Tarea 1-04

1. Demuestre que $\|v\|_\infty \leq \|v\|_2 \leq \sqrt{n}\,\|v\|_\infty$ para las normas vectoriales. Considere que v es un vector del espacio $\mathbb{R}^n$

$\|v\|_\infty = \max_i |v_i|$

$\|v\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |v_i|^2}$ ← este incluye $\|v\|_\infty$ y todos los demás items del vector. $\therefore$ $\cancel{\|v\|_\infty > \|v\|_2}$

Serán iguales si son cero. → $\cancel{\|v\|_\infty = \|v\|_2}$

$\sqrt{n}\,\|v\|_\infty = \sqrt{n}\max_i |v_i|$ ← esto es lo mismo que si todos los items fueran el máximo para el caso

$\cancel{\sqrt{n}\,\|v\|_\infty = \|v\|_2}$

si esto no se cumple entonces

$\cancel{\sqrt{n}\,\|v\|_\infty > \|v\|_2}$

Por lo tanto se cumplen las definiciones y las normas.

2. Calcule L_1, L_2, L_∞ para
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$L_1 = 3 \quad L_\infty = 4$

$L_2 = \sqrt{\rho(A^tA)}$

$$A^tA = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(A^tA - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 3 & 0 \\ 3 & 5-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$(3-\lambda)\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} + 0$$

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(2-\lambda) - (2)(2) = (5-\lambda)(2-\lambda) - 4$$

$$= 10 - 7\lambda + \lambda^2 - 4 = \lambda^2 - 7\lambda + 6$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 3(2-\lambda) = 6 - 3\lambda$$

$$\det = (3-\lambda)(\lambda^2 - 7\lambda + 6) - 3(6 - 3\lambda)$$

$$= (3-\lambda)(\lambda^2 - 7\lambda + 6 - 18 + 9\lambda$$

$$= 3(\lambda^2 - 7\lambda + 6 - \lambda(\lambda^2 - 7\lambda + 6) - 18 + 9\lambda$$

$$= 3\lambda^2 - 21\lambda + 18 - \lambda^3 + 7\lambda^2 - 6\lambda - 18 + 9\lambda$$

$$= -\lambda^3 + 10\lambda^2 - 18\lambda = 0$$

$$\lambda = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4(-1)(-18)}}{-2} = 5 \pm \sqrt{7}$$

$$5 + \sqrt{7} = \cancel{\boxed{7.6457}}$$

$$5 - \sqrt{7} = \boxed{2.3542}$$

$$\sqrt{7.6457} = \cancel{2.7650}$$