Binary Decision Diagrams

Rémi Hutin & Joshua Peignier

6 Mai 2016

1 Introduction

Remarque préliminaire : Dans tout ce document, on admettra l'existence d'une bijection entre l'ensemble des formules INF et l'ensemble des BDD.

2 BDD et forme normale if-then-else

Question 1 Soient φ une formule, x une variable et V une valuation.
Remarquons que, par définition, $\varphi \uparrow^x \equiv (x \wedge \varphi[1/x]) \vee (\neg x \wedge \varphi[0/x])$.

Voici donc la table de vérité de $\varphi \uparrow^x$ en fonction des valeurs de x et de φ pour chaque valuation (on ne remplit que les cases nécessaires).

x	φ	$\varphi[1/x]$	$x \wedge \varphi[1/x]$	$\varphi[0/x]$	$\neg x \wedge \varphi[0/x]$	$\varphi \uparrow^x$
0	0		0	0	0	0
0	1		0	1	1	1
1	0	0	0		0	0
1	1	1	1		0	1

Il suffit alors de remarquer que les colonnes de φ et $\varphi \uparrow^x$ sont égales.

Question 2 On veut montrer que toute formule est équivalente à une formule INF. Procédons par induction. (Suivant la remarque préliminaire établie en introduction, on confondra les formules INF et leurs BDD associés.)

Remarque : Dans cette démonstration, lorsqu'on traitera le cas des connecteurs binaires, on sera amené à remplacer des feuilles d'une formule INF ${f'}_1$ par une deuxième formule INF ${f'}_2$ (le tout pour former une formule INF φ'). Notons que nous devons toutefois procéder à des simplifications : si ${f'}_2$ contient une formule INF $F = x \rightarrow F_1, F_0$, et que x est également présente dans ${f'}_1$, alors dans le diagramme de φ', il faut s'assurer qu'on ne teste pas x deux fois sur le même chemin. Donc dans une branche qui se trouve sur le fils faible de x dans ${f'}_1$, si un noeud x réapparaît plus loin, on supprime ce deuxième noeud x ainsi que son fils fort F_1, et on le remplace par son fils faible F_0 (et symétriquement si on est sur une branche sur le fils fort de x dans ${f'}_1$). On sous-entendra ces suppressions de noeuds par la suite.

- Si notre formule φ est réduite à une variable x, sans utilisation d'opérateurs, alors φ est équivalente à la formule INF $x \to 1, 0$.

- Si la formule φ s'écrit $\neg f$ et qu'on suppose que f est équivalente à une formule INF f', alors φ est équivalente à la formule INF φ' obtenue en transformant, dans le BDD correspondant à f', les feuilles 0 en 1 et les feuilles 1 en 0. Ainsi, φ est vraie si et seulement si f est fausse, si et seulement si f' est fausse, si et seulement si φ' est vraie.

- Si φ s'écrit $f_1 \wedge f_2$ et qu'on suppose que f_1 et f_2 sont toutes les deux équivalentes à des formules INF ${f'}_1$ et ${f'}_2$, alors on peut construire une formule INF φ' équivalente à φ à partir de ${f'}_1$; il suffit, dans le BDD correspondant à ${f'}_1$, de remplacer les feuilles 1 par le BDD complet de ${f'}_2$.

  Ainsi, si on parcourt φ' avec une valuation telle que ${f'}_1$ soit fausse, on tombe sur 0, donc φ' est fausse. Et si on la parcourt avec une valuation qui rende ${f'}_1$ vraie, alors φ' a la même valeur que ${f'}_2$. Donc φ' est vraie si et seulement si ${f'}_1$ et ${f'}_2$ sont vraies. Donc φ' est bien équivalente à φ.

- Si φ s'écrit $f_1 \vee f_2$ et qu'on suppose que f_1 et f_2 sont toutes les deux équivalentes à des formules INF ${f'}_1$ et ${f'}_2$, on procède de la même manière qu'avant en construisant une formule φ' à partir de ${f'}_1$, mais cette fois, on remplace ses feuilles 0 par la formule INF de ${f'}_2$.

  Ainsi, si on choisit une valuation qui rende ${f'}_1$ est vraie, le parcours dans φ' avec cette valuation nous amène à un noeud 1, donc est φ' est vraie. Sinon, φ' a la valeur de ${f'}_2$. Donc φ' est vraie si et seulement si au moins l'une des deux formules entre ${f'}_1$ et ${f'}_2$ est vraie. Donc φ' est équivalente à φ.

- Si φ s'écrit $f_1 \Rightarrow f_2$ et qu'on suppose que f_1 et f_2 sont toutes les deux équivalentes à des formules INF ${f'}_1$ et ${f'}_2$, on procède de la même manière qu'avant en construisant une formule φ' à partir de ${f'}_1$; mais cette fois, on change les feuilles 0 de ${f'}_1$ en 1, et on remplace ses feuilles 1 par ${f'}_2$.

  Ainsi, une valuation qui rend ${f'}_1$ fausse nous amène sur la valeur 1 dans φ', donc φ' est vraie. Et une valuation qui rend ${f'}_1$ vraie nous amène à tester la valeur de ${f'}_2$, qui est celle que prendra φ'. Donc φ' est fausse si et seulement si ${f'}_1$ est vraie et ${f'}_2$ fausse. D'où l'équivalence de φ' et φ.

- Si φ s'écrit $f_1 \Leftrightarrow f_2$ et qu'on suppose que f_1 et f_2 sont toutes les deux équivalentes à des formules INF ${f'}_1$ et ${f'}_2$, on procède de la même manière qu'avant en construisant une formule φ' à partir de ${f'}_1$: on remplace les feuilles 1 de ${f'}_1$ par la formule ${f'}_2$, et on remplace les feuilles 0 de ${f'}_1$ par la formule ${f'}_2$ en prenant soin d'échanger les valeurs 1 et 0 sur les feuilles de cette dernière. On peut ainsi vérifier que φ' est équivalente à φ.

Question 3 On peut procéder par récurrence sur n. Soit donc la propriété $P(n)$: "pour un ordre sur les variables $x_1 < ... < x_n$ donné, pour toute fonction booléenne $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$, il existe un unique ROBDD u tel que $f^u = f$."

- Montrons $P(1)$:
  Si f ne prend qu'une variable x, alors deux cas se présentent :

  - si $f(1) = f(0)$, alors le ROBDD ne contenant que le noeud de la constante $f(0)$ convient, et il n'existe pas d'autres ROBDD correspondant, puisqu'en respectant la propriété d'utilité, il n'y a aucun test à faire, donc le diagramme est nécessairement réduit à un seul noeud, qui ne peut avoir que la valeur de $f(0)$
  - $sif(1) \neq f(0)$, il suffit de construire le ROBDD correspondant à la formule INF $x \to f(1), f(0)$. L'unicité découle du fait qu'un seul test est nécessaire et qu'il ne peut pas avoir d'autres résultats.

- Supposons $P(n)$ pour n donné, et montrons $P(n+1)$: On se donne $n+1$ variables x_1 à x_{n+1} et l'ordre $x_1 < ... < x_{n+1}$. Soit f une fonction booléenne à $n+1$ variables, notées b_1 à b_{n+1}. On considère les fonctions booléennes à n variables f_0 et f_1 telles que $f_0(b_2, ..., b_{n+1}) = f(0, b_2, ..., b_{n+1})$ et $f_1(b_2, ..., b_{n+1}) = f(1, b_2, ..., b_{n+1})$.

  f_0 et f_1 sont des fonctions booléennes à n variables, et les variables x_2 à x_{n+1} suivent l'ordre $x_2 < ... <_x n+1$. Donc d'après $P(n)$, il existe un unique ROBDD u_0 tel que $f^{u_0} = f_0$, et de même il existe un unique ROBDD u_1 tel que $f^{u_1} = f$. On peut donc construire un BDD pour f en prenant x_1 pour racine, et en lui donnant pour fils faible la racine de u_0 et pour fils fort la racine de u_1. On peut vérifier avec les définitions de f_0 et f_1 que le BDD u ainsi construit est tel que $f^u = f$. De plus, l'ordre donné sur les variables x_1 à $_{n+1}$ est respecté dans u, car il a pour racine x_1 et que chacun de ses fils est ordonné suivant $x_2 < ... < x_{n+1}$. On a donc un $OBDD$, qu'on peut réduire en fusionnant tous les noeuds qui auraient la même étiquette, le même fils fort et le même fils faible, et en supprimant les noeuds dont les deux fils sont égaux, et en supprimant tous les test inutiles (ceux-ci sont déjà a priori supprimés dans les ROBDD u_0 et u_1 ; il faudrait donc seulement supprimer la racine x_1 si son test est inutile). On a donc construit un $ROBDD$. L'unicité de celui-ci est imposée par l'ordre qu'on s'est donné : un tel $ROBDD$ doit forcément avoir x_1 pour racine ; et comme fils fort et fils faible, il doit avoir deux autres ROBDD associés respectivement à f_1 et f_0. Mais ceux-ci sont uniques, d'après la propriété $P(n)$. Il ne peut donc pas en exister d'autre non plus pour f. On a donc démontré $P(n+1)$.