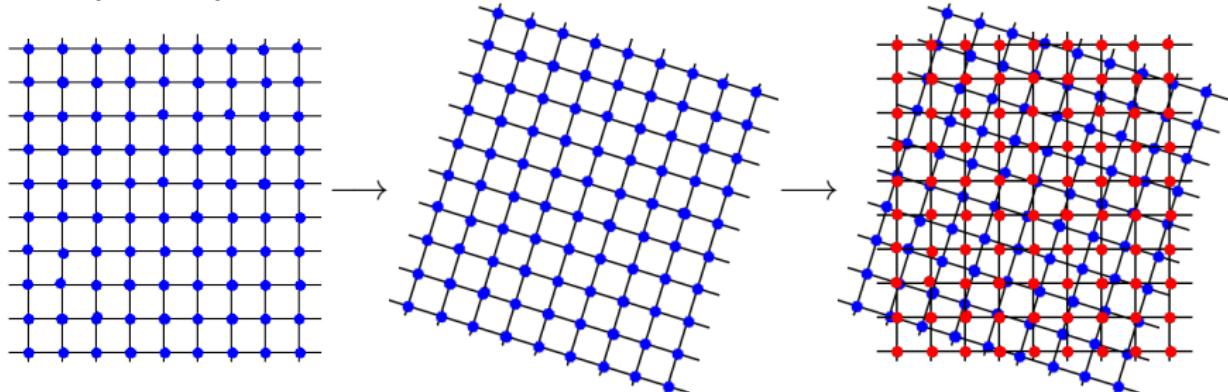
- Recalage : $\arg \min_{T \in \mathcal{F}} \text{Simil}(T(I), J) = ?$
- Pour définir $\text{Simil}(T(I), J)$ à partir de la notion d'histogramme conjoint, il faut pouvoir calculer l'histogramme conjoint de $T(I)$ et J

Histogramme conjoint et Recalage

- Recalage : $\arg \min_{T \in \mathcal{F}} \text{Simil}(T(I), J) = ?$
- Pour définir $\text{Simil}(T(I), J)$ à partir de la notion d'histogramme conjoint, il faut pouvoir calculer l'histogramme conjoint de $T(I)$ et J
- si $T(i)$ envoie les pixels de I exactement sur les pixels de J , pas de problème. mais peu intéressant car peu de sens physique

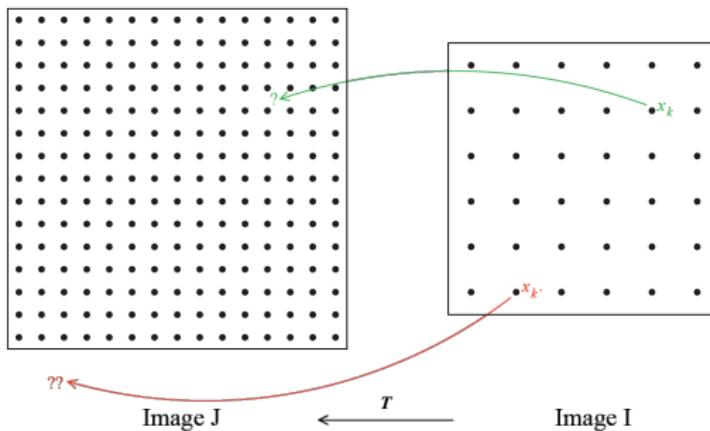
Histogramme conjoint et Recalage

- Recalage : $\arg \min_{T \in \mathcal{F}} \text{Simil}(T(I), J) = ?$
- Pour définir $\text{Simil}(T(I), J)$ à partir de la notion d'histogramme conjoint, il faut pouvoir calculer l'histogramme conjoint de $T(I)$ et J
- si $T(i)$ envoie les pixels de I exactement sur les pixels de J , pas de problème. mais peu intéressant car peu de sens physique
- Exemple simple



Histogramme conjoint et Recalage

- Cas général :



- Deux problèmes :

- ① un problème d'**extrapolation** pour les points $T(x_k)$ tombant à l'extérieur du domaine délimité par la grille Ω_J
- ② un problème d'**interpolation** pour les points $T(x_k)$ tombant à l'intérieur

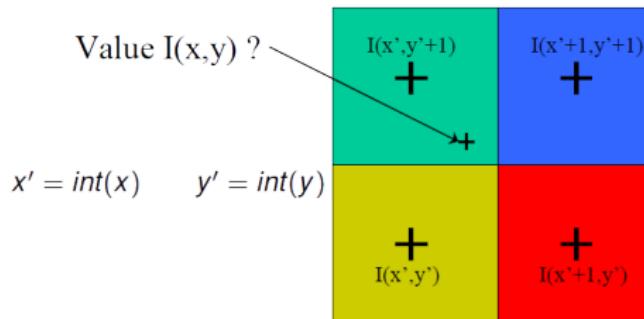
Histogramme conjoint et Recalage

Extrapolation

- Soit on ne prend pas en compte les pixels $T(x_k)$ tombant à l'extérieur du domaine délimité par la grille Ω_J dans le calcul de l'histogramme conjoint
- Soit on prolonge J de manière arbitraire (conditions aux bords)
 - Constante
 - Miroir

Histogramme conjoint et Recalage

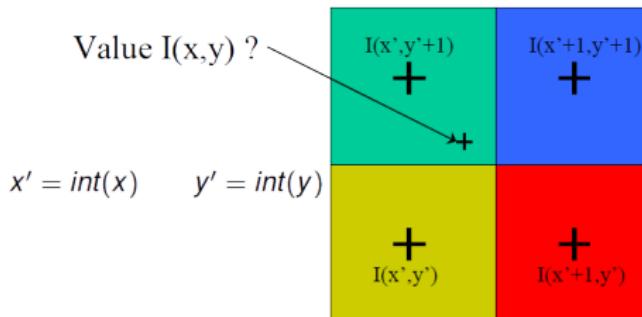
Interpolation



Deux approches "basiques"

Histogramme conjoint et Recalage

Interpolation



Deux approches "basiques"

- interpolation au plus proche voisins : $I(x,y) = I(\text{round}(x), \text{round}(y))$

- interpolation bi-(tri)-linéaire

$$I(x,y) = a(1-b)I(x'+1,y') + (1-a)(1-b)I(x',y') + abI(x'+1,y'+1) + b(1-a)I(x',y'+1)$$

Histogramme conjoint et Recalage

Interpolation (suite)

Approches plus sophistiquées

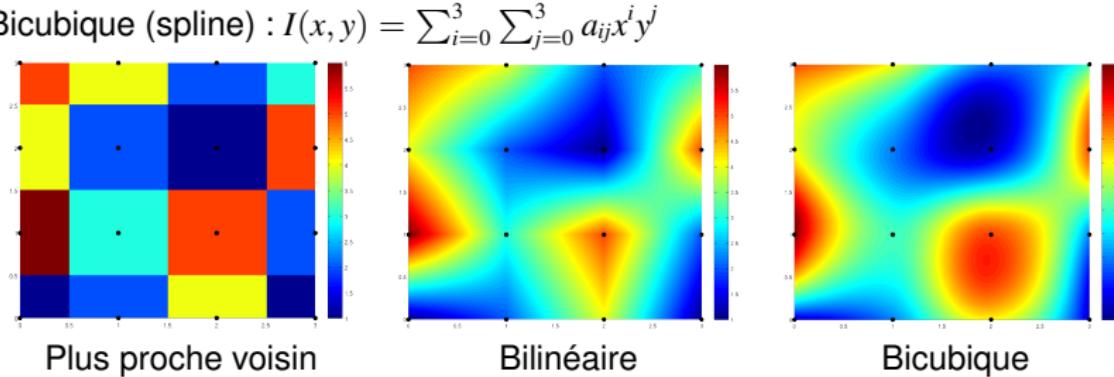
- On cherche une fonction "simple" qui passe par les différents points connus, et on regarde la valeur de cette fonction au point qui nous intéresse
- fonctions possibles :
 - Bicubique (spline) : $I(x, y) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 a_{ij}x^i y^j$

Histogramme conjoint et Recalage

Interpolation (suite)

Approches plus sophistiquées

- On cherche une fonction "simple" qui passe par les différents points connus, et on regarde la valeur de cette fonction au point qui nous intéresse
- fonctions possibles :
 - Bicubique (spline) : $I(x, y) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 a_{ij}x^i y^j$



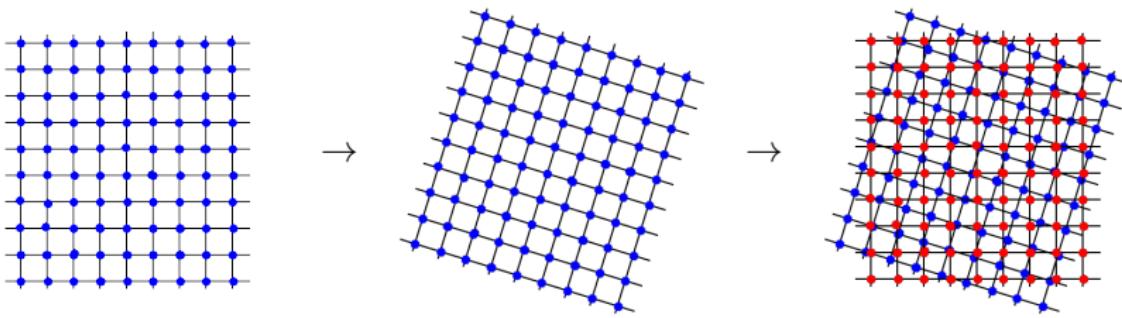
http://en.wikipedia.org/wiki/Bicubic_interpolation

- basée sur $\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$ → Lanczos3

Histogramme conjoint et Recalage



Comparer $T(I)$ et J revient en fait à comparer les pixels $I(x, y)$ et $\tilde{J}(T(x, y))$

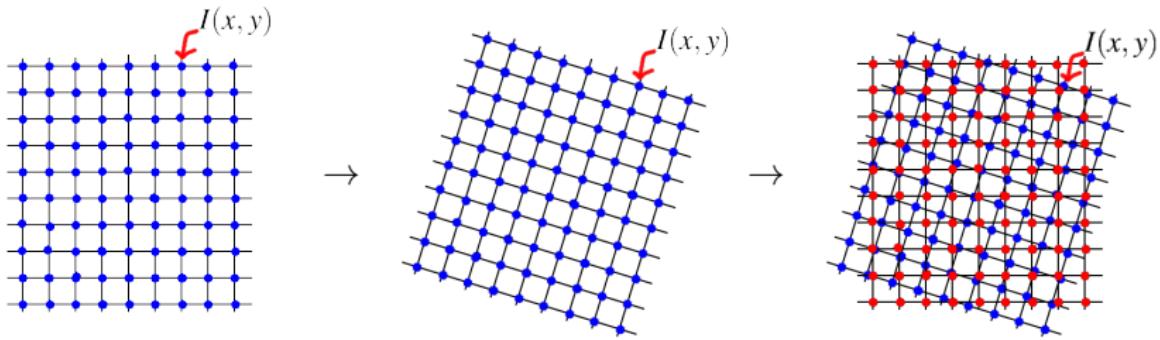


où $\tilde{J}(T(x, y))$ est l'interpolation de J au point $T(x, y)$

Histogramme conjoint et Recalage



Comparer $T(I)$ et J revient en fait à comparer les pixels $I(x, y)$ et $\tilde{J}(T(x, y))$

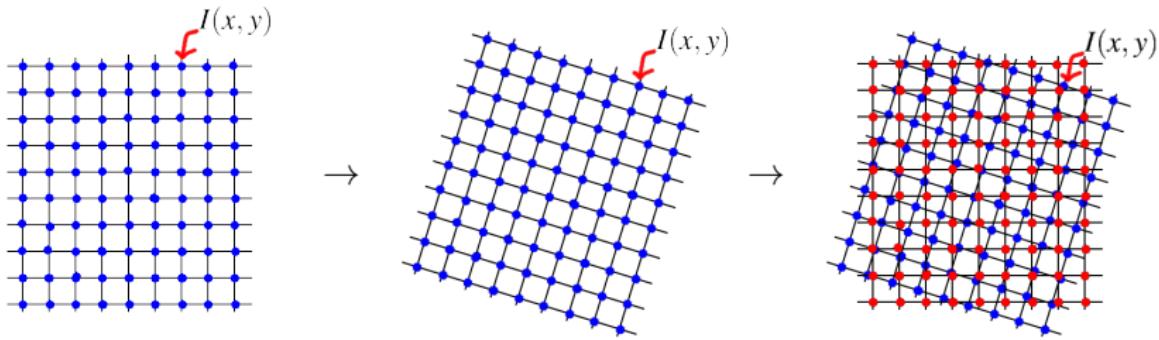


où $\tilde{J}(T(x, y))$ est l'interpolation de J au point $T(x, y)$

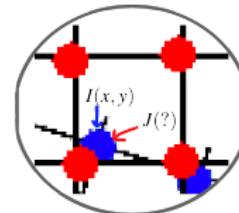
Histogramme conjoint et Recalage



Comparer $T(I)$ et J revient en fait à comparer les pixels $I(x, y)$ et $\tilde{J}(T(x, y))$



où $\tilde{J}(T(x, y))$ est l'interpolation de J au point $T(x, y)$

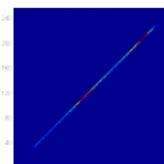


Critères de similarité

↪ Conservation des intensités

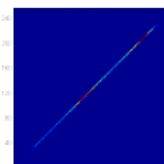
Critère de similarité : Conservation de l'intensité

- cas idéal : $T(I) = J$, images identiques



Critère de similarité : Conservation de l'intensité

- cas idéal : $T(I) = J$, images identiques



- Somme des différences au carré (SSD) :

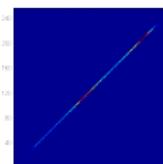
$$\text{SSD}(T) = \sum_{x,y} \left(I(x,y) - \tilde{J}(T(x,y)) \right)^2$$

où (x,y) sont les coordonnées des pixels.

- $\text{SSD}(A, B)$, calculables à partir de l'histogramme joint $H_{A,B}$?

Critère de similarité : Conservation de l'intensité

- cas idéal : $T(I) = J$, images identiques



- Somme des différences au carré (SSD) :

$$\text{SSD}(T) = \sum_{x,y} \left(I(x,y) - \tilde{J}(T(x,y)) \right)^2$$

où (x,y) sont les coordonnées des pixels.

- $\text{SSD}(A,B)$, calculables à partir de l'histogramme joint $H_{A,B}$?

$$\text{SSD}(A,B) = \sum_{i,j} H_{A,B}(i,j)(i-j)^2$$

où i et j sont les intensités des pixels ($\in [0, 256]$ par exemple).

- Autre possibilité : somme des diff. en valeur absolues (SAD) : $\text{SAD}(T) = \sum_{x,y} |I(x,y) - \tilde{J}(T(x,y))|$

Critère de similarité : SSD, exemples

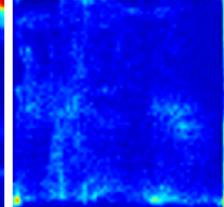
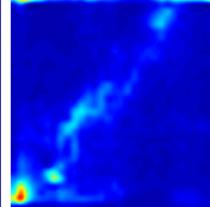
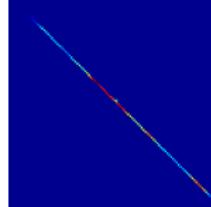
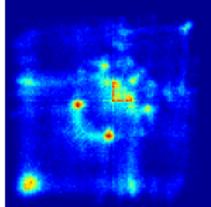
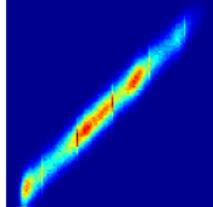
I



J



$H_{I,J}$



$SSD(I, J)$

Critère de similarité : SSD, exemples

Recalé ?

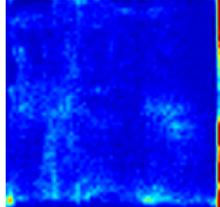
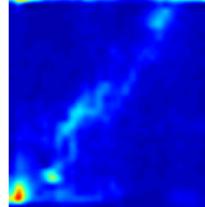
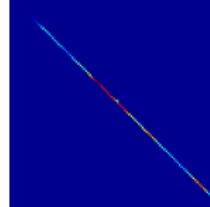
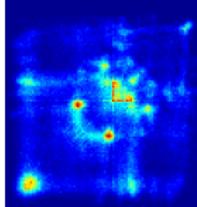
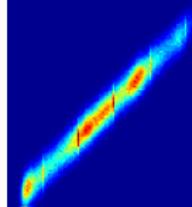
I



J



$H_{I,J}$



$SSD(I, J)$

652

10^9

10^{10}

5600

13400

Critère de similarité : SSD, exemples

Recalé ?

oui

non

oui

oui

non

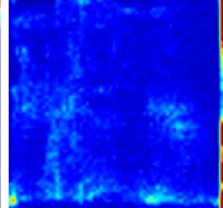
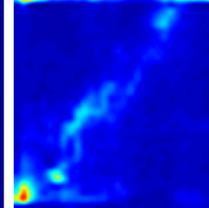
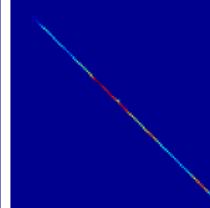
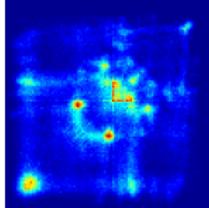
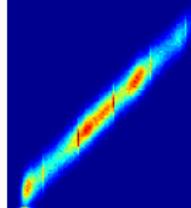
I



J



$H_{I,J}$



$SSD(I, J)$

652

10^9

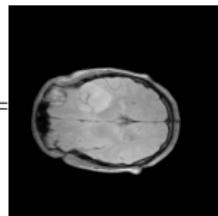
10^{10}

5600

13400

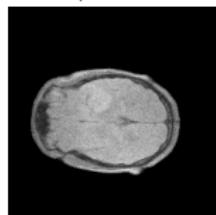
Critère de similarité : SSD, exemples

- avec $I =$



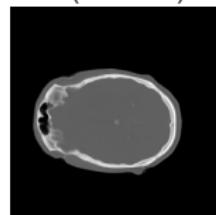
(IRM pondérée en densité de protons, Database RIRE)

$I +$ bruit

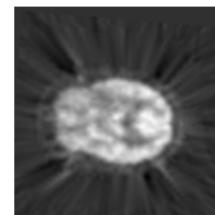


J
(recalé)

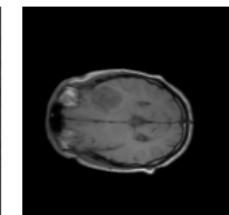
CT (Scanner)



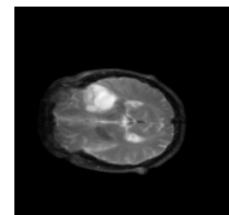
PET



IRM T1



IRM T2



$SSD(I, J)$

1

84

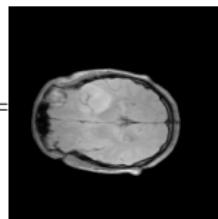
44

14

30

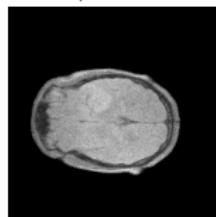
Critère de similarité : SSD, exemples

- avec $I =$

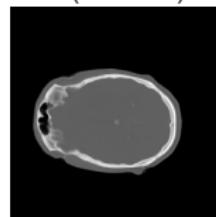


(IRM pondérée en densité de protons, Database RIRE)

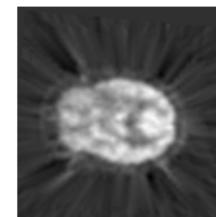
$I +$ bruit



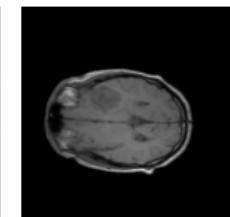
CT (Scanner)



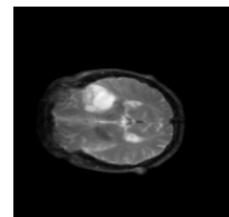
PET



IRM T1



IRM T2



J
(recalé)

SSD(I, J)

1

84

44

14

30

J (non
recalé)

SSD(I, J)

16

80

53

24

38

Critère de similarité : Conservation de l'intensité

Conservation de l'intensité

Minimiser la somme des différences au carré (SSD) revient donc à supposer que les 2 images ont, approximativement, les mêmes intensités, une fois recalées.

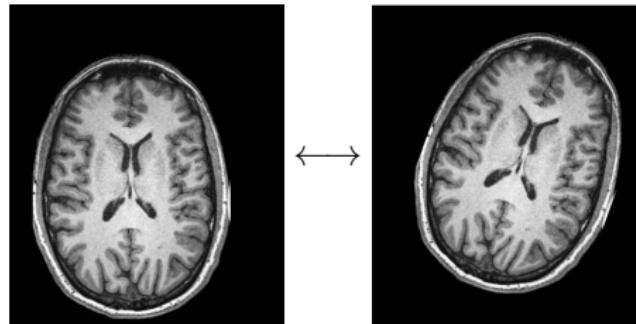
Critère de similarité : Conservation de l'intensité

Conservation de l'intensité

Minimiser la somme des différences au carré (SSD) revient donc à supposer que les 2 images ont, approximativement, les mêmes intensités, une fois recalées.

- adapté pour **recalage mono-modal intra-patient** :

- même patient
- même modalité



Critère de similarité : dépendance linéaire ou affine

Critère de similarité : Dépendance linéaire ou affine

- On ne cherche plus à avoir $T(I) = J$
- mais une relation (affine) de la forme $T(I) = \alpha J + \beta$
- cas $\beta = 0 \rightarrow$ dépendance linéaire

Critère de similarité : Dépendance linéaire ou affine

- On ne cherche plus à avoir $T(I) = J$
- mais une relation (affine) de la forme $T(I) = \alpha J + \beta$
- cas $\beta = 0 \rightarrow$ dépendance linéaire
- modélise des contrastes différents entre les images



SSD =

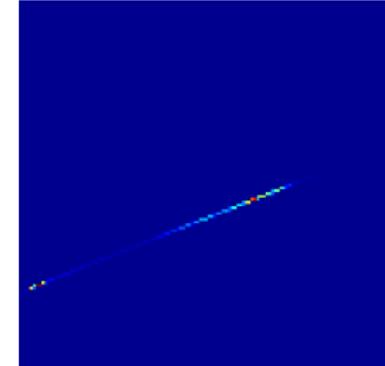
H

Critère de similarité : Dépendance linéaire ou affine

- On ne cherche plus à avoir $T(I) = J$
- mais une relation (affine) de la forme $T(I) = \alpha J + \beta$
- cas $\beta = 0 \rightarrow$ dépendance linéaire
- modélise des contrastes différents entre les images



$SSD = 4000$



Critère de similarité : dépendance affine

- Critère adapté : **coefficient de corrélation**

$$\rho(I, J) = \frac{\sum_{x,y} (I(x, y) - \bar{I}) (J(x, y) - \bar{J})}{\sqrt{\sum_{x,y} (I(x, y) - \bar{I})^2} \sqrt{\sum_{x,y} (J(x, y) - \bar{J})^2}}$$

avec $\bar{I} = \frac{1}{n} \sum_{x,y} I(x, y)$, valeur moyenne de I (idem pour \bar{J})

- $\rho(I, I) =$

Critère de similarité : dépendance affine

- Critère adapté : **coefficient de corrélation**

$$\rho(I, J) = \frac{\sum_{x,y} (I(x, y) - \bar{I}) (J(x, y) - \bar{J})}{\sqrt{\sum_{x,y} (I(x, y) - \bar{I})^2} \sqrt{\sum_{x,y} (J(x, y) - \bar{J})^2}}$$

avec $\bar{I} = \frac{1}{n} \sum_{x,y} I(x, y)$, valeur moyenne de I (idem pour \bar{J})

- $\rho(I, I) = 1$
- $\rho(I, -I) =$

Critère de similarité : dépendance affine

- Critère adapté : **coefficient de corrélation**

$$\rho(I, J) = \frac{\sum_{x,y} (I(x, y) - \bar{I}) (J(x, y) - \bar{J})}{\sqrt{\sum_{x,y} (I(x, y) - \bar{I})^2} \sqrt{\sum_{x,y} (J(x, y) - \bar{J})^2}}$$

avec $\bar{I} = \frac{1}{n} \sum_{x,y} I(x, y)$, valeur moyenne de I (idem pour \bar{J})

- $\rho(I, I) = 1$
- $\rho(I, -I) = -1$
- $\rho(I, \alpha I + \beta) =$

Critère de similarité : dépendance affine

- Critère adapté : **coefficient de corrélation**

$$\rho(I, J) = \frac{\sum_{x,y} (I(x, y) - \bar{I}) (J(x, y) - \bar{J})}{\sqrt{\sum_{x,y} (I(x, y) - \bar{I})^2} \sqrt{\sum_{x,y} (J(x, y) - \bar{J})^2}}$$

avec $\bar{I} = \frac{1}{n} \sum_{x,y} I(x, y)$, valeur moyenne de I (idem pour \bar{J})

- $\rho(I, I) = 1$
- $\rho(I, -I) = -1$
- $\rho(I, \alpha I + \beta) = \text{sign}(\alpha) (1 \text{ ou } -1)$

Critère de similarité : coefficient de corrélation

- si $\rho(I, J)$ proche de 0 ?

Critère de similarité : coefficient de corrélation

- si $\rho(I, J)$ proche de 0 ?

$$\sum_{x,y} (I(x, y) - \bar{I}) (J(x, y) - \bar{J}) \text{ petit (par rapport à } \sqrt{\sum_{x,y} (I(x, y) - \bar{I})^2} \sqrt{\sum_{x,y} (J(x, y) - \bar{J})^2})$$

- "Les pixels où $(I(x, y) - \bar{I})$ et $(J(x, y) - \bar{J})$ sont de même signe (produit > 0) et les pixels où les signes sont opposés (produit < 0) se **compensent**"

Critère de similarité : coefficient de corrélation

- si $\rho(I, J)$ proche de 0 ?

$$\sum_{x,y} (I(x, y) - \bar{I}) (J(x, y) - \bar{J}) \text{ petit } (\text{par rapport à } \sqrt{\sum_{x,y} (I(x, y) - \bar{I})^2} \sqrt{\sum_{x,y} (J(x, y) - \bar{J})^2})$$

- "Les pixels où $(I(x, y) - \bar{I})$ et $(J(x, y) - \bar{J})$ sont de même signe (produit > 0) et les pixels où les signes sont opposés (produit < 0) se **compensent**"
- → les intensités des 2 images ne sont pas corrélées linéairement

Critère de similarité : coefficient de corrélation

- si $\rho(I, J)$ proche de 0 ?

$$\sum_{x,y} (I(x, y) - \bar{I}) (J(x, y) - \bar{J}) \text{ petit (par rapport à } \sqrt{\sum_{x,y} (I(x, y) - \bar{I})^2} \sqrt{\sum_{x,y} (J(x, y) - \bar{J})^2})$$

- "Les pixels où $(I(x, y) - \bar{I})$ et $(J(x, y) - \bar{J})$ sont de même signe (produit > 0) et les pixels où les signes sont opposés (produit < 0) se **compensent**"
- → les intensités des 2 images ne sont pas corrélées linéairement
- $\rho(I, J)$ compris entre -1 et 1 :
 - proche de 1 : corrélation positive
 - proche de -1 : corrélation négative
 - proche de 0 : absence de corrélation linéaire

Critère de similarité : coefficient de corrélation

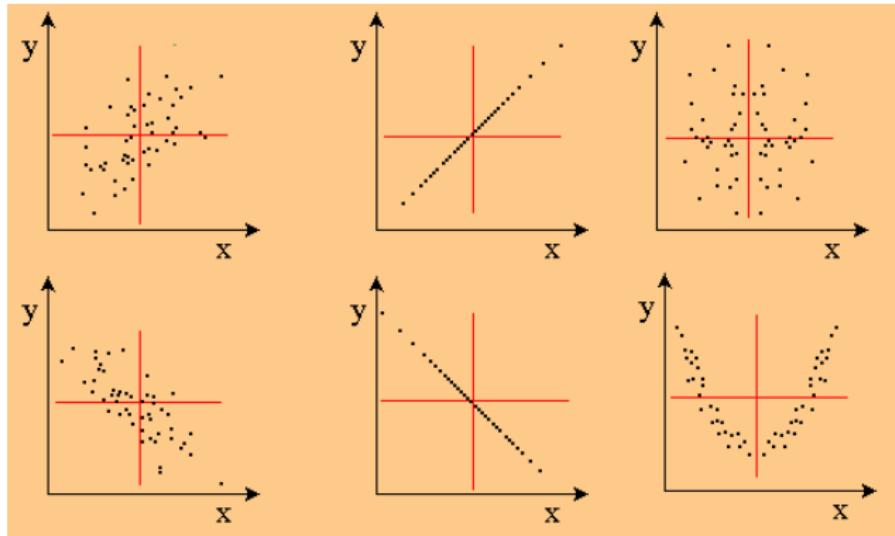
- Un outil statistique plus général : permet d'étudier l'intensité de la liaison qui peut exister entre deux (ou plus) variables aléatoires

$$\rho = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

Critère de similarité : coefficient de corrélation

- Un outil statistique plus général : permet d'étudier l'intensité de la liaison qui peut exister entre deux (ou plus) variables aléatoires

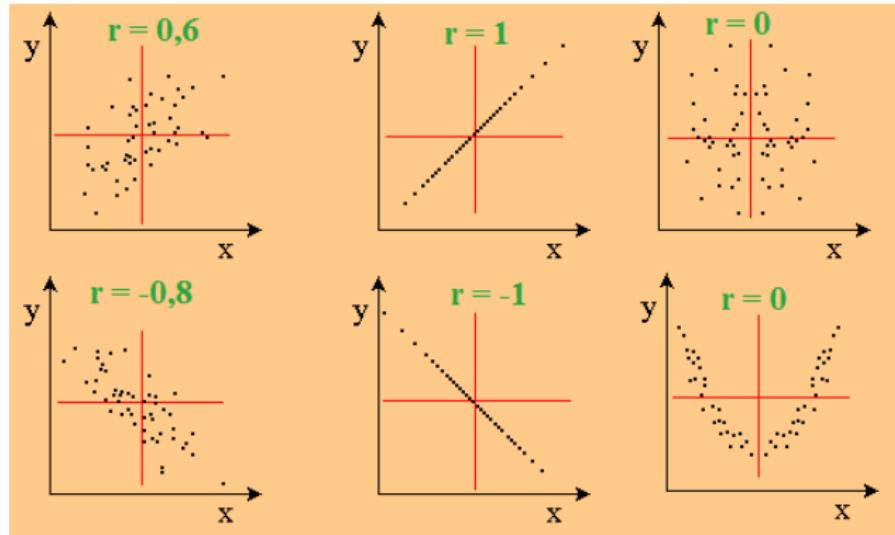
$$\rho = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$



Critère de similarité : coefficient de corrélation

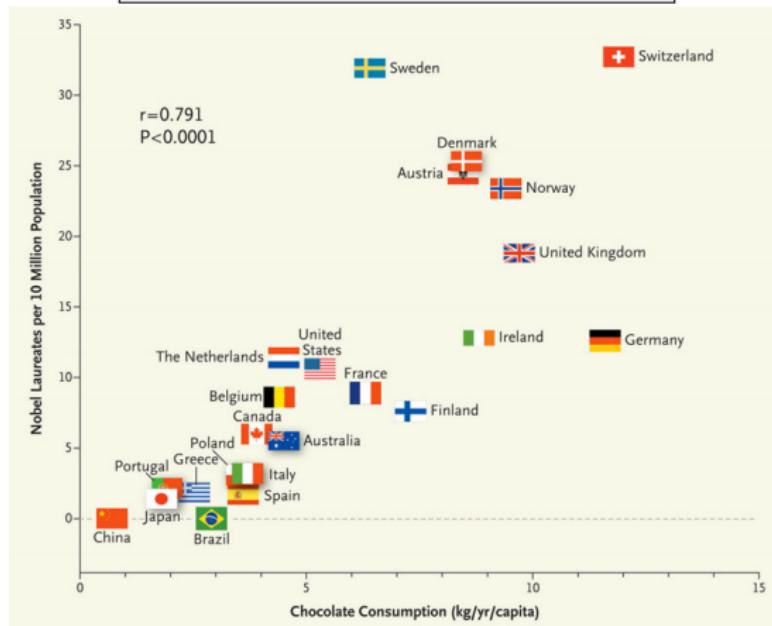
- Un outil statistique plus général : permet d'étudier l'intensité de la liaison qui peut exister entre deux (ou plus) variables aléatoires

$$\rho = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$



Critère de similarité : coefficient de corrélation

Corrélation \neq lien de causalité *



<http://www.tylervigen.com/spurious-correlations>

*. https://www.lemonde.fr/passeurdesciences/article/2012/11/21/le-chocolat-engendre-t-il-des-tueurs-en-série_5986300_5470970.html

Critère de similarité : coefficient de corrélation

- Coefficient de corrélation : calculable à partir de l'histogramme joint $H_{I,J}$?
 - n , nombre de pixels dans chaque image
 - $\bar{I} =$
 - $\sum_{x,y} (I(x,y) - \bar{I}) (J(x,y) - \bar{J}) =$

Critère de similarité : coefficient de corrélation

- Coefficient de corrélation : calculable à partir de l'histogramme joint $H_{I,J}$?
 - n , nombre de pixels dans chaque image
 - $\bar{I} = \frac{1}{n} \sum_{i,j} H(i,j) i$ (idem pour \bar{J})
 - $\sum_{x,y} (I(x,y) - \bar{I}) (J(x,y) - \bar{J}) =$

Critère de similarité : coefficient de corrélation

- Coefficient de corrélation : calculable à partir de l'histogramme joint $H_{I,J}$?

- n , nombre de pixels dans chaque image

- $\bar{I} = \frac{1}{n} \sum_{i,j} H(i,j) i$ (idem pour \bar{J})

- $\sum_{x,y} (I(x,y) - \bar{I})(J(x,y) - \bar{J}) = \sum_{i,j} H(i,j)(i - \bar{I})(j - \bar{J})$

- $\sum_{x,y} (I(x,y) - \bar{I})^2 = \sum_{i,j} H_{i,j} i^2 - n \bar{I}^2$ (idem pour J)

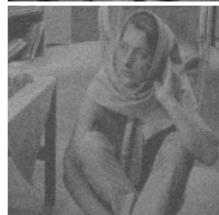
- $\rho(I,J) = \frac{\sum_{i,j} H(i,j)(i - \bar{I})(j - \bar{J})}{\sqrt{(\sum_{i,j} H_{i,j} i^2 - n \bar{I}^2)(\sum_{i,j} H_{i,j} j^2 - n \bar{J}^2)}}$

Coefficient de corrélation : exemples

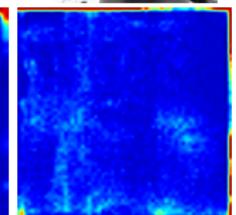
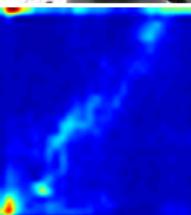
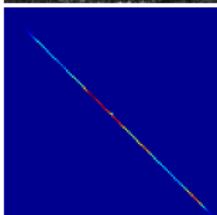
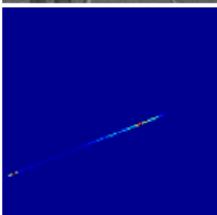
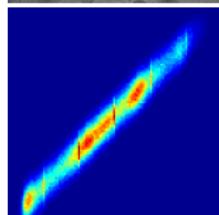
I



J



$H_{I,J}$



$$\rho(I, J)$$

Coefficient de corrélation : exemples

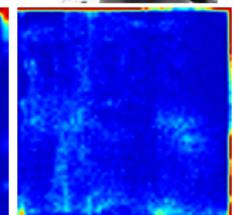
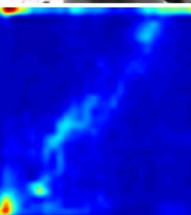
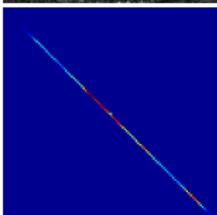
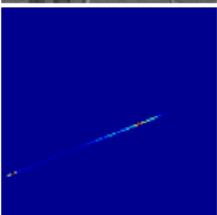
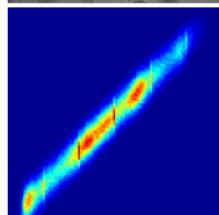
I



J



$H_{I,J}$



$\rho(I, J)$

0.95

1

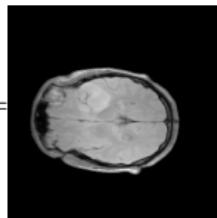
-1

0.54

0.14

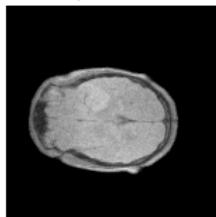
Coefficient de corrélation : exemples

- avec $I =$

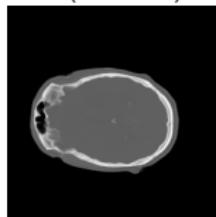


(IRM pondérée en densité de protons, Database RIRE)

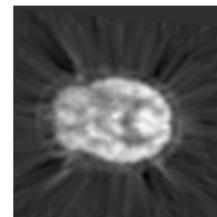
$I +$ bruit



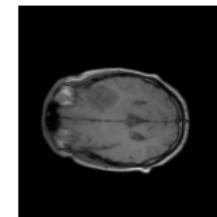
CT (Scanner)



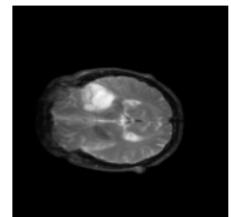
PET



IRM T1



IRM T2



J
(recalé)

$\rho(I, J)$

0.95

-0.43

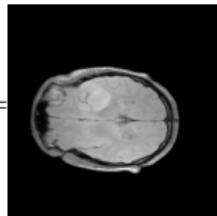
0.66

0.85

0.76

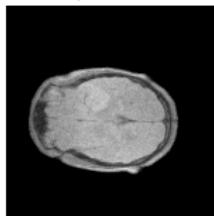
Coefficient de corrélation : exemples

- avec $I =$

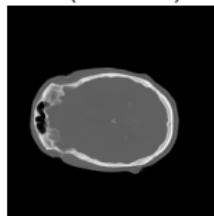


(IRM pondérée en densité de protons, Database RIRE)

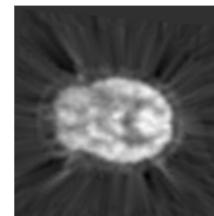
$I +$ bruit



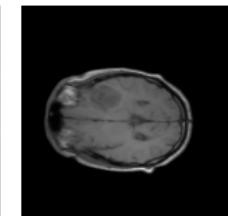
CT (Scanner)



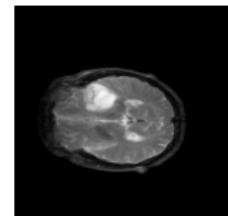
PET



IRM T1



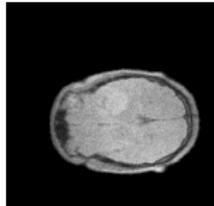
IRM T2



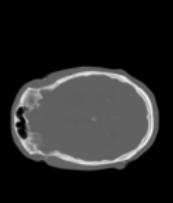
J
(recalé)

$$\rho(I, J)$$

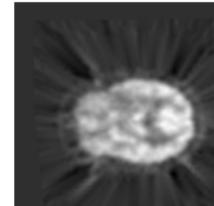
0.95



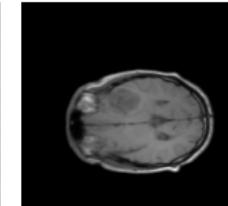
$$-0.43$$



$$0.66$$



$$0.85$$



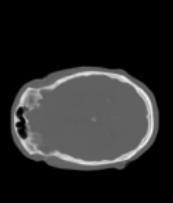
$$0.76$$

J (non
recalé)

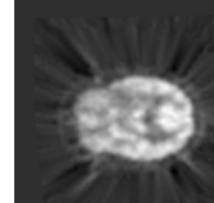
$$\rho(I, J)$$

0.18

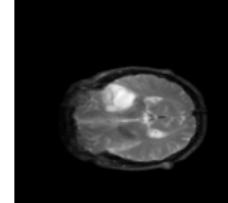
$$-0.06$$



$$0.07$$



$$0.14$$



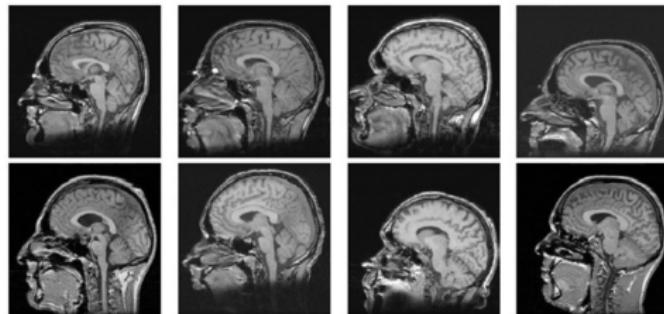
$$0.23$$

Critère de similarité : Coefficient de corrélation

Coefficient de corrélation

Maximiser la valeur absolue du coefficient de corrélation revient donc à supposer que les intensités des 2 images recalées sont, approximativement, reliées par un changement de contraste affine.

- également adapté pour recalage mono-modal intra-patient
- adapté pour recalage **mono-modal inter-patient** :

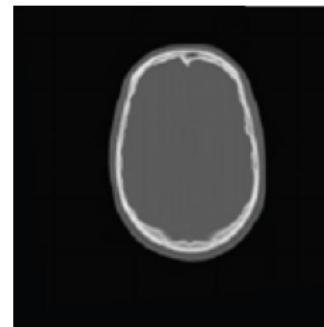
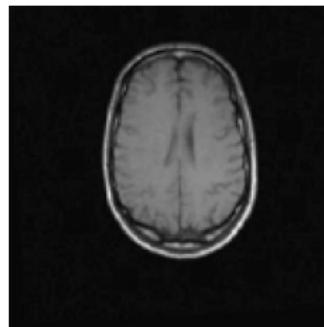


- différents patients
- même modalité

Critère de similarité
↪ dépendance fonctionnelle

Critère de similarité : dépendance fonctionnelle

- Pour des images de modalités différentes, l'hypothèse de dépendance affine est souvent grossièrement fausse



- On peut alors supposer l'existence d'une relation fonctionnelle plus générale (non-linéaire, non-monotone) entre les intensités

Critère de similarité : dépendance fonctionnelle

- Exemple : une image I à valeur dans $\{0, 256\}$, on définit

$$J(x, y) = (I(x, y) - 128)^2$$



Critère de similarité : dépendance fonctionnelle

- Exemple : une image I à valeur dans $\{0, 256\}$, on définit

$$J(x, y) = (I(x, y) - 128)^2$$



Critère de similarité : dépendance fonctionnelle

- Exemple : une image I à valeur dans $\{0, 256\}$, on définit

$$J(x, y) = (I(x, y) - 128)^2$$



$$\text{SSD}(I, J) = 85000$$

$$\rho(I, J) = -0,3$$

Recalé ?

Critère de similarité : dépendance fonctionnelle

- Exemple : une image I à valeur dans $\{0, 256\}$, on définit

$$J(x, y) = (I(x, y) - 128)^2$$



$$\text{SSD}(I, J) = 85000$$

$$\rho(I, J) = -0,3$$

Recalé ? oui

- critères possibles

- critère de Woods
- rapport de corrélation

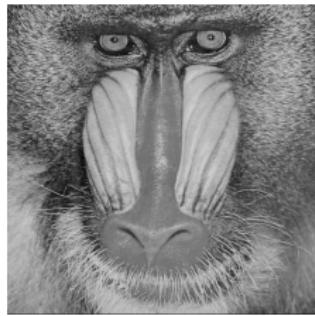
} critères **asymétriques** : on peut avoir $I \approx f(J)$ sans que l'inverse ne soit possible (si f non monotone, cf exemple). On doit donc choisir à l'avance dans quel sens la mesure est calculée.

Critère de similarité : dépendance statistique

Critère de similarité : dépendance statistique

```
I = double(imread('mandrill.png'));
I = I/256;
J = arrayfun(@f,I);

function y = f(x)
    if (rand<.5)
        y = sin(4*pi*x)+.5;
    else
        y = 5*(x-.5).^2;
    end
end
```



I

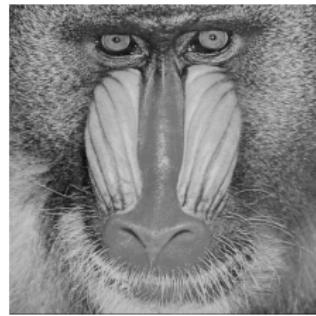
J

$H_{I,J}$

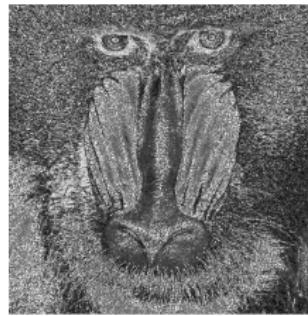
Critère de similarité : dépendance statistique

```
I = double(imread('mandrill.png'));
I = I/256;
J = arrayfun(@f,I);

function y = f(x)
    if (rand<.5)
        y = sin(4*pi*x)+.5;
    else
        y = 5*(x-.5).^2;
    end
end
```



I



J

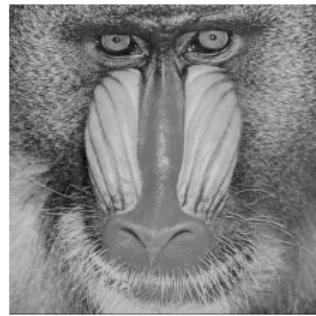
$H_{I,J}$

Critère de similarité : dépendance statistique

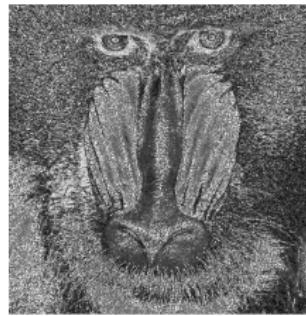
```
I = double(imread('mandrill.png'));
I = I/256;
J = arrayfun(@f,I);


---

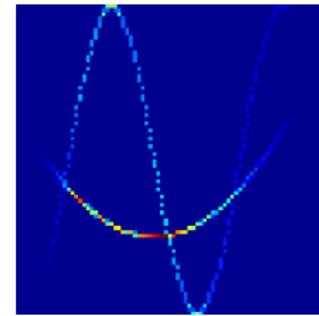

function y = f(x)
    if (rand<.5)
        y = sin(4*pi*x)+.5;
    else
        y = 5*(x-.5).^2;
    end
end
```



I



J



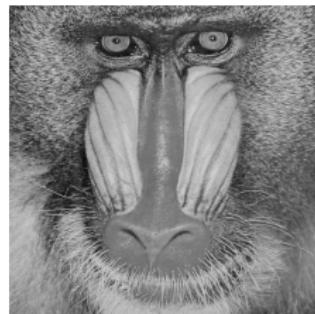
$H_{I,J}$

Critère de similarité : dépendance statistique

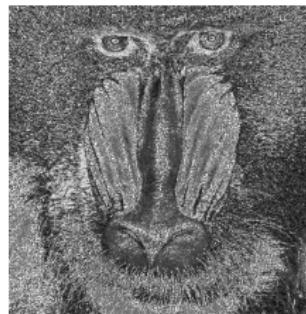
```
I = double(imread('mandrill.png'));
I = I/256;
J = arrayfun(@f,I);


---

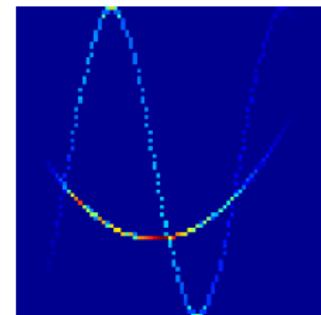

function y = f(x)
    if (rand<.5)
        y = sin(4*pi*x)+.5;
    else
        y = 5*(x-.5).^2;
    end
end
```



I



J



$H_{I,J}$

SSD	$\rho(I, J)$
78000	0.2

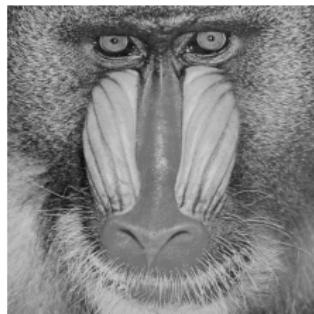
Recalé ?

Critère de similarité : dépendance statistique

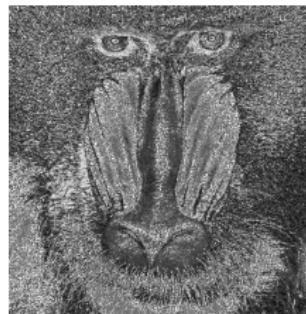
```
I = double(imread('mandrill.png'));
I = I/256;
J = arrayfun(@f,I);


---

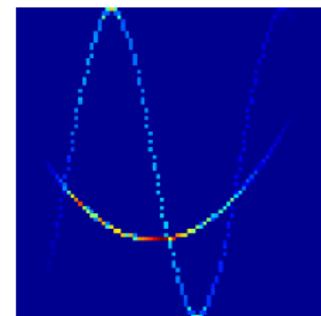

function y = f(x)
    if (rand<.5)
        y = sin(4*pi*x)+.5;
    else
        y = 5*(x-.5).^2;
    end
end
```



I



J



$H_{I,J}$

SSD	$\rho(I, J)$
78000	0.2

Recalé ? oui

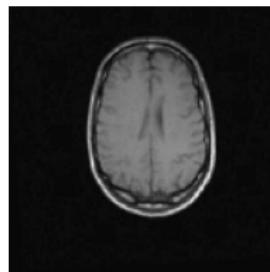
Critère de similarité : dépendance statistique

- dépendance fonctionnelle : souvent pas suffisant

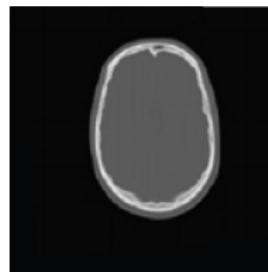
Critère de similarité : dépendance statistique

- dépendance fonctionnelle : souvent pas suffisant

- Exemple



IRM T1



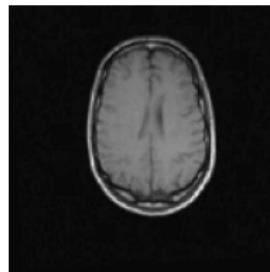
Scanner

- En IRM T1, le liquide céphalo-rachidien et l'os donnent sensiblement les mêmes réponses alors qu'ils sont nettement différenciés dans le scanner
- À l'inverse les tissus mous (e.g. matière grise, matière blanche) sont généralement différenciés en IRM T1 mais confondus en scanner

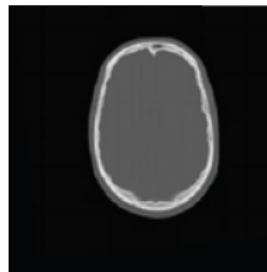
Critère de similarité : dépendance statistique

- dépendance fonctionnelle : souvent pas suffisant

- Exemple



IRM T1



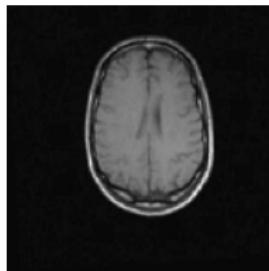
Scanner

- En IRM T1, le liquide céphalo-rachidien et l'os donnent sensiblement les mêmes réponses alors qu'ils sont nettement différenciés dans le scanner
- À l'inverse les tissus mous (e.g. matière grise, matière blanche) sont généralement différenciés en IRM T1 mais confondus en scanner
- Il n'est donc pas possible de relier fonctionnellement les intensités de ces 2 modalités

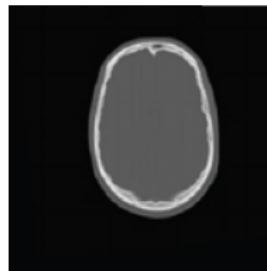
Critère de similarité : dépendance statistique

- dépendance fonctionnelle : souvent pas suffisant

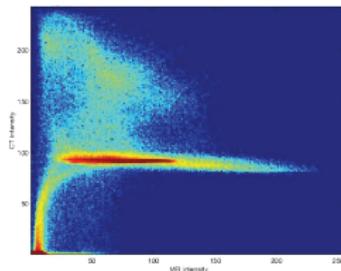
- Exemple



IRM T1



Scanner



Histogramme conjoint

- En IRM T1, le liquide céphalo-rachidien et l'os donnent sensiblement les mêmes réponses alors qu'ils sont nettement différenciés dans le scanner
- À l'inverse les tissus mous (e.g. matière grise, matière blanche) sont généralement différenciés en IRM T1 mais confondus en scanner
- Il n'est donc pas possible de relier fonctionnellement les intensités de ces 2 modalités

Critère de similarité : dépendance statistique

- C'est dans ce cadre que la notion d'histogramme conjoint prend tout sa dimension

Critère de similarité : dépendance statistique

- C'est dans ce cadre que la notion d'histogramme conjoint prend tout sa dimension
- Rappel : Interprétation statistique

- (en divisant par n , nombres de pixels) :

$$H_{I,J}(i,j) = \frac{1}{n} \operatorname{Card} \left\{ (x,y) \mid I(x,y) = i \text{ et } J(x,y) = j \right\}$$

- $H_{I,J}(i,j)$ = "probabilité qu'un pixel tiré aléatoirement ait l'intensité i dans l'image I et que son correspondant ait l'intensité j dans l'image J "
- $H_{I,J}$: densité de probabilité d'un couple de variable aléatoires

Critère de similarité : dépendance statistique

- C'est dans ce cadre que la notion d'histogramme conjoint prend tout sa dimension
- Rappel : Interprétation statistique

- (en divisant par n , nombres de pixels) :

$$H_{I,J}(i,j) = \frac{1}{n} \operatorname{Card} \left\{ (x,y) \mid I(x,y) = i \text{ et } J(x,y) = j \right\}$$

- $H_{I,J}(i,j)$ = "probabilité qu'un pixel tiré aléatoirement ait l'intensité i dans l'image I et que son correspondant ait l'intensité j dans l'image J "
- $H_{I,J}$: densité de probabilité d'un couple de variable aléatoires
- → naturel de prendre une mesure du degré de dépendance statistique entre ces variables comme mesure de similarité entre les images

Critère de similarité : dépendance statistique

- C'est dans ce cadre que la notion d'histogramme conjoint prend tout sa dimension
- Rappel : Interprétation statistique

- (en divisant par n , nombres de pixels) :

$$H_{I,J}(i,j) = \frac{1}{n} \operatorname{Card} \left\{ (x,y) \mid I(x,y) = i \text{ et } J(x,y) = j \right\}$$

- $H_{I,J}(i,j)$ = "probabilité qu'un pixel tiré aléatoirement ait l'intensité i dans l'image I et que son correspondant ait l'intensité j dans l'image J "
- $H_{I,J}$: densité de probabilité d'un couple de variable aléatoires
- → naturel de prendre une mesure du degré de dépendance statistique entre ces variables comme mesure de similarité entre les images
 - entropie conjointe , 1995
 - coefficient de corrélation entropique , 1998
 - **information mutuelle** , 1995

Critère de similarité : dépendance statistique

- La notion de dépendance statistique : la plus générale (hypothèses les plus faibles sur la relation entre intensité)
- On veut tester le degré de dépendance statistique entre l'intensité de l'image I et l'intensité de l'image J : Peut-on dire quelque chose sur les valeurs probables de $J(x, y)$ si l'on connaît $I(x, y)$ (et recip.) ?

Critère de similarité : dépendance statistique

- La notion de dépendance statistique : la plus générale (hypothèses les plus faibles sur la relation entre intensité)
- On veut tester le degré de dépendance statistique entre l'intensité de l'image I et l'intensité de l'image J : Peut-on dire quelque chose sur les valeurs probables de $J(x, y)$ si l'on connaît $I(x, y)$ (et recip.) ?

Information mutuelle

Soit X et Y deux variables aléatoires, on définit l'information mutuelle de ce couple de v.a. par

$$IM(X, Y) = \sum_{x,y} p(x, y) \log \left(\frac{p(x, y)}{p(x)p(y)} \right)$$

Critère de similarité : dépendance statistique

- La notion de dépendance statistique : la plus générale (hypothèses les plus faibles sur la relation entre intensité)
- On veut tester le degré de dépendance statistique entre l'intensité de l'image I et l'intensité de l'image J : Peut-on dire quelque chose sur les valeurs probables de $J(x, y)$ si l'on connaît $I(x, y)$ (et recip.) ?

Information mutuelle

Soit X et Y deux variables aléatoires, on définit l'information mutuelle de ce couple de v.a. par

$$IM(X, Y) = \sum_{x,y} p(x, y) \log \left(\frac{p(x, y)}{p(x)p(y)} \right)$$

- On a $IM(X, Y) = IM(Y, X)$

Critère de similarité : dépendance statistique

- **Information mutuelle** $IM(X, Y) = \sum_{x,y} p(x, y) \log \left(\frac{p(x, y)}{p(x)p(y)} \right)$
- Si les 2 variables sont indépendantes

Critère de similarité : dépendance statistique

- **Information mutuelle** $IM(X, Y) = \sum_{x,y} p(x, y) \log \left(\frac{p(x, y)}{p(x)p(y)} \right)$
- Si les 2 variables sont indépendantes $\Rightarrow p(X, Y) = p(X)p(Y)$

Critère de similarité : dépendance statistique

- **Information mutuelle** $IM(X, Y) = \sum_{x,y} p(x, y) \log \left(\frac{p(x, y)}{p(x)p(y)} \right)$
- Si les 2 variables sont indépendantes $\Rightarrow p(X, Y) = p(X)p(Y) \Rightarrow IM(X, Y) = 0$

Critère de similarité : dépendance statistique

- **Information mutuelle** $IM(X, Y) = \sum_{x,y} p(x, y) \log \left(\frac{p(x, y)}{p(x)p(y)} \right)$
 - Si les 2 variables sont indépendantes $\Rightarrow p(X, Y) = p(X)p(Y) \Rightarrow IM(X, Y) = 0$
 - On peut montrer la réciproque, donc :

$$IM(X, Y) = 0 \iff X \text{ et } Y \text{ sont indépendants}$$

Critère de similarité : dépendance statistique

- **Information mutuelle** $IM(X, Y) = \sum_{x,y} p(x, y) \log \left(\frac{p(x, y)}{p(x)p(y)} \right)$
 - Si les 2 variables sont indépendantes $\Rightarrow p(X, Y) = p(X)p(Y) \Rightarrow IM(X, Y) = 0$
 - On peut montrer la réciproque, donc :

$IM(X, Y) = 0 \iff X \text{ et } Y \text{ sont indépendants}$
 - On peut également montrer que $IM(X, Y) \geq 0, \forall (X, Y)$

Critère de similarité : dépendance statistique

- **Information mutuelle** $IM(X, Y) = \sum_{x,y} p(x, y) \log \left(\frac{p(x, y)}{p(x)p(y)} \right)$
 - Si les 2 variables sont indépendantes $\Rightarrow p(X, Y) = p(X)p(Y) \Rightarrow IM(X, Y) = 0$
 - On peut montrer la réciproque, donc :

$IM(X, Y) = 0 \iff X \text{ et } Y \text{ sont indépendants}$
 - On peut également montrer que $IM(X, Y) \geq 0, \forall (X, Y)$
 - L'information mutuelle d'un couple (X,Y) de variables aléatoires représente leur degré de dépendance au sens probabiliste.
 - Une interprétation : "distance" entre $p(X, Y)$ et $p(X)p(Y)$ (divergence de Kullback-Leibler)
 - **L'information mutuelle sera donc d'autant plus grande que le couple de variables aléatoires X et Y est lié/dépendant**

Critère de similarité : information mutuelle

- Information mutuelle : calculable directement à partir de l'histogramme conjoint normalisé

$$p_{i,j} = \frac{1}{n} \operatorname{Card} \left\{ (x,y) \mid I(x,y) = i \text{ et } J(x,y) = j \right\}$$

Critère de similarité : information mutuelle

- Information mutuelle : calculable directement à partir de l'histogramme conjoint normalisé

$$p_{i,j} = \frac{1}{n} \operatorname{Card}\left\{(x,y) \mid I(x,y) = i \text{ et } J(x,y) = j\right\}$$

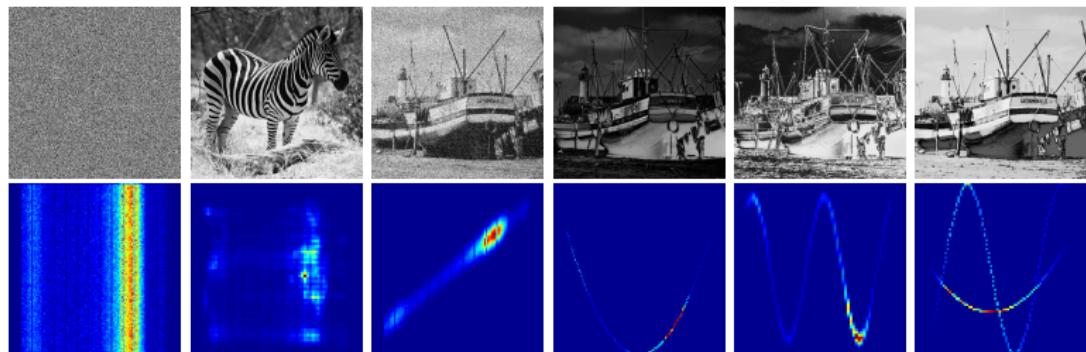
$$IM = \sum_{i,j} p_{i,j} \log \frac{p_{i,j}}{p_i p_j} \quad \text{avec} \quad p_i = \sum_j p_{i,j} \text{ et } p_j = \sum_i p_{i,j}$$

Critère de similarité : information mutuelle

- Exemples avec $I =$



J



$H_{I,J}$

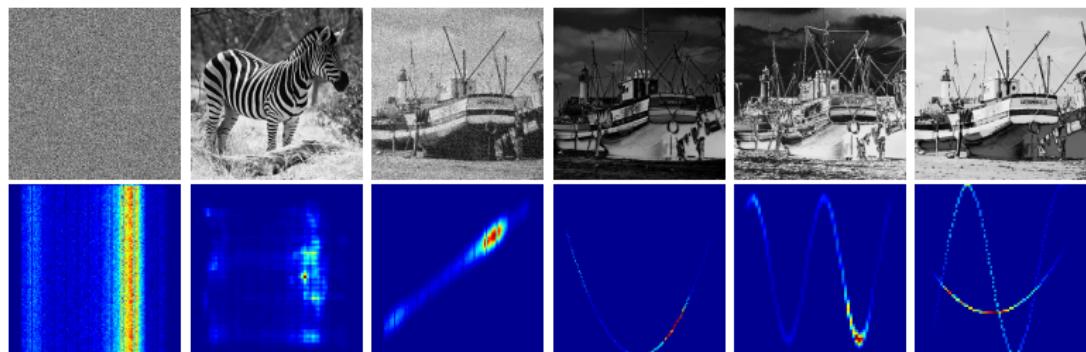
$\text{IM}(I, J)$

Critère de similarité : information mutuelle

- Exemples avec $I =$



J



$\text{IM}(I, J)$

0.03

0.09

1.22

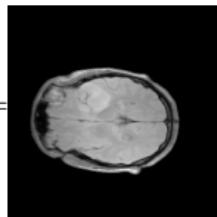
3.5

1.88

2.77

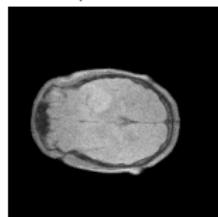
Critère de similarité : information mutuelle

- avec $I =$



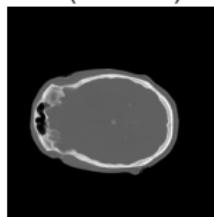
(IRM pondérée en densité de protons, Database RIRE)

$I +$ bruit

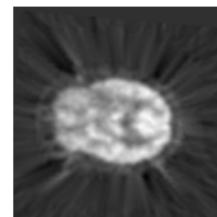


J
(recalé)

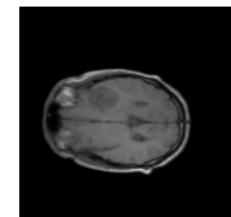
CT (Scanner)



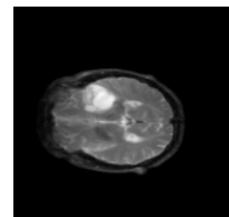
PET



IRM T1



IRM T2



$IM(I, J)$

1.04

0.63

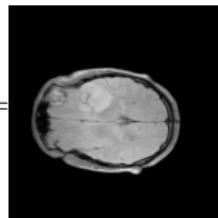
0.53

0.80

0.79

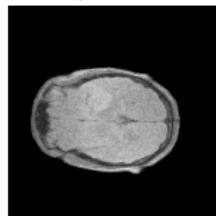
Critère de similarité : information mutuelle

- avec $I =$

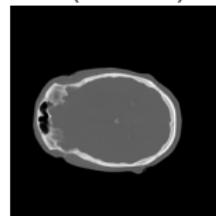


(IRM pondérée en densité de protons, Database RIRE)

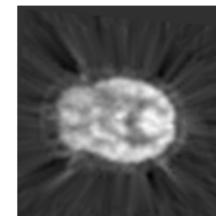
$I +$ bruit



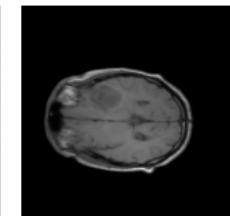
CT (Scanner)



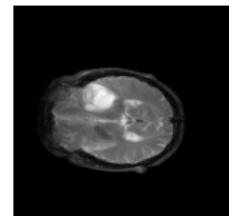
PET



IRM T1



IRM T2



J
(recalé)

$IM(I, J)$

1.04

0.63

0.53

0.80

0.79

J (non
recalé)

$IM(I, J)$

0.18

0.19

0.26

0.20

0.26

Critère de similarité : information mutuelle

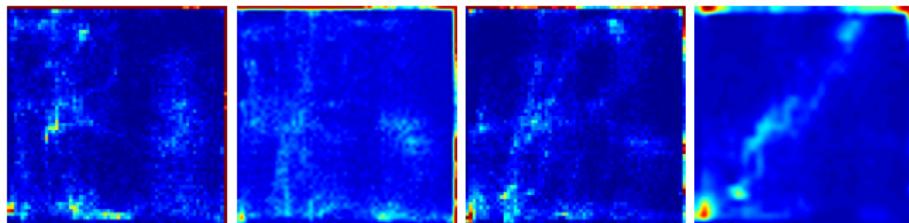
I



J



$H_{I,J}$



$IM(I, J)$

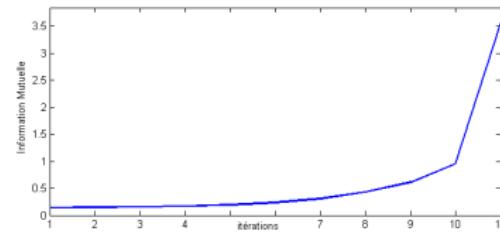
0.14

0.23

0.34

0.53

Critère de similarité : information mutuelle



J



$IM(I, J)$

0.15



0.16



0.17



0.19



0.24

J



$IM(I, J)$

0.31



0.43



0.61



0.95



3.56

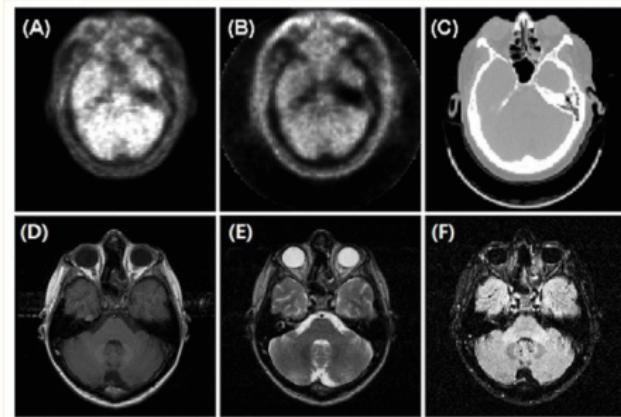
Critère de similarité : dépendance statistique

Dépendance statistique

Maximiser l'information mutuelle revient donc à supposer que les intensités des 2 images recalées sont dépendantes (du point de vue statistique)

- adapté pour recalage multi-modal :

- différentes modalités



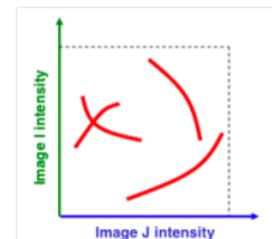
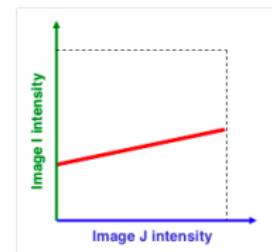
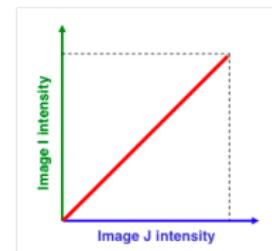
PET with (a) and without (b) attenuation correction, CT (c) and MRI : T1 (d) T2 (e) and FLAIR (f).

Critère de similarité : Récapitulatif

- conservation des intensités :
 - **SSD** (à minimiser)
 - adapté pour recalage mono-modal intra-patient

- dépendance affine :
 - **coefficient de corrélation** (à maximiser)
 - adapté pour recalage mono-modal intra- et inter-patient

- dépendance statistique :
 - **information mutuelle** (à maximiser)
 - adapté pour recalage multi-modal (CT/PET, CT/IRM, ...)



Critère de similarité : Récapitulatif



Il faut choisir un critère qui sera optimal (mini/maxi) **lorsque les 2 images seront recalées !**
(idem pour histogramme joint de la slide précédente)

Quel type de transformation T ?

Transformations

- Rappel : le problème du recalage
$$\arg \min_{T \in \mathcal{F}} \text{Simil}(T(I), J) = ?$$
- On a vu différentes possibilités pour Simil (SSD, ρ , IM, ...)

Transformations

- Rappel : le problème du recalage

$$\arg \min_{T \in \mathcal{F}} \text{Simil}(T(I), J) = ?$$

- On a vu différentes possibilités pour Simil (SSD, ρ , IM, ...)
- On veut que T soit uniquement une transformation spatiale :

$T : (x, y) \in \Omega_I \mapsto (a, b) \in \Omega_J$ (ne modifie pas les intensités)

Transformations

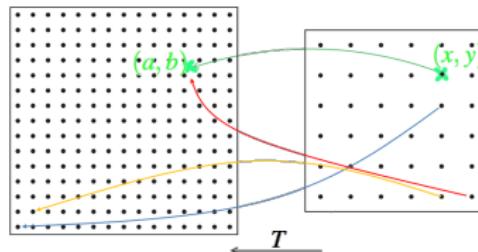
- Rappel : le problème du recalage

$$\arg \min_{T \in \mathcal{F}} \text{Simil}(T(I), J) = ?$$

- On a vu différentes possibilités pour Simil (SSD, ρ , IM, ...)
- On veut que T soit uniquement une transformation spatiale :

$$T : (x, y) \in \Omega_I \mapsto (a, b) \in \Omega_J \text{ (ne modifie pas les intensités)}$$

- Si on n'impose aucune contrainte sur T , problème :



- On veut donc restreindre le type de transformation cherchée

Quel type de transformation T ?

↪ transformations linéaires (pouvant s'écrire sous forme matricielle)

Quel type de transformation T ?

- ↪ transformations linéaires
- ↪ transformations rigides

Transformations rigides

- Conservation des distances, angles, lignes :
 - Translation
 - Rotation



- Nombre de paramètres en 2D :

Transformations rigides

- Conservation des distances, angles, lignes :
 - Translation
 - Rotation



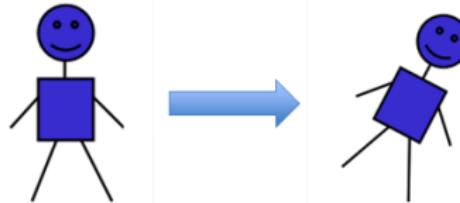
- Nombre de paramètres en 2D : 3 (1 pour angle de rotation, 2 pour translation)

$$T(\mathbf{x}) = R\mathbf{x} + \mathbf{t}$$

- écriture matricielle en 2D

Transformations rigides

- Conservation des distances, angles, lignes :
- Translation
- Rotation

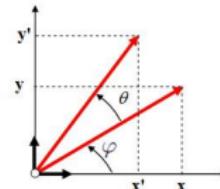


- Nombre de paramètres en 2D : 3 (1 pour angle de rotation, 2 pour translation)

$$T(\mathbf{x}) = R\mathbf{x} + \mathbf{t}$$

- écriture matricielle en 2D

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$$



Transformations rigides

- réécriture en **coordonnées homogènes** :

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = * \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Transformations rigides

- réécriture en **coordonnées homogènes** :

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & p \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & q \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

- en 2D : 3 paramètres, répartis dans 6 éléments de la matrice.

Transformations rigides

- réécriture en **coordonnées homogènes** :

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & p \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & q \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

- en 2D : 3 paramètres, répartis dans 6 éléments de la matrice.
- si on veut qu'une matrice 3×3 représente (en coord. homog.) une transformation rigide en 2D, il faut
 - les 2 premiers éléments de la 3ème colonne : libres, quelconques
 - Les éléments de la matrice 2×2 en haut à gauche doivent pouvoir être obtenus par un angle θ et les formules adéquates

Transformations rigides

- réécriture en **coordonnées homogènes** :

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & p \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & q \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

- en 2D : 3 paramètres, répartis dans 6 éléments de la matrice.
- si on veut qu'une matrice 3×3 représente (en coord. homog.) une transformation rigide en 2D, il faut
 - les 2 premiers éléments de la 3ème colonne : libres, quelconques
 - Les éléments de la matrice 2×2 en haut à gauche doivent pouvoir être obtenus par un angle θ et les formules adéquates

- que penser de $\begin{bmatrix} a & -b & p \\ b & a & q \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$?

Transformations rigides

- réécriture en **coordonnées homogènes** :

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & p \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & q \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

- en 2D : 3 paramètres, répartis dans 6 éléments de la matrice.
- si on veut qu'une matrice 3×3 représente (en coord. homog.) une transformation rigide en 2D, il faut
 - les 2 premiers éléments de la 3ème colonne : libres, quelconques
 - Les éléments de la matrice 2×2 en haut à gauche doivent pouvoir être obtenus par un angle θ et les formules adéquates

- que penser de $\begin{bmatrix} a & -b & p \\ b & a & q \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$? représente transfo. rigide $\Leftrightarrow a^2 + b^2 = 1$

Transformations rigides

En 3D :

Transformations rigides

En 3D : 6 param. (3 angles de rotation, 3 translation)

● Translation :

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = * \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Transformations rigides

En 3D : 6 param. (3 angles de rotation, 3 translation)

- Translation :
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 & q \\ 0 & 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Transformations rigides

En 3D : 6 param. (3 angles de rotation, 3 translation)

● Translation :

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 & q \\ 0 & 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

● Rotation par rapport à l'axe des x :

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = * \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Transformations rigides

En 3D : 6 param. (3 angles de rotation, 3 translation)

● Translation :
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 & q \\ 0 & 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

● Rotation par rapport à l'axe des x :
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Transformations rigides

En 3D : 6 param. (3 angles de rotation, 3 translation)

- Translation :
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 & q \\ 0 & 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Rotation par rapport à l'axe des x :
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Rotation par rapport à l'axe des y :
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\omega) & 0 & -\sin(\omega) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin(\omega) & 0 & \cos(\omega) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Rotation par rapport à l'axe des z :
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Transformations rigides

Exemple de transformation rigide 3D

$$T(p, q, r) * R_z(\phi) * R_y(\omega) * R_x(\theta) =$$

$$\begin{bmatrix} \cos \phi \cos \omega & \sin \phi \cos \theta & \sin \phi \sin \theta & p \\ -\sin \phi \cos \omega & \cos \phi \cos \theta & \cos \phi \sin \theta & q \\ \sin \omega & -\cos \omega \sin \theta & -\cos \omega \cos \theta & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformations rigides

Exemple de transformation rigide 3D

$$T(p, q, r) * R_z(\phi) * R_y(\omega) * R_x(\theta) =$$

$$\begin{bmatrix} \cos \phi \cos \omega & \sin \phi \cos \theta & \sin \phi \sin \theta & p \\ -\sin \phi \cos \omega & \cos \phi \cos \theta & \cos \phi \sin \theta & q \\ \sin \omega & -\cos \omega \sin \theta & -\cos \omega \cos \theta & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Donc pour une matrice 4×4 de la forme : $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & p \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & q \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ pas facile de dire s'il s'agit de la matrice d'une transfo. rigide ...

Transformations rigides

Décomposition en valeurs singulières (SVD) :

- "généralisation" de la diagonalisation de matrices carrées

Transformations rigides

Décomposition en valeurs singulières (SVD) :

- "généralisation" de la diagonalisation de matrices carrées

Théorème

Soit M une matrice $m \times n$, il existe une factorisation de la forme :

$$M = U \Sigma V^*$$

avec

- U une matrice unitaire $m \times m$
- Σ une matrice $m \times n$ "diagonale"
- V^* est la matrice transposée (ou transconjuguée) à V , matrice unitaire $n \times n$.

On appelle cette factorisation la décomposition en valeurs singulières de M .

- U et V matrices unitaires : $U^* U = U U^* = \text{Id} \Rightarrow U$ est une matrice de rotation

Transformations rigides

Décomposition en valeurs singulières (SVD) :

- Soit M une matrice 4×4 de la forme :
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & p \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & q \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
- on veut savoir s'il s'agit de la matrice d'une transfo. rigide
- on décompose
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = U S V^*$$
 avec $S = \begin{bmatrix} v_1 & 0 & 0 \\ 0 & v_2 & 0 \\ 0 & 0 & v_3 \end{bmatrix}$
- alors** S (et donc M) correspond à une transfo. rigide s.s.i. :

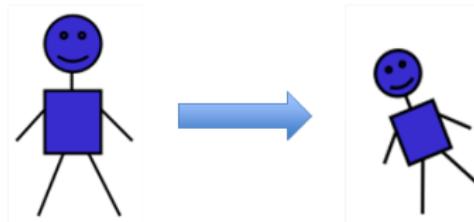
$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Quel type de transformation T ?

- ↪ transformations linéaires
- ↪ similitudes

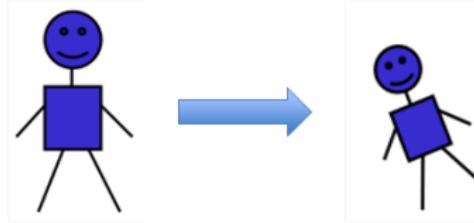
Similitudes

- Conservation du rapport des distances, des angles, lignes
- On ajoute 1 paramètre : "scaling", homothétie $T(\mathbf{x}) = sR\mathbf{x} + \mathbf{t}$



Similitudes

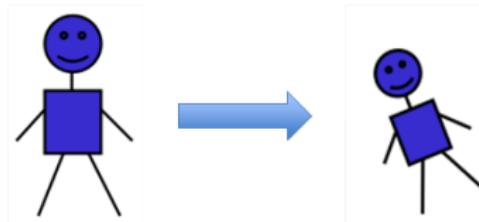
- Conservation du rapport des distances, des angles, lignes
- On ajoute 1 paramètre : "scaling", homothétie $T(\mathbf{x}) = sR\mathbf{x} + \mathbf{t}$



- matrice d'homothétie :
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = * \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Similitudes

- Conservation du rapport des distances, des angles, lignes
- On ajoute 1 paramètre : "scaling", homothétie $T(\mathbf{x}) = sR\mathbf{x} + \mathbf{t}$



- matrice d'homothétie :
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Similitudes

- comme précédemment, étant donné une matrice

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & p \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & q \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

la transformation correspondante est-elle une similitude ?

Similitudes

- comme précédemment, étant donné une matrice

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & p \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & q \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

la transformation correspondante est-elle une similitude ?

- SVD : la sous-matrice haut-gauche $(3 \times 3) = U S V^*$ et M correspond à une similitude s.s.i. :

$$S = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} -s & 0 & 0 \\ 0 & -s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} -s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & -s \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & -s & 0 \\ 0 & 0 & -s \end{bmatrix}$$

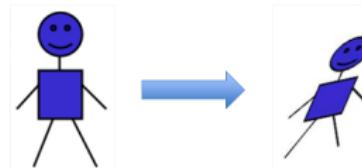
Quel type de transformation T ?

- ↪ transformations linéaires
- ↪ transformations affines

Transformations affines

- conserve les lignes et le parallélisme

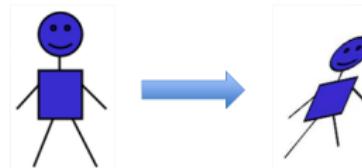
$$T(\mathbf{x}) = B\mathbf{x} + \mathbf{t} \quad \text{avec } B \text{ une matrice } 3 \times 3 \text{ quelconque}$$



Transformations affines

- conserve les lignes et le parallélisme

$$T(\mathbf{x}) = B\mathbf{x} + \mathbf{t} \quad \text{avec } B \text{ une matrice } 3 \times 3 \text{ quelconque}$$

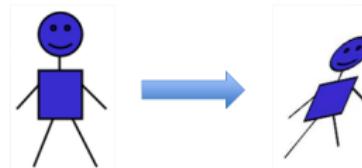


- nb de paramètres ?

Transformations affines

- conserve les lignes et le parallélisme

$$T(\mathbf{x}) = B\mathbf{x} + \mathbf{t} \quad \text{avec } B \text{ une matrice } 3 \times 3 \text{ quelconque}$$

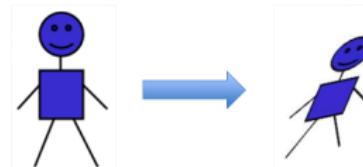


- nb de paramètres ? $\rightarrow 12$ ($B : 9$, $\mathbf{t} : 3$)

Transformations affines

- conserve les lignes et le parallélisme

$T(\mathbf{x}) = B\mathbf{x} + \mathbf{t}$ avec B une matrice 3×3 quelconque



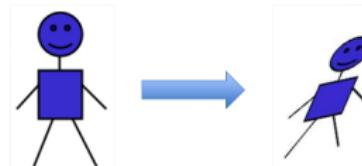
- nb de paramètres ? $\rightarrow 12$ ($B : 9$, $\mathbf{t} : 3$)

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} & e_{14} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} & e_{24} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & e_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Transformations affines

- conserve les lignes et le parallélisme

$$T(\mathbf{x}) = B\mathbf{x} + \mathbf{t} \quad \text{avec } B \text{ une matrice } 3 \times 3 \text{ quelconque}$$



- nb de paramètres ? $\rightarrow 12$ ($B : 9$, $t : 3$)

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} & e_{14} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} & e_{24} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & e_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

- La décomposition SVD peut servir à décomposer une transformation affine en une séquence contenant un "rescaling" le long d'axes particuliers suivi d'une transformation rigide du résultat.

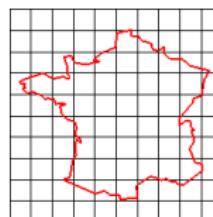
Quel type de transformation T ?

- ↪ transformations linéaires
- ↪ transformations projectives

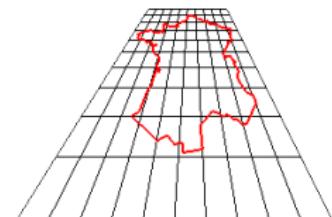
Transformations projectives

- La plus générale des transformations linéaires

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & p \\ e_{21} & e_{22} & q \\ f & g & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$



⇒



- les lignes restent des lignes, mais des lignes qui étaient parallèles peuvent s'intersecter après transformation
- typiquement : cas où des images 3D sont recalées avec des images 2D acquises au moyen d'une caméra (e.g. images vidéo ou images radiologiques)
- différents modèles de caméra (e.g. modèle à sténopé, "pinhole model")

Transformations linéaires : récapitulatif

- Toutes les transformations précédentes sont linéaires :
 - = polynômes de degré 1
 - = peuvent s'écrire sous forme de matrice (et peuvent généralement s'inverser, être facilement composées)

Transformations linéaires : récapitulatif

- Toutes les transformations précédentes sont linéaires :
 - = polynômes de degré 1
 - = peuvent s'écrire sous forme de matrice (et peuvent généralement s'inverser, être facilement composées)
- souvent qualifiées de "globales" :
 - même formule en tout point
 - pas de variation de volume autorisée ou alors variations constantes dans l'espace

Transformations linéaires : récapitulatif

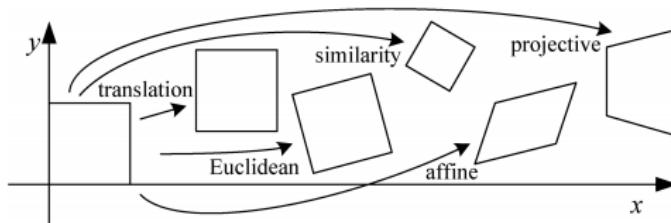


Fig. 2.2 Basic set of 2D planar transformations.

Table 2.1 Hierarchy of 2D coordinate transformations. The 2×3 matrices are extended with a third $[0^T \ 1]$ row to form a full 3×3 matrix for homogeneous coordinate transformations.

Name	Matrix	Number of d.o.f.	Preserves	Icon
Translation	$[I t]_{2 \times 3}$	2	Orientation +...	
Rigid (Euclidean)	$[R t]_{2 \times 3}$	3	Lengths +...	
Similarity	$[sR t]_{2 \times 3}$	4	Angles +...	
Affine	$[A]_{2 \times 3}$	6	Parallelism +...	
Projective	$[\tilde{H}]_{3 \times 3}$	8	Straight lines	

Transformations linéaires : dans quels cas ?

- **Transformations rigides**

- OK pour compenser la **différence de positionnement d'un patient** par rapport aux capteurs en négligeant d'éventuelles déformations des tissus imaginés ou de distorsions géométriques à l'acquisition

Transformations linéaires : dans quels cas ?

- **Transformations rigides**

- OK pour compenser la **différence de positionnement d'un patient** par rapport aux capteurs en négligeant d'éventuelles déformations des tissus imaginés ou de distorsions géométriques à l'acquisition
- **intra-sujet**, plutôt **mono-modalité**

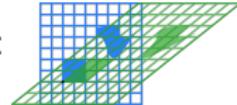
Transformations linéaires : dans quels cas ?

- **Transformations rigides**

- OK pour compenser la **différence de positionnement d'un patient** par rapport aux capteurs en négligeant d'éventuelles déformations des tissus imaginés ou de distorsions géométriques à l'acquisition
- **intra-sujet**, plutôt **mono-modalité**

- **Similitudes et transformations affines**

- utile lorsque la **Résolution spatiale** de l'image source est méconnue. Plus généralement : autorisent des effets de transvection :



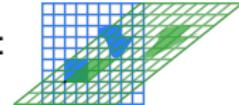
Transformations linéaires : dans quels cas ?

- **Transformations rigides**

- OK pour compenser la **différence de positionnement d'un patient** par rapport aux capteurs en négligeant d'éventuelles déformations des tissus imaginés ou de distorsions géométriques à l'acquisition
- **intra-sujet**, plutôt **mono-modalité**

- **Similitudes et transformations affines**

- utile lorsque la **Résolution spatiale** de l'image source est méconnue. Plus généralement : autorisent des effets de transvection :



- **intra-sujet**, plutôt **multi-modalité**

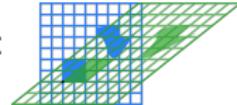
Transformations linéaires : dans quels cas ?

- **Transformations rigides**

- OK pour compenser la **différence de positionnement d'un patient** par rapport aux capteurs en négligeant d'éventuelles déformations des tissus imaginés ou de distorsions géométriques à l'acquisition
- **intra-sujet**, plutôt **mono-modalité**

- **Similitudes et transformations affines**

- utile lorsque la **Résolution spatiale** de l'image source est méconnue. Plus généralement : autorisent des effets de transvection :



- **intra-sujet**, plutôt **multi-modalité**

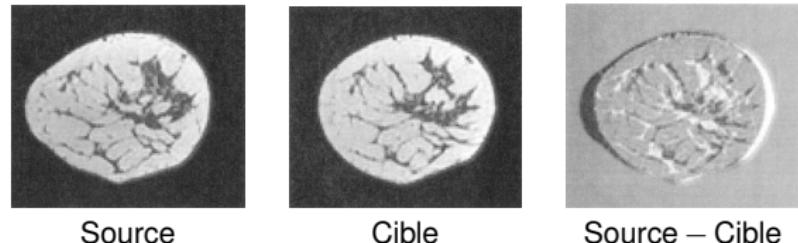
- **transformations projectives (en IM) :**

- plus spécifique, **recalages 3D/2D**, par exemple le recalage de radiographies sur des données Scanner X ou IRM

Quel type de transformation T ?
→ transformations non-linéaires

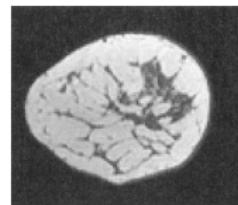
Transformations non linéaires : pourquoi ?

exemple : recalage inter-patient de mammographies en IRM

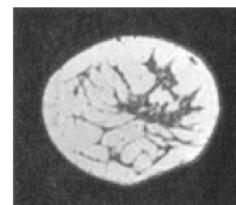


Transformations non linéaires : pourquoi ?

exemple : recalage inter-patient de mammographies en IRM



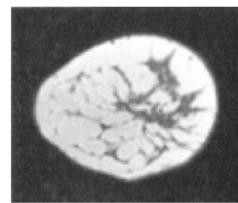
Source



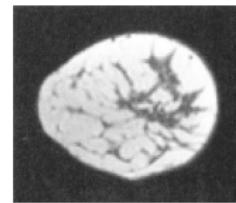
Cible



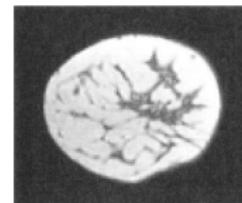
Source – Cible



Source recalée



Rigide



Affine



Non linéaire

Différence



Transformations non linéaires : pourquoi ?

- Transformations linéaires : ne permettent pas de modéliser convenablement les déformations complexes d'un ensemble de tissus, ou les distorsions géométriques inhérentes à certaines modalités d'acquisition

Transformations non linéaires : pourquoi ?

- Transformations linéaires : ne permettent pas de modéliser convenablement les déformations complexes d'un ensemble de tissus, ou les distorsions géométriques inhérentes à certaines modalités d'acquisition
- deux catégories de transformations non-linéaires
 - Transformations locales paramétriques
 - Transformations locales non-paramétriques (transformations denses)

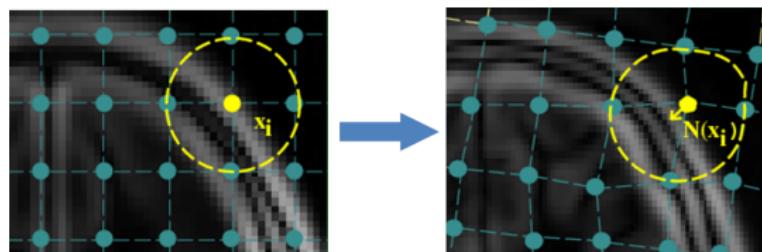
Quel type de transformation T ?

- ↪ transformations non-linéaires
- ↪ transformations locales paramétriques

Transformations locales paramétriques

- $$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + t + \sum_{p=1}^P \mathbf{c}_p G(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p)$$

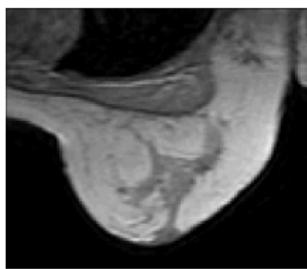
- les x_p sont **des points de contrôles**
- G : produit tensoriel de fonctions B -splines ou des fonctions à base radiale telle que la fonction "plaque mince" (thin-plate)
- Principe :
 - Nombre de degrés de liberté contrôlable
 - Transformation définie explicitement sur des points de contrôle
 - Interpolation entre ces points de contrôle



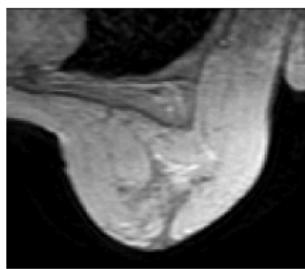
Transformations locales paramétriques

choix des points de contrôle

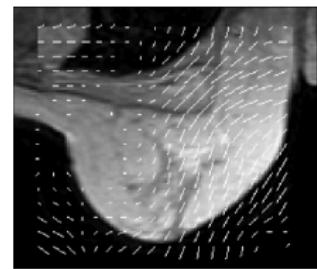
- 1999, "A non-rigid registration algorithm for dynamic breast MR images" (Hayton et al.) : points de contrôle régulièrement espacés pour évaluer des déformations B-splines



pré-contraste



post-contraste



déplacement estimé

- 1998, "Evaluation of Control Point Selection in Automatic Mutual Information Driven,3D Warping" (Meyer et al.) : considèrent les points de contrôle comme des paramètres additionnels de la mesure de similarité. Ils les reposent itérativement après les avoir initialisés à la main

Quel type de transformation T ?

- ↪ transformations non-linéaires
 - ↪ transformations locales non paramétriques

Transformations locales non paramétriques, (transformations denses)

- principe : un vecteur déplacement par pixel/voxel $\rightarrow \mathbf{x}' = T(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + u(\mathbf{x})$

Transformations locales non paramétriques, (transformations denses)

- principe : un vecteur déplacement par pixel/voxel $\rightarrow \mathbf{x}' = T(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + u(\mathbf{x})$
- nombre de paramètres ?

Transformations locales non paramétriques, (transformations denses)

- principe : un vecteur déplacement par pixel/voxel $\rightarrow \mathbf{x}' = T(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x})$
- nombre de paramètres ? $3N$ où N est le nombre de pixels/voxels

Transformations locales non paramétriques, (transformations denses)

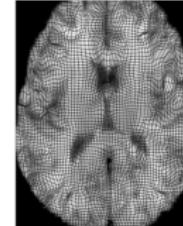
- principe : un vecteur déplacement par pixel/voxel $\rightarrow \mathbf{x}' = T(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x})$
- nombre de paramètres ? $3N$ où N est le nombre de pixels/voxels
- transformation quelconque ? \rightarrow on a déjà vu que ce n'était pas satisfaisant

Transformations locales non paramétriques, (transformations denses)

- principe : un vecteur déplacement par pixel/voxel $\rightarrow \mathbf{x}' = T(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x})$
- nombre de paramètres ? $3N$ où N est le nombre de pixels/voxels
- transformation quelconque ? \rightarrow on a déjà vu que ce n'était pas satisfaisant
- Important d'assurer une cohérence à la transformation

Transformations locales non paramétriques, (transformations denses)

- principe : un vecteur déplacement par pixel/voxel $\rightarrow \mathbf{x}' = T(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x})$
- nombre de paramètres ? $3N$ où N est le nombre de pixels/voxels
- transformation quelconque ? \rightarrow on a déjà vu que ce n'était pas satisfaisant
- Important d'assurer une cohérence à la transformation
 - Inversibilité (difféomorphisme)
 - Transformation lisse (régularisation)



Transformations locales non paramétriques

- Comment régulariser ? comme en restauration d'images (cf MATI-EDP) : la théorie de l'approximation de Tikhonov

Transformations locales non paramétriques

- Comment régulariser ? comme en restauration d'images (cf MATI-EDP) : la théorie de l'approximation de Tikhonov
- on ajoute à la mesure de similarité un terme indépendant des images dont le rôle est de pénaliser les transformations trop irrégulières

Transformations locales non paramétriques

- Comment régulariser ? comme en restauration d'images (cf MATI-EDP) : la théorie de l'approximation de Tikhonov
- on ajoute à la mesure de similarité un terme indépendant des images dont le rôle est de pénaliser les transformations trop irrégulières
- On suppose qu'on a choisi un critère de similarité, Simil (à minimiser).
- l'énergie à minimiser fait maintenant intervenir deux termes :

$$\hat{T} = \arg \min_T [\text{Simil}(T) + \lambda \text{Regul}(T)]$$

- $\lambda > 0$ contrôle l'influence relative des 2 termes d'énergie
- l'énergie intrinsèque $\text{Regul}(T)$ est souvent appelée "stabilisateur"

Transformations locales non paramétriques

$$\text{Simil}(\text{Image 1}, \text{Image 2}) = \text{:(sad face)}$$

$$\text{Simil}(\text{Image 1}, \text{Image 2}) = \text{:(smiley face)}$$

$$\text{Regul}(\text{Image}) = \text{:(sad face)}$$

$$\text{Regul}(\text{Image}) = \text{:(smiley face)}$$

Transformations locales non paramétriques

Lien avec énergies vues l'an dernier

- Restauration d'images

$$\arg \min_u \underbrace{\int_{\Omega} (f(x) - \mathcal{R} u(x))^2 d\Omega}_{\text{terme de fidélité, attache aux données}} + \lambda \underbrace{\int_{\Omega} \|\nabla u(x)\|^2 d\Omega}_{\text{regularisation}}$$

- Segmentation par contours actifs géodésiques (avec méthode des Level Set par exemple)

$$\arg \min_{\mathcal{C}} = \int_0^1 |\mathcal{C}'(p)|^2 dp + \beta \int_0^1 g_{\mathcal{I}}(\mathcal{C}) dp$$

- Flot optique

$$\arg \min_{\sigma} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \langle \nabla u, \sigma \rangle \right)^2 d\Omega + \lambda \left(\int_{\Omega} \|\nabla \sigma_1\|^2 d\Omega + \int_{\Omega} \|\nabla \sigma_2\|^2 d\Omega \right)$$

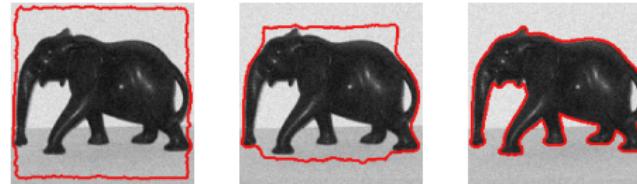
Transformations locales non paramétriques

Lien avec énergies vues l'an dernier

- Restauration d'images



- Segmentation par contours actifs géodésiques



- Flot optique



Transformations locales non paramétriques

Choix du stabilisateur $\text{Regul}(T)$

- Régularisation élastique : transformation T est lisse

$$\text{Regul}(T) = \|\nabla T_x\|^2 + \|\nabla T_y\|^2 + \|\nabla T_z\|^2$$

Transformations locales non paramétriques

Choix du stabilisateur $\text{Regul}(T)$

- Régularisation élastique : transformation T est lisse

$$\text{Regul}(T) = \|\nabla T_x\|^2 + \|\nabla T_y\|^2 + \|\nabla T_z\|^2$$

- Régularisation fluide :

- On part d'une transformation initiale T_0
- à l'étape i on cherche la modification de T_i qui améliore le recalage :

$$\delta T = \arg \min_{\delta T} S(\delta T) + \lambda \text{Regul}(\delta T)$$

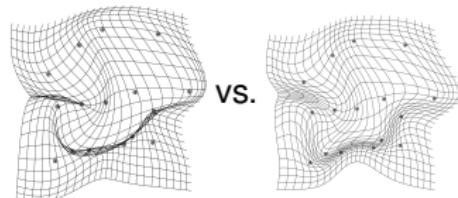
- $T_{i+1} = \delta T \circ T_i$
- et on peut donc prendre : $\text{Regul}(\delta T) = \|\nabla \delta T_x\|^2 + \|\nabla \delta T_y\|^2 + \|\nabla \delta T_z\|^2$

Transformations locales non paramétriques

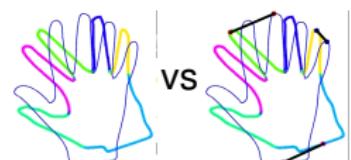
Autres types de contraintes

- Inversibilité

- Imposer le calcul d'un difféomorphisme

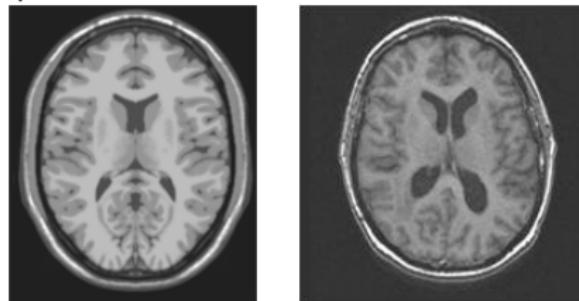


- Limiter l'amplitude des déplacements
- Symétrie : s'assurer que l'algorithme donne les mêmes résultats si "I est recalé sur J" ou "J est recalé sur I"
 - Ajout d'un terme spécifique à T^{-1}
- Prise en compte de points d'intérêt dans les images
 - Lignes sulcales (sillons), amers connus, ...

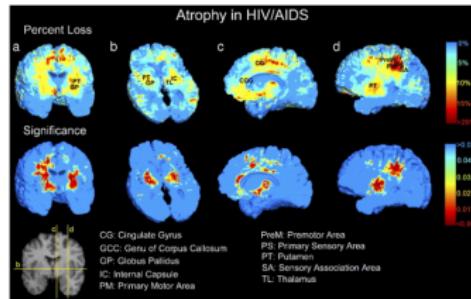


Transformations non-linéaires : récapitulatif

- Les transformations non-linéaires vont être utiles pour :
 - Comparaison inter-patient

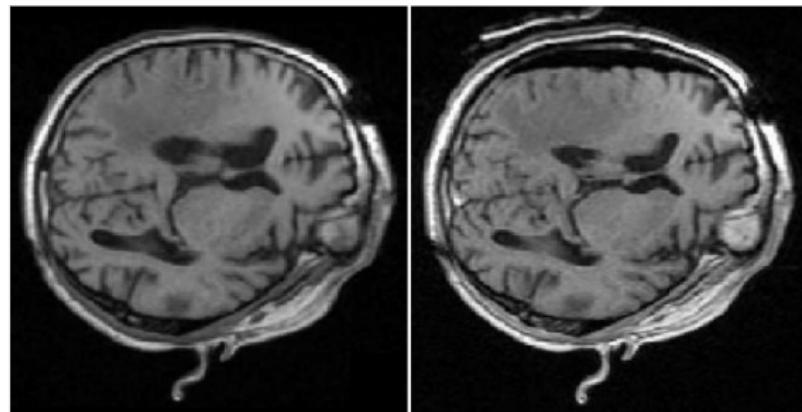


- Comparaison à un atlas



Transformations non-linéaires : récapitulatif

- Les transformations non-linéaires vont être utiles pour (suite) :
 - Recalage temporel d'un objet "élastique"/"déformable"



Preoperative MRI

Intraoperative MRI

Olivier Clatz, Hervé Delingette, Ion-Florin Talos, Alexandra J. Golby, Ron Kikinis, Ferenc A. Jolesz, Nicholas Ayache, and Simon K. Warfield. Robust Non-Rigid Registration to Capture Brain Shift from Intra-Operative MRI. IEEE Transactions on Medical Imaging, 24(11):1417-1427, Nov. 2005.

- Suivi longitudinal : sclérose en plaque, tumeur, ...