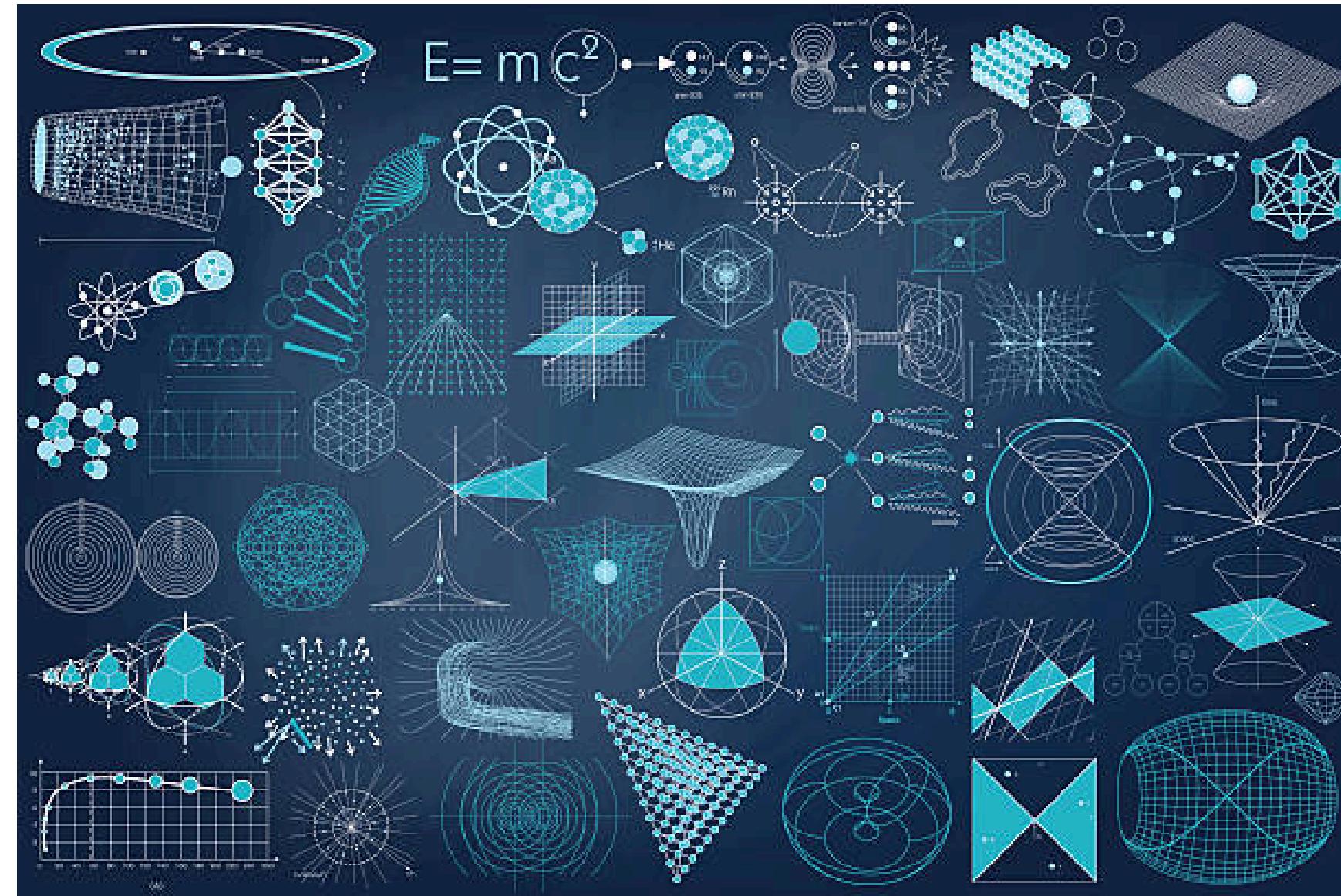


Fizyka to mnie fascynuje



Jakub Hordyński

Równania różniczkowe jako podstawa fizyki i opisu świata

Co to jest ?

Równanie różniczkowe – [równanie](#) określające zależność pomiędzy nieznaną [funkcją](#) a jej [pochodnymi](#)^[1].

Równania różniczkowe, o co chodzi ?

Już w podstawówce spotkaliśmy się z podstawowymi równaniami, czyli

Równaniami algebraicznymi

Znajdź x (liczbę) dla której dane równanie spełnia równość

$$15 + x = 10$$

Szukana była liczba jak, $x = -5$

Równania różniczkowe, o co chodzi ?

W przeciwnieństwie do równań algebraicznych w równaniach różniczkowych. Nie szukamy liczby ale...

Szukamy **funkcji $F(x)$**

Dla której podane równanie różniczkowe jest spełnione

$$f'(x) = f(x)$$

$$f'(x) = 1/(2 f(x))$$

$$f''(x) = 6x$$

$$f''(x) = 0$$

$f(x) = e^x$ (funkcja)

$f(x) = \sqrt{x}$ (funkcja)

$f(x) = x^3 + ax + b$ (funkcja)

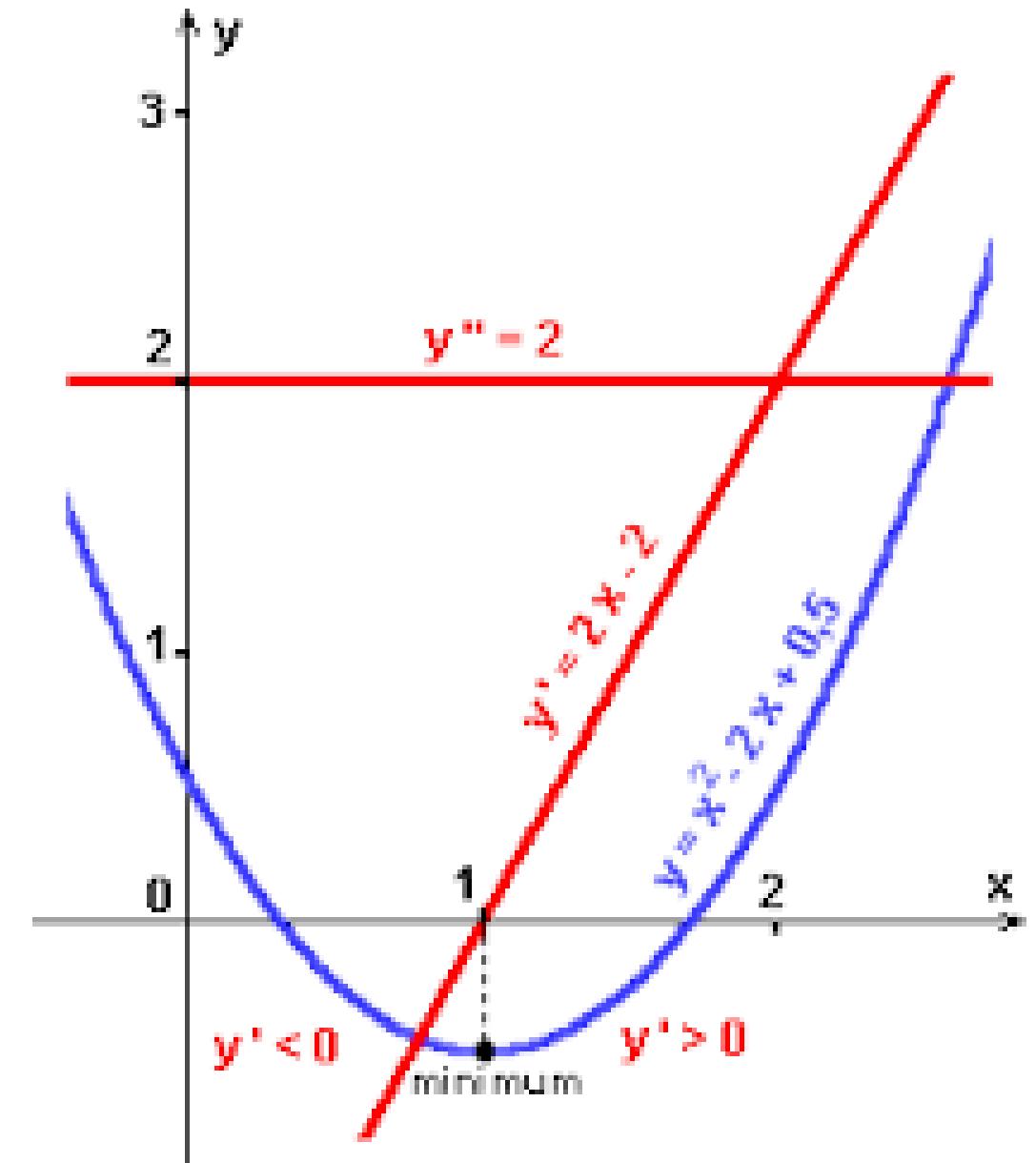
$f(x) = ax + b$ (funkcja)

Równanie z funkcji

W równaniach różniczkowych szukamy funkcji za pomocą jej pochodnej

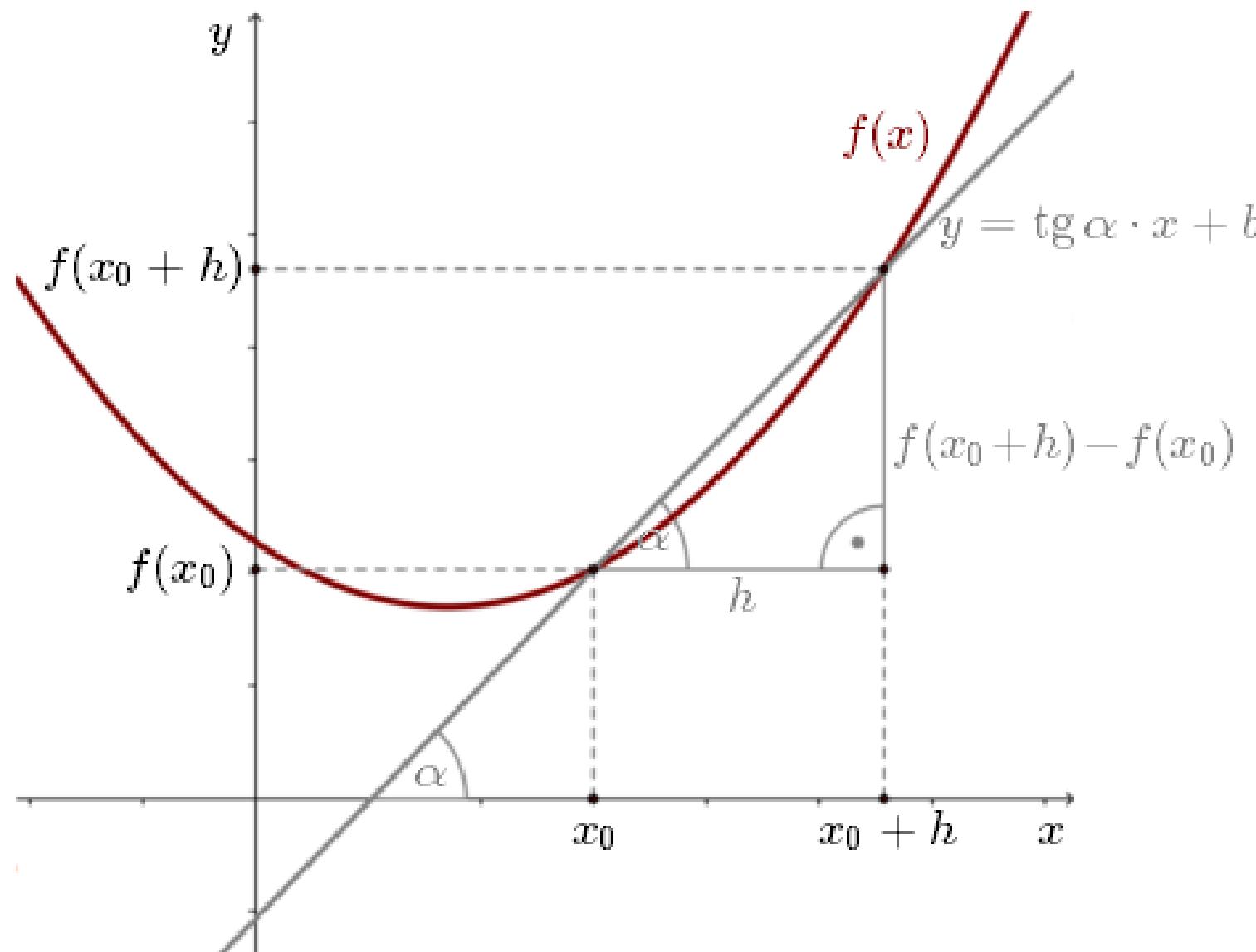
Pochodna funkcji reprezentuje szybkość zmian w pewnym punkcie.

Geometrycznie jest ona współczynnikiem kierunkowym prostej stycznej do danego punktu



Pochodna

Stosunek zmiany wartości funkcji, a zmiany argumentu...



$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x}$$

Jako, że chcemy uzyskać tą zmianę w pojedyńczym punkcie, zmiana, czyli h dąży do 0

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Pochodna - wzory

Funkcja	Pochodna
a	0
x	1
x^n	$n \cdot x^{n-1}$
$a \cdot f(x)$	$a \cdot f'(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \cdot \ln(a)$
$\log_a(x)$	$\frac{1}{x \ln(a)}$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\operatorname{tg}(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$
$\operatorname{ctg}(x)$	$-\frac{1}{\sin^2(x)}$
$\operatorname{arc sin}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arc cos}(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arctg}(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arcctg}(x)$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$f(x) + g(x)$	$f'(x) + g'(x)$
$f(x) - g(x)$	$f'(x) - g'(x)$
$f(x) \cdot g(x)$	$f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$

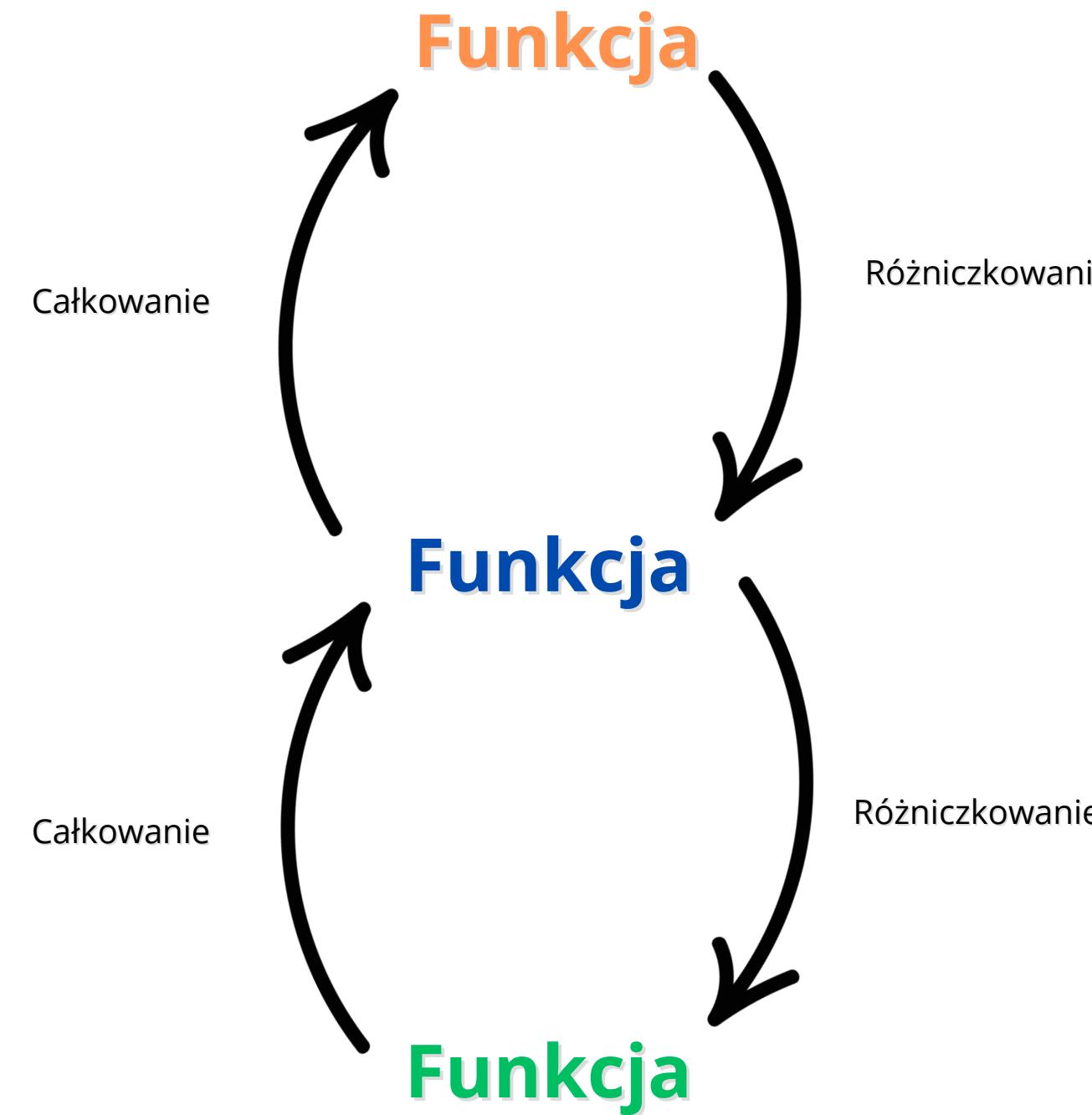
Można zapisywać pochodną jako :

- dy/dx

- $f'(x)$

Całkowanie

Proces odwrotny do pochodnej, różniczkowania



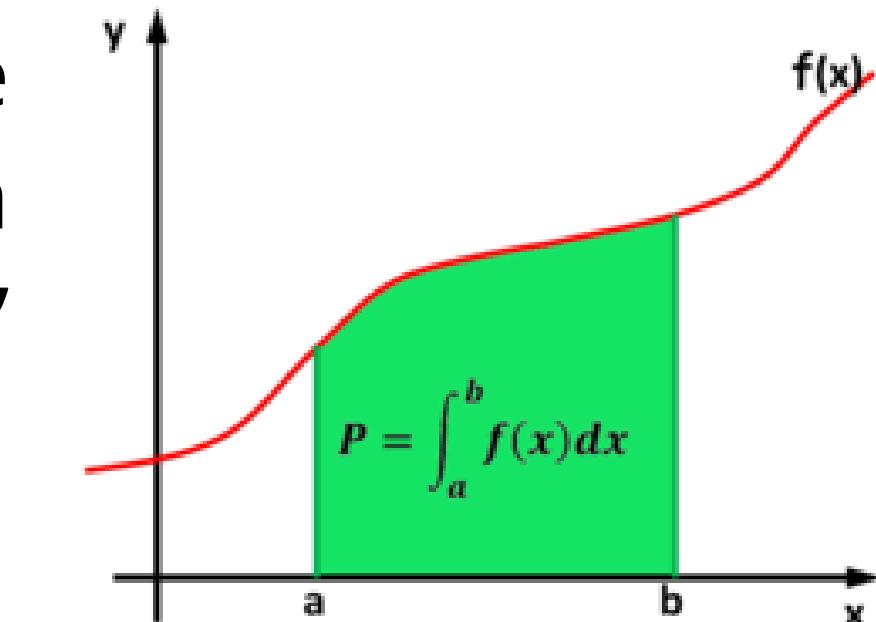
$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

$$(F(x) + C)' = f(x)$$

Matematycznie to obliczanie pola pod krzywą funkcji na wykresie. Sumowanie „małych” prostokątnych kawałków.

Całka dzieli się na :

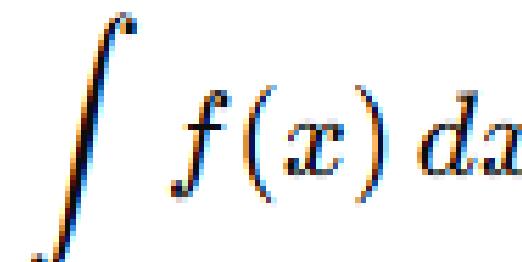
- Oznaczoną (Liczbę)
- Nieoznaczoną (Funckję)



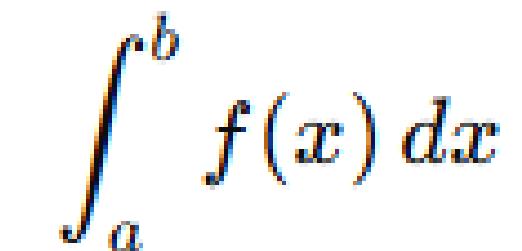
Całki

L.p.	Całka	Funkcja pierwotna
1	$\int 0 \, dx$	C
2	$\int dx$	$x + C$
3	$\int x \, dx$	$\frac{1}{2}x^2 + C$
4	$\int x^n \, dx$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + C, n \neq -1$
5	$\int \frac{1}{x} \, dx$	$\ln x + C$
6	$\int c \cdot f(x) \, dx$	$c \cdot \int f(x) \, dx + C$
7	$\int \sin(x) \, dx$	$-\cos(x) + C$
8	$\int \cos(x) \, dx$	$\sin(x) + C$
9	$\int \operatorname{tg}(x) \, dx$	$-\ln \cos(x) + C$
10	$\int \operatorname{ctg}(x) \, dx$	$\ln \sin(x) + C$
11	$\int \frac{1}{\cos^2(x)} \, dx$	$\operatorname{tg}(x) + C$
12	$\int \frac{1}{\sin^2(x)} \, dx$	$-\operatorname{ctg}(x) + C$
13	$\int e^x \, dx$	$e^x + C$
14	$\int a^x \, dx$	$\frac{a^x}{\ln a} + C, a > 0$
15	$\int \frac{1}{x^2+a^2} \, dx$	$\frac{1}{a} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right) + C$
16	$\int \frac{1}{x^2-a^2} \, dx$	$\frac{1}{2a} \ln \left \frac{x-a}{x+a} \right + C$
17	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} \, dx$	$\arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C$
18	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} \, dx$	$\ln x+\sqrt{x^2+a} + C$
19	$\int [f(x) + g(x)] \, dx$	$\int f(x) \, dx + \int g(x) \, dx + C$
20	$\int e^{ax} \, dx$	$\frac{1}{a}e^{ax} + C$
21	$\int \sin(a \cdot x) \, dx$	$-\frac{1}{a} \cos(ax) + C$
22	$\int \cos(a \cdot x) \, dx$	$\frac{1}{a} \sin(ax) + C$

Można zapisywać całkę jako :



$$\int f(x) \, dx \quad \text{Nieoznaczona}$$



$$\int_a^b f(x) \, dx \quad \text{Oznaczona}$$

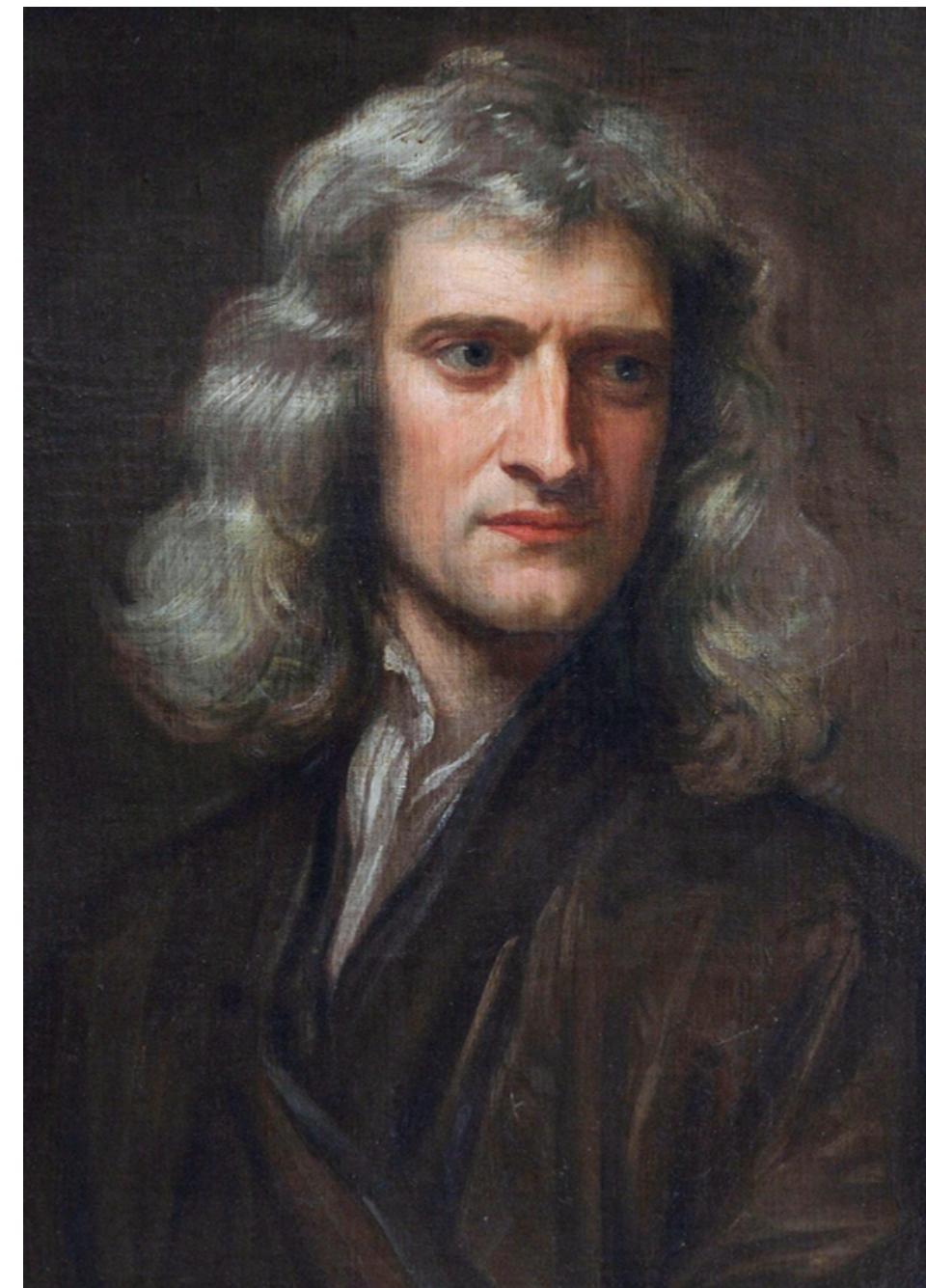
Równanie różniczkowe (fizyka)

Metody różniczkowe i całkowe zostały niezależnie opracowane w XVII wieku. Kluczowymi twórcami byli Isaac Newton i Gottfried Leibniz, którzy w swoich pracach systematycznie przedstawili rachunek całkowy i różniczkowy.

Isaac Newton zauważył zależność, że

- siła ma „wpływ” na prędkość,
- prędkość na położenie.

Konkluzja - siła wpływa na położenie.



II zasada dynamiki Newtona

$$x(t)$$

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

- **Położenie**
- **Prędkość**
- **Przyśpieszenie**

I tak oto Isaac otrzymał zależność siły od położenia

$$F(t) = ma(t) = m \frac{dv(t)}{dt} = m \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

W praktyce

Przykładowe równanie różniczkowe rzutu ukośnego

$$m = 1, \quad k = 0.2, \quad g = 9.81, \quad v_0 = 20, \quad \theta = 45^\circ$$

$$v_{0x} = v_0 \cos \theta = 20 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 14.1421, \quad v_{0y} = 20 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 14.1421$$

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{k}{m} v_x \implies v_x(t) = v_{0x} e^{-\frac{k}{m} t}$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -\frac{k}{m} v_y - g \implies v_y(t) = \left(v_{0y} + \frac{mg}{k}\right) e^{-\frac{k}{m} t} - \frac{mg}{k}$$

$$x(t) = \int_0^t v_{0x} e^{-\frac{k}{m} \tau} d\tau = \frac{m}{k} v_{0x} \left(1 - e^{-\frac{k}{m} t}\right) = 70.7105 \left(1 - e^{-0.2t}\right)$$

$$y(t) = \int_0^t \left[\left(v_{0y} + \frac{mg}{k}\right) e^{-\frac{k}{m} \tau} - \frac{mg}{k} \right] d\tau = \frac{m}{k} \left(v_{0y} + \frac{mg}{k}\right) \left(1 - e^{-\frac{k}{m} t}\right) - \frac{mg}{k} t$$

$$(v_{0y} + \frac{mg}{k}) e^{-0.2t} - \frac{mg}{k} = 0 \implies e^{-0.2t} = \frac{49.05}{14.1421 + 49.05} \implies t_{\max} = -\frac{m}{k} \ln\left(\frac{49.05}{63.1921}\right) = 1.2667$$

$$y_{\max} = 315.9605 \left(1 - e^{-0.2 \cdot 1.2667}\right) - 49.05 \cdot 1.2667 = 8.5791$$

$$315.9605 \left(1 - e^{-0.2t}\right) - 49.05 t = 0 \implies t_{\text{tot}} = 2.6502$$

$$x_{\text{range}} = 70.7105 \left(1 - e^{-0.2 \cdot 2.6502}\right) = 29.0915$$

z warunkami początkowymi + umiejętnością rozwiązywania i pochodnych, i całek możemy rozwiązać takie równanie

Już to wygląda skomplikowanie nie mówiąc o bardziej skomplikowanych, bądź złożonych ruchach

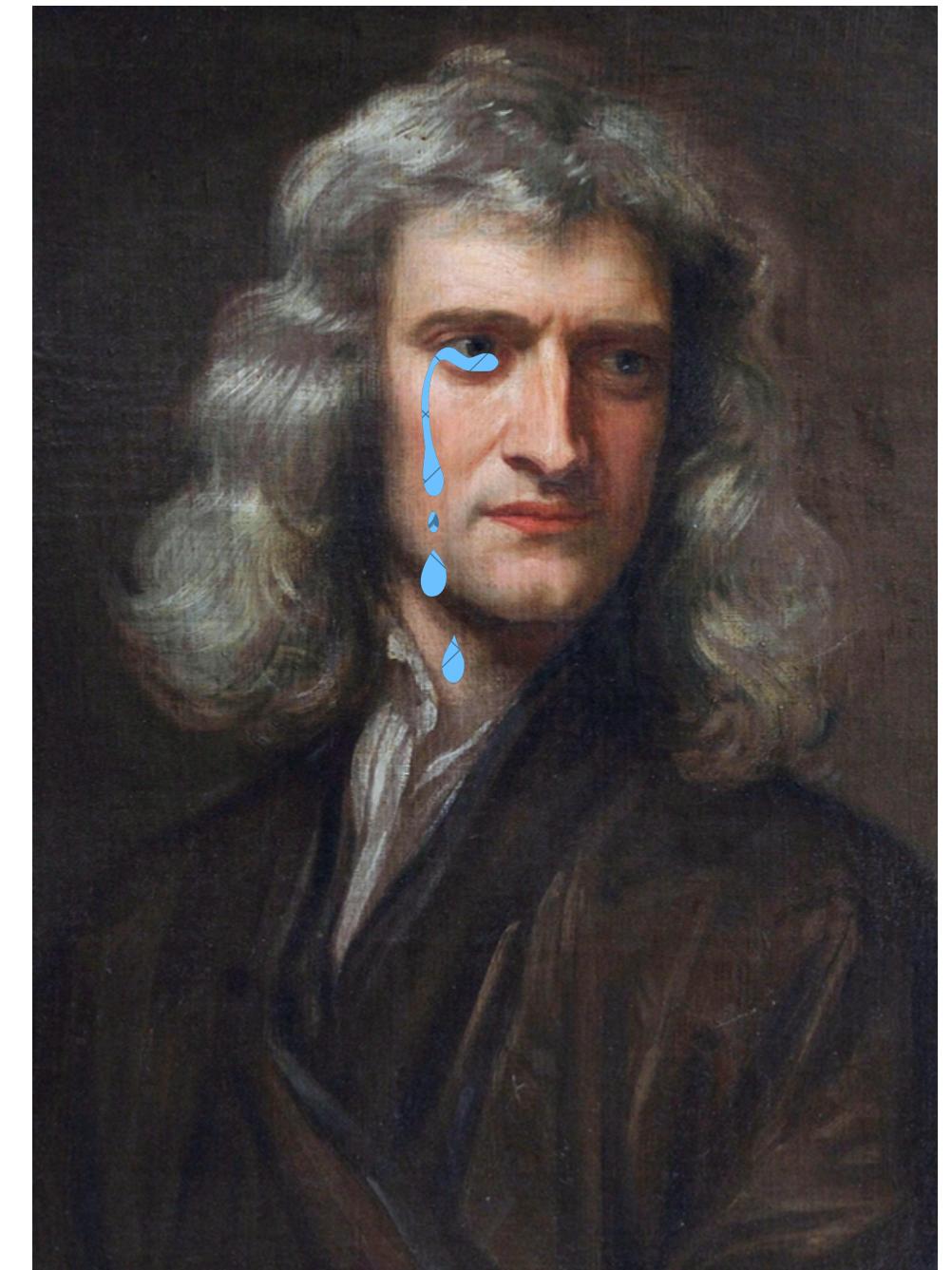


Technologia

Na szczęście żyjemy w XXI wieku i nie musimy aż tak się głowić nad rozwiązywaniem tych równań

Korzystając z różnych aparatów matematycznych ale i nie tylko możemy zaoszczędzić mnóstwo czasu i wysiłku

Obecne narzędzia nie „wykonują” za nas problemów matematycznych, to my nadal jesteśmy odpowiedzialni za cały proces



Nauka z technologią - notatki

Colab Google

[colab.google](#)

Colab is a hosted Jupyter Notebook service that requires no setup to use and provides free access to computing resources, including GPUs and TPUs. Colab is especially well suited to machine learning, data science,...

 colab.google

Jest to usługa oferująca możliwości naukowe, dzięki narzędziom pozwalającym na tworzenie szczegółowych i profesjonalnych notatek oraz tworzenie wykresów i tym podobnych poprzez miejsce na wpisywanie kodu. Dodatkowo oferuję wbudowanego Gemini AI Copilot.

Nauka z technologią - notatki

Rzut ukośny z oporem powietrza – uproszczony przewodnik

Podstawowe siły działające na ciało

1. Grawitacja:

$$F_g = m \cdot g$$

Skąd się bierze?

To sila przyciągania Ziemi. Działa **pionowo w dół** i powoduje, że ciało spada.

2. Opór powietrza:

$$F_{\text{oporu}} = -k \cdot v$$

Skąd się bierze?

Powietrze "hamuje" ruch. Im większa prędkość (v), tym większy opór. Znak "minus" oznacza, że sila działa **przeciwnie do kierunku ruchu**.

Równania ruchu (krok po kroku)

Oś pozioma (x)

- Opór powietrza jest jedyną siłą w poziomie.
- Z II zasady dynamiki:

$$m \cdot a_x = -k \cdot v_x$$

Co to znaczy?

Przyspieszenie (a_x) zależy od prędkości – im szybciej lecisz, tym bardziej powietrze cię spowalnia.

Po podzieleniu przez masę m :

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{k}{m} \cdot v_x$$

Rozwiążanie:

Prędkość maleje wykładniczo:

$$v_x(t) = v_{0x} \cdot e^{-\frac{k}{m}t}$$

Skąd się bierze e^t ?

To wynik całkowania równania różniczkowego – wykładnik opisuje "wygaszanie" prędkości przez opór.

Oś pionowa (y)

- Działają dwie siły: grawitacja i opór powietrza.
- Z II zasady dynamiki:

$$m \cdot a_y = -m \cdot g - k \cdot v_y$$

Co to znaczy?

Przyspieszenie pionowe (a_y) zależy od grawitacji (ciągnie w dół) i oporu (hamuje ruch).

Po podzieleniu przez m :

$$\frac{dv_y}{dt} = -g - \frac{k}{m} \cdot v_y$$

Rozwiążanie:

$$v_y(t) = \left(v_{0y} + \frac{m \cdot g}{k}\right) \cdot e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{m \cdot g}{k}$$

Skąd się bierze ten wzór?

Czlon z $e^{-\frac{k}{m}t}$: to "wygaszanie" prędkości przez opór.

Czlon $-\frac{m \cdot g}{k}$: to prędkość końcowa, gdy sila oporu zrównoważy grawitację (np. jak spadająca kropka deszczu).

Przykład: Piłka kopnięta pod kątem 45°

Dane:

- Masa: $m = 1 \text{ kg}$
- Opór: $k = 0.1 \text{ kg/s}$
- Prędkość początkowa: $v_0 = 10 \text{ m/s}$
- Składowe prędkości:

$$v_{0x} = 10 \cdot \cos(45^\circ) \approx 7.07 \text{ m/s}$$

$$v_{0y} = 10 \cdot \sin(45^\circ) \approx 7.07 \text{ m/s}$$

Co się dzieje po 1 sekundzie?

1. Prędkość w osi x:

$$v_x(1) = 7.07 \cdot e^{-0.1 \cdot 1} \approx 7.07 \cdot 0.905 \approx 6.4 \text{ m/s}$$

Dlaczego maleje?

Opór powietrza działa jak "hamulec".

2. Prędkość w osi y:

$$v_y(1) = \left(7.07 + \frac{1 \cdot 9.81}{0.1}\right) \cdot e^{-0.1} - \frac{1 \cdot 9.81}{0.1}$$

$$v_y(1) \approx (7.07 + 98.1) \cdot 0.905 - 98.1 \approx 3.2 \text{ m/s}$$

Dlaczego jest dodatnia?

Piłka jeszcze nie zaczęła spadać – wciąż się wznosi!

Podsumowanie

- Poziomy ruch: Opór powietrza stopniowo **zmniesza prędkość** (wykładniczo).
- Pionowy ruch:
 - Na początku prędkość maleje (opór + grawitacja),
 - Potem ciało zaczyna spadać, aż osiągne **prędkość terminalną** (gdy $F_{\text{oporu}} = F_g$).
- Dlaczego e jest wszędzie?

Bo opór powietrza zależy od prędkości – równania różniczkowe z taką zależnością mają rozwiązania wykładnicze.

Świat wszedł w erę AI i wykorzystując ją w celu zdobywania nauki, możemy osiągnąć ogromne sukcesy.

- Nauczyciel
- Twórca kodów ?



Oczywiście! Pochodne to jedno z kluczowych pojęć w analizie matematycznej, które mierzy, jak szybko zmienia się funkcja w danym punkcie. Pochodna funkcji w punkcie mówi nam o **tempie zmian** tej funkcji w tym właśnie punkcie.

1. Definicja pochodnej

Pochodną funkcji $f(x)$ w punkcie $x = a$ definiujemy jako granicę:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Jeśli ta granica istnieje, mówimy, że funkcja jest **różniczkowalna** w punkcie a .

Interpretacja geometryczna:

Pochodna $f'(a)$ to **współczynnik kierunkowy stycznej** do wykresu funkcji $f(x)$ w punkcie $x = a$.

2. Jak obliczać pochodne?

Najprostsze przypadki:

- Funkcja stała:

$$f(x) = c \Rightarrow f'(x) = 0$$

(*Stała się nie zmienia, więc pochodna jest zerowa.*)

- Funkcja liniowa:

$$f(x) = mx + b \Rightarrow f'(x) = m$$

(*Pochodna to współczynnik kierunkowy prostej.*)

- Funkcja potęgowa:

$$f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

(*Np. $f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$.*)



AI + Colab Google

Czy to Chat GPT, czy DeepSeek lub Groq możemy poprosić o generowanie takich notatek z przykładami.

Prosząc o kod markdowna możemy wkleić go Colaba i już, profesjonalna i stylowa notatka

The screenshot shows a Google Colab interface with two main sections: a code editor on the left and a rendered notebook on the right.

Code Editor (Left):

```
# Rzut ukośny z oporem powietrza - uproszczony przewodnik
# Podstawowe siły działające na ciało
1.  $\mathbf{F}_g = m \cdot \mathbf{g}$ 
"Skąd się bierze?"  
To sila przyciągania Ziemi. Ciało pionowe w dół i powoduje, że ciało spada.  
  
2. "Przykłady produktów"  
 $\mathbf{F}_{\text{powietrza}} = -k \cdot \text{v}_x \mathbf{i}$ 
"Skąd się bierze?"  
Powietrze "hamuje" ruch. Im większa prędkość ( $v_x$ ), tym większy opór. Znak minus oznacza, że sila działa "przeciwko kierunkowi ruchu".  
  
...  
  
# Równanie ruchu (krok po kroku)
# Od poziomu (x)
"Rzut ukośny jest jedyną siłą w poziomie.  
Z II zasady dynamiczki:  
 $m \cdot a_x = -k \cdot m \cdot v_x \mathbf{i}$ 
"Co to znaczy?"  
Przyspieszenie ( $a_x$ ) zależy od prędkości - im szybciej leci, tym bardziej powietrze cię hamuje.  
Po podzieleniu przez masę ( $m$ ):  
 $m \frac{d^2x}{dt^2} = -k \cdot m \cdot v_x \mathbf{i}$ 
"Wyjaśnienie"  
Prędkość maleje wykładniczo:  
 $m \frac{d^2x}{dt^2} = -k \cdot m \cdot v_x \mathbf{i} \cdot e^{-kt}$ 
"Skąd się bierze?  
To wynik całkowania równania różniczkowego - wykładnik opisuje "wygaszanie" prędkości przez opór.  
  
...  
  
# Od pionu (y)
"Rzut ukośny ma dwie siły: grawitację i opór powietrza."
Z II zasady dynamiczki:  
 $m \cdot a_y = -m \cdot g - k \cdot m \cdot v_y \mathbf{j}$ 
"Co to znaczy?"  
Przyspieszenie ( $a_y$ ) zależy od grawitacji (ciągnie w dół) i oporu powietrza.  
Po podzieleniu przez masę ( $m$ ):  
 $m \frac{d^2y}{dt^2} = -g - k \cdot m \cdot v_y \mathbf{j}$ 
"Wyjaśnienie"  
 $m \frac{d^2y}{dt^2} = -g - k \cdot m \cdot v_y \mathbf{j} \cdot e^{-kt}$ 
"Skąd się bierze?"  
- Ciało z  $k = 0$  ma  $v_y = 0$  to "wygaszało" prędkość przez opór.  
- Ciało z  $k > 0$  ma  $v_y = 0$  to prędkość konstans, gdy sila oporu równała grawitacji (np. jak spadają kropki deszczu).  
  
...  
  
# Przykład: Piłka kopnięta pod kątem 45°
# Dane:
- Masa:  $m = 0,1 \text{ kg}$ 
- Opór:  $k = 0,1 \text{ Ns/m}$ 
- Prędkość początkowa:  $v_0 = 30 \text{ m/s}$ 
```

Rendersed Notebook (Right):

Rzut ukośny z oporem powietrza – uproszczony przewodnik

Podstawowe siły działające na ciało

- Grawitacja:
 $F_g = m \cdot g$
Skąd się bierze?
To sila przyciągania Ziemi. Ciało pionowe w dół i powoduje, że ciało spada.
- Opór powietrza:
 $F_{\text{powietrza}} = -k \cdot v$
Skąd się bierze?
Powietrze "hamuje" ruch. Im większa prędkość (v), tym większy opór. Znak minus oznacza, że sila działa przeciwko do kierunku ruchu.

Równania ruchu (krok po kroku)

Od poziomu (x)

- Opór powietrza jest jedyną siłą w poziomie.
- Z II zasady dynamiczki:

$$m \cdot a_x = -k \cdot m \cdot v_x \mathbf{i}$$

Co to znaczy?
Przyspieszenie (a_x) zależy od prędkości - im szybciej leci, tym bardziej powietrze cię hamuje.
Po podzieleniu przez masę (m):

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m} \cdot v_x \mathbf{i}$$

Rozwiążanie:
Prędkość maleje wykładniczo:
 $v_x(t) = v_{0x} \cdot e^{-\frac{kt}{m}}$

Skąd się bierze?

To wynik całkowania równania różniczkowego - wykładnik opisuje "wygaszanie" prędkości przez opór.

Od pionu (y)

- Działają dwie siły: grawitacja i opór powietrza.
- Z II zasady dynamiczki:

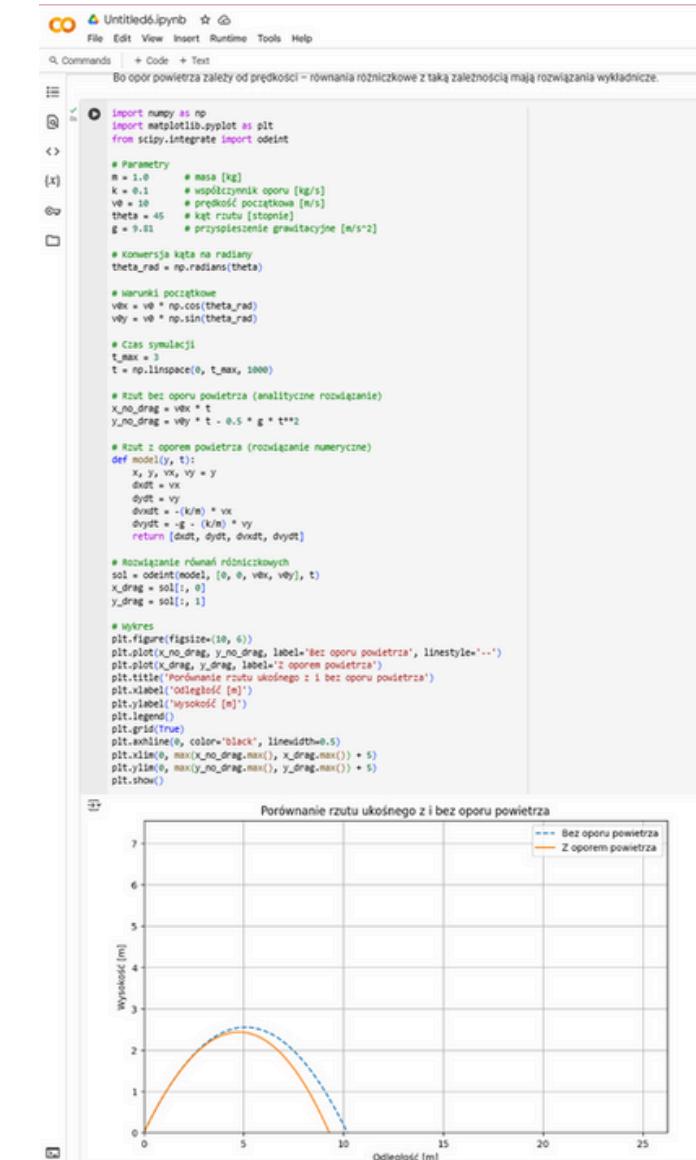
$$m \cdot a_y = -m \cdot g - k \cdot m \cdot v_y \mathbf{j}$$

Co to znaczy?
Przyspieszenie pionowe (a_y) zależy od grawitacji (ciągnie w dół) i oporu (hamuje ruch).

Colab Google, nie tylko notatka ?

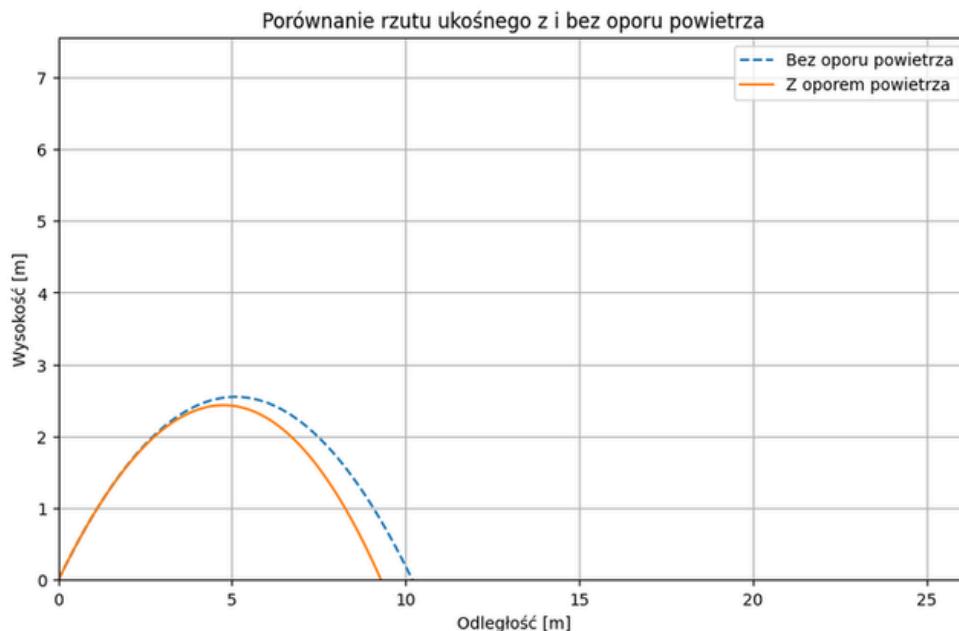
Colab Google nie tylko oferuje możliwości tworzenia rozmaitych notatek ale również pozwala na „odpalanie” kodów w pythonie

Oprócz samej teoretycznej notatki możemy np. tworzyć wykresy
Pomagają one w wizualizacji i zrozumieniu tematu

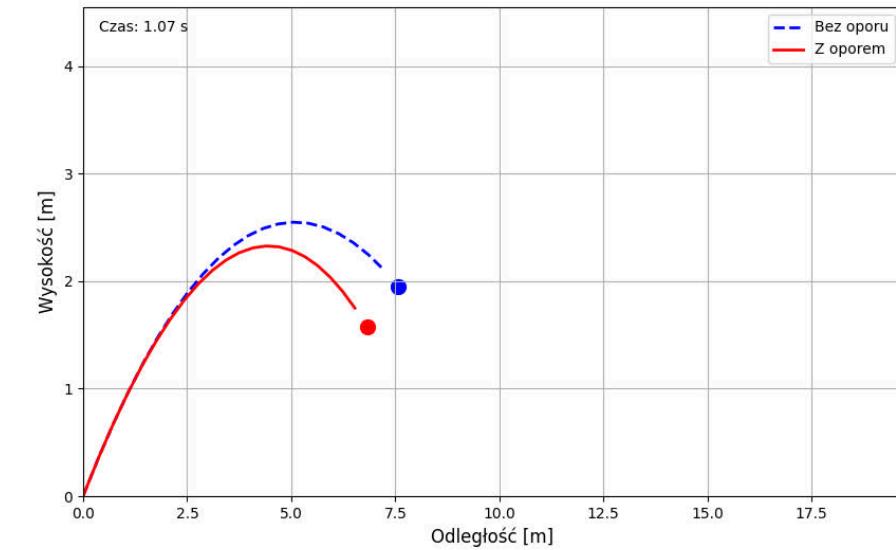


Wyższy poziom ?

Sam wykres czasami naprawdę mało ukazuje. Można zadać pytanie, które najpierw wylądowało ? Jak się zmieniała prędkość ?



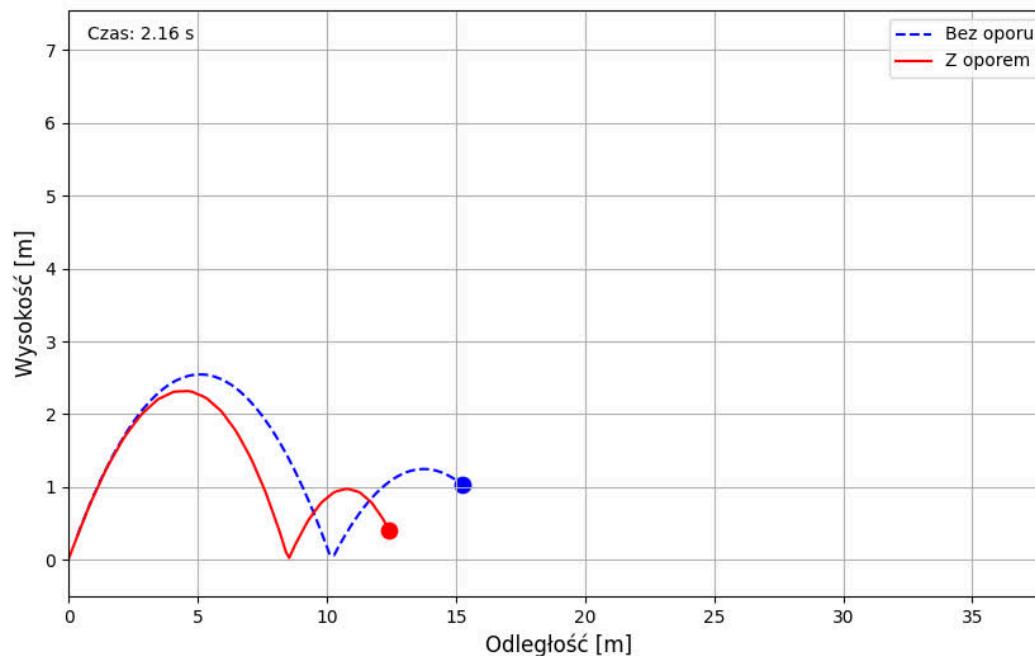
Za pomocą Colab Google i AI możemy generować animacje pozwalające na wizualizacje ruchu



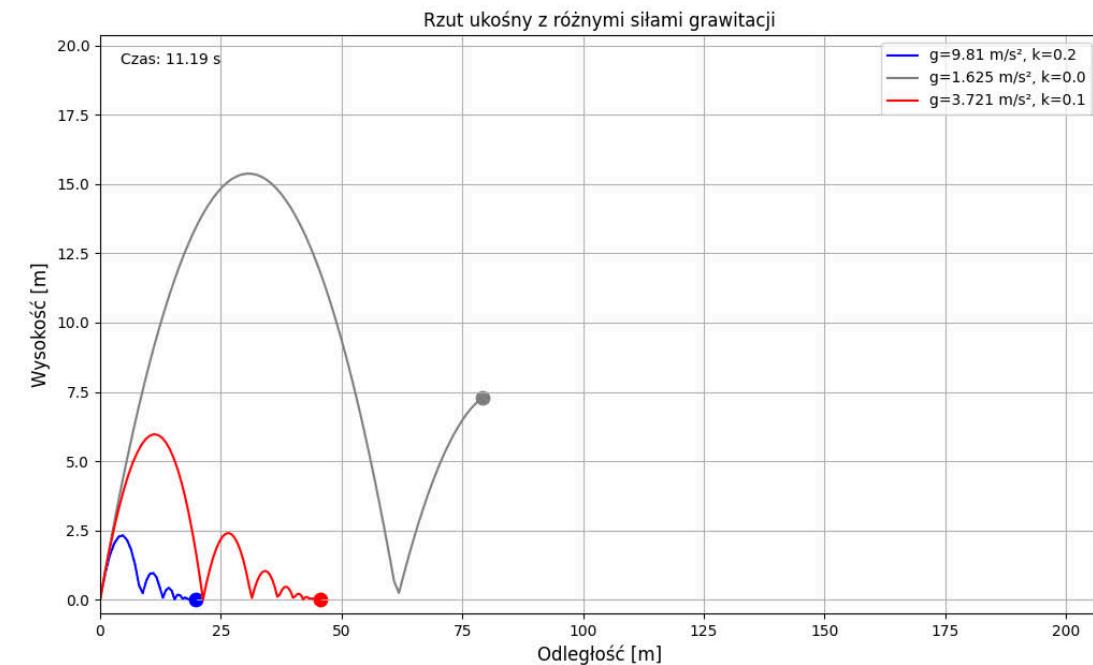
Udoskonalenia w zasięgu ręki

Mając początkowy wykres/animacje jakiegoś ruchu bardzo łatwo możemy go modyfikować udoskonalać dodając inne zmienne

Spręzystość



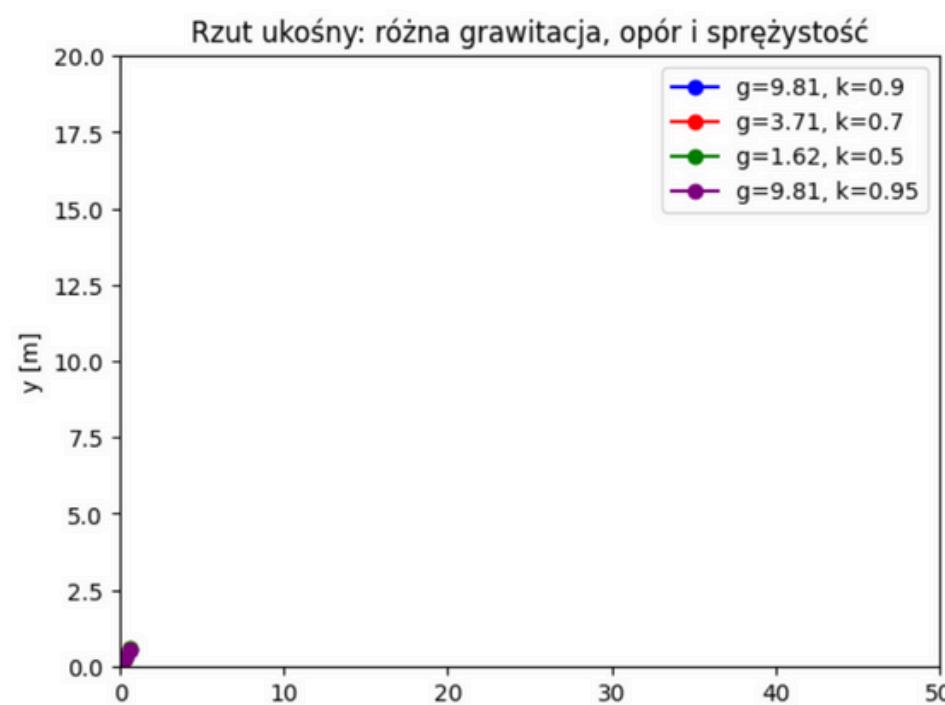
Grawitacja



Nie aż takie proste...

Prompty a wyniki, czasami mogą się różnić....

wygeneruj mi animacje rzutu ukośnego, gdzie ciała mają różnych współczynników sprężystości + działa siła oporu + różna grawitacja, wybierz sobie warunki początkowe, kod w pythonie



Oto animacja w Pythonie (z użyciem biblioteki `matplotlib`) pokazująca ruch rzutem ukośnym dla kilku ciął o:

- różnym współczynnikiem sprężystości (wpływającym na odbicia od podłoża),
- różnych wartościach oporu powietrza (siła proporcjonalna do prędkości),
- różnych wartościach grawitacji (np. Ziemia, Mars, Księżyca).

Przykładowe warunki początkowe są dobrane losowo, ale rozsądnie.

```
// Rzut Ukośny Animacja

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 from matplotlib.animation import FuncAnimation
4
5 # Parametry symulacji
6 dt = 0.02
7 T = 10
8 t = np.arange(0, T, dt)
9
10 # Obiekty do symulacji
11 # Każdy obiekt: [grawitacja, opór, współczynnik sprężystości, kolor]
12 objects = [
13     [9.81, 0.1, 0.9, 'blue'],      # Ziemia, lekki opór, sprężysty
14     [3.71, 0.05, 0.7, 'red'],     # Mars
15     [1.62, 0.01, 0.5, 'green'],   # Księżyca, duży opór
16     [9.81, 0.5, 0.95, 'purple']  # Innego planety, silny opór
17 ]
```

Mój projekt - krzywa Lissajous

Profesjonalna notatka z animacjami w Colab Google i nie tylko...

