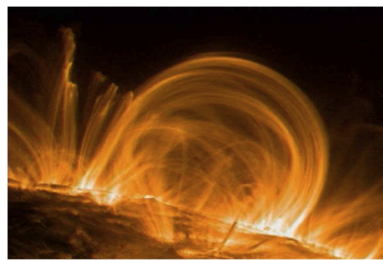
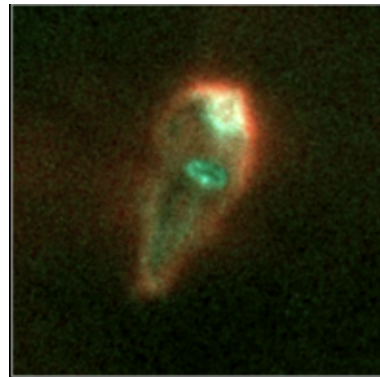
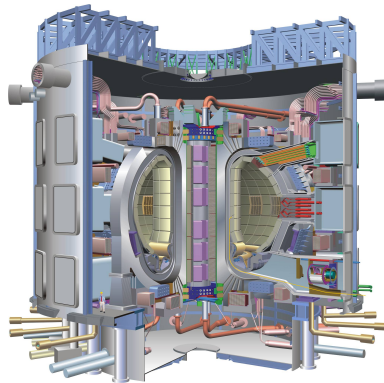


Introduction aux plasmas magnétisés

Magneto-hydrodynamique

Jonathan Ferreira



IPAG- Institut de Planétologie et d'Astrophysique de Grenoble
[http ://www-laog.obs.ujf-grenoble.fr/~ferreira](http://www-laog.obs.ujf-grenoble.fr/~ferreira)

Table des matières

1	Hydrodynamique	1
1.1	Concepts et équations de l'hydrodynamique	1
1.1.1	Conditions de validité	1
1.1.2	Equations dynamiques	2
1.1.3	Equation d'état	3
1.1.4	Equation d'énergie	3
1.2	Fluides parfaits	4
1.2.1	Ecoulements potentiels	5
1.2.2	Théorèmes de Bernoulli	5
1.2.3	Paradoxe de d'Alembert et notion de couche limite	5
1.3	Dynamique de la vorticité	6
1.3.1	Définition et propriétés	6
1.3.2	Théorème de Lagrange	7
1.3.3	Théorème de Kelvin	9
1.4	Ondes sonores et chocs	10
1.4.1	Ondes de faible amplitude	10
1.4.2	Ondes d'amplitude quelconque	11
1.4.3	Chocs hydrodynamiques	12
1.5	Systèmes auto-gravitants	16
1.5.1	Equation de Poisson	16
1.5.2	Le théorème du Viriel	18
1.5.3	Effondrement gravitationnel	20
1.5.4	Un calcul d'instabilité : le critère de Jeans	21
2	Magnetohydrodynamique	23
2.1	Concepts et équations de la MHD	23
2.1.1	Conditions de validité	23
2.1.2	Equations de la matière	28
2.1.3	Equation d'induction du champ magnétique	29
2.1.4	Equation d'énergie	31
2.1.5	Bilan et retour sur les conditions de validité	32
2.2	Effets magnétiques	34
2.2.1	Les deux régimes de la MHD	34
2.2.2	La force magnétique	36
2.2.3	Notion d'hélicité magnétique	37
2.2.4	Cas particuliers importants	38
2.3	Ondes MHD	40
2.3.1	Ondes d'Alfvén	40

2.3.2	Ondes magnéto-soniques	41
-------	----------------------------------	----

Chapitre 1

Hydrodynamique

1.1 Concepts et équations de l'hydrodynamique

1.1.1 Conditions de validité

L'hydrodynamique (HD ci après), appelée également mécanique ou dynamique des fluides, décrit le comportement d'un milieu continu et déformable. Ces deux propriétés proviennent du fait que le milieu est composé d'un grand nombre de particules massives (pas nécessairement identiques) mais dont on suit l'évolution sur des échelles spatiales (donc temporelles) telles que le mouvement individuel de chacune d'entre elles n'est pas pris en compte. Le cours de mécanique des milieux continus ayant été suivi en L3, je ne donne ici que quelques rappels de l'HD.

On considère un nombre N de particules identiques de masse m situées dans un volume donné V et l'on peut définir alors divers champs pour un fluide :

- la densité numérique $n(\vec{r}, t) = N/V$, définissant une taille caractéristique $d = n^{-1/3}$ qui est la distance moyenne entre chaque particule ; la densité de masse est $\rho = mn$.
- la vitesse locale $\vec{u}(\vec{r}, t)$ évaluée au point $M(\vec{r}, t)$;
- la pression $P(\rho, T)$;
- la température $T(\vec{r}, t)$.

On peut du coup définir des échelles hydrodynamiques, spatiale l et temporelle τ , associées aux gradients des grandeurs définies ci-dessus. Les conditions d'application de l'HD exigent alors que ces échelles vérifient les orderings suivants :

$$L \gg l \gg d \quad (1.1)$$

$$\tau \gg \tau_{eq} \quad (1.2)$$

où L est une taille caractéristique macroscopique du milieu étudié (ex : largeur d'une tuyère, rayon d'une étoile) et τ_{eq} est le temps de relaxation vers l'équilibre thermodynamique local (ETL) du fluide. Lorsqu'un tel équilibre est atteint, il y a très peu d'homogénéités dans l'espace des vitesses et notre ensemble de particules suit une distribution de Boltzmann (maxwellienne). Cette homogénéisation dans l'espace des vitesses requiert un transfert d'impulsion efficace entre les particules, souvent effectué via des collisions Coulombiennes. Ainsi, ce n'est qu'en se plaçant à des échelles temporelles longues devant ce temps, qu'on assure la validité d'une description fluide. La condition $L \gg l$ est nécessaire si l'on souhaite pouvoir utiliser des équations locales pour décrire le milieu. Enfin, $l \gg d$ est une évidence : on ramène ainsi le volume V à un point M , justifiant

l'approche "milieu continu"¹. Dans ces conditions, un fluide est décrit par 4 champs (ρ, \vec{u}, P, T) et il faut donc 4 équations maîtresses.

1.1.2 Equations dynamiques

Conservation de la masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \rho \vec{u} = 0 \quad (1.3)$$

Cette équation fournit ρ connaissant \vec{u} . L'hypothèse de conservation exclut de fait les réactions chimiques et nucléaires. Lorsqu'il est nécessaire de les inclure, des termes de création et de destruction doivent être ajoutés dans le membre de droite. Il existe des écoulements pour lesquels il est légitime (on verra plus tard dans quelles conditions) de supposer $\rho = \rho_o$ constant. La conservation de la masse implique alors

$$\text{div } \vec{u} = 0 \quad (1.4)$$

Des fluides incompressibles sont donc à divergence nulle : aucune modification de volume n'est permise.

Conservation de l'impulsion

$$\rho \frac{d\vec{u}}{dt} = -\rho \vec{\nabla} \Phi_G + \text{div } \mathbf{\Pi} \quad (1.5)$$

où

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \quad (1.6)$$

est la dérivée lagrangienne, et $\Pi_{ij} = -P\delta_{ij} + T_{ij}$ est le tenseur des contraintes, dont le deuxième terme est le tenseur des contraintes visqueuses

$$T_{ij} = \rho \nu_v \left(\partial_j u_i + \partial_i u_j - \frac{2}{3} \text{div } \vec{u} \delta_{ij} \right) + \zeta \text{div } \vec{u} \delta_{ij} \quad (1.7)$$

valable pour un fluide dit newtonien (loi de Hooke). L'existence du tenseur $\mathbf{\Pi}$ est inhérente à l'approche fluide : on ne regarde pas ce qui se passe en dessous de l'échelle $l.p.m$, mais l'existence de collisions sur ces échelles spatiales non résolues se traduit par une densité de force avec deux effets majeurs : une pression isotrope P et une viscosité cinématique ν_v ($\eta_v = \rho \nu_v$ est la viscosité dynamique)².

Cette équation, dite équation de Navier-Stokes, fournit \vec{u} connaissant ρ , le champ de gravitation local Φ_G et la pression P . La viscosité ν_v est un coefficient de transport qui dépend de chaque fluide considéré et doit être donné. En régime incompressible, cette équation devient

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \right) \vec{u} = -\nabla P - \rho \vec{\nabla} \Phi_G + \rho \nu_v \Delta \vec{u} \quad (1.8)$$

¹Il faut noter qu'en général, on a aussi $l \gg \lambda_{lpm}$ où λ_{lpm} est le libre parcours moyen collisionnel d'une particule. Mais le critère sur le temps est plus rigoureux.

²La seconde viscosité ζ n'existe que dans un gaz non idéal qui possède des degrés de liberté internes excités lors d'une variation de volume. Elle sera systématiquement supposée nulle dans ce cours.

1.1.3 Equation d'état

Elle découle d'une hypothèse simplificatrice sur la nature des interactions collisionnelles entre les particules. On suppose généralement que les collisions sont élastiques et on obtient (théorie cinétique) la relation des gaz parfaits

$$P = nk_B T \quad (1.9)$$

où k_B est la constante de Boltzmann. Il est souvent pratique de l'écrire $P = \rho k_B T / \mu m_H$ où μ est appelé le poids moléculaire moyen et m_H est la masse d'un atome d'Hydrogène.

1.1.4 Equation d'énergie

C'est la dernière équation, celle qui fournit la température T en fonction des autres champs. C'est la plus complexe du fait des mécanismes de chauffage et de refroidissement parfois mal compris ou tout simplement non locaux. Il est donc d'usage, dans un premier temps, de calculer la dynamique en faisant une approximation jugée (ou espérée) raisonnable sur la température :

(a) Approximation isotherme

On suppose T constant dans tout le milieu.

(b) Approximation barotropique

On suppose $P(\rho)$. En pratique l'équation d'état perd tout son intérêt puisque la dynamique est contrôlée uniquement par le gradient de densité. Cette approximation est courante dans les calculs atmosphériques. Un cas particulier de barotrope est lorsque le milieu suit une évolution adiabatique, c'est à dire sans échange de chaleur. On obtient dans ce cas (cf plus bas)

$$P = K \rho^\gamma \quad (1.10)$$

où $\gamma = C_p/C_v$ est le rapport des capacités calorifiques appelé également indice adiabatique et où K est une constante. Il est également d'usage en astrophysique d'introduire une description "polytropique" $P = K \rho^\Gamma$ où $1 \leq \Gamma \leq \gamma$ est un indice polytropique pouvant varier dans le milieu.

(c) Cas général

Il y a en gros deux méthodes pour obtenir cette équation. La première consiste à partir de l'équation de Boltzmann et calculer le moment d'ordre 2. La seconde, suivie ici, part du premier principe de la thermo. Pour un gaz parfait, il convient d'introduire les grandeurs thermodynamiques suivantes : $U = P/(\gamma - 1)$ densité d'énergie interne (J/m^3) et enthalpie par unité de masse $H = (P + U)/\rho = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P}{\rho}$. Le premier principe, $d(nU) = dQ - PdV$, appliqué à un volume $V = 1/n$ donne alors

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \text{div} U \vec{u} + P \text{div} \vec{u} = q \quad (1.11)$$

où le second terme décrit le transport de l'énergie interne par le fluide (advection), le troisième le travail des forces de pression et q est une densité de puissance (W/m^3) liée au flux de chaleur. Pour des processus réversibles, $dQ = TdS$ et on a donc $q = nT \frac{dS}{dt}$, où S est l'entropie locale.

On peut écrire encore cette équation sous la forme

$$\frac{d}{dt} \frac{P}{\rho^\gamma} = (\gamma - 1) \frac{q}{P} \quad (1.12)$$

On montre ainsi que pour $q = 0$ (cas adiabatique : aucun échange de chaleur entre deux éléments de fluide), on obtient $P = K\rho^\gamma$, avec K constant le long de l'écoulement en régime stationnaire ($\vec{u} \cdot \nabla K = 0$).

L'expression du terme q dépend de tous les processus microphysiques en jeu (collisions, absorption et émission de photons) et peut être localement un refroidissement comme un chauffage. Obtenir son expression correcte est donc parfois d'une grande complexité. Une façon un peu pédestre de l'obtenir consiste à exiger la conservation locale de l'énergie totale U_{tot} . On celle-ci comme la somme des densités d'énergie cinétique, potentielle et interne, $U_{tot} = \rho u^2/2 + \rho\Phi_G + U$. La conservation s'écrit alors

$$\frac{\partial U_{tot}}{\partial t} + \text{div } \vec{F} = 0 \quad (1.13)$$

où \vec{F} est la somme de tous les flux d'énergie. A l'aide de la conservation de la masse (on suppose ici que Φ_G est indépendant du temps), de l'impulsion et l'équation sur l'énergie interne on obtient par identification

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \rho \vec{u} \left(\frac{u^2}{2} + H + \Phi_G \right) - \vec{u} \cdot \mathbf{T} \\ q &= (\mathbf{T} \cdot \nabla) \vec{u} \end{aligned} \quad (1.14)$$

Les flux d'énergie mis en jeu sont ainsi de 2 types, advection et viscosité (collisions), tandis que seul cette dernière donne lieu à une dissipation.

Deux choses ont cependant été malencontreusement oubliées dans cette approche simpliste. La première est que l'existence de collisions se traduit également par une diffusion de chaleur. Il faut donc rajouter dans \vec{F} le terme de conduction thermique (loi de Fourier). La seconde est qu'un fluide qui chauffe (en particulier par dissipation visqueuse) a tendance à se refroidir en émettant un rayonnement si nécessaire. Il faut donc inclure aussi l'interaction matière rayonnement ou, à défaut d'un traitement complet, un terme de pertes par rayonnement.

Exercice : écoulement de Poiseuille

On étudie l'écoulement stationnaire $\vec{u} = u(z)\vec{e}_x$ d'un fluide incompressible, de viscosité cinématique ν constante dans une tuyère de section rectangulaire (hauteur $2L$ et largeur $R \gg 2L$). Ce fluide est mis en mouvement selon l'axe Ox par un gradient de pression $P' = -\partial P/\partial x > 0$ supposé indépendant de z . On néglige toute dépendance selon y ainsi que la gravité. Ecrire l'équation différentielle satisfaite par $u(z)$, la résoudre avec les bonnes conditions aux limites et en faire le graphe.

1.2 Fluides parfaits

Les équations de l'HD sont des équations aux dérivées partielles non-linéaires et donc très difficiles à résoudre. La démarche systématique consiste à tenter de simplifier le plus possible un problème donné tout en conservant bien sûr une pertinence. La présence de viscosité met en jeu des dérivées spatiales d'ordre 2, c'est donc le premier terme à éliminer, si possible. Un fluide est dit parfait si l'on peut négliger l'effet de la viscosité. L'équation de Navier-Stokes pour $\nu_v = 0$ se ramène à celle d'Euler pour laquelle il existe quelques approximations usuelles bien utiles.

1.2.1 Ecoulements potentiels

Le terme d'advection dans l'impulsion s'écrit en toute généralité

$$(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = (\text{rot} \vec{u}) \times \vec{u} + \nabla \frac{u^2}{2} \quad (1.15)$$

Il est alors judicieux de poser

$$\vec{\omega} = \text{rot} \vec{u} \quad (1.16)$$

fonction secondaire car définie à partir de \vec{u} mais importante et appelée vortacité. Pour un fluide irrotationnel où $\vec{\omega} = 0$, alors il existe une fonction courant $\Psi(\vec{r}, t)$ telle que

$$\vec{u} = -\nabla \Psi \quad (1.17)$$

Cette propriété est très intéressante car elle permet par exemple de calculer \vec{u} en spécifiant un simple champ scalaire. Noter que $\vec{\omega} = 0$ est souvent vérifié en présence de symétries (écoulements uni et bi-dimensionnels). L'évolution temporelle de la fonction courant est donnée par Euler

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{u^2}{2} + H + \Phi_G \quad (1.18)$$

où l'on a utilisé (pour simplifier) $\nabla H = \frac{\nabla P}{\rho}$, c'est à dire le cas isentropique.

1.2.2 Théorèmes de Bernoulli

En régime stationnaire, un fluide potentiel (irrotationnel) vérifie $\partial_t \Psi = 0$ et donc

$$B = \frac{u^2}{2} + H + \Phi_G \quad (1.19)$$

est une constante dans tout le fluide. Cet invariant, dit invariant de Bernoulli, est l'énergie par unité de masse transportée par le fluide.

En régime stationnaire, un fluide compressible mais possédant de la vortacité vérifie

$$\vec{u} \cdot \nabla \left(\frac{u^2}{2} + H + \Phi_G \right) \quad (1.20)$$

dans le cas isentropique. Et donc, B est une constante mais cette fois seulement le long de lignes d'écoulement.

L'utilisation de la conservation de B pour un fluide parfait est un outil puissant pour les écoulements stationnaires.

1.2.3 Paradoxe de d'Alembert et notion de couche limite

Considérons un fluide parfait incompressible de densité ρ_o et irrotationnel dans lequel se déplace horizontalement un solide animé d'une vitesse U_o . En régime stationnaire, l'invariant de Bernoulli pour ce fluide vu dans le référentiel du solide s'écrit

$$B = \frac{U_o^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{P}{\rho_o} \quad (1.21)$$

et est constant dans tout le volume (la pesanteur, qui est aussi une constante, est incluse dans B). En conséquence de quoi, la pression vaut $P = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \rho_o \left(B - \frac{U_o^2}{2} \right)$ et est aussi la même partout.

L'action du fluide sur le solide se traduit alors par une force dont la résultante $\vec{F} = \int \int d^2\vec{F} = - \int \int P d^2\vec{S} = 0$ est nulle. Il n'y aurait donc pas de résistance à l'avancement du solide dans le fluide. Ceci est clairement démenti par l'expérience et constitue le paradoxe de d'Alembert. L'issue provient de la prise en compte de la viscosité qui crée un sillage à l'arrière du solide et freine celui-ci³.

Le terme de viscosité devient pertinent lorsque le transport d'impulsion par collisions devient comparable à celui dû à l'écoulement lui-même. Cela se mesure par un nombre sans dimension, appelé nombre de Reynolds

$$\mathcal{R} \sim \frac{|(\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u}|}{|\nu_v \Delta \vec{u}|} \sim \frac{U_o^2/l}{\nu_v U_o/l^2} \sim \frac{lU_o}{\nu_v} \quad (1.22)$$

où l est une échelle caractéristique. Lorsqu'on considère la dynamique sur une échelle l telle que $\mathcal{R} \gg 1$, il est parfaitement légitime de négliger l'effet de la viscosité et on a donc affaire à un fluide parfait. Mais il existe une échelle δ telle que $\mathcal{R} \sim \frac{\delta U_o}{\nu_v} \sim 1$. Cette échelle spatiale définit l'épaisseur de la couche limite qui entoure l'objet et dans laquelle on ne peut plus négliger le rôle de la viscosité. C'est grâce à la viscosité (termes de dérivées secondes) que l'ajustement entre $u = U_o$ dans le fluide et $u = 0$ à la surface du solide pourra se faire.

1.3 Dynamique de la vorticité

1.3.1 Définition et propriétés

La vorticité d'un écoulement est par définition $\vec{\omega} = \text{rot } \vec{u}$. On appelle aussi parfois ce vecteur le vecteur tourbillon. Il est clair que, du fait de sa définition, les lignes de vorticité sont des courbes fermées

$$\text{div } \vec{\omega} = 0 \quad (1.23)$$

Exercice : Tornade

Une tornade de rayon a peut être grossièrement modélisée par un écoulement incompressible dont le vecteur tourbillon est donné par (coord cylindriques)

$$\begin{aligned} \vec{\omega} &= \Omega_o \vec{k}, r < a \\ &= 0, r > a \end{aligned}$$

Comment calculer \vec{u} ? Le cas particulier des écoulements incompressibles est intéressant car une analogie entre le champ de vitesse \vec{u} et le champ magnétique \vec{B} est possible

$$\text{div } \vec{u} = 0 \quad \text{rot } \vec{u} = \vec{\omega} \quad (1.24)$$

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad \text{rot } \vec{B} = \mu_o \vec{J} \quad (1.25)$$

Calculer \vec{u} à partir de $\vec{\omega}$ revient à calculer \vec{B} à partir de la densité de courant \vec{J} en régime magnétostatique. On peut donc utiliser les mêmes méthodes : usage des propriétés de symétrie et loi de Biot et Savart. Dans le cas d'un fluide, celle-ci s'écrit donc par analogie

$$\vec{u}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \int \int \frac{\vec{\omega} \times \vec{r}}{r^3} d^3\mathcal{V} \quad (1.26)$$

³L'absence de résistance au mouvement provient de la réversibilité de l'équation d'Euler. Seule la viscosité produit de l'irréversibilité.

Pour le cas simple de la tornade ci-dessus, on va plutôt utiliser le théorème d'Ampère

$$\oint \vec{u} \cdot d\vec{l} = \int \int \vec{\omega} \cdot d\vec{S} \quad (1.27)$$

Sachant que ω est invariant selon θ et z , on en déduit $\vec{u}(r)$. Par ailleurs, tout plan passant par l'axe Oz est plan de symétrie pour $\vec{\omega}$, donc \vec{u} lui est perpendiculaire. On a donc $\vec{u} = u(r)\vec{e}_\theta$. On choisit donc comme contour un cercle centré sur l'axe et de rayon r et le théorème d'Ampère fournit le champ de vitesse suivant

$$\begin{aligned} u2\pi r &= 2\pi\Omega_o r^2, r < a \\ &= 2\pi\Omega_o a^2, r > a \end{aligned}$$

Un vortex est un écoulement limite obtenu lorsque $a \rightarrow 0$ mais $2\pi a^2\Omega_o$ reste égal à une constante C (idem fil infini parcouru par un courant I). Ainsi, on a pour tout rayon non nul $u(r) = \frac{C}{2\pi r}$, un écoulement irrotationnel ($\vec{\omega} = 0$). Comme $\vec{u} = -\nabla\Psi$ on en déduit une fonction courant $\Psi = -\frac{C\theta}{2\pi}$. C'est un cas intéressant dont il convient de se rappeler.

Remarque : Il est curieux de constater que $\Psi(\theta = 0) \neq \Psi(\theta = 2\pi)$ alors que nous venons de revenir au point initial. Cet apparent paradoxe s'explique par le fait que le domaine où $\vec{\omega} = 0$ est en fait percé par l'axe Oz où se trouve le vortex. Ce "trou" est une singularité topologique qui rend le domaine multiconnexe : il n'existe alors plus de solution unique aux équations du champ de vitesse (complétées par les conditions aux limites).

La notion de tourbillon est un peu subtile car elle est intrinsèquement collective : elle met en jeu une corrélation entre les mouvements de particules fluides voisines. En voici deux exemples où l'on place une allumette (segment solide de longueur AB) dans un écoulement donné et observons son mouvement.

Écoulement stratifié

Un écoulement peut être tourbillonnaire avec des lignes de champ (trajectoires) rectilignes. Par exemple $\vec{u} = \alpha y \vec{e}_x$ avec $\alpha > 0$. On en déduit $\vec{r} = \alpha y t \vec{e}_x$ et une vorticité $\vec{\omega} = -\alpha \vec{e}_z$. Comment interpréter cela ? Prenons une allumette mise selon \vec{e}_y initialement en $x = 0$ et A en $y = a$ et B en $y = 2a$. Au cours d'un laps de temps dt , ces deux points auront respectivement bougé de $d\vec{A} = \alpha a dt \vec{e}_x$ et $d\vec{B} = 2\alpha a dt \vec{e}_x$: l'allumette est donc en train de tourner selon le sens des aiguilles d'une montre.

Voisinage d'un vortex

Mettons maintenant cette allumette dans le champ d'un vortex $u(r) = \frac{C}{r} \vec{e}_\theta$ (facteur 2π absorbé dans C). Les lignes de courant sont des cercles d'axe Oz mais $\vec{\omega} = 0$ partout (sauf en $r = 0$) : il n'y a pas de rotation locale du fluide. Plaçons l'allumette avec A en r_A et B en $r_B > r_A$, orientée initialement selon \vec{e}_y . On a alors $\vec{r} = \frac{Ct}{r} \vec{e}_\theta$, ce qui fournit $d\vec{A} = \frac{Cdt}{r_A} \vec{e}_\theta$ et $d\vec{B} = \frac{Cdt}{r_B} \vec{e}_\theta$: le point B tourne moins que le point A. On peut montrer que le mouvement de l'allumette sera bien une rotation autour de l'axe, mais en conservant sa direction initiale. L'écoulement est bien non tourbillonnaire malgré la présence d'un vortex.

1.3.2 Théorème de Lagrange

Enoncé : Si, à $t = 0$, un fluide parfait barotropique ou incompressible soumis à une densité de force conservative, la vitesse admet un potentiel, alors elle admet un potentiel à un instant ultérieur.

Ce théorème est important car il stipule que dans certaines conditions, un fluide initialement irrotationnel le reste à jamais : il ne peut y avoir de création de vorticité dans un tel fluide. Démonstration.

L'équation de Navier-Stokes s'écrit

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = -\frac{\nabla P}{\rho} - \vec{\nabla} \Phi_G + \frac{\text{div} \mathbf{T}}{\rho} \quad (1.28)$$

En prenant le rotationnel de cette équation et sachant que

$$(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = (\text{rot} \vec{u}) \times \vec{u} + \nabla \frac{u^2}{2} \quad (1.29)$$

$$\text{rot} \nabla f = 0 \quad (1.30)$$

$$\text{div} \text{rot} \vec{A} = 0 \quad (1.31)$$

$$\text{rot} f \vec{A} = f \text{rot} \vec{A} + \nabla f \times \vec{A} \quad (1.32)$$

on obtient

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} = \text{rot} (\vec{u} \times \vec{\omega}) + \frac{\nabla \rho \times \nabla P}{\rho^2} + \text{rot} \frac{\text{div} \mathbf{T}}{\rho} \quad (1.33)$$

Dans un fluide parfait ($\nu_v = 0$), le terme de viscosité disparaît. Le terme $\frac{\nabla \rho \times \nabla P}{\rho^2}$ est effectivement nul dans le cas incompressible ($\nabla \rho = 0$) ou barotropique ($P(\rho)$ donc $\nabla P \parallel \nabla \rho$). On obtient alors l'équation d'évolution de la vorticité

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} = \text{rot} (\vec{u} \times \vec{\omega}) \quad (1.34)$$

qui est linéaire en $\vec{\omega}$. Si, à $t = 0$ la vorticité est nulle, elle le restera toujours (cqfd).

La seule densité de force mise ici a été la gravité, qui s'annule du fait qu'elle dérive d'un potentiel. La gravité ne peut donc pas être à l'origine de tourbillons, observés par exemple dans l'atmosphère. Seule la viscosité et/ou un gradient de pression non parallèle au gradient de densité (instabilité dite baroclinique, moteur des typhons et tornades) peuvent donc engendrer de la vorticité dans un fluide.

Que se passe-t-il si le fluide parfait possède initialement de la vorticité ? La façon dont celle-ci est modifiée par l'écoulement \vec{u} est décrit par l'équation (1.34). Elle se met sous la forme

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = (\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{u} - \vec{\omega} \text{div} \vec{u} \quad (1.35)$$

On voit que le dernier terme disparaît pour un fluide incompressible ($\text{div} \vec{u} = 0$), cas plus simple que l'on va maintenant considérer. Prenons deux points du fluide $M(\vec{r})$ et $M'(\vec{r} + d\vec{r})$ voisins et $M\vec{M}' = d\vec{l}$ un vecteur les reliant. Comment va évoluer ce vecteur sous l'effet du champ de vitesse \vec{u} qui n'est pas le même en M et M' ?

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} d\vec{l} &= \frac{d}{dt} (\vec{r} + d\vec{l} - \vec{r}) = \frac{d}{dt} (\vec{r} + d\vec{l}) - \frac{d\vec{r}}{dt} \\ &= \vec{u}(\vec{r} + d\vec{l}) - \vec{u}(\vec{r}) = \vec{u}(\vec{r}) + d\vec{l} \cdot \nabla \vec{u} - \vec{u}(\vec{r}) \end{aligned}$$

On voit ainsi qu'une équation du type

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{u} \quad (1.36)$$

ne fait que décrire le transport passif (soulis à aucune force) d'un vecteur \vec{A} par un flot \vec{u} . Dans un fluide compressible, on voit que la vorticité diminue dans un fluide en expansion et s'accroît dans un fluide en contraction.

1.3.3 Théorème de Kelvin

Enoncé : Pour un fluide parfait barotrope, le nombre de tubes ou vortex qui traversent une surface donnée est constant quelle que soit la déformation continue subie par cette surface.

Enoncé équivalent : Pour un fluide parfait barotrope, la circulation de vitesse le long d'une courbe fermée ne coupant aucune discontinuité est indépendante du temps.

L'équivalence entre ces deux énoncés est due au théorème de Stokes-Ostrogradsky,

$$C = \oint_{\Gamma} \vec{u} \cdot d\vec{l} = \int \int_{\Sigma} \vec{\omega} \cdot d\vec{S} \quad (1.37)$$

qui ne s'applique que si la surface Σ délimitée par le contour fermé orienté Γ est continue.

La démonstration du théorème nécessite de calculer la dérivée totale de la circulation C par rapport au temps. Or, C dépend explicitement du temps par $\vec{\omega}$ et implicitement par la déformation subie par la surface Σ du fait du transport du contour Γ par l'écoulement. On peut écrire les choses sous la forme :

$$\frac{dC}{dt} = \int \int_{\Sigma} \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} \cdot d\vec{S} + \left(\frac{dC}{dt} \right)_{\Delta\Gamma} \quad (1.38)$$

Le calcul du deuxième terme met en jeu le même raisonnement que celui employé pour le flux coupé en magnétisme. Prenons deux instants t et $t + dt$. A l'instant t , le contour Γ est dans une zone du fluide et définit une surface orientée Σ . A l'instant $t + dt$, le contour a été déformé par l'écoulement et le nouveau contour Γ' définit une nouvelle surface Σ' . Ces deux surfaces forment, avec la surface latérale Σ_l dessinée lors du déplacement, une surface fermée Σ_t . Or, $\text{div } \vec{\omega} = 0$ et donc le flux de $\vec{\omega}$ est nul à travers Σ_t convenablement orientée.

$$\begin{aligned} \int \int_{\Sigma_t} \vec{\omega} \cdot d\vec{S} = 0 &= \int \int_{\Sigma} \vec{\omega} \cdot d\vec{S} + \int \int_{\Sigma'} \vec{\omega} \cdot d\vec{S} + \int \int_{\Sigma_l} \vec{\omega} \cdot d\vec{S} \\ &= C(t) - C(t + dt) + dC_{\Delta\Gamma} \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} dC_{\Delta\Gamma} &= \int \int_{\Sigma_l} \vec{\omega} \cdot d\vec{S} = \int \int_{\Sigma_l} \vec{\omega} \cdot (\vec{u} dt \times d\vec{l}) = dt \oint_{\Gamma} (\vec{\omega} \times \vec{u}) \cdot d\vec{l} \\ \left(\frac{dC}{dt} \right)_{\Delta\Gamma} &= \oint_{\Gamma} (\vec{\omega} \times \vec{u}) \cdot d\vec{l} = \int \int_{\Sigma} \text{rot}(\vec{\omega} \times \vec{u}) \cdot d\vec{S} \end{aligned}$$

la dernière égalité n'étant valable qu'en l'absence de singularités sur Σ . L'évolution temporelle de la circulation est donc donnée par

$$\frac{dC}{dt} = \int \int_{\Sigma} \left(\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \text{rot}(\vec{\omega} \times \vec{u}) \right) \cdot d\vec{S} \quad (1.39)$$

qui est bien nul pour un fluide parfait barotrope (cqfd).

Exercice : Portance, paradoxe de d'Alembert et vorticité

Un cylindre très long de rayon a se déplace en mouvement rectiligne uniforme avec une vitesse $\vec{u} = -U\vec{e}_x$ dans un fluide parfait, irrotationnel et incompressible (densité ρ_o). On suppose que le champ de pesanteur est constant, $\vec{g} = -g\vec{e}_y$. On étudie l'écoulement stationnaire dans le référentiel barycentrique (Gxyz) du cylindre.

1- Etablir l'équation aux dérivées partielles pour la fonction courant Ψ . Montrer que $\Psi = \cos\theta \left(\alpha r + \frac{\beta}{r} \right)$ en est solution en coordonnées cylindriques. Déterminer α et β . En déduire le champ de vitesse \vec{u} à la surface du cylindre.

2- Déterminer la pression en tout point de la surface. En déduire la résultante des forces. Est-ce conforme à l'expérience ? Commenter.

3- On superpose à l'écoulement précédent un vortex d'axe Oz (celui du cylindre) et d'intensité C tel que le champ de vitesse associé soit $\vec{u}_v = (C/2\pi r)\vec{e}_\theta$. Montrer que le nouvel écoulement est aussi solution du problème. Exprimer la résultante des forces exercées par le fluide sur le cylindre. Commenter.

1.4 Ondes sonores et chocs

1.4.1 Ondes de faible amplitude

Considérons le cas simpliste d'un fluide parfait compressible, initialement homogène (densité ρ_o), au repos et en l'absence de gravité. Que se passe-t-il si on introduit une perturbation locale de densité (ou de vitesse) ? On s'attend à ce que celle-ci se communique et donc à assister au développement d'une onde. Pour simplifier les calculs, prenons le cas adiabatique 1D. Les équations sont alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} &= 0 \\ \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) &= - \frac{\partial P}{\partial x} \\ P &= K \rho^\gamma \end{aligned}$$

En remplaçant P par ρ on obtient un système de 2 équations à 2 inconnues (ρ et u). On pose $\rho = \rho_o + \delta\rho$ et $u = \delta u$, puis on linéarise les équations précédentes. On obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta \rho}{\partial t} + \rho_o \frac{\partial \delta u}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial \delta u}{\partial t} = - \frac{1}{\rho_o} \frac{\partial P}{\partial \rho} \frac{\partial \delta \rho}{\partial x} &= - \frac{c_s^2}{\rho_o} \frac{\partial \delta \rho}{\partial x} \end{aligned}$$

Combinant ces deux équations, on obtient $(\partial_t^2 - c_s^2 \partial_x^2) \delta \rho = 0$, qui est bien une équation d'onde, de vitesse de phase

$$c_s = \sqrt{\frac{\partial P}{\partial \rho}} = \sqrt{\gamma \frac{P}{\rho}} \quad (1.40)$$

La pression joue donc le rôle de force de rappel et l'existence d'ondes sonores est alors due à un échange d'énergie entre les deux réservoirs que sont l'énergie interne et l'énergie cinétique. Les solutions de cette équation étant des ondes planes, celles-ci conservent leur amplitude au cours de leur propagation, qui doit être faible ($\delta\rho \ll \rho_o$). La relation de dispersion est très simple

$$\omega^2 = k^2 c_s^2 \quad (1.41)$$

En présence d'autres forces (gravité, rotation) ou dans un milieu inhomogène, les ondes sonores continuent d'exister bien sûr, mais avec des modifications parfois drastiques de la relation de dispersion.

1.4.2 Ondes d'amplitude quelconque

Le calcul est a priori beaucoup plus compliqué mais Bernhard Riemann (1826-1866) a introduit une méthode astucieuse, appelée méthode des caractéristiques.

La vitesse du son étant $c_s = \sqrt{\gamma \frac{P}{\rho}} = \gamma K \rho^{\gamma-1}$, on peut l'exprimer en fonction de la densité du milieu non perturbé, $c_s = c_o \left(\frac{\rho}{\rho_o}\right)^{\gamma-1}$ où c_o est la vitesse du son pour $\rho = \rho_o$. On a alors les 2 équations non linéarisées suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) + \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2}{\gamma-1} \left(\frac{1}{c_s} \frac{\partial c_s}{\partial t} + \frac{u}{c_s} \frac{\partial c_s}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{c_s^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = -\frac{2a}{\gamma-1} \frac{\partial c_s}{\partial x} \end{aligned}$$

qui se ramènent (somme et différence) aux deux équations suivantes

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + c_+ \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (1.42)$$

$$\frac{\partial R}{\partial t} + c_- \frac{\partial R}{\partial x} = 0 \quad (1.43)$$

dans lesquelles on a posé $Q = u + \frac{2c_s}{\gamma-1}$, $R = u - \frac{2c_s}{\gamma-1}$, $c_+ = u + c_s$ et $c_- = u - c_s$. Or, pour toute fonction $A(x, t)$ continue et différentiable, $\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial A}{\partial x}$. On peut donc interpréter les 2 équations précédentes comme les dérivées totales par rapport au temps de deux invariants, Q et R (dits invariants de Riemann) mais évaluées le long de courbes (appelées caractéristiques) telles que

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= c_+ \text{ pour } Q \\ \frac{dx}{dt} &= c_- \text{ pour } R \end{aligned}$$

Connaitre u et c_s (donc ρ) partout dans le plan (x, t) revient à connaître Q et R puisque $u = (Q+R)/2$ et $c_s = (\gamma-1)(Q-R)/4$. Q et R étant des invariants, ils sont déterminés par les conditions initiales ainsi que les conditions aux limites. Pour reconstruire Q et R en tout point, il suffit donc de paver le plan (x, t) des caractéristiques, qui sont ici des droites de pente $\left. \frac{dt}{dx} \right|_+ = \frac{1}{c_+} > 0$ et $\left. \frac{dt}{dx} \right|_- = \frac{1}{c_-} < 0$.

Ainsi, la caractéristique associée à R a $dx < 0$ pour $dt > 0$: elle remonte donc l'axe Ox au cours du temps et provient de l'infini où le milieu n'est pas encore perturbé. En conséquence $R = -2c_o/(\gamma-1)$ (car $u = 0$ et $c_s = c_o$) pour toutes ces caractéristiques. Celles associées à Q ont $dx > 0$ pour $dt > 0$: elles descendent l'axe Ox au cours du temps et proviennent donc du milieu perturbé initialement. La pente est donc d'autant plus forte que c_+ est grand, ce qui se produit lorsque c_s donc la perturbation en densité (ρ) est élevée.

Si, à $t = 0$ on a un profil sinusoïdal en $\rho(x)$ autour de la valeur ρ_o , on va assister au cours du temps à un raidissement de ce profil : les surdensités se propageant plus vite que les zones moins denses. Cela s'aggrave jusqu'à ce que le profil devienne localement bivalué : cela correspond au croisement de deux caractéristiques associées à Q . Une telle situation décrit la formation d'un choc et d'une discontinuité qui lui est associée.

Remarque : En toute rigueur, une discontinuité ne se produit jamais en physique. La raison en est que des termes oubliés dans notre description vont venir à la rescousse et éviter qu'une telle catastrophe ne puisse se produire. Ces termes, inhérents à la description fluide (donc a priori toujours présents) et importants lors de forts gradients... sont ceux liés à la viscosité. La taille réelle d'une discontinuité sera donc (en partie) contrôlée par celle-ci.

Exercices : écoulements stationnaires trans-soniques

Exercice 1 : Tuyère de Gustav de Laval

A la fin du XIXe siècle, les ingénieurs concentrèrent leurs efforts sur le développement des turbines, qui avaient l'avantage de mettre en œuvre un mouvement rotatif, ce qui autorisait la création de machines de très grandes puissances. De plus, par rapport à la machine à vapeur alternative classique, elles présentaient un encombrement réduit. En 1890, l'ingénieur suédois Gustav de Laval développa une tuyère permettant d'augmenter la vitesse de la vapeur entrant dans la turbine. On la connaît de nos jours sous le nom de tuyère de de Laval et elle présente une importance particulière dans le domaine de l'aéronautique. Une tuyère est ainsi un conduit de section conique (fusées de feu d'artifice) ou oblongue (tuyères de missiles et lanceurs), placé à la sortie d'un propulseur et qui sert à transformer en énergie cinétique l'énergie des gaz de combustion.

On considère un écoulement stationnaire unidimensionnel se produisant dans une conduite de section variable $S(x)$.

1- Ecrire les équations maitresses dans le cas adiabatique. Montrer que la forme de la tuyère détermine l'accélération de l'écoulement.

2- On considère maintenant le cas général $P(\rho, T)$ pour un gaz parfait. Montrer qu'il existe une singularité ainsi qu'une condition de régularité. Commenter.

Exercice 2 : Modèle du vent solaire de Parker

Le vent solaire est un flux de plasma constitué essentiellement d'ions (73 % d'hydrogène et 25 % d'hélium) et d'électrons qui sont éjectés de la haute atmosphère du Soleil, environ 1×10^9 kg de matière par seconde. Ce flux varie en vitesse et en température au cours du temps en fonction de l'activité solaire. Pour les étoiles autres que le Soleil, on parle généralement de vent stellaire. La vitesse du vent solaire varie de 400 à 800 km/s, la moyenne étant de 450 km/s. Les écoulements de vent solaire sont dits rapides dans les trous coronaux, généralement situés au niveau des pôles où les lignes de champ magnétique sont ouvertes. A contrario, les écoulements de vent solaire sont dits lents au niveau du plan équatorial. La température initiale de ce vent est celle de la couronne solaire, à savoir $\sim 10^6$ K.

On ne s'intéresse ici qu'au premier modèle proposé par Eugène Parker en 1958 du vent solaire : écoulement stationnaire, isotherme, à géométrie sphérique. Les vitesses observées à la surface solaire étant de l'ordre du km/s, cela signifie qu'un tel écoulement est initialement sub-sonique puis devient supersonique avant d'atteindre la Terre.

1- Montrer qu'un tel écoulement ne peut être incompressible.

2- Ecrire les équations maitresses. A quelle condition obtient-on un écoulement trans-sonique ? Comment peut-elle être réalisée dans la Nature ? Donner l'expression de la vitesse à l'infini.

1.4.3 Chocs hydrodynamiques

Conditions de Rankine-Hugoniot

Plutôt que de tenter de résoudre la structure interne d'un choc (faisable en prenant en compte la viscosité), Pierre-Henri Hugoniot (1851-1887) et William Rankine (1820-1872) ont indépendamment proposé une méthode de résolution. Celle-ci est basée sur des bilans de flux masse, de quantité de mouvement et d'énergie à travers une discontinuité supposée stationnaire.

Un choc étant continuellement alimenté en masse, impulsion et énergie, il est nécessairement amené à se déplacer. L'hypothèse de stationnarité n'a donc de sens que dans le référentiel lié au front du choc (discontinuité) et on suppose donc que celui-ci se déplace à vitesse uniforme u_s .

La forme conservative des équations de l'HD pour un fluide parfait (avec gravité négligée) et

adiabatique (pas de pertes par rayonnement par ex) est la suivante :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{u} = 0 \quad (1.44)$$

$$\frac{\partial \rho \vec{u}}{\partial t} + \operatorname{div} (P \mathbf{I} + \rho \vec{u} \otimes \vec{u}) = 0 \quad (1.45)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho u^2}{2} + \frac{P}{\gamma - 1} \right) + \operatorname{div} \rho \vec{u} \left(\frac{u^2}{2} + H \right) = 0 \quad (1.46)$$

A priori, il suffit de se donner une forme pour la discontinuité et, en régime stationnaire, établir les relations entre les grandeurs en amont (la source de l'écoulement, indice 1) et celles en aval (indice 2). Le calcul sera fait ici pour un choc plan à 1D. Les équations deviennent

$$\partial_x(\rho u) = 0 \quad , \quad \partial_x(P + \rho u^2) = 0 \quad \text{et} \quad \partial_x \rho u \left(\frac{u^2}{2} + H \right) = 0 \quad (1.47)$$

On suppose qu'il n'y a pas de modification de la structure interne des particules constituant le fluide lors de la traversée du choc, de telle sorte que $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$. Il est de plus commode d'introduire le nombre de Mach (de Ernst Mach, 1838-1916) $m = \frac{u_1}{c_{s,1}}$ rapport de la vitesse du fluide sur la vitesse du son (mesurées dans le référentiel du choc). Avec cette approche, m et γ sont deux paramètres libres. Après un peu d'algèbre, on obtient

$$r = \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1 + 2/m^2} \quad (1.48)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = 1 + (\gamma - 1) \frac{m^2}{2} \left(1 - \frac{1}{r^2} \right) \quad (1.49)$$

où r est le rapport de compression post-choc. On voit que pour un choc adiabatique plan fort (c'est à dire $m \gg 1$) on a un rapport de compression au maximum de $(\gamma + 1)/(\gamma - 1) = 4$ pour un fluide composé essentiellement d'atomes. Par contre, il n'y a pas de limite à l'accroissement en température puisque T_2/T_1 croît en m^2 . Cela est évidemment dû à l'hypothèse de choc adiabatique qui devient violée : le choc va rayonner et donc perdre de l'énergie. On peut vérifier que le nombre de Mach post-choc $m_2 = u_2/c_{s,2}$ est plus petit que l'unité. Le fluide opère donc une transition entre un milieu supersonique ($m_1 > 1$) et un milieu subsonique ($m_2 < 1$).

Remarque : On vient de voir qu'un écoulement supersonique peut effectuer une transition au cours d'un choc avec un écoulement subsonique en créant une compression. Vu dans le référentiel fixe, cela correspond à une onde de compression (surdensité $\rho_2 = r\rho_1$) qui se déplace à la vitesse du choc u_s . Une onde de raréfaction ($r < 1$) peut elle produire un choc inverse ? Naivement, les équations étant en principe symétriques, on devrait pouvoir trouver une solution de choc pour $m_1 < 1$ et $m_2 > 1$. Il n'en est rien car ce cas est interdit par le second principe de la thermodynamique (qui rompt la symétrie). La viscosité (négligée dans le traitement de Rankine-Hugoniot) permet de transformer l'énergie d'un mouvement d'ensemble en chaleur alors que l'inverse n'est pas possible. En conséquence, une onde de raréfaction peut effectivement se propager, mais elle ne produira jamais de choc.

Modèle de détonation ("blast wave") de Taylor-Sedov

C'est une illustration historique (explosion de la bombe atomique) et importante (physiquement et mathématiquement) des concepts développés plus haut. On envisage la situation où une grande énergie E est instantanément libérée dans un milieu initialement au repos de densité uniforme ρ_o .

Ce dépôt d'énergie engendre une onde de compression (choc) qui se propage dans le milieu ambiant à une vitesse u_s supersonique. De ce fait, $\rho_o u_s^2 \gg P_1 = \rho_o c_s^2$ et la pression du milieu

n'offre alors aucune résistance. Une bulle de gaz de rayon $r_s = \int u_s dt$ est ainsi créée : c'est cette bulle que l'on observe sur les images d'explosions atomiques mais aussi en astrophysique comme les restes de supernovae (explosions d'étoiles). Notre objectif ici est de déterminer la structure interne (profils de densité et vitesse) de cette bulle au cours du temps en supposant que l'énergie E est conservée (cas adiabatique, correspondant à une phase de l'expansion de cette bulle). Cette hypothèse est importante et n'est réaliste que dans les phases initiales de l'explosion, lorsque le milieu est encore trop dense pour perdre efficacement de l'énergie par rayonnement.

1 : Conditions de R-H

La première étape du raisonnement consiste à relier les conditions physiques de part et d'autre du choc (intérieur et extérieur de la bulle). On se place pour cela dans le référentiel lié au choc (vitesses notées ci-dessous avec des primes) et on fera l'approximation que celui-ci est localement plan. On pourra donc utiliser les conditions de saut de Rankine-Hugoniot déterminées plus haut. Dans le référentiel lié au choc, le milieu supersonique (en amont, label "1") donc moins dense correspond en fait au milieu extérieur à la bulle de densité ρ_o tandis que le milieu choqué, plus dense et subsonique correspond au milieu interne (aval, label "2"). On a ainsi $u_2 = u'_2 + u_s$ et $u_1 = u'_1 + u_s = 0$ car le milieu ambiant est au repos dans le référentiel fixe. On obtient

$$\begin{aligned}\rho_2 &= \rho_1 \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \quad \text{avec} \quad \rho_1 = \rho_o \\ u'_2 &= u'_1 \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \quad \text{d'où} \quad u_2 = \frac{2}{\gamma + 1} u_s \\ P_2 &= \rho_2 \frac{k_B T_2}{m_p} = \frac{2}{\gamma + 1} \rho_1 (u'_1)^2 = \frac{2}{\gamma + 1} \rho_1 u_s^2\end{aligned}$$

Ceci nous fournit donc les conditions aux limites à imposer en $r_s(t)$ en fonction des conditions extérieures ρ_1 et $u_s = \dot{r}_s$ (mesurables).

2 : Equations maitresses de la structure interne de la bulle

On écrit ensuite, en géométrie sphérique, les équations de l'HD nécessaires pour décrire l'intérieur de la bulle

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \rho r^2 u}{\partial r} = 0 \quad (1.50)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial r} \right) u = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} \quad (1.51)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial r} \right) \ln \frac{P}{\rho^\gamma} = 0 \quad (1.52)$$

Nous obtenons un système de 3 EDP dépendant de r et de t . Au cours du temps, la bulle grandit et sa structure interne s'adapte à ce changement d'échelle. Une méthode très importante de résolution de ce type de problème est de rechercher des solutions dites "auto-similaires" : on définit pour cela une variable sans dimension

$$x = \frac{r}{R(t)} \quad (1.53)$$

où $R(t)$ est une taille caractéristique. Ainsi, une fonction quelconque $A(r, t)$ peut s'écrire $A(r, t) = A_o(t)f(x)$, où t et x sont deux variables indépendantes. Cet artifice mathématique, couramment employé en mécanique quantique par exemple, est une méthode de séparation des variables qui va permettre d'obtenir des équations différentielles ordinaires (EDO) à partir de nos EDP, ce qui est une simplification considérable. Le terme $A_o(t)$ se comprend comme une sorte de facteur d'échelle entre deux instants. Les règles de dérivation sont alors

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \dot{A}_o f - A_o \frac{\dot{R}}{R} x f' \quad \text{et} \quad \frac{\partial A}{\partial r} = \frac{A_o}{R} f' \quad (1.54)$$

où $f' = df/dx$. Notre problème maintenant consiste à trouver les termes A_o pour u, ρ et P ainsi qu'une expression pour $R(t)$.

3 : Grandeurs caractéristiques

On utilise pour cela un raisonnement très important, l'analyse dimensionnelle. Puisque la taille typique de la bulle ne va dépendre que de E et ρ_1 , peut-on construire une échelle spatiale avec ces 2 seules grandeurs ? Cela est impossible sans adjoindre le temps. On forme en définitive le produit $R = E^\alpha \rho_1^\beta t^\delta$ et on trouve effectivement une solution pour $\alpha = 1/5$, $\beta = -1/5$ et $\delta = 2/5$, ce qui nous donne

$$R(t) = \left(\frac{Et^2}{\rho_1} \right)^{1/5} \quad (1.55)$$

A noter que ceci n'est qu'une taille caractéristique. La position réelle de la bulle doit être calculée et sera donnée par $r_s(t) = x_s R(t)$ où x_s est un coefficient numérique fournit par un modèle (voir plus bas). Du coup, la vitesse du choc est donnée par

$$u_s = \frac{dr_s}{dt} = \frac{2x_s}{5} \left(\frac{E}{\rho_1 t^3} \right)^{1/5} \propto t^{-3/5} \propto r_s^{-3/2} \quad (1.56)$$

et diminue au cours de l'expansion. Cette loi, obtenue par un simple argument dimensionnel, est en conformité avec l'observation de l'expansion initiale du champignon de l'explosion de la première bombe atomique à Alamogordo (USA, 16 juillet 1945). Finalement, à l'aide de l'expression de $R(t)$ déterminée précédemment on peut rechercher des solutions des équations HD sous la forme

$$\rho(r, t) = \rho_1 f(x) \quad , \quad u(r, t) = \dot{R} v(x) \quad \text{et} \quad P(r, t) = \rho_1 \dot{R}^2 g(x) \quad (1.57)$$

qui sont correctes dimensionnellement et dont les seules inconnues sont les fonctions f, v et g . A noter qu'en x_s , on doit avoir $\rho = \rho_2$, $u = u_2$ et $P = P_2$, ce qui impose des valeurs à ces fonctions. Précisément :

$$f(x_s) = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \quad (1.58)$$

$$v(x_s) = \frac{2}{\gamma + 1} x_s \quad (1.59)$$

$$g(x_s) = \frac{2}{\gamma + 1} x_s^2 \quad (1.60)$$

Il faut donc se donner un moyen de calculer la valeur de x_s . Celle-ci va être donnée par la contrainte de conservation de l'énergie totale E , à savoir

$$E = \int_0^{r_s} 4\pi r^2 \left(\frac{\rho u^2}{2} + U \right) dr = 4\pi R^3 \rho_1 \dot{R}^2 F(x_s) \quad (1.61)$$

où $F(x_s) = \int_0^{x_s} \left(\frac{f v^2}{2} + \frac{g}{\gamma - 1} \right) x^2 dx$. En remplaçant R par son expression, il vient que l'énergie n'est conservée que pour $F(x_s) = 25/16\pi$, ce qui du coup permet de déterminer la valeur numérique de x_s . Une fois x_s déterminé, on peut mettre des valeurs numériques sur les divers champs (ρ, u, P) à l'intérieur de la bulle en fonction de ρ_1, γ, E .

4 : Système d'EDO

En injectant dans les EDP les solutions auto-similaires, on obtient le système d'EDO suivant :

$$xv' + x(v - x) \frac{f'}{f} = -2v$$

$$\begin{aligned}
(v-x)v' + \frac{g'}{f} &= -\frac{\ddot{R}R}{\dot{R}^2}v = \frac{3}{2}v \\
\left(\frac{g'}{g} - \gamma\frac{f'}{f}\right)(v-x) &= \frac{\dot{A}R}{A\dot{R}} = -3
\end{aligned} \tag{1.62}$$

où l'on a utilisé $A = \dot{R}^2 \rho_1^{(1-\gamma)}$. Ce système se ramène à la résolution de 3 équations couplées de la forme $M.X = P$ où le vecteur X a pour composantes $(v', f'/f, g'/g)$. Ce système est régulier tant que le déterminant de M ne s'annule pas, ce qui ne se produit que si $\Delta = (v-x)^2 - c^2 = 0$, où l'on a posé $c^2 = \gamma g/f$ carré de la vitesse du son à l'intérieur de la bulle⁴. Pour une valeur de γ donnée, on peut intégrer numériquement ce système de $x = x_s$ vers $x = 0$ (où la solution est régulière, avec $v = 0$) et ajuster la valeur de x_s jusqu'à trouver la valeur critique pour laquelle $F(x_s) = 25/16\pi$ (méthode du type "shooting"). Ainsi, pour $\gamma = 5/3$ (seul vrai paramètre libre intervenant dans notre système d'équations), on trouve $x_s = 1.17$.

1.5 Systèmes auto-gravitants

Le cas des systèmes auto-gravitants (assujettis à leur propre gravité) ne se rencontre évidemment qu'en astrophysique. Outre un aspect intéressant du point de vue culturel, l'étude de ce cas est aussi une bonne illustration de concepts et calculs de l'HD.

1.5.1 Equation de Poisson

L'équation de Poisson permet de calculer le champ de gravité pour une distribution de densité locale $\rho(\vec{r}, t)$ quelconque et des conditions aux limites prescrites. Elle s'obtient par analogie avec le théorème de Gauss en utilisant l'expression de la loi de Newton (cas non relativiste) :

$$\Delta \Phi_g = 4\pi G \rho \tag{1.63}$$

Exercice 1 : Effondrement isotherme

Les étoiles se forment par effondrement gravitationnel d'un nuage moléculaire dense. Maintenu en équilibre grâce à sa pression interne pendant un certain temps, on suppose que cette pression devient négligeable à $t = 0$, donnant lieu à un effondrement du nuage sous l'effet de sa propre masse. On supposera que l'effondrement est à géométrie sphérique et reste isotherme⁵

1- Montrer que la pression devient de plus en plus négligeable tant que l'approximation isotherme est justifiée.

2- On pose $m(r, t) = \int_0^r dm$ avec $dm = 4\pi r^2 dr$ la masse contenue dans la coquille entre r et $r + dr$. Montrer que $\dot{m} = 0$.

3- Ecrire l'équation différentielle régissant r . La résoudre en supposant $r(0) = r_0$, $\dot{r}(0) = 0$ et $m_0 = 4\pi r_0^3 \rho_0/3$. Il sera utile de faire le changement de variable $r = r_0 \cos^2 \theta$.

4- Quel temps faut-il pour atteindre $r = 0$? Retrouver ce résultat par analyse dimensionnelle.

Si l'on néglige le champ magnétique et la rotation de ce nuage, on obtient un effondrement radial qui ne peut être arrêté que par le gradient de pression. Or, le rapport entre force de gravité

⁴Il faut cependant noter que l'intérieur de la bulle est censé être supersonique, i.e. $\Delta > 0$. Cela devrait se traduire par l'impossibilité de trouver des conditions de régularité cohérentes.

⁵Pourquoi un effondrement isotherme? Le nuage sera considéré isotherme s'il a le temps de se thermaliser lors de l'effondrement, autrement dit si le temps caractéristique d'ajustement thermique est plus court que celui de la contraction. Si ce n'est pas le cas, il faudra plutôt considérer un effondrement adiabatique.

et la pression varie comme $1/r$ dans le cas isotherme : plus le nuage se contracte et plus la gravité domine. Les équations qui régissent l'évolution du nuage sont donc

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{v}}{dt} &= -\vec{\nabla}\Phi \\ \frac{d\rho}{dt} &= 0 \\ \Delta\Phi &= 4\pi G\rho\end{aligned}$$

où $d./dt$ est la dérivée Lagrangienne. En symétrie sphérique ces équations se ramènent à

$$\begin{aligned}\ddot{r} &= -\frac{Gm(r)}{r^2} \\ \frac{dm}{dt} &= \frac{\partial m}{\partial t} + \dot{r}\frac{\partial m}{\partial r} = 0\end{aligned}$$

où

$$m(r) = \int_0^r 4\pi r'^2 \rho dr'$$

est la masse comprise dans la sphère de rayon r . Si le nuage se contracte à partir d'un rayon r_0 à $t = 0$, la conservation de la masse s'écrit $m(r, t) = m(r_0, 0) = 4\pi r_0^3 \rho_0 / 3$ avec ρ_0 choisi uniforme. En multipliant l'équation sur le rayon de la sphère par $2\dot{r}$, celle-ci s'intègre facilement et donne

$$\frac{\dot{r}}{r_0} = - \left[\frac{8\pi G \rho_0}{3} \left(\frac{r_0}{r} - 1 \right) \right]^{1/2}$$

ce qui, en posant $\cos^2 \theta = r/r_0$, devient

$$\theta + \frac{\sin 2\theta}{2} = \left(\frac{8\pi G \rho_0}{3} \right)^{1/2} t \quad (1.64)$$

lorsque la sphère s'effondre avec une vitesse initiale nulle. Ce résultat est indépendant de r_0 : contraction auto-similaire. Le temps pour atteindre le centre ($r = 0$ ou $\theta = \pi/2$)

$$t_{chute} = \left(\frac{3\pi}{32G\rho_0} \right)^{1/2} \quad (1.65)$$

est le même pour tout r_0 . Par contre, ce sont les régions internes qui s'effondrent d'abord, puisque dans un cas réaliste ρ_0 augmente vers le centre. Lorsque $r \rightarrow 0$, la densité augmente et le milieu devient opaque : on ne peut plus négliger la pression et ce n'est plus une chute libre. L'effondrement s'arrête donc et ceci se produit dans les régions les plus centrales. On obtient donc trois situations différentes :

(1) coeur central auto-gravitant de masse M (proto-étoile) en contraction (équilibre quasi-hydrostatique) mais accréant de la masse de son environnement ;

(2) enveloppe en effondrement avec une vitesse de chute libre (auto-gravité négligée devant celle du coeur central) ;

(3) zone extérieure quasi-statique.

Soit $\dot{M} = 4\pi\rho r^2 v$ le taux d'accrétion de matière sur le coeur central. Si $t_{acc} \simeq M/\dot{M} \gg t_{chute}$, alors on peut considérer que ce taux d'accrétion reste constant au cours du temps et que la vitesse de chute libre vaut $v \simeq (2GM/r)^{1/2}$. Dans ce cas, on obtient une enveloppe avec une stratification en densité de la forme

$$\rho = \frac{\dot{M}}{4\pi(GM)^{1/2}r^{3/2}} \propto r^{-3/2}$$

Dans la région quasi-statique, l'équilibre entre l'auto-gravité et la pression s'écrit

$$\begin{aligned} C_s^2 \frac{d\rho}{dr} &= -\rho \frac{d\Phi}{dr} \\ \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right) &= 4\pi r^2 G \rho \end{aligned}$$

système d'équations qui possède comme solution particulière celle dite de la sphère singulière

$$\rho = \frac{C_s^2}{2\pi G r^2} \propto r^{-2} .$$

Les observations millimétriques de condensations protostellaires montrent que ce type de stratification simple semble être effectivement grossièrement suivi. La cause de déviations à ces comportements réside dans les effets thermiques (chauffage et refroidissement de la matière) et dynamiques (rotation, champ magnétique) non pris en compte dans ce modèle simple.

1.5.2 Le théorème du Viriel

Ce théorème décrit une relation de conservation entre diverses formes macroscopiques de l'énergie d'un système auto-gravitant. Ses applications sont nombreuses, mais il est particulièrement utile pour connaître la répartition de l'énergie lors d'un équilibre. Il fournit également une base d'argumentation simple sur la stabilité d'un équilibre.

Il y a plusieurs façons de démontrer le Viriel mais l'approche fluide est choisie ici. On écrit la conservation de l'impulsion pour une particule fluide de densité ρ

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{\nabla} P + \vec{f} \quad (1.66)$$

où P est la pression du gaz et \vec{f} est la somme des densités de forces appliquées (en pratique ici, force gravitationnelle seulement, mais il y a également des forces magnétiques, on le verra plus tard). Un bilan énergétique est obtenu en formant le produit scalaire de cette équation avec le vecteur position \vec{r} et en intégrant sur tout le volume \mathcal{V} contenant la totalité de la masse considérée ($M = \int_{\mathcal{V}} \rho d\mathcal{V}$). Sachant que

$$\vec{r} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} - \left(\frac{d\vec{v}}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{d^2 r^2}{dt^2} - v^2$$

on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{V}} d\mathcal{V} \rho \vec{r} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} &= \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \int_{\mathcal{V}} r^2 dm - 2 \int_{\mathcal{V}} d\mathcal{V} \frac{\rho v^2}{2} \\ &\equiv \frac{1}{2} \frac{d^2 I}{dt^2} - 2T \end{aligned}$$

où I est le moment d'inertie associé à la masse M et T est son énergie cinétique (noter que l'on a supposé $dM/dt = 0$). Le terme de pression donne, en coordonnées sphériques

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{V}} d\mathcal{V} \vec{r} \cdot \vec{\nabla} P &= \int_{\mathcal{V}} d\mathcal{V} \vec{\nabla} \cdot P \vec{r} - \int_{\mathcal{V}} d\mathcal{V} P \vec{\nabla} \cdot \vec{r} \\ &= \int_{\Sigma} P \vec{r} \cdot d\vec{S} - 3 \int_{\mathcal{V}} P d\mathcal{V} \end{aligned}$$

où Σ est la surface fermée englobant le volume \mathcal{V} . Pour un gaz parfait non dégénéré $dP = (\gamma - 1)d\epsilon$, où ϵ est l'énergie interne volumique et γ l'indice adiabatique du gaz. On peut donc écrire⁶

$$\int_{\mathcal{V}} d\mathcal{V} \vec{r} \cdot \vec{\nabla} P \equiv -3(\gamma - 1)U + \int_{\Sigma} P \vec{r} \cdot d\vec{A}$$

où $U = \int_{\mathcal{V}} \epsilon d\mathcal{V}$ est l'énergie interne totale.

La densité de force gravitationnelle exercée par l'ensemble du volume vaut

$$\vec{f}_g(\vec{r}) = -\rho(\vec{r}) \int_{\mathcal{V}} d\mathcal{V}' G \rho(\vec{r}') \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} . \quad (1.67)$$

Remarque : l'usage de l'équation de Poisson n'est ici pas très commode. L'intégrale sur le volume du produit scalaire s'écrit

$$\int_{\mathcal{V}} d\mathcal{V} \vec{r} \cdot \vec{f}_g = -G \int_{\mathcal{V}} \int_{\mathcal{V}} d\mathcal{V} d\mathcal{V}' \rho(\vec{r}) \rho(\vec{r}') \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \vec{r}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} .$$

De part la nature de la force gravitationnelle, cette intégrale doit donner le même résultat si on échange les primes. On peut alors faire l'astuce suivante

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{V}} d\mathcal{V} \vec{r} \cdot \vec{f}_g &= -\frac{G}{2} \int_{\mathcal{V}} \int_{\mathcal{V}} d\mathcal{V} d\mathcal{V}' \rho(\vec{r}) \rho(\vec{r}') \left(\frac{(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \vec{r}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} + \frac{(\vec{r}' - \vec{r}) \cdot \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) \\ &= -\frac{G}{2} \int_{\mathcal{V}} \int_{\mathcal{V}} d\mathcal{V} d\mathcal{V}' \rho(\vec{r}) \rho(\vec{r}') \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|^2}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \\ &= -\frac{G}{2} \int_{\mathcal{V}} \int_{\mathcal{V}} \rho(\vec{r}) \rho(\vec{r}') \frac{d\mathcal{V} d\mathcal{V}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ &\equiv V \end{aligned}$$

où V est donc l'énergie gravitationnelle contenue dans le volume \mathcal{V} . Le facteur 1/2 qui est apparu décrit le fait que les deux couples $\{(\vec{r}, \vec{r}'), (\vec{r}', \vec{r})\}$ mettent en jeu la même énergie d'interaction gravitationnelle.

En regroupant l'ensemble de ces résultats on obtient l'expression fluide du théorème du Viriel pour un système autogravitant, non magnétisé, isolé⁷ et occupant un volume donné

$$2T + 3(\gamma - 1)U + V = \frac{1}{2} \frac{d^2 I}{dt^2} + \int_{\Sigma} d\vec{S} \cdot P \vec{r} \quad (1.68)$$

Le Viriel relie donc les énergies cinétique T , interne U et gravitationnelle V de ce système aux variations temporelles de son moment d'inertie I et aux conditions aux limites s'exerçant sur sa surface Σ .

Exercice 2 : Equilibre d'une étoile

Si on prend le cas simple d'une étoile en régime stationnaire et pour laquelle on néglige toute énergie cinétique (rotation) ainsi qu'une éventuelle pression externe, le Viriel nous donne la valeur de l'énergie interne emmagasinée nécessaire pour permettre un équilibre

$$U = -\frac{V}{3(\gamma - 1)} \quad (1.69)$$

c'est à dire $U = -V/2$ pour $\gamma = 5/3$ (atomes) comme indice adiabatique moyen. Le calcul de V nécessite la connaissance de la répartition de la masse dans l'étoile.

⁶Ici, γ devient un indice moyen dans le volume.

⁷puisqu'on n'a pas tenu compte de forces d'interaction supplémentaires.

1.5.3 Effondrement gravitationnel

Les étoiles se forment à partir de coeurs moléculaires denses qui deviennent tout à coup instables et s'effondrent sous l'effet de leur propre gravité. De la même façon, une étoile peut perdre son équilibre et s'effondrer jusqu'à former un objet compact (naine blanche, étoile à neutrons ou trou noir). Le théorème du Viriel peut fournir des résultats intéressants concernant une éventuelle rupture d'équilibre d'un objet (nuage ou étoile).

Exercice 3 : cas d'une étoile

Lorsque l'énergie cinétique T est négligeable devant l'énergie gravitationnelle (par ex, pour une étoile dont la vitesse de rotation sur elle-même est beaucoup plus petite que la vitesse keplerienne à son équateur), l'énergie totale vaut $E = U + V$ et le Viriel s'écrit

$$E = \frac{\gamma - 4/3}{\gamma - 1} V + \frac{1}{6(\gamma - 1)} \frac{d^2 I}{dt^2} \quad (1.70)$$

L'indice adiabatique moyen de la matière est toujours supérieur à $4/3$ ($5/3$ pour des atomes, $7/5$ pour des molécules). Mais lors de certaines phases de son évolution, une étoile peut atteindre des états dégénérés où $\gamma = 4/3$ (photons ou matière relativiste). Or $E < 0$ initialement puisque l'étoile est autogravitante. Donc à l'instant où $\gamma = 4/3$, on doit avoir $d^2 I/dt^2 < 0$. Cette décroissance du moment d'inertie s'obtient par une perte de masse et/ou une décroissance du rayon : l'étoile se contracte avec un temps caractéristique dynamique $t_c \sim (I/\Delta E)^{1/2} \sim (R^3/GM)^{1/2}$. Ici, c'est donc une modification de la structure interne d'une étoile qui détruit son équilibre.

Remarque : Une autre façon d'engendrer un effondrement est la perte progressive d'énergie. Par exemple, une proto-étoile n'est pas en équilibre strict car sa luminosité provoque une décroissance du rayon sur des échelles de temps typiques $t_c \sim E/L_{rad} \sim V/L_{rad}$. C'est sur la base de cet argument que Lord Kelvin a montré que la source d'énergie du Soleil ne pouvait pas être la contraction, l'âge de la Terre (données paléontologiques) étant de quelques milliards d'années.

Exercice 4 : cas d'un nuage soumis à une pression extérieure

Un nuage peut s'effondrer sur lui-même à cause de l'influence d'une pression externe (proximité d'une supernovae ou d'associations d'étoiles très massives O-B..). Prenons le cas d'un nuage sphérique de rayon R , masse M à une température constante (nuage isotherme) T et pour lequel on peut négliger à la fois le champ magnétique et tout mouvement d'ensemble. Calculer la valeur de cette pression à l'équilibre. Montrer qu'il existe une taille R_c en dessous de laquelle un nuage de masse M devient instable. Cependant, la masse étant elle-même fonction de R , en déduire le véritable critère d'instabilité.

Le Viriel s'écrit

$$2U + V = P_{ext} 4\pi R^3 \quad (1.71)$$

où l'on a supposé une symétrie sphérique et $\gamma = 5/3$. L'énergie interne vaut

$$U = \frac{3}{2} \int P dV = \frac{3}{2} \int \rho C_s^2 dV = \frac{3}{2} M C_s^2$$

où $C_s = (kT/\mu m_p)^{1/2}$ est la vitesse du son isotherme. En exprimant l'énergie gravitationnelle de la forme $V = -\alpha GM^2/R$ (α est un coefficient numérique sans dimension, qui devrait être de l'ordre de l'unité), on obtient qu'un tel équilibre est possible à condition que la pression externe satisfasse

$$P_{ext} = \frac{1}{4\pi R^3} \left(3M C_s^2 - \alpha \frac{GM^2}{R} \right). \quad (1.72)$$

Cette pression idéale possède une valeur maximale en un rayon

$$R_c = \alpha \frac{4GM}{9C_s^2} .$$

Supposons que le nuage soit à l'équilibre avec un rayon $R < R_c$ et qu'une perturbation externe (onde de choc, front d'ionisation) force le nuage à se contracter. La pression externe requise pour un nouvel équilibre devrait être inférieure à la précédente, ce qui n'est pas le cas et le nuage se comprime de plus belle. Seuls les nuages avec $R > R_c$ sont donc effectivement stables et ne vont pas s'effondrer sur eux-mêmes. Cependant, on peut écrire $M = 4\Pi\rho R^3/3$ où ρ est la densité moyenne du nuage. Le critère de stabilité précédent se traduit alors par

$$R < \frac{3C_s}{4\sqrt{G\rho}} \quad (1.73)$$

où le terme de droite est de l'ordre d'une taille caractéristique, appelée longueur de Jeans, et qui a l'avantage de ne dépendre que de conditions locales (donc mesurables plus facilement).

1.5.4 Un calcul d'instabilité : le critère de Jeans

L'approche du Viriel est une approche énergétique de l'effondrement. Ici, on va avoir une approche basée sur un calcul d'instabilité dû à Sir James Jean (1877-1946).

Les équations du nuage (autogravitant, sans rotation ni champ magnétique) sont les suivantes

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \rho \vec{v} &= 0 \\ \rho \frac{d\vec{v}}{dt} &= -\vec{\nabla} P - \rho \vec{\nabla} \Phi \\ \Delta \Phi &= 4\pi G \rho \end{aligned}$$

La méthode consiste à supposer connue une solution d'équilibre (indexée par 0), puis à faire une perturbation

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0 + \rho_1 \\ P &= P_0 + P_1 \\ \vec{v} &= \vec{v}_0 + \vec{v}_1 \\ \Phi &= \Phi_0 + \Phi_1 \end{aligned}$$

Ensuite, on ne considère que les termes d'ordre un (l'ordre zéro est l'équilibre) et on obtient le système linéarisé suivant

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \rho_0 \vec{v}_1 + \vec{\nabla} \cdot \rho_1 \vec{v}_0 &= 0 \\ \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + (\vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}_1 + (\vec{v}_1 \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}_0 &= -\vec{\nabla} \Phi_1 - (\vec{\nabla} P_1 - (\rho_1/\rho_0) \vec{\nabla} P_0)/\rho_0 \\ \Delta \Phi_1 &= 4\pi G \rho_1 \end{aligned}$$

Le modèle de Jeans fut obtenu (en 1902) pour les conditions d'équilibre suivantes⁸

$$\begin{aligned} \vec{v}_0 &= \vec{0} \\ \rho_0 &= \text{Constante} \\ P_0 &= \rho_0 C_s^2 = \text{Constante} \end{aligned}$$

⁸Cet équilibre est trivial (il implique $\rho_0 = 0$) et ne constitue donc pas un cas intéressant. Il permet cependant d'illustrer de façon simple un calcul d'instabilité.

Après simplification du système linéarisé, on obtient l'équation pour ρ_1

$$\Delta \rho_1 - \frac{1}{C_s^2} \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} + \frac{4\pi G \rho_0}{C_s^2} \rho_1 = 0 \quad (1.74)$$

qui est une équation d'ondes. Il y a donc des solutions de la forme $e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$, qui doivent obéir à l'équation de dispersion du système

$$\omega^2 = k^2 C_s^2 - 4\pi G \rho_0. \quad (1.75)$$

Cette équation régit les modes de perturbations stables et instables. Pour $\omega^2 > 0$, les perturbations sont des ondes qui varient périodiquement avec le temps et dont l'amplitude reste faible. Par contre, les perturbations avec $\omega^2 < 0$ voient leur amplitude croître exponentiellement avec le temps. On obtient ainsi le nombre d'onde critique k_J en-deça duquel le nuage est instable. A ce nombre d'onde est associé la longueur d'onde

$$L_J = \frac{2\pi}{k_J} = \left(\frac{\pi C_s^2}{G \rho_0} \right)^{1/2} \quad (1.76)$$

dite *longueur de Jeans*. Tout nuage de taille $R > L_J$ est donc gravitationnellement instable. On peut remarquer que cette expression donne sensiblement le même résultat que par le Viriel (à des facteurs de l'ordre de l'unité près). La différence essentielle est qu'ici, nous avons un réel calcul d'instabilité, tandis qu'avec le Viriel nous n'avons qu'un argument de plausibilité.

Ces considérations simples indiquent que dans un milieu peu dense, l'instabilité gravitationnelle ne peut se produire que sur des grandes échelles, et est absente à petite échelle. L'instabilité de Jeans est en réalité le mécanisme principal à l'origine de la formation (ou des premières étapes de la formation) d'à peu près tous les objets astrophysiques connus, des étoiles aux grandes structures dans l'univers primordial.

On peut réexprimer cette longueur en une masse, appelée la masse de Jeans

$$M_J = \frac{4}{3} \pi L_J^3 \rho \simeq 10^5 \left(\frac{T}{100 \text{ K}} \right)^{3/2} \left(\frac{n_H}{10^6 \text{ m}^{-3}} \right)^{-1/2} M_\odot \quad (1.77)$$

Seuls les nuages de masse *supérieure* à la masse de Jeans sont instables et peuvent s'effondrer gravitationnellement sous l'effet de la moindre perturbation. Observationnellement, il est possible d'évaluer la masse d'un nuage (souvent à partir de son rayonnement) ainsi que la masse de Jeans. S'il apparait que le nuage est super-critique ($M > M_J$) mais qu'aucun effondrement n'est observé, on en conclut qu'il existe un support supplémentaire contre l'effondrement, non pris en compte dans le calcul. Ce support est généralement fourni par un champ magnétique interstellaire.

Remarque : L'équation de dispersion (1.75) montre que le temps caractéristique de l'instabilité $\tau_c \sim 2\pi\omega^{-1}$ vaut $\tau_c \sim (G\rho_0)^{-1/2}$, c'est à dire que la contraction du nuage s'effectue avec le temps de chute libre. Pour une coeur dense de densité $n \sim 10^6 \text{ m}^{-3}$, ce temps serait de l'ordre de 10^8 années. Mais lors de la contraction, la densité augmente ce qui accélère d'autant plus la contraction (τ_c diminue). Cela signifie également que les régions centrales des nuages s'effondrent plus vite que les régions externes (en l'absence d'un piston extérieur).

Chapitre 2

Magnetohydrodynamique

2.1 Concepts et équations de la MHD

La magnétohydrodynamique ou MHD traite de la dynamique d'un plasma, c'est à dire d'un gaz de particules chargées. On rencontre de tels plasmas dans les milieux naturels (magnétosphères planétaires, étoiles, milieu interstellaire, disques d'accrétion et jets, pulsars, environnement de trous noirs) mais également dans certaines réalisations expérimentales (propulseurs, lasers puissants, explosions de bombes, machines à fusion). On qualifie généralement de tels plasmas de **plasmas chauds** du fait de l'importance de la haute température de la matière sur sa dynamique. A l'inverse, beaucoup d'applications industrielles utilisent de nos jours des gaz ionisés mais à température plus basse. Ces plasmas industriels sont appelés **plasmas froids** et ne seront pas traités dans ce cours.

Les écarts de vitesse entre espèces chargées constituant le plasma (électrons et ions) donnent lieu à des courants électriques. Ceux-ci vont donc engendrer un champ électromagnétique qui aura en retour une influence sur la dynamique du plasma. Cette extrême non-linéarité, qui se rajoute à tous les phénomènes connus en HD, fait de la MHD une discipline particulièrement complexe.

2.1.1 Conditions de validité

Un plasma est idéalement décrit par une approche statistique avec une fonction de distribution définie dans l'espace des phases. C'est ce qu'on appelle la théorie cinétique et constitue l'outil de prédilection des physiciens des plasmas chauds. La physique cinétique est ainsi bien adaptée à l'étude des inhomogénéités dans l'espace des vitesses, ce qui permet une analyse fine des ondes et instabilités possibles dans un plasma. Ce genre d'approche suppose généralement de faibles gradients dans l'espace ordinaire, ce qui introduit évidemment certaines limitations (en particulier l'incapacité à décrire un objet macroscopique). Il arrive cependant que les conditions soient telles que l'équilibre thermodynamique local (ETL) soit réalisé et que cette fonction de distribution soit une maxwellienne en première approximation. Dans ce cas, une description fluide du plasma est suffisante, permettant cette fois-ci l'étude des inhomogénéités dans l'espace normal. Le formalisme de la MHD émerge donc de la physique cinétique, comme un cas limite de plasma à l'ETL. On peut également l'obtenir comme une sorte d'extension de l'HD pour les fluides conducteurs, tels le Sodium ou l'Aluminium liquides.

Je fais ci-dessous un bilan (sans démonstration) des tailles et temps caractéristiques rencontrés dans les plasmas magnétisés, afin d'établir les conditions de validité de la MHD. Si l'on considère un plasma de densité numérique n_α , alors une première échelle spatiale surgit immédiatement :

$$d_\alpha = n_\alpha^{-1/3} \quad (2.1)$$

qui n'est autre que la distance moyenne entre deux particules de même espèce.

Ecrantage de Debye

Une particule chargée crée autour d'elle un potentiel électrostatique qui va affecter la distribution locale de charges. Prenons un ion positif : on va assister à une répulsion des charges positives et à une attraction des charges négatives (essentiellement des électrons). A l'équilibre, cette réorganisation se traduit par un écrantage du champ électrique de cette particule sur une échelle

$$\lambda_{D,\alpha} = \sqrt{\frac{\varepsilon_o k_B T_\alpha}{n_\alpha q_\alpha^2}} \quad (2.2)$$

appelée longueur de Debye pour l'espèce α . Ce résultat est d'une extrême importance. Pour des échelles $l \gg \lambda_D$, le plasma peut être considéré comme localement neutre en raison de l'ajustement du champ électrique particulière (somme des champs électriques des particules les plus proches). Par contre, un champ électrique à grande échelle impliquant beaucoup de particules pourrait, lui, permettre une densité de charge ρ_* non nulle. Ainsi, et à partir de maintenant, on va considérer que le champ électromagnétique est uniquement d'origine **collective**, celui dû aux particules locales ayant étant écranté.

Pulsation plasma

Que se passe-t-il lorsque l'équilibre précédent est perturbé? Les charges vont avoir tendance à se réajuster afin de revenir à l'équilibre, ce qui va engendrer une oscillation. A noter qu'il s'agit ici d'un déplacement **collectif**. Toutes les espèces sont sujettes à cette réaction mais les plus légères réagissent évidemment le plus vite. Puisque $m_e \ll m_i$, ce sont les électrons qui seront systématiquement responsables de ce retour à l'équilibre. Cette oscillation électronique met en jeu une pulsation

$$\omega_{p,e} = \sqrt{\frac{n_e q_e^2}{m_e \varepsilon_o}} \quad (2.3)$$

appelée pulsation plasma. A noter que $\lambda_{D,e} = c_{s,e}/\omega_{p,e}$ où $c_{s,e} = \sqrt{k_B T_e/m_e}$ est la vitesse du son pour les électrons¹. Le temps de retour à l'équilibre électrostatique est donc typiquement de l'ordre de $\tau_p \sim \omega_{p,e}^{-1}$. Négliger les champs individuels nécessite de considérer des temps longs devant τ_p .

Approche statistique

Un plasma est le 4ème état de la matière, obtenu lors d'une augmentation de la température : Solide, Liquide, Gaz puis Plasma. Ce qui caractérise un plasma est donc la présence d'un grand nombre de particules chargées par unité de volume mais aussi leur relative "liberté de mouvement". Celle-ci est mesurée par le rapport entre l'énergie cinétique due à l'agitation thermique et l'énergie d'interaction coulombienne,

$$\Lambda = \frac{\frac{3}{2} k_B T_\alpha}{q_\alpha \Phi} = 6\pi (n_\alpha \lambda_{D,\alpha}^3)^{2/3} \quad (2.4)$$

où $\Phi \simeq \frac{q_\alpha}{4\pi\varepsilon_o d_\alpha}$ est le potentiel coulombien local. Ce paramètre, appelé paramètre plasma, doit être beaucoup plus grand que l'unité. Pour des électrons de densité n_e , cette condition se traduit par

$$n_e \lambda_{D,e}^3 \gg 1 \quad \text{ou encore} \quad \lambda_{D,e} \gg d_e \quad (2.5)$$

¹En fait, si l'on définit la température à partir de la vitesse moyenne d'agitation, on aurait $\frac{3}{2} k_B T_e = \frac{1}{2} m_e v_{th,e}^2$. Notre "vitesse du son" $c_{s,e}$ est donc $\sqrt{3}$ plus faible que $v_{th,e}$, ce qui n'a pas une grande importance.

Dans un plasma cinétique classique, la sphère de Debye doit donc être très dense justifiant un traitement statistique².

Effet des collisions

Prenons un ensemble de N particules chargées d'une espèce donnée dans un volume V satisfaisant les contraintes ci-dessus. Un traitement statistique étant justifié, nous pouvons utiliser une fonction (continue) de distribution f . Lorsque l'échange d'information (impulsion) entre ces particules est suffisamment efficace, on obtient une distribution relativement piquée sur une valeur moyenne : une gaussienne. Cette homogénéisation (ETL) n'est rien d'autre que la loi de Boltzmann et s'établit sur un temps de relaxation τ_{eq} .

Dans la plupart des cas que nous verrons, cette relaxation vers l'ETL est due aux collisions coulombiennes. Ainsi, pour que les électrons puissent être considérés comme un fluide de température T_e , il faut s'intéresser à des échelles temporelles supérieures au temps collisionnel

$$\tau_e = 6\pi\sqrt{2\pi}\varepsilon_o^2 \frac{m_e^{1/2}(k_B T_e)^{3/2}}{\ln \Lambda Z^2 e^4 n_i} \quad (2.6)$$

(à noter que la densité des ions n_i et leur charge Z intervient aussi dans la relaxation des électrons). Le coefficient $\ln \Lambda$ est appelé logarithme coulombien et varie entre 10 et 20 pour un plasma typique. Le temps τ_e est associé à une fréquence collisionnelle $\nu_{ee} = \tau_e^{-1}$ et un libre parcours moyen $\lambda_{lpm,e} = c_{s,e}\tau_e$. Il est intéressant de noter que l'on a

$$\lambda_{lpm,e} = 6\pi\sqrt{2\pi} \frac{\Lambda}{\ln \Lambda} \lambda_{D,e} \gg \lambda_{D,e} \quad (2.7)$$

Dans un plasma, l'échelle spatiale collisionnelle $\lambda_{lpm,e}$, décrivant une interaction binaire, est ainsi beaucoup plus grande que l'échelle de Debye, décrivant les effets collectifs. On peut aussi écrire $\nu_{ei}/\omega_{pe} = \ln \Lambda / (6\pi\sqrt{2\pi}\Lambda) \ll 1$. Cela montre à nouveau la prédominance des effets collectifs sur les effets individuels, même dans un plasma collisionnel.

Les ions, quant à eux, n'échangent guère d'impulsion avec les électrons du fait de l'énorme différence de masse. Leur fonction de distribution évolue donc sur une échelle collisionnelle τ_i impliquant uniquement les ions

$$\tau_i = 6\pi\sqrt{2\pi}\varepsilon_o^2 \frac{m_i^{1/2}(k_B T_i)^{3/2}}{\ln \Lambda Z^4 e^4 n_i} \simeq \tau_e \left(\frac{T_i}{T_e} \right)^{3/2} \left(\frac{m_i}{m_e} \right)^{1/2} \quad (2.8)$$

et a priori beaucoup plus longue que τ_e . On a également une fréquence collisionnelle $\nu_{ii} = \tau_i^{-1}$ et un libre parcours moyen $\lambda_{lpm,i} = c_{s,i}\tau_i$.

Par ailleurs, les deux espèces (électrons et ions) vont naturellement interagir collisionnellement et, au bout d'un temps

$$\tau_{ie} = \frac{m_i}{2m_e} \tau_e \quad (2.9)$$

un fluide avec $T_e = T_i$ sera établi. Ce temps de relaxation est lui-même associé à une fréquence collisionnelle $\nu_{ie} = \tau_{ie}^{-1}$ et un libre parcours moyen $\lambda_{lpm,ie} = c_s \tau_{ie}$.

Echelles introduites par un champ B

Une particule de masse m_α et charge q_α en mouvement \vec{v}_α dans un champ magnétique \vec{B} subit la force de Lorentz $\vec{F} = q_\alpha(\vec{E} + \vec{v}_\alpha \times \vec{B})$. En l'absence de champ électrique \vec{E} , son mouvement est

²Un plasma sera relativiste si $k_B T_e \sim m_e c^2$, non relativiste sinon. Seul le cas non relativiste est traité ici.

hélicoidal : superposition d'un mouvement parallèle à \vec{B} et d'une gyration dans le plan perpendiculaire à \vec{B} . Celle-ci s'effectue dans le sens direct (par rapport à \vec{B}) pour une charge $q < 0$ avec un rayon constant $r_{L,\alpha} = v_\perp / \omega_{c,\alpha}$ dit rayon de Larmor et une gyrofréquence

$$\omega_{c,\alpha} = \frac{q_\alpha B}{m_\alpha} \quad (2.10)$$

Il est intéressant de comparer la pulsation cyclotron à la pulsation plasma. L'égalité est obtenue pour $n_e m_e c^2 = B^2 / \mu_o$, autrement dit une vitesse d'Alfvén (voir plus loin) relativiste. Cela peut se produire pour des densités électroniques très faibles et des champs forts (Tokamaks). Dans le cas non relativiste, on a toujours $\omega_{p,e} \gg \omega_{c,e}$ et, ce qui est équivalent, $r_{L,e} \gg \lambda_{D,e}$.

Nous avons vu que l'approche fluide nécessite de considérer des échelles bien supérieures au rayon de Debye. Celui-ci définit un volume élémentaire comportant un grand nombre de particules chargées (de telle sorte que $\rho_* \simeq 0$). L'approche fluide consiste à interpréter la vitesse \vec{u} du fluide comme la vitesse moyenne de ces particules, la composante désorganisée intervenant uniquement dans la température locale. Mais en présence de champ magnétique, ces particules ont un mouvement de gyration dont le sens et le rayon dépend de chacune d'entre elles. Une approche fluide d'un plasma magnétisé requiert donc que ce mouvement gyrotoire ne soit pas résolu. Il faut donc satisfaire

$$l \gg r_{L,i} \gg r_{L,e} \text{ et } \tau \gg \omega_{c,i}^{-1} \gg \omega_{c,e}^{-1} \quad (2.11)$$

Cela revient à se placer dans l'approximation dite du "centre guide", où le mouvement des particules est assimilé à celui de leur centre de gyration autour du champ B local.

Ordering pour la MHD

Dans un plasma cinétique classique ($\Lambda \gg 1$) collisionnel, l'ordering suivant est automatiquement vérifié

$$\lambda_{lpm,e} \gg \lambda_{D,e} \gg d_e \quad (2.12)$$

$$\tau_{ei} \gg \omega_{pe}^{-1} \quad (2.13)$$

Il faut donc considérer des échelles spatiale $l \equiv |\nabla|^{-1}$ et temporelle $\tau \equiv |\partial/\partial t|^{-1}$ satisfaisant

$$L \gg l \gg \max(r_{L,i}, \lambda_{D,e}) \gg d_e \quad (2.14)$$

$$\tau \gg \max(\omega_{c,i}^{-1}, \tau_{ie}) \quad (2.15)$$

Ce formalisme s'appuie sur un plasma collisionnel ($\tau \gg \tau_{ei}$). Pour un plasma non collisionnel, il est encore possible d'obtenir un ensemble d'équations fluides assez ressemblantes (Chew, Goldberger & Low, 1956). Dans ce cas, on a quand même $\tau \gg \tau_{eq}$ (ETL) mais c'est le champ magnétique lui-même qui l'impose. La notion de libre parcours moyen est jouée ici par le rayon de Larmor. La table suivante donne des estimations des diverses échelles dans quelques environnements.

TAB. 2.1 – Paramètres plasmas et leurs valeurs numérique dans divers environnements (adaptée de Goedbloed & Poedts (2004) :

Tok= Tokamaks ($n = 10^{20} m^{-3}, T = 10^8 K, B = 3 T$),

CSO = Couronne Solaire ($n = 10^{16} m^{-3}, T = 10^6 K, B = 0.03 T$),

VSo = Vent Solaire ($n = 10^7 m^{-3}, T = 10^5 K, B = 6 \cdot 10^{-9} T$),

MaT = Magnétosphère Terrestre ($n = 10^{10} m^{-3}, T = 10^4 K, B = 3 \cdot 10^{-5} T$),

MIS = Milieu Interstellaire ($n = 10^6 m^{-3}, T = 100 K, B = 10^{-10} T$).

Il a été supposé $n = n_e = Zn_i$, $T = T_e = T_i$, A est nombre de masse, Z le numero atomique et les unités sont en SI. Les valeurs numériques ont été obtenues pour $A = Z = 1$. Pour le calcul du rayon de Larmor, $v_{\perp,i} = \sqrt{k_B T / m_i}$.

Quantité	Valeur	Tok	CSO	VSo	MaT	MIS
paramètre plasma	$\Lambda =$					
pulsation plasma	$\omega_{p,e} = 56.6 \sqrt{n}$	5.710^{11}	5.710^9	1.810^5	5.710^6	
pulsation cyclotron ion.	$\omega_{c,i} = 1.76 \cdot 10^{11} B$	2.910^8	2.910^6	0.58	2.910^3	
pulsation cyclotron e ⁻	$\omega_{c,e} = 9.58 \cdot 10^7 \frac{ZB}{A}$	5.310^{11}	5.310^9	1.110^3	5.310^6	
fréquence de collision	$\nu_{ie} =$					
longueur de Debye	$\lambda_D = 69 \sqrt{\frac{T}{n}}$	710^{-5}	710^{-4}	7	710^{-2}	
rayon de Larmor e ⁻	$r_{L,e} = 2.21 \cdot 10^{-8} \frac{\sqrt{T}}{B}$	10^{-4}	10^{-3}	1.510^3	10^{-1}	
rayon de Larmor ion.	$r_{L,i} = 9.47 \cdot 10^{-7} \frac{\sqrt{AT}}{ZB}$	4.910^{-3}	4.910^{-2}	7.110^4	4.9	
libre parcours moyen	$\lambda_{lpm} =$					
vitesse du son	$c_s = \sqrt{\frac{(1+Z)T}{AZ}}$	1.210^6	1.210^5	3.710^4	1.210^4	
vitesse d'Alfvén	$V_A = 2.18 \cdot 10^{16} \frac{B}{\sqrt{AZn}}$	6.510^6	6.510^6	4.110^3	6.510^6	
beta du plasma	$\beta =$	410^{-2}	410^{-4}	1	410^{-6}	

2.1.2 Equations de la matière

Soit un plasma constitué de plusieurs espèces (électrons, ions, neutres), chacune à l'ETL et définie par sa densité $\rho_\alpha = m_\alpha n_\alpha$, charge électrique q_α , température T_α et vitesse moyenne v_α . Une description fluide de ce plasma est donnée par

$$\begin{aligned}\rho &= \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \\ \rho_* &= \sum_{\alpha} n_{\alpha} q_{\alpha} \\ P &= \sum_{\alpha} P_{\alpha} \\ \rho \vec{u} &= \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} \\ \vec{J} &= \sum_{\alpha} n_{\alpha} q_{\alpha} \vec{v}_{\alpha}\end{aligned}$$

L'approche monofluide suivie ici n'a de sens que si le couplage (collisionnel) entre les diverses espèces est tel que

$$|\vec{v}_{\alpha} - \vec{u}| \ll |\vec{u}| \quad (2.16)$$

pour toute espèce en présence. C'est en général une hypothèse qui ne peut être vérifiée qu'a posteriori.

La conservation de la masse pour le fluide barycentrique est obtenue en faisant la somme (\sum_{α}) sur toutes les espèces et on obtient

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \rho \vec{u} = 0 \quad (2.17)$$

Là encore, attention au fait que ni réactions chimiques ni réactions nucléaires n'ont été prises en compte. Le couplage entre espèces étant supposé suffisamment bon, la conservation de l'impulsion du fluide barycentrique est fournie par

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \frac{d\vec{v}_{\alpha}}{dt} &\simeq \rho \frac{d\vec{u}}{dt} \\ &= \sum_{\alpha} \left(-\nabla P_{\alpha} + \text{div } \mathbf{T}_{\alpha} - \rho_{\alpha} \nabla \Phi_G + n_{\alpha} q_{\alpha} (\vec{E} + \vec{v}_{\alpha} \times \vec{B}) + \sum_{\beta} \vec{f}_{\beta\alpha} \right) \\ &= -\nabla P + \text{div } \mathbf{T} - \rho \nabla \Phi_G + \rho_* \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B}\end{aligned}$$

où le nouveau tenseur des contraintes visqueuses est $\mathbf{T} = \sum_{\alpha} \mathbf{T}_{\alpha}$ et où l'échange d'impulsion par collisions entre espèces est nul en vertu du principe d'action réciproque³.

Intervient maintenant ici une hypothèse supplémentaire, il s'agit de l'électroneutralité locale, à savoir

$$\rho_* = 0 \quad (2.18)$$

Toute déviation à l'électroneutralité se traduit par la génération d'un champ électrostatique collectif qui va **immédiatement** ramener la distribution de charges vers cet équilibre. On verra plus bas à quelle condition cette hypothèse est réalisable. A noter qu'elle permet de déduire la densité

³La densité de force sur l'espèce α due aux collisions avec une espèce β est $\vec{f}_{\beta\alpha} = \rho_{\beta} \nu_{\beta\alpha} (\vec{v}_{\beta} - \vec{v}_{\alpha})$. Noter que $\sum_{\alpha,\beta} \vec{f}_{\beta\alpha} = 0$ implique que la fréquence collisionnelle vérifie $\rho_{\alpha} \nu_{\alpha\beta} = \rho_{\beta} \nu_{\beta\alpha}$.

électronique $n_e = \sum_i Z_i n_i$ où Z_i est le nombre de charge de l'ion i . Mais elle a surtout pour conséquence d'annuler l'effet du champ électrique sur le fluide moyen et on obtient

$$\rho \frac{d\vec{u}}{dt} = -\nabla P + \text{div } \mathbf{T} - \rho \nabla \Phi_G + \vec{J} \times \vec{B} \quad (2.19)$$

L'équation d'état du fluide barycentrique est simplement

$$P = \sum_{\alpha} n_{\alpha} k_B T_{\alpha} = \rho \frac{k_B T}{\mu m_H} \quad \text{avec} \quad \mu = \frac{\sum_{\alpha} n_{\alpha} m_{\alpha}}{\sum_{\alpha} n_{\alpha} m_H} \quad (2.20)$$

où μ est le poids moléculaire moyen et où l'on a supposé une thermalisation complète du fluide, à savoir $T_{\alpha} = T$. Ceci est évidemment une simplification (souvent éhontée) qui nécessite un examen minutieux pour chaque situation.

Dans ce qui suit, on se place dans le cas simple de la MHD non relativiste dite à un fluide, constitué uniquement d'électrons et de protons. On a alors les relations suivantes

$$\begin{aligned} n &= n_e = n_i \\ P &= 2nk_B T \quad \text{c'est à dire} \quad \mu = 1/2 \\ \vec{J} &= en(\vec{v}_i - \vec{v}_e) \\ \rho &= m_e n_e + m_i n_i \simeq m_i n \\ \vec{u} &= \frac{\rho_e \vec{v}_e + \rho_i \vec{v}_i}{\rho} \simeq \vec{v}_i \end{aligned}$$

Du fait de la faible inertie des électrons, le fluide est essentiellement porté par les protons, qui définissent du coup les échelles spatio-temporelles pertinentes. Les électrons s'adaptent quasi-instantanément (via le champ électrique, afin de maintenir l'électronneutralité locale) tout en ayant un léger décalage en vitesse avec les protons. C'est ce léger écart qui permet l'existence d'un courant électrique dans le fluide.

2.1.3 Equation d'induction du champ magnétique

Equations de Maxwell

Le champ électromagnétique est régit par les équations de Maxwell

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho_*}{\varepsilon_o} \quad (2.21)$$

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad (2.22)$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.23)$$

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_o \vec{J} + \varepsilon_o \mu_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (2.24)$$

L'idée sous-jacente à la MHD est que les courants responsables des champs sont portés par la matière. Les échelles caractéristiques, spatiale l et temporelle τ , des champs que l'on va considérer sont donc celles de la matière, qui a donc pour vitesse caractéristique $u_o = l/\tau$.

Si l'on prend l'équation (2.24) et que l'on évalue l'importance des courants de déplacement on obtient

$$\frac{|\varepsilon_o \mu_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}|}{|\text{rot } \vec{B}|} \sim \frac{El}{c^2 \tau B} \sim \left(\frac{u_o}{c}\right)^2 \quad (2.25)$$

Dans le cas d'un écoulement non relativiste ($u_o \ll c$) suivi dans ce cours, les courants de déplacement sont négligeables : nous sommes donc dans l'approximation de la magnétostatique pour laquelle

$$\vec{J} = \frac{1}{\mu_o} \text{rot } \vec{B} \quad (2.26)$$

(théorème d'Ampère). Le champ électromagnétique est donc instantanément à l'équilibre et l'on peut négliger la propagation de l'information sous la forme d'ondes électromagnétiques. Cela implique aussi qu'il ne peut y avoir accumulation locale de charges. En effet, la conservation de la charge électrique stipule

$$\frac{\partial \rho_*}{\partial t} + \text{div } \vec{J} = 0 \quad (2.27)$$

et l'on peut vérifier que le rapport du premier terme au second est également en $(u_o/c)^2$. Le circuit électrique (donc la distribution de charges) est stationnaire sur les échelles spatio-temporelles longues liées à la matière. En conséquence, les lignes de courant électrique sont fermées : $\text{div } \vec{J} = 0$, comme celles du champ magnétique (Eq 2.22).

L'équation d'évolution temporelle du champ magnétique est donnée par loi d'induction de Maxwell-Faraday (2.23). Il vient que $E \sim u_o B$. Or, si l'on compare alors les densités d'énergie électrique et magnétique, on obtient $U_e/U_m = \frac{\varepsilon_o E^2/2}{B^2/2\mu_o} \sim (u_o/c)^2$: le champ électrique, à l'échelle MHD, est donc totalement négligeable, bien qu'absolument nécessaire pour déterminer B .

Fondamentalement, le champ électrique est la somme de deux contributions, le champ électrostatique dû à la distribution spatiale de charges et le champ électromoteur dû à la variation temporelle du potentiel vecteur. On a vu que celle-ci pouvait être négligée. Mais comment prendre en compte la première contribution sans avoir à faire le calcul explicite de $\rho_*(\vec{r}, t)$ (et donc, faire fi de l'équation de Maxwell-Gauss (Eq2.21)) ?

Loi d'Ohm

C'est la loi d'Ohm qui va nous donner le lien entre le champ électrique et la matière qui l'engendre. Nous considérons des échelles temporelles portées par la matière mais il convient de distinguer les électrons (légers) et les protons (lourds). Or, le courant $\vec{J} = en(\vec{v}_i - \vec{v}_e)$ provient d'un léger écart de vitesse entre ces deux espèces. Si l'on considère la conservation de l'impulsion pour le fluide constitué par les électrons, on a

$$m_e n_e \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_e \cdot \nabla \right) \vec{v}_e = -\nabla P_e - m_e n_e \vec{\nabla} \Phi_G - n_e e (\vec{E} + \vec{v}_e \times \vec{B}) + m_i n_i \nu_{ie} (\vec{v}_i - \vec{v}_e) \quad (2.28)$$

Le terme de gauche décrivant l'accélération subie par les électrons est proportionnel à leur inertie (de même que la gravité), qui est bien plus faible que celle du fluide moyen, dominé par les protons. Ainsi, sur les échelles de temps pertinentes où l'on perçoit le mouvement du fluide, les électrons peuvent être considérés comme à l'équilibre⁴. Cela signifie que sur ces échelles de temps, le champ électrique a dû s'ajuster (et avec lui, la distribution de charges ρ_*) afin de compenser les autres forces, à savoir la force magnétique, le gradient de pression électronique et l'échange d'impulsion par collisions avec les protons (ce dernier terme étant également issu d'une modélisation avec l'introduction d'une fréquence de collision proton-électron ν_{ie}).

On obtient après un peu d'algèbre, l'expression suivante de la loi d'Ohm

$$\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B} = \eta_m \vec{J} + \frac{\vec{J} \times \vec{B}}{en} - \frac{\nabla P}{en} \quad (2.29)$$

⁴Une image parfois invoquée est celle des vaches constamment entourées de leur cortège de mouches.

où $\eta_m = \frac{m_i \nu_{ie}}{e^2 n}$ est la résistivité ohmique due aux collisions entre électrons et protons. Le second terme est parfois appelé terme de Hall puisqu'il décrit la création d'un champ E par la force de Laplace. Le troisième est un terme de source de champ électrique par une séparation de charges due au gradient de pression électronique. Ces deux derniers termes sont souvent négligeables dans des milieux bien couplés.

Exercice 1 : loi d'Ohm généralisée

Dans les milieux peu ionisés, le plasma va être constitué d'électrons n_e , ions n_i et de neutres n_n . On suppose que ces trois espèces constituent chacune un fluide et que ces trois fluides restent suffisamment couplés de telle sorte qu'utiliser une description monofluide a encore un sens. Montrer que la loi d'Ohm devient dans ce cas

$$\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B} = \eta_m \vec{J} + \frac{\vec{J} \times \vec{B}}{en} - \frac{\nabla P}{en} + \left(\frac{\rho_n}{\rho} \right)^2 \frac{\vec{B} \times (\vec{J} \times \vec{B})}{en_e \rho_i \nu_{in}} \quad (2.30)$$

où $\eta_m = \frac{\rho_n \nu_{ne} + \rho_i \nu_{ie}}{e^2 n_e^2}$ est la résistivité Ohmique due aux collisions entre électrons d'une part et ions et neutres d'autre part. Le terme supplémentaire qui apparait dans la loi d'Ohm généralisée est appelé diffusion ambipolaire car il se comporte comme une sorte de résistivité anisotrope :

- 1- Il introduit une dissipation d'énergie (ce qui n'est pas le cas du terme de Hall).
- 2- $\vec{B} \times (\vec{J} \times \vec{B}) = B^2 \vec{J} - (\vec{J} \cdot \vec{B}) \vec{B}$: ce terme possède bien une contribution selon \vec{J} , interprétable comme une résistivité.

Exercice 2 : "dépliage" des équations MHD

A partir des équations de la MHD monofluide, retrouver les expressions des densités, vitesses et pression des divers fluides qui la composent.

Equation d'induction

En ne prenant que la contribution ohmique dans la loi d'Ohm et en injectant l'expression obtenue de E dans l'équation (2.23) on forme l'équation d'induction du champ magnétique

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \text{rot}(\vec{u} \times \vec{B}) - \text{rot} \eta_m \vec{J} \quad (2.31)$$

Son interprétation physique sera étudiée plus loin. C'est l'une des équations maitresses de la MHD puisqu'elle donne l'évolution temporelle de B mais, comme on l'a vu, elle est soumise à certaines restrictions puisqu'elle même d'une modélisation. Dans des cas plus compliqués (multi-fluides, effet Hall non négligeable), son expression peut s'alourdir considérablement.

2.1.4 Equation d'énergie

En milieu MHD, par rapport à notre évaluation précédente faite en HD (Section 1.1.4), on rajoute à la densité d'énergie totale U_{tot} , une contribution $U_{em} = U_e + U_m$ due à la présence du champ électromagnétique. Celle-ci est régie par le théorème de Poynting

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{B^2}{2\mu_o} + \text{div} \vec{S} = -\vec{J} \cdot \vec{E} \quad (2.32)$$

dans lequel a été négligée ici U_e par rapport à U_m et $\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_o}$ est le vecteur de Poynting. En reprenant le même raisonnement, on obtient une équation de conservation de l'énergie totale

$$\frac{\partial U_{tot}}{\partial t} + \text{div} \left[\vec{\rho} \vec{u} \left(\frac{u^2}{2} + H + \Phi_G \right) - \vec{u} \cdot \mathbf{T} + \vec{S} \right] = 0 \quad (2.33)$$

où $U_{tot} = \frac{\rho u^2}{2} + \rho \Phi_G + U + \frac{B^2}{2\mu_o}$. A nouveau, il convient de se rappeler que les collisions entraînent aussi un transport d'énergie par conduction thermique et qu'un milieu peut se refroidir (resp. être chauffé) en émettant (resp. recevant) un flux radiatif. Ces deux effets, non décrits ici se traduisent par deux termes supplémentaires inclus dans la divergence.

Si l'on s'intéresse plutôt à une équation portant sur la densité d'énergie interne U du fluide, la présence de champ magnétique se traduit par un chauffage supplémentaire

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \text{div} U \vec{u} + P \text{div} \vec{u} = (\mathbf{T} \cdot \nabla) \vec{u} + \vec{J} \cdot (\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) \quad (2.34)$$

Il faut donc faire appel à la loi d'Ohm pour expliciter celui-ci. Dans le cas simple discuté dans ce cours, il ne reste qu'un terme $\eta_m J^2$, appelé aussi effet Joule.

2.1.5 Bilan et retour sur les conditions de validité

L'ensemble complet des équations *usuelles* de la MHD non relativiste à un fluide est donc

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \rho \vec{u} = 0 \quad (2.35)$$

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \right) \vec{u} = -\nabla P + \vec{J} \times \vec{B} - \rho \vec{\nabla} \Phi_G + \text{div} \mathbf{T} \quad (2.36)$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \text{rot}(\vec{u} \times \vec{B}) - \text{rot} \eta_m \vec{J} \quad (2.37)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \text{div} U \vec{u} + P \text{div} \vec{u} = \eta_m \vec{J}^2 + (\mathbf{T} \cdot \nabla) \vec{u} \quad (2.38)$$

$$P = \rho \frac{k_B T}{\mu m_H} \quad (2.39)$$

$$\vec{J} = \frac{1}{\mu_o} \text{rot} \vec{B} \quad (2.40)$$

$$\text{div} \vec{B} = 0 \quad (2.41)$$

En pratique, en remplaçant \vec{J} par le rotationnel de \vec{B} , nous avons 5 équations pour 5 inconnues (ρ , \vec{u} , P , T et \vec{B}), avec la contrainte supplémentaire que les lignes de champ doivent se refermer sur elles-mêmes. Résoudre un problème de MHD consiste à trouver une solution à cet ensemble complet d'équations non linéaires, pour des conditions initiales et aux limites données.

Notion d'échelle MHD

Dans un plasma dominé par la force magnétique, l'interaction matière-champ fournit une vitesse et donc une taille caractéristique. La conservation de l'impulsion fournit en effet

$$\left| \rho \frac{d\vec{u}}{dt} \right| \sim \rho \frac{u_o}{\tau} = \left| \vec{J} \times \vec{B} \right| \sim \frac{B^2}{\mu_o l} \quad (2.42)$$

ce qui donne une vitesse typique

$$V_A = \frac{B}{\sqrt{\mu_o \rho}} \quad (2.43)$$

appelée vitesse d'Alfvén, du nom de l'astrophysicien suédois Hannes Alfvén (1908-1995), qui inventa le nom de magnétohydrodynamique en 1942 et reçut le prix Nobel de physique sur le sujet en 1970.

L'hypothèse fluide suppose que l'on ne résolve pas le mouvement de gyration des protons ($r_{L,i} \sim \frac{m_i}{m_e} r_{L,e}$). On peut donc définir une échelle caractéristique typique, appelée échelle MHD

$$\delta_i = \frac{V_A}{\omega_{ci}} \quad (2.44)$$

qui n'est autre que le rayon de Larmor des protons ayant comme vitesse typique la vitesse d'Alfvén du fluide. Une condition nécessaire d'utilisation de la MHD est donc que $l \gg \delta_i$. A noter qu'il peut exister des cas où $\delta_e < l < \delta_i$: dans ce cas, on peut encore utiliser une approche fluide mais en considérant cette fois le seul mouvement des électrons, les protons étant immobiles à ces échelles spatio-temporelles (dynamique Wistler).

La description MHD à un fluide d'un plasma requiert un couplage suffisant entre les espèces. Cela se traduit par

$$\frac{|\vec{v}_i - \vec{v}_e|}{|\vec{u}|} \sim \frac{J}{enV_A} \sim \frac{\delta_i}{l} \ll 1 \quad (2.45)$$

Electroneutralité est-elle rigoureusement satisfaite ?

La MHD non relativiste est construite sur l'hypothèse d'une électroneutralité locale, c'est à dire $\rho_* = 0$. Ce n'est pas rigoureusement vrai et en effet l'équation (2.21) s'écrit

$$\rho_* = \varepsilon_o \text{div } \vec{E} = \varepsilon_o \text{div}(\eta_m \vec{J} - \vec{u} \times \vec{B}) \quad (2.46)$$

Nous avons vu qu'aux échelles spatio-temporelles considérées, le champ électromagnétique est quasi-stationnaire et $\text{div } \vec{J} = 0$, ce qui fait que seul le second terme ($\vec{u} \times \vec{B}$) pourrait produire une séparation de charges.

$$\frac{\rho_*}{en} \sim \frac{\varepsilon_o \text{div } \vec{u} \times \vec{B}}{en} \sim \frac{\delta_i}{l} \left(\frac{V_A}{c} \right)^2 \quad (2.47)$$

Ainsi, l'approximation $\rho_* = 0$ est bien justifiée en régime non relativiste tandis qu'une déviation significative apparaît en régime relativiste. On appelle cette charge, la charge de Goldreich-Julian (modèle du pulsar).

Exercice : le Viriel magnétisé

Le champ magnétique est présent dans les nuages moléculaires et possède une énergie comparable à l'énergie interne. Si la matière est suffisamment ionisée (ou bien si le couplage ions-neutres est suffisant), le champ va donc exercer une influence sur la matière, qui va se traduire par une modification des bilans énergétiques effectués

1- Ecrire l'expression du Viriel magnétisé.

La contribution du champ vaut

$$\int_{\mathcal{V}} d\mathcal{V} \vec{r} \cdot \vec{f}_m \equiv W_m + \int_{\Sigma} d\vec{S} \cdot \left[(\vec{B} \cdot \vec{r}) \frac{\vec{B}}{\mu_o} - \frac{B^2}{2\mu_o} \vec{r} \right]$$

où

$$W_m = \int_{\mathcal{V}} d\mathcal{V} \frac{B^2}{2\mu_o}$$

est l'énergie magnétique totale contenue dans le volume \mathcal{V} . L'expression du théorème du Viriel pour un système autogravitant, magnétisé, isolé et occupant un volume donné est alors

$$2T + 3(\gamma - 1)U + V + W_m = \frac{1}{2} \frac{d^2 I}{dt^2} - \int_{\Sigma} d\vec{S} \cdot \left[(\vec{B} \cdot \vec{r}) \frac{\vec{B}}{\mu_o} - \left(P + \frac{B^2}{2\mu_o} \right) \vec{r} \right]. \quad (2.48)$$

2- Re-examiner la notion de taille (ou masse) caractéristique d'équilibre d'un nuage magnétisé.

La présence de champ magnétique modifie l'expression du rayon minimal de stabilité R_c . En fait, le champ magnétique offre un support supplémentaire contre l'effondrement, c'est à dire un rayon R d'un nuage plus grand pour une même pression extérieure. Une façon simple de le voir est d'exprimer les termes magnétiques sous la forme suivante

$$W_m + \int_{\Sigma} d\vec{S} \cdot \frac{\vec{B}}{\mu_o} (\vec{B} \cdot \vec{r}) = \beta \frac{\Phi^2}{\mu_o R}$$

où $\Phi = \int_{\Sigma_o} \vec{B} \cdot d\vec{S}$ est le flux magnétique à travers le plan équatorial du nuage et β est un paramètre qui devrait être de l'ordre de l'unité (comme α , il dépend de la géométrie). Un équilibre est possible si

$$P_{ext} = \frac{1}{4\pi R^3} \left(3MC_s^2 - \alpha \frac{GM^2}{R} + \beta \frac{\Phi^2}{\mu_o R} \right),$$

correspondant à un rayon minimal d'équilibre

$$R_c = \alpha \frac{4GM}{9C_s^2} \left(1 - \frac{\beta \Phi^2}{\alpha \mu_o GM^2} \right).$$

On voit immédiatement sur cette expression que le support disparaît lorsque le rapport masse sur flux magnétique vaut

$$\frac{M_{\Phi}}{\Phi} = \left(\frac{\beta}{\alpha \mu_o G} \right)^{1/2} \quad (2.49)$$

correspondant à la masse critique

$$M_{\Phi} \simeq 10^3 \left(\frac{B}{30 \mu\text{G}} \right) \left(\frac{R}{2 \text{ pc}} \right)^2 M_{\odot}$$

où l'on a supposé $\Phi = \pi B R^2$ (champ uniforme) et pris $(\beta/\alpha)^{1/2} \simeq 0.13$ (valeur fournie par des simulations). Pour $M < M_{\Phi}$, le nuage est dit *sous-critique* et l'augmentation de la pression externe ne va pas provoquer un effondrement. Pour $M > M_{\Phi}$, le nuage est dit *super-critique* et l'effondrement est possible.

2.2 Effets magnétiques

2.2.1 Les deux régimes de la MHD

L'équation d'induction

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \text{rot}(\vec{u} \times \vec{B}) - \text{rot} \eta_m \vec{J} \quad (2.50)$$

est l'équation maîtresse décrivant l'évolution temporelle de B . Celle-ci dépend de deux termes, l'un lié au mouvement du fluide \vec{u} (advection) et l'autre à ses propriétés microscopiques η_m (collisions). Le rapport de deux termes forme un nombre sans dimension

$$\mathcal{R}_m = \frac{|\text{rot}(\vec{u} \times \vec{B})|}{|\text{rot} \eta_m \vec{J}|} \sim \frac{u_o l}{\nu_m} \quad (2.51)$$

où $\nu_m = \eta_m/\mu_o$ a la même dimension qu'une viscosité cinématique et est appelé coefficient de diffusion magnétique ou diffusivité. Dans la majorité des cas en astrophysique et dans les machines de fusion, ce rapport est très élevé ($\mathcal{R}_m \sim 10^9$ dans les Tokamaks et supérieur à 10^{12}), justifiant la non prise en compte des aspects collisionnels. En tout état de cause, la valeur du nombre de Reynolds magnétique détermine deux cas limites importants en MHD.

MHD idéale

La MHD dite idéale est obtenue lorsque $\mathcal{R}_m \gg 1$ avec

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \text{rot}(\vec{u} \times \vec{B}) \quad (2.52)$$

Cette équation est formellement équivalente à celle de la vorticité obtenue dans le cas d'un fluide parfait incompressible ou barotropique (Eq 1.34). Il y a donc une analogie forte entre vorticité et champ magnétique MHD.

Théorème du gel 1 (Alfvén, 1943) : en MHD idéale, le flux magnétique à travers une surface régulière définie par un contour Γ fermé est constant, quelles que soient les déformations subies par ce contour au cours du temps.

La démonstration de ce théorème est la même que celle du théorème de Kelvin pour la vorticité (section 1.3).

Théorème du gel 2 (Whalen, 1946) : en MHD idéale, la quantité \vec{B}/ρ est transportée par l'écoulement.

En combinant l'équation (2.52) et la conservation de la masse, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\vec{B}}{\rho} &= \frac{1}{\rho} \frac{d\vec{B}}{dt} - \frac{\vec{B}}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} \\ \text{rot}(\vec{u} \times \vec{B}) &= \vec{u} \text{div} \vec{B} - \vec{B} \text{div} \vec{u} + \vec{B} \cdot \nabla \vec{u} - \vec{u} \cdot \nabla \vec{B} \\ \frac{d\vec{B}}{dt} &= \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{B} = \vec{B} \cdot \nabla \vec{u} - \vec{B} \text{div} \vec{u} \end{aligned}$$

ce qui est fournit

$$\frac{d}{dt} \frac{\vec{B}}{\rho} = \frac{\vec{B}}{\rho} \cdot \nabla \vec{u} \quad (2.53)$$

qui est bien l'équation du transport \vec{B}/ρ par le flot \vec{u} (cf section 1.3). CQFD.

Les propriétés décrites par ces deux théorèmes, ont amené à dire que le champ et la matière sont gelés l'un à l'autre. La raison physique est simple : c'est une conséquence macroscopique du rayon de Larmor et du piégeage introduit par celui-ci. Qui, du fluide ou du champ, entraine l'autre dépend de la densité d'énergie ($\rho u^2/2$ versus $B^2/2\mu_o$), autrement dit du nombre de Mach Alfv nique $m = u/V_A$. Un écoulement sub-Alfv nique sera soumis au champ tandis qu'un écoulement super-Alfv nique entrainera avec lui le champ magnétique.

Pour finir, il faut remarquer que le champ électrique en MHD idéale est fourni par $\vec{E} = -\vec{u} \times \vec{B}$ et est donc perpendiculaire au champ magnétique. Une conséquence astro et géophysique importante est qu'il est impossible dans ces conditions d'avoir un champ électrique parallèle, condition requise pour accélérer des particules le long des lignes de champ B.

MHD résistive

Ce cas (rare) est obtenu lorsque $\mathcal{R}_m \ll 1$. Lorsque la résistivité est constante, l'équation d'induction (2.54) devient

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nu_m \Delta \vec{B} \quad (2.54)$$

qui est une simple équation de diffusion (ce qui justifie le nom de diffusivité pour ν_m).

Prenons le cas 1D d'un champ uniquement selon x tel que, à $t = 0$, on a une discontinuité localisée en $x = 0$ avec B passant de $-B_o$ à $+B_o$. Cette situation correspond à un feuillet de courant (current sheet) localisé en $x = 0$. On assistera alors à la diffusion spatiale de ce feuillet de telle sorte que la transition entre les deux valeurs de champ s'effectue sur une taille $L \sim \sqrt{\nu_m t}$ augmentant au cours du temps. Puisque, dans ce feuillet, le champ y est nul, on voit que le champ diffuse vers l'infini tandis que les courants sont localement dissipés par effet Joule.

Cette diffusion ne s'accompagne ici d'aucun mouvement global du fluide : champ et matière ne sont plus gelés l'un à l'autre.

Prenons le cas du Soleil dont on sait qu'il possède un champ magnétique. Pour les paramètres (densité, température) typiques de l'intérieur solaire, on estime un temps caractéristique de diffusion du champs de l'ordre de $\tau_d \sim R_\odot^2/\nu_m \sim 10^{10} yr$ comparable à l'âge du Soleil. Sur la base de cette analyse simpliste, on pourrait penser que le champ observé actuellement serait d'origine primordiale.

Le problème c'est qu'il y a d'autres sources de diffusion que les seules collisions microscopiques. En gros, ν_m est le produit d'une taille typique de corrélation et d'une vitesse. Dans ce cas de collisions, ce seraient le libre parcours moyen et la vitesse thermique. Mais dans un milieu turbulent ou simplement convectif, des corrélations entre des zones étendues de fluide se produisent et donnent aussi lieu à une diffusion (appelée dans ce cas diffusion turbulente). Les estimations basées sur cette dernière donnent cette fois-ci un temps de diffusion de l'ordre de quelques dizaines d'années seulement. Le champ ne peut donc être d'origine primordial et il faut trouver un mécanisme capable de le régénérer en permanence. Ce mécanisme est appelé *effet dynamo*.

2.2.2 La force magnétique

La densité de force magnétique (appelée parfois force de Laplace) s'écrit

$$\begin{aligned} \vec{f}_m = \vec{J} \times \vec{B} &= \text{rot} \left(\frac{\vec{B}}{\mu_o} \times \vec{B} \right) = -\nabla \frac{B^2}{2\mu_o} + \vec{B} \cdot \nabla \frac{\vec{B}}{\mu_o} \\ &= \text{div} \mathbf{M} = \text{div} \left(-\frac{B^2}{2\mu_o} \mathbf{I} + \frac{\vec{B} \otimes \vec{B}}{\mu_o} \right) \end{aligned} \quad (2.55)$$

Le tenseur $\mathbf{M}_{ij} = -\frac{B^2}{2\mu_o} \delta_{ij} + B_i B_j / \mu_o$ est appelé tenseur de Maxwell.

Le premier terme décrit un effet de gradient de pression magnétique $P_m = \frac{B^2}{2\mu_o}$ isotrope. Il est alors tentant d'utiliser un lien entre pression et densité énergie interne équivalent à celui d'un gaz parfait, à savoir $U_m = P_m/(\gamma_m - 1)$: on voit dans ce cas que le champ magnétique MHD se comporterait comme un fluide avec $\gamma_m = 2$.

Le second terme est un effet nouveau, lié à une tension. Considérons une ligne de champ magnétique $\vec{B} = B\vec{\tau}$, où $\vec{\tau}$ est un vecteur unitaire qui lui est tangent. On a alors $d\vec{\tau} = -\vec{n}ds/\mathcal{R}_c$ où \mathcal{R}_c est le rayon de courbure local, ds un déplacement élémentaire le long de la ligne de champ et \vec{n} le vecteur unitaire perpendiculaire à $\vec{\tau}$. On voit alors

$$\begin{aligned} \vec{B} \cdot \nabla \frac{\vec{B}}{\mu_o} &= \frac{B}{\mu_o} \frac{d}{ds} (B\vec{\tau}) = \left(\frac{d}{ds} \frac{B^2}{2\mu_o} \right) \vec{\tau} + \frac{B^2}{\mu_o} \frac{d\vec{\tau}}{ds} \\ &= \left(\frac{d}{ds} \frac{B^2}{2\mu_o} \right) \vec{\tau} - \frac{B^2}{\mu_o} \frac{\vec{n}}{\mathcal{R}_c} \end{aligned}$$

où le premier terme est parallèle à \vec{B} tandis que le second lui est perpendiculaire. C'est exactement

ce à quoi on s'attend dans une corde élastique (et justifie l'analogie souvent faite pour les lignes de champ magnétique).

La force magnétique s'écrit alors

$$\vec{f}_m = -\nabla_{\perp} \frac{B^2}{2\mu_o} - \frac{B^2}{\mu_o} \frac{\vec{n}}{\mathcal{R}_c} \quad (2.56)$$

où ∇_{\perp} est le gradient auquel on a retiré la contribution parallèle (selon $\vec{\tau}$). La force magnétique est donc, comme il se doit, perpendiculaire à \vec{B} : l'effet de gradient de pression isotrope est exactement compensé dans la direction du champ par une composante de la tension. La force de Laplace comprime donc le plasma dans la direction perpendiculaire à \vec{B} et a tendance à rendre les lignes de champ raides.

2.2.3 Notion d'hélicité magnétique

L'hélicité est par définition

$$K = \int_V \vec{A} \cdot \vec{B} dV \quad (2.57)$$

où $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ et V un volume d'étude donné. L'hélicité est donc par nature un concept global et non local et n'intervient que dans quelques problèmes particuliers mettant en jeu des contraintes topologiques (dynamo, reconnexion, turbulence). Dans la plupart des calculs de dynamique, ce concept n'est pas utile.

A partir de la définition, il est aisé de vérifier que $K = 0$ pour un champ uniquement vertical (B_z) ou uniquement toroidal (B_{ϕ}). Par contre, un champ hélicoïdal possède une hélicité non nulle, à condition toutefois que le pas de l'hélice ne soit pas constant. L'hélicité offre une contrainte topologique (cf plus bas, régime de MHD idéale) car il n'est pas aisé de la modifier.

Prenons le cas simple de tubes de flux magnétique imbriqués l'un dans l'autre, à la manière de deux cerceaux métalliques. Chaque tube a une section S constante et constitue un contour \mathcal{C} . L'hélicité du premier tube est $K_1 = \int_{V_1} \vec{A} \cdot \vec{B} dV$ avec \vec{A} constant dans le tube et $\vec{B} = 0$ en dehors. On peut donc écrire

$$K_1 = \oint_{\mathcal{C}_1} \vec{A} \cdot d\vec{l} \int_{S_1} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \Psi_1 \oint_{\mathcal{C}_1} \vec{A} \cdot d\vec{l} \quad (2.58)$$

On peut faire de même pour le deuxième tube qui passe à l'intérieur du contour défini par le premier et on obtient $K_2 = \Psi_2 \oint_{\mathcal{C}_2} \vec{A} \cdot d\vec{l}$. Or, comme $\vec{A} = 0$ en dehors du tube, on peut ramener par continuité un contour \mathcal{C}' au voisinage immédiat de S_2 à \mathcal{C}_1 . Ainsi

$$\Psi_2 = \int_{S_2} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_{S_2} \text{rot } \vec{A} \cdot d\vec{S} = \oint_{\mathcal{C}'} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \oint_{\mathcal{C}_1} \vec{A} \cdot d\vec{l} \quad (2.59)$$

et on en déduit que

$$K_1 = \Psi_1 \Psi_2 = K_2 \quad (2.60)$$

L'hélicité totale comprise dans le volume incluant les deux tubes est donc $K = 2\Psi_1\Psi_2$. On voit bien que pour annuler K , il faudrait que les deux tubes puissent se désimbriquer l'un de l'autre. Comme $\text{div } \vec{B} = 0$, cel n'est possible que s'ils peuvent "glisser" l'un à travers l'autre... Ceci est donc bien une contrainte topologique.

Le calcul de K rappelle celui du coefficient d'induction mutuelle M entre deux circuits parcourus par un courant permanent I_1 et I_2 . On montre en effet (cf cours magnétostatique) que

$$\begin{aligned} \Phi_{12} &= \int_{S_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_2 = I_1 M_{12} \\ \Phi_{21} &= \int_{S_1} \vec{B}_2 \cdot d\vec{S}_1 = I_2 M_{21} \end{aligned}$$

avec $M_{12} = M_{21} = M$. Il y a donc une analogie possible entre hélicité comprise dans un volume donné et l'auto-inductance ou inductance mutuelle.

2.2.4 Cas particuliers importants

Il existe plusieurs cas particuliers importants en champ fort, c'est à dire lorsque le champ magnétique est très intense. Cela se mesure par un paramètre sans dimension

$$\beta = \frac{P}{P_m} \sim \frac{c_s^2}{V_A^2} \quad (2.61)$$

appelé "beta du plasma". Il mesure l'importance relative de la force de Laplace et de la pression cinétique du plasma. Un champ fort est établi pour $\beta \ll 1$.

Champ potentiel

C'est une situation obtenue lorsque $\vec{J} = 0$ ("current-free") partout dans le plasma. Etant donné que \vec{J} est le rotationnel de \vec{B} , il existe une fonction potentielle scalaire Ψ telle que

$$\vec{B} = \nabla \Psi \quad (2.62)$$

Ce potentiel est généralement déterminé par $\Delta \Psi = 0$ (puisque $\text{div } \vec{B} = 0$ et est donc entièrement imposé par les conditions aux limites choisies au bord du volume d'étude. L'hypothèse d'un champ potentiel est justifiée lorsque le plasma ne porte pas (ou plus) de courant (cela peut se produire en particulier lorsque le milieu devient très peu dense).

Théorème : Un champ potentiel, dans un volume V donné avec \vec{B} fixé au bord, correspond à un état d'énergie magnétique minimale.

La démonstration utilise une méthode variationnelle. L'énergie étant $W = \int_V U_m dV$, on a $\delta W = \int_V dV \vec{B} \cdot \delta \vec{B} / \mu_o$ avec $\delta \vec{B} = \text{rot } \delta \vec{A} = 0$ sur les bords du domaine (donc sur la surface S délimitant le volume V). En utilisant la formule de calcul vectoriel

$$\text{div} (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot \text{rot } \vec{A} - \vec{A} \cdot \text{rot } \vec{B} \quad (2.63)$$

il vient

$$\begin{aligned} \delta W &= \int \frac{\vec{B}}{\mu_o} \cdot \text{rot } \delta \vec{A} dV = \int \left(\text{div } \delta \vec{A} \times \frac{\vec{B}}{\mu_o} + \delta \vec{A} \cdot \text{rot } \vec{B} \right) dV \\ &= \oint_S \left(\delta \vec{A} \times \frac{\vec{B}}{\mu_o} \right) \cdot d\vec{S} + \int \delta \vec{A} \cdot \text{rot } \vec{B} dV \end{aligned}$$

On a donc bien $\delta W = 0$ pour tout V si $\text{rot } \vec{B} = 0$ dans tout le domaine. cqfd. La conséquence de ce théorème est que, à même volume V et conditions aux limites, tout champ magnétique possédant des courants non nuls dans le volume aura une énergie plus élevée.

Champ "force-free"

On dit qu'un champ est sans force ("force free") lorsque la relation

$$\vec{J} \times \vec{B} = 0 \quad (2.64)$$

est vérifiée dans tout le fluide étudié avec $\vec{J} \neq 0$. Cela ne se produit que lorsque l'inertie de la matière est totalement négligeable devant le champ magnétique. La condition précédente est vérifiée pour

$$\vec{J} = \alpha \vec{B} \quad (2.65)$$

avec $\alpha(\vec{r})$ un coefficient constant le long de lignes de champ magnétique (car $\text{div} \vec{J} = 0$ implique $\vec{B} \cdot \nabla \alpha = 0$). On dit d'un champ force-free qu'il est linéaire lorsque α est une vraie constante.

Théorème (Woltjer, 1958) : en MHD idéale, l'hélicité présente dans un volume fini V , avec \vec{B} fixé et constant aux bords, est un invariant et l'état d'énergie minimale est un champ force-free stationnaire linéaire.

$$\begin{aligned} \frac{dK}{dt} &= \int_V \frac{\partial}{\partial t} (\vec{A} \cdot \vec{B}) dV = \int \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \text{rot} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) dV \\ &= \int \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot \vec{B} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot \text{rot} \vec{A} - \text{div} (\vec{A} \times \partial_t \vec{A}) \right) dV \\ &= 2 \int_V (\vec{u} \times \vec{B}) dV - \oint_S (\vec{A} \times \partial_t \vec{A}) \cdot d\vec{S} \end{aligned}$$

où l'équation d'induction (2.52) a été utilisée. Ainsi, puisque $\partial_t \vec{A} = 0$ sur la surface délimitant le volume, K est bien un invariant.

La configuration magnétique doit assurer $\dot{K} = 0$ tout en extrémisant l'énergie W . Il faut noter que l'existence de la contrainte ne garantit pas forcément que la configuration magnétique atteigne un état d'énergie minimum absolu. Pour cela, il faudrait que l'hélicité soit nulle, le champ étant alors un simple champ potentiel. On cherche donc à quelle condition l'intégrale $I = W - \lambda K$ est extrémale, λ étant un multiplicateur de Lagrange (constant).

$$\begin{aligned} \delta I &= \delta W - \lambda \delta K \\ &= \oint_S \left(\delta \vec{A} \times \frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) \cdot d\vec{S} + \int \delta \vec{A} \cdot \text{rot} \vec{B} dV - \lambda \int_V \left(\delta \vec{A} \cdot \text{rot} \vec{A} + \vec{A} \cdot \text{rot} \delta \vec{A} \right) dV \\ &= \int \delta \vec{A} \cdot \text{rot} \vec{B} dV - \lambda \int \left(\vec{A} \cdot \text{rot} \delta \vec{A} - \delta \vec{A} \cdot \text{rot} \vec{A} \right) dV - 2\lambda \int \delta \vec{A} \cdot \text{rot} \vec{A} dV \\ &= -\lambda \oint_S (\delta \vec{A} \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} + \int_V \left(\delta \vec{A} \cdot \text{rot} \vec{B} - 2\lambda \delta \vec{A} \cdot \text{rot} \vec{A} \right) dV \end{aligned}$$

Et donc, $\delta I = 0 \quad \forall \delta \vec{A}$ n'est réalisé que pour $\text{rot} \vec{B} = 2\lambda \text{rot} \vec{A}$, c'est à dire un champ force free avec $\alpha = 2\lambda$. c.qfd.

Exercice : équilibre d'une colonne plasma

Est-il possible de maintenir en équilibre une colonne cylindrique infinie, de rayon a , constituée d'un plasma de pression P ? On néglige ici toute gravité ainsi que la viscosité. On suppose de plus résolu le problème de l'équilibre le long de la colonne et l'on se pose uniquement la question de l'équilibre transverse. Ce problème est une version hautement simplifiée de l'équilibre nécessaire pour certaines machines à fusion.

L'équation transverse (coordonnées cylindriques) s'écrit

$$\frac{\partial P}{\partial r} = J_\phi B_z - J_z B_\phi \quad (2.66)$$

Le premier terme capable de s'opposer au gradient de pression (déconfinant) dû à la présence d'un plasma chaud nécessite un champ vertical B_z qui serait dû à un courant toroidal J_ϕ . En fusion, ce type d'équilibre est appelé **θ -pinch** ($J_\theta = J_\phi$). L'autre configuration possible d'équilibre, **Z-pin****ch**, serait obtenue par un courant vertical produisant un champ toroidal B_ϕ .

Le problème majeur du Z-pin

ch est qu'il est très instable. Cette voie a donc été en partie abandonnée. Le θ -pinch est plus stable mais la présence d'un champ vertical permet des pertes de particules aux bouts le long du champ. Pour remédier à ce problème, il "suffit" de refermer la colonne sur elle-même et former ainsi un tore. C'est la configuration actuelle des Tokamaks. Cependant, un plasma en configuration torique engendre un courant en son sein, ce qui va créer une autre composante du champ magnétique : celui-ci sera alors hélicoidal (**screw-pin****ch**).

Si on revient au problème simple de la colonne cylindrique infinie avec un B_z et un B_ϕ , son équilibre est donné par

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(P + \frac{B_z^2}{2\mu_o} \right) = -\frac{B_\phi}{\mu_o r} \frac{\partial r B_\phi}{\partial r} = -\frac{\mu_o}{8\pi^2 r^2} \frac{\partial I^2}{\partial r} \quad (2.67)$$

où $I(r) = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \frac{2\pi}{\mu_o} r B_\phi$ est le courant circulant le long de la colonne jusqu'à un rayon r . La solution est alors

$$I^2(a) = -\frac{8\pi^2}{\mu_o} a^2 P_{tot}(a) + \int_0^a \frac{16\pi^2}{\mu_o} r P_{tot} dr \quad (2.68)$$

et dépend du profil radial de $P_{tot} = P + \frac{B_z^2}{2\mu_o}$. Dans le cas simple d'une colonne isotherme (avec $T_e = T_p = T$) sans champ magnétique vertical (Z-pin

ch), $P = 2nk_B T$ et en posant $N\pi a^2 = \int_0^a 2\pi n r dr$, on obtient

$$a = \frac{I}{\sqrt{16\pi^2 N k_B T / \mu_o}} \quad (2.69)$$

le rayon d'équilibre en fonction du courant I , température T et nombre total d'électrons N par unité de longueur (relation de Bennett).

2.3 Ondes MHD

En milieu HD, nous avons vu que la pression agissait comme une force de rappel lors d'une perturbation quelconque et qu'il s'ensuivait la formation d'ondes sonores se propageant à partir du point de création de cette perturbation. Dans un milieu MHD, la force de Laplace va également intervenir. Une façon simple de ne pas prendre en compte la force de pression est de considérer dans un premier temps un milieu incompressible. On verra le cas compressible ensuite.

2.3.1 Ondes d'Alfvén

On considère le cas d'un milieu homogène infini avec ρ constant (milieu incompressible), initialement statique, sans gravité, isotherme et traversé par un champ magnétique uniforme $\vec{B}_o = B_o \vec{e}_z$. On néglige viscosité et résistivité : fluide parfait en MHD idéale. Comme d'habitude, on effectue une perturbation $\delta \vec{u}$, $\delta \rho = 0$, $\vec{B} = \vec{B}_o + \delta \vec{B}$ et on linéarise les équations.

La conservation de la masse donne $div \delta \vec{u} = 0$, tandis que la conservation de l'impulsion

$$\rho \frac{\partial \delta \vec{u}}{\partial t} = \delta \vec{f}_m = -\nabla \delta \frac{B^2}{2\mu_o} + \vec{B}_o \cdot \nabla \frac{\delta \vec{B}}{\mu_o} \quad (2.70)$$

La divergence de cette équation donne alors $div \delta \vec{f}_m = \Delta(\delta \vec{B} \cdot \vec{B}_o) = 0$ dans tout l'espace. La solution de ce laplacien, sans terme de source, dépend uniquement des conditions aux limites.

Or, à l'infini, on doit avoir $\delta\vec{B} = 0$. Une solution triviale est alors $\delta\vec{B} \cdot \vec{B}_o = \text{Constante} = 0$ (sinon l'énergie serait infinie). Ainsi, on voit que le champ magnétique perturbé est nécessairement perpendiculaire au champ initial, annulant de ce fait toute contribution dans $\delta\vec{f}_m$ de la pression magnétique ($-\nabla\delta P_m = 0$). En régime incompressible, la tension magnétique agit comme force de rappel et permet l'existence d'ondes.

Les équations linéarisées sont donc

$$\frac{\partial\delta\vec{u}}{\partial t} = \frac{B_o}{\mu_o\rho} \frac{\partial\delta\vec{B}}{\partial z} \quad (2.71)$$

$$\frac{\partial\delta\vec{B}}{\partial t} = B_o \frac{\partial\delta\vec{u}}{\partial z} \quad (2.72)$$

où la seconde est obtenue à partir de l'équation d'induction écrite sous la forme (2.53). En dérivant la seconde par rapport au temps et l'insérant dans la première on obtient

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - V_A^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \delta\vec{B} = 0 \quad (2.73)$$

où $V_A = B_o/\sqrt{\mu_o\rho}$ est la vitesse d'Alfvén déjà rencontrée. Cette équation admet les ondes planes $\delta B = \delta B_o e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$ pour solution, pour lesquelles nous obtenons la relation de dispersion suivante

$$\omega = V_A k_z = V_A k \cos \theta \quad (2.74)$$

pour une onde se propageant selon un vecteur d'onde \vec{k} faisant un angle θ avec \vec{B}_o . La vitesse de phase $V_\phi = \omega/k = V_A \cos \theta$ est la vitesse à laquelle se déplace un mode (onde plane) particulier. Une onde réelle est une superposition d'ondes planes dont la vitesse de propagation est plutôt donnée par la vitesse de groupe $\vec{v}_g = \nabla_k \omega$. Ici, $\partial_x \omega = \partial_y \omega = 0$ et $\vec{v}_g = \partial_z \omega \vec{e}_z = V_A \vec{e}_z$.

Les ondes décrites ici sont appelées les ondes d'Alfvén et correspondent à des perturbations magnétiques qui se propagent dans un milieu MHD même incompressible. Ce sont des ondes transversales ($\delta\vec{B} \parallel \delta\vec{u} \perp \vec{k}$), se propageant essentiellement le long des lignes de champ magnétique, à la vitesse d'Alfvén. Attention, ce n'est pas une onde électromagnétique mais MHD. Une onde d'Alfvén peuvent se représenter comme des ébranlements purement magnétiques n'induisant pas de compression du milieu, l'exact équivalent des ondes se propageant le long de cordes.

On a $\delta\vec{u} = \pm \frac{\delta\vec{B}}{\sqrt{\mu_o\rho}}$ (le signe $-$ dans le sens des z positifs, le signe $+$ dans le sens négatif) et il y a donc équipartition entre l'énergie cinétique et magnétique.

Le champ électrique, donné par la loi d'Ohm, est alors $\vec{E} = -\delta\vec{u} \times \vec{B}_o$ et $(\delta\vec{B}, \vec{B}_o, \vec{E})$ forment un trièdre direct pour l'onde se propageant dans la direction \vec{B}_o .

2.3.2 Ondes magnétosoniques

Lorsqu'un milieu compressible est soumis à une perturbation (par ex $\rho = \rho_o + \delta\rho$), nous allons avoir trois et non plus deux quantités reliées entre elles : $\delta\vec{u}$, $\delta\vec{B}$ et $\delta\rho$. La méthode utilisée ici va permettre de trouver les ondes supplémentaires capables de se propager dans ce cas là en éliminant du calcul les ondes d'Alfvén. C'est un pur artefact de la méthode, celles-ci étant également présentes dans un milieu compressible. Les équations maitresses sont

$$\frac{\partial\delta\rho}{\partial t} = -\rho_o \text{div} \delta\vec{u} \quad (2.75)$$

$$\rho_o \frac{\partial\delta\vec{u}}{\partial t} = -c_s^2 \nabla \delta\rho + \delta\vec{f}_m \quad (2.76)$$

$$\frac{\partial\delta\vec{B}}{\partial t} = \text{rot}(\delta\vec{u} \times \vec{B}_o) \quad (2.77)$$

avec $\delta \vec{f}_m = -\nabla \frac{\delta \vec{B} \cdot \vec{B}_o}{\mu_o} + \vec{B}_o \cdot \nabla \frac{\delta \vec{B}}{\mu_o}$

L'astuce consiste à prendre la divergence de l'équation sur l'impulsion : $\text{div} \delta \vec{f}_m = -\Delta \delta P_m$ et le terme de tension disparaît, faisant ainsi disparaître du même coup les ondes d'Alfvén. En combinant avec la première équation, on obtient

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\delta \rho}{\rho_o} = c_s^2 \Delta \frac{\delta \rho}{\rho_o} + V_A^2 \Delta \frac{\delta B_z}{B_o} \quad (2.78)$$

On voit que seule la composante selon z de $\delta \vec{B}$ intervient ici. Celle-ci est donnée par l'induction

$$\frac{\partial \delta \vec{B}}{\partial t} = \vec{B}_o \frac{\partial}{\partial t} \frac{\delta \rho}{\rho_o} + B_o \frac{\partial \delta \vec{u}}{\partial z} \quad (2.79)$$

tandis que δu_z est fournie par la composante selon z de la conservation de l'impulsion

$$\rho_o \frac{\partial \delta u_z}{\partial t} = -c_s^2 \frac{\partial \delta \rho}{\partial z} \quad (2.80)$$

A noter que la contribution magnétique (pression et tension) s'annule puisque perpendiculaire à B. En combinant ces trois équations, on obtient le système suivant

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\delta \rho}{\rho_o} - c_s^2 \Delta \frac{\delta \rho}{\rho_o} - V_A^2 \Delta \frac{\delta B_z}{B_o} = 0 \quad (2.81)$$

$$c_s^2 \left(\Delta - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \frac{\delta \rho}{\rho_o} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\delta B_z}{B_o} + V_A^2 \Delta \frac{\delta B_z}{B_o} = 0 \quad (2.82)$$

Il admet pour solutions des ondes planes du type $\delta B = \delta B_o e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$ obéissant à la relation de dispersion

$$\omega^4 - k^2 (V_A^2 + c_s^2) \omega^2 + V_A^2 c_s^2 k_z^2 = 0 \quad (2.83)$$

Celle-ci possède deux solutions, correspondant à deux types d'ondes appelées ondes magnétosoniques et de vitesse de phase $v = \omega/k$

$$v_{\pm} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(V_A^2 + c_s^2 \pm \sqrt{(V_A^2 + c_s^2)^2 - 4V_A^2 c_s^2 \cos^2 \theta} \right)} \quad (2.84)$$

où $k_z = k \cos \theta$. Une onde sonore pure n'existe plus, il y a désormais un couplage entre la pression magnétique et la pression cinétique. Les ondes avec $v_- = v_{SM}$ sont les ondes magnétosoniques lentes (slow) et celles avec $v_+ = v_{FM}$ sont les ondes magnétosoniques rapides (fast). On appelle parfois l'onde d'Alfvén (qui existe en sus de ces deux là) l'onde intermédiaire puisque $v_{SM} \leq V_A \leq v_{FM}$.

Le long de \vec{B}_o ($\theta = 0$), on a $v_{SM} = c_s$ et $v_{FM} = V_A$ tandis que perpendiculairement ($\theta = \pi/2$), $v_{SM} = 0$ et $v_{FM} = \sqrt{V_A^2 + c_s^2}$. Ainsi, le mode lent se comporte comme une onde sonore contrainte cependant de se propager à proximité du champ non perturbé. Le mode rapide se comporte plutôt comme une onde d'Alfvén, mais étant cette fois-ci compressionnelle, elle peut se propager dans toutes les directions.

A noter qu'une onde magnétosonique induit sur son passage une compression et une raréfaction des lignes champ ainsi que de la matière. Un chauffage local de la matière est alors possible, les ondes perdant de l'énergie au bénéfice de la matière. Cet effet ne peut évidemment pas être attrapé avec des équations linéaires.