Tarea 1-03

1. Importancia de las normas vectoriales y matriciales en la programación de algoritmos de álgebra lineal numérica.

Las normas son esenciales porque permiten cuantificar el tamaño

- longitud de los vectores y matrices, lo cual es fundamental para:
  - Evaluar la convergencia de algoritmos iterativos
  - Garantizar la estabilidad numérica al aproximar soluciones
  - Optimizar la eficiencia de los algoritmos y controlar los márgenes de error
  - Analizar el comportamiento de los algoritmos en términos de distancia o error en problemas de optimización.

2. Demostrar que $\|v\|_* = \sqrt{\|v\|_1}$ es una norma vectorial

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \quad p = 2$$

$$\|v\|_2 = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}$$

$$\|v\|_1 = v_1 + v_2 + \dots + v_n$$

$$\|v\|_p = \left(\sum_i |v_i|^p \right)^{1/p}$$

3. Calcular $\|v\|_1$, $\|v\|_2$ y $\|v\|_\infty$ para el vector $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\|v\|_1 = 13$

$\|v\|_2 = \sqrt{-1^2+3^2+7^2+2^2} = \sqrt{1+9+49+4} = \sqrt{63} \therefore 3\sqrt{7}$

$\|v\|_\infty = 7$

2. $\|v\|_2 = \sqrt{|v_1|^2+|v_2|^2+\dots+|v_n|^2}$

1. $\|v\|_2 \geq 0$ & $\|v\|_2 = 0$ si $v=0$

La suma de cuadrados de los componentes de v es siempre mayor o igual a cero. Esto implica que la raíz de dicha suma también será mayor o igual a cero.

2. $\|\alpha v\|_2 = |c| \cdot \|v\|_2$

$$\sqrt{(\alpha v_1)^2+(\alpha v_2)^2+\dots+(\alpha v_n)^2} = \sqrt{\alpha^2(v_1^2+v_2^2+\dots+v_n^2} = |\alpha|\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_n^2}$$

3. [redacted] $\|u+v\|_2 = \sqrt{(u_1+v_1)^2+(u_2+v_2)^2+\dots+(u_n+v_n)^2}$

$\|u+v\|_2 \leq \|u\|_2+\|v\|_2$

$$(u_i+v_i)^2 = u_i^2+v_i^2+2u_iv_i$$

$$\|u+v\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} u_i^2 + \sum_{i=1}^{n} v_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} u_iv_i$$

$$\|u+v\|_2^2 = (\|u\|_2+\|v\|_2)^2$$

$$\vdots$$

$$\|u+v\|_2 \leq \|u\|_2+\|v\|_2$$