

Tarea 2-03

① **Matrices banda:** una matriz banda es una matriz cuadrada cuyos elementos distintos de cero se concentran alrededor de la diagonal principal. Se caracterizan por dos números:

- banda inferior p :

cantidad máxima de diagonales bajo la principal que pueden tener valores $\neq 0$

- banda superior q :

cantidad máxima de diagonales sobre la principal que pueden tener valores $\neq 0$

El número total de diagonales potencialmente no nulas es $p+q+1$. Ejemplos:

- Tridagonal: $p=q=1$

- Pentadagonal: $p=q=2$

Estas matrices permiten ahorrar memoria y operaciones aprovechando los ceros estructurales.

② Método de factorización de Crout:

Se descompone como: $A=LU$ donde L es la triangular inferior y U la triangular superior con diagonal unitaria ($U_{kk}=1$)

$$L_{ik} = A_{ik} - \sum_{s=1}^{k-1} L_{is}U_{sk}, \quad i=k, \dots, n,$$

$$U_{kj} = \frac{1}{L_{kk}} \left(A_{kj} - \sum_{s=1}^{k-1} L_{ks}U_{sj} \right), \quad j=k+1, \dots, n,$$

$$U_{kk}=1$$

En matrices de banda muchos términos de los sumas son ceros y se omiten.

Nota si algún $L_{kk}=0$ se requiere pivoteo

③ Crout 4×4

$$A = LU$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ 0 & l_{32} & l_{33} & 0 \\ 0 & 0 & l_{43} & l_{44} \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & u_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Iteración $k=1$

Columna 1 de L (no hay sumas porque $k=1$):

$$l_{11} = a_{11} = 4, \quad l_{21} = a_{21} = -1, \quad l_{31} = a_{31} = 0, \quad l_{41} = a_{41} = 0$$

~~Fila~~ Fila 1 de U (con $u_{11}=1$):

$$u_{12} = \frac{a_{12}}{l_{11}} = \frac{-1}{4} = -\frac{1}{4}, \quad u_{13} = 0, \quad u_{14} = 0$$

Iteración $k=2$

Columna 2 de L :

$$l_{22} = a_{22} - l_{21}u_{12} = 4 - (-1)\left(-\frac{1}{4}\right) = 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$$

$$l_{32} = a_{32} - l_{31}u_{12} = -1 - 0 = -1$$

$$l_{42} = a_{42} - l_{41}u_{12} = 0 - 0 = 0$$

Iteración $k=3$

Columna 3 de L :

$$l_{33} = a_{33} - (l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23}) = 4 - (0 \cdot 0 + (-1) \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)) = 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$$

$$l_{43} = a_{43} - (l_{41}u_{13} + l_{42}u_{23}) = -1 - (0 + 0) = -1$$

~~Fila~~ Fila 3 de U (con $u_{33}=1$):

$$u_{34} = \frac{a_{34} - (l_{31}u_{14} + l_{32}u_{24})}{l_{33}} = \frac{-1 - (0 + (-1) \cdot 0)}{15/4} = -\frac{4}{15}$$

Iteración $k=4$

Columna 4 de L (con $u_{44}=1$):

$$l_{44} = a_{44} - (l_{41}u_{14} + l_{42}u_{24} + l_{43}u_{34}) = 3 - (0 + 0 + (-1) \cdot \left(-\frac{4}{15}\right)) = 3 - \frac{4}{15} = \frac{41}{15}$$

D

M

A

Scribe®

$$L = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 15/4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 5/4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 103/56 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & -1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/18 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -10/56 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$LU = A$$