Tarea 3.05: Método de Broyden

Es una alternativa al método de Newton para resolver sistemas de ecuaciones no lineales:

$$F(x)=0, \quad F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

donde $F(x) = [f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)]^T$

El método de Newton requiere calcular y actualizar el Jacobiano exacto $J(x) = \frac{\partial F}{\partial x}$ en cada iteración, lo cual puede ser complicado.
Broyden propone aproximar el Jacobiano y actualizarlo numéricamente a medida que avanzan las iteraciones sin volver a calcular derivadas.

Newton: $J(x_k)s_k = -F(x_k), \quad x_{k+1} = x_k + s_k$

Broyden: $B_k s_k = -F(x_k), \quad x_{k+1} = x_k + s_k$ ← donde B_k es una aproximación al Jacobiano $J(x_k)$

Después de calcular x_{k+1} se tiene $y_k = F(x_{k+1}) - F(x_k)$

La matriz B_{k+1} debe cumplir aproximadamente la relación secante: $B_{k+1}s_k \approx y_k$

Broyden propone actualizar B_k con el cambio más pequeño posible que satisfaga esta condición:

$$B_{k+1} = B_k + \frac{(y_k - B_k s_k)s_k^T}{s_k^T s_k}$$

Esta fórmula corrige el Jacobiano anterior con una sola actualización de rango uno (muy eficiente).

Pasos:

1. Elegir un vector inicial x_0 y una matriz inicial B_0 (puede ser la identidad)
2. Calcular $F(x_0)$.
3. Para $k=0,1,2,\dots$: Resolver $B_k s_k = -F(x_k)$.
   Actualizar $x_{k+1} = x_k + s_k$
   Calcular $F(x_{k+1})$
   → Actualizar B_{k+1} con Broyden
   Detener cuando $\|F(x_{k+1})\|$ o $\|s_k\|$ sean menores a la tolerancia.

característica	Newton	Broyden
Requiere Jacobiano	Sí, en cada iteración	No
Costo computacional	Alto (derivadas y cálculo del J)	Más bajo (usa actualización numérica)
Tipo de convergencia	Cuadrática	superlineal
precisión	mayor	menor, pero suficiente en la práctica
robustez	puede fallar si el Jacobiano es difícil o mal condicionado	más estable y flexible numéricamente
uso típico	problemas donde se conoce fácilmente el J	problemas grandes o con derivadas difíciles

Convergencia

Newton: convergencia cuadrática $(O(\|x_{k+1}-x^*\|^2))$

Broyden: convergencia superlineal $(O(\|x_{k+1}-x^*\|^{1+\epsilon})$, con $0<\epsilon<1)$

El método de Broyden es un método cuasi-Newton que evita el cálculo repetido del Jacobiano al resolver sistemas no lineales. En lugar de derivar explícitamente las funciones, actualiza una aproximación del Jacobiano usando información de las evaluaciones previas. Aunque converge más lentamente que el método de Newton, requiere menos cómputo por iteración y suele ser más eficiente cuando las derivadas son difíciles de obtener.