NumerischeIntegration

June 19, 2020

Rechneranwendungen in der Physik - Übung N.6 Numerische Integration

Santiago.R[redacted]

[1]:
```
import numpy as np
import scipy as sp
import matplotlib.pyplot as plt
import math
import time
```

1 Die Newton-Cotes Formeln

Die Newton-Cotes Formeln sind eine Gruppe numerischer Quadraturformeln zur näherungsweisen Berechnung von Integralen eindimensionaler Funktionen. Ähnlich zur Taylorentwicklung ist die Grundidee der Newton-Cotes Formel, eine beliebige Funktion $f(x)$ zuerst durch anlegen eines Polynoms $p(x)$ innerhalb bestimmter Interpolationsintervalle $[a, x_0], [x_1, x_2]...[x_n, b]$ anzunähern und dann durch berechnen des Integrals für das Interpolationspolynom $\int_a^b p_n(x)dx$ eine numerische Lösung der Integration $\int_a^b f(x)dx$ der beliebigen Funktion in diesem Intervall $[a, b]$ zu erhalten. Für das Integral gilt somit $\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p(x)dx = \sum_{i=0}^n w_i f(x_i)$ wobei die Gewichte w_i durch die Langrange Polynome $l_i(x)$ mit $w_i = \int_a^b l_i(x)dx = \sum_{j=0}^n \frac{c_{ij}(b^{j+1}-a^{j+1})}{j+1}$ bestimmt werden und die Koeffizienten c_{ij} Teil der Legendre Polynome sind. Vereinfachungen dieses letzten Schritts mit festen Gewichtungen durch entwickeln der Polynome bis zu festen Graden von $n = 1, 2, 4...$ sind jeweils unter den Namen Trapezregel (n=1), Simpson-Regel (n=2) und Bode/Boole/Milne-Regel (n=4) bekannt. Hierbei gelten für die drei Regeln folgende Stützstellen und Gewichtungen Trapezregel: $x_i = \{a, b\}$, $w_i = \{\frac{b-a}{2}, \frac{b-a}{2}\} \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \approx h[f(a) + f(b)]$ Simpson-Regel: $x_i = \{a, \frac{b-a}{2}, b\}$, $w_i = \{\frac{b-a}{6}, \frac{4(b-a)}{6}, \frac{b-a}{6}\} \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \approx h[\frac{f(a)}{3} + \frac{4f(a+h)}{3} + \frac{f(b)}{3}]$ Bode/Boole/Milne-Regel: $x_i = \{a, \frac{b-a}{4}, \frac{2(b-a)}{4}, \frac{3(b-a)}{4}, b\}$, $w_i = \{\frac{7(b-a)}{90}, \frac{32(b-a)}{90}, \frac{12(b-a)}{90}, \frac{32(b-a)}{90}, \frac{7(b-a)}{90}\} \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \approx \frac{4h}{90}[7f(a) + 32f(a+h) + 12f(a+2h) + 32f(a+3h) + 7f(b)]$ wobei h als $h = \frac{b-a}{2}$ in den Integrationssummen normiert wird. Für die allgemeine numerische Integration mit den drei Regeln folgt somit

[2]:
```
#Trapezregel-Integration
def trapezInt(f,a,b,n):
    H=(b-a)/n       #Unterteilen des Intervalls in Stückintervalle zum stückweisen Integrieren
    a_n=a           #Startgrenze Links
    b_n=a+H         #Startgrenze Rechts
```

```
    h_n=(b_n-a_n)/2 #Mittlerer Abstand der Grenzen
    Int=0
    k=0
    for i in range(n):
        Int +=h_n*(f(a_n)+f(b_n)) #Trapezregel im Stückintegral
        a_n=b_n      #Aktualisieren der linken Grenze
        b_n=a_n+H    #Aktualisieren der rechten Grenze
        k += 1 #aktualisieren der Iterationsnummer
    return k, Int
#Simpson-Regel Integration
def simpsonInt(f,a,b,n):
    H=(b-a)/n       #Unterteilen des Intervalls in Stückintervalle zum␣
 ↪stückweisen Integrieren
    a_n=a           #Startgrenze Links
    b_n=a+H         #Startgrenze Rechts
    h_n=(b_n-a_n)/2 #Mittlerer Abstand der Grenzen
    Int=0
    k=0
    for i in range(n):
        Int +=h_n*(f(a_n)/3+4*f(a_n+h_n)/3+f(b_n)/3) #Simpsons-Regel im␣
 ↪Stückintegral
        a_n=b_n      #Aktualisieren der linken Grenze
        b_n=a_n+H    #Aktualisieren der rechten Grenze
        k += 1 #aktualisieren der Iterationsnummer
    return k, Int
#Bode/Boole/Milne-Regel Integration
def bodeInt(f,a,b,n):
    H=(b-a)/n       #Unterteilen des Intervalls in Stückintervalle zum␣
 ↪stückweisen Integrieren
    a_n=a           #Startgrenze Links
    b_n=a+H         #Startgrenze Rechts
    h_n=(b_n-a_n)/4 #Mittlerer Abstand der Grenzen
    Int=0
    k=0
    for i in range(n):
        Int␣
 ↪+=4*h_n*(7*f(a_n)+32*f(a_n+h_n)+12*f(a_n+2*h_n)+32*f(a_n+3*h_n)+7*f(b_n))/90␣
 ↪#Bode/Boole/Milne-Regel im Stückintegral
        a_n=b_n      #Aktualisieren der linken Grenze
        b_n=a_n+H    #Aktualisieren der rechten Grenze
        k += 1 #aktualisieren der Iterationsnummer
    return k, Int
```

2 Tests

[3]:
```
f = lambda x: x**3+x**2-10
trapezInt(f,a=0,b=2,n=10)
```

[3]: (10, -13.280000000000001)

[4]:
```
simpsonInt(f,a=0,b=2,n=10)
```

[4]: (10, -13.333333333333336)

[5]:
```
bodeInt(f,a=0,b=2,n=10)
```

[5]: (10, -13.333333333333336)

3 Testen der drei Integrationsroutinen und grafische Darstellung nach den Intervallsunterteilungen

[6]:
```
#Definieren der Testfunktionen
f1 = lambda x: np.exp(-2*x**2)
f2 = lambda x: 0.4*x**6-2*x**5+7*x**4-10*x**3
f3 = lambda x: 1/(0.5*x**2-2*x+3)

#Loops Funktion N.
↪1-----------------------------------------------------------------
int1_trapez_liste=[]
for i in range(1,1000):
    Intvalue=trapezInt(f1,a=0,b=1,n=i)
    int1_trapez_liste.append(Intvalue)
    if np.abs((trapezInt(f1,a=0,b=1,n=i+1)[1]-trapezInt(f1,a=0,b=1,n=i)[1])/
↪trapezInt(f1,a=0,b=1,n=i)[1])<0.001:
        break
int1_simpson_liste=[]
for i in range(1,1000):
    Intvalue=simpsonInt(f1,a=0,b=1,n=i)
    int1_simpson_liste.append(Intvalue)
    if np.abs((simpsonInt(f1,a=0,b=1,n=i+1)[1]-simpsonInt(f1,a=0,b=1,n=i)[1])/
↪simpsonInt(f1,a=0,b=1,n=i)[1])<0.001:
        break
int1_bode_liste=[]
for i in range(1,1000):
    Intvalue=bodeInt(f1,a=0,b=1,n=i)
    int1_bode_liste.append(Intvalue)
    if np.abs((bodeInt(f1,a=0,b=1,n=i+1)[1]-bodeInt(f1,a=0,b=1,n=i)[1])/
↪bodeInt(f1,a=0,b=1,n=i)[1])<0.001:
        break
```

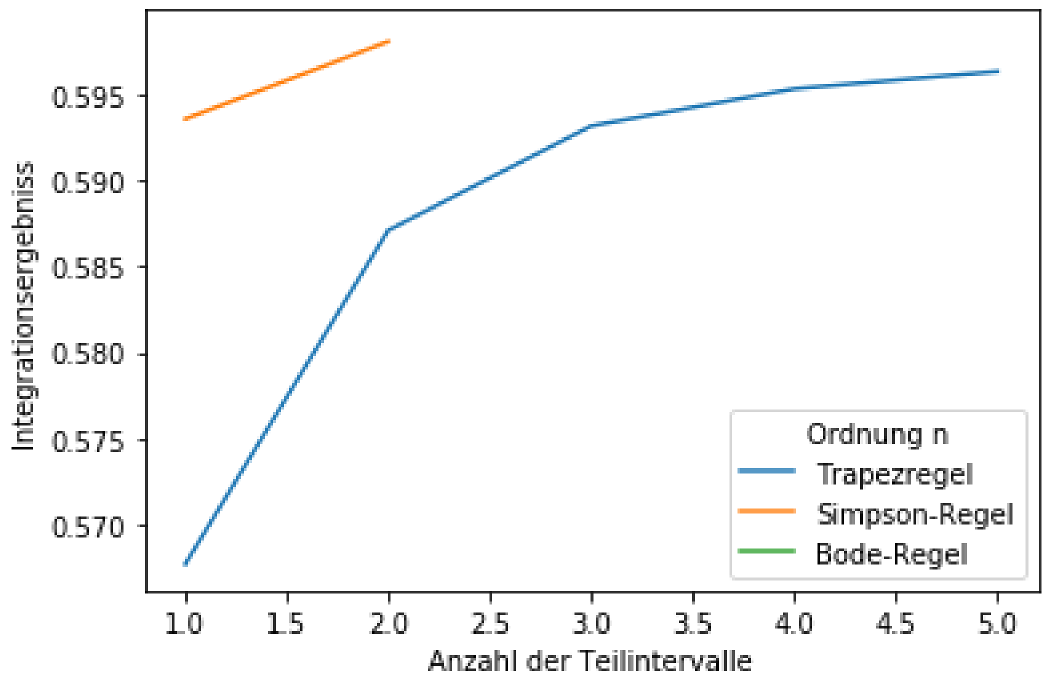
```
#Loops Funktion N.
↪2-------------------------------------------------------------------
int2_trapez_liste=[]
for i in range(1,1000):
    Intvalue=trapezInt(f2,a=0,b=4,n=i)
    int2_trapez_liste.append(Intvalue)
    if np.abs((trapezInt(f2,a=0,b=4,n=i+1)[1]-trapezInt(f2,a=0,b=4,n=i)[1])/
↪trapezInt(f2,a=0,b=4,n=i)[1])<0.001:
        break
int2_simpson_liste=[]
for i in range(1,1000):
    Intvalue=simpsonInt(f2,a=0,b=4,n=i)
    int2_simpson_liste.append(Intvalue)
    if np.abs((simpsonInt(f2,a=0,b=4,n=i+1)[1]-simpsonInt(f2,a=0,b=4,n=i)[1])/
↪simpsonInt(f2,a=0,b=4,n=i)[1])<0.001:
        break
int2_bode_liste=[]
for i in range(1,1000):
    Intvalue=bodeInt(f2,a=0,b=4,n=i)
    int2_bode_liste.append(Intvalue)
    if np.abs((bodeInt(f2,a=0,b=4,n=i+1)[1]-bodeInt(f2,a=0,b=4,n=i)[1])/
↪bodeInt(f2,a=0,b=4,n=i)[1])<0.001:
        break

#Loops Funktion N.
↪3-------------------------------------------------------------------
int3_trapez_liste=[]
for i in range(1,1000):
    Intvalue=trapezInt(f3,a=0,b=10,n=i)
    int3_trapez_liste.append(Intvalue)
    if np.abs((trapezInt(f3,a=0,b=10,n=i+1)[1]-trapezInt(f3,a=0,b=10,n=i)[1])/
↪trapezInt(f3,a=0,b=10,n=i)[1])<0.001:
        break
int3_simpson_liste=[]
for i in range(1,1000):
    Intvalue=simpsonInt(f3,a=0,b=10,n=i)
    int3_simpson_liste.append(Intvalue)
    if np.abs((simpsonInt(f3,a=0,b=10,n=i+1)[1]-simpsonInt(f3,a=0,b=10,n=i)[1])/
↪simpsonInt(f3,a=0,b=10,n=i)[1])<0.001:
        break
int3_bode_liste=[]
for i in range(1,1000):
    Intvalue=bodeInt(f3,a=0,b=10,n=i)
    int3_bode_liste.append(Intvalue)
```

```
    if np.abs((bodeInt(f3,a=0,b=10,n=i+1)[1]-bodeInt(f3,a=0,b=10,n=i)[1])/
↪bodeInt(f3,a=0,b=10,n=i)[1])<0.001:
        break
```

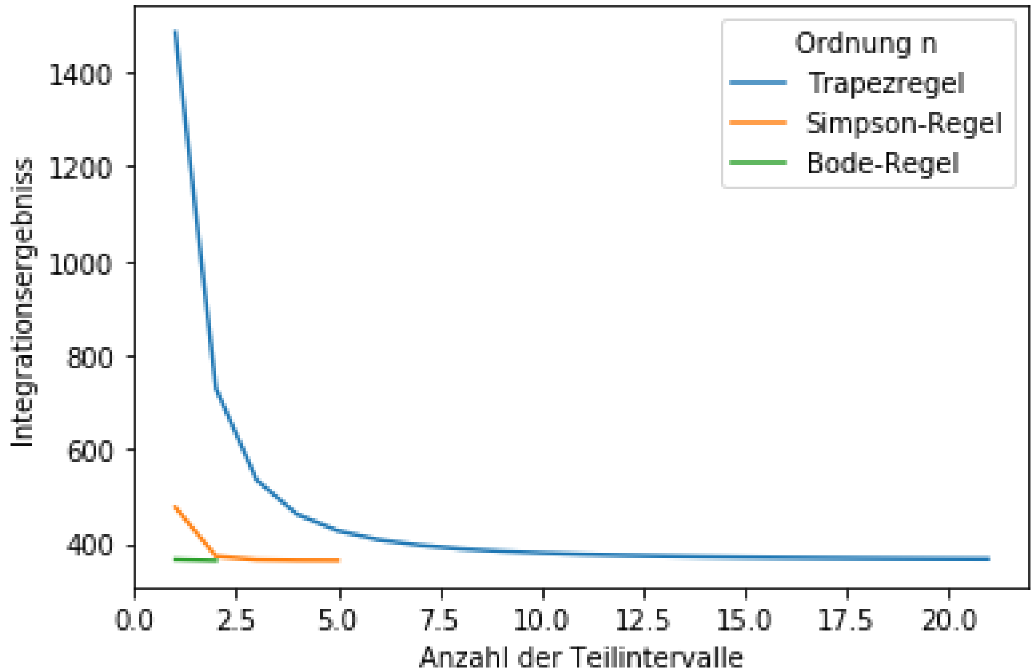
[7]:
```
#Plots der Funktion N.1
plt.plot(*zip(*int1_trapez_liste),label='Trapezregel')
plt.plot(*zip(*int1_simpson_liste),label='Simpson-Regel')
plt.plot(*zip(*int1_bode_liste),label='Bode-Regel')
plt.legend(title="Ordnung n",loc='lower right')
plt.xlabel('Anzahl der Teilintervalle')
plt.ylabel('Integrationsergebniss')
plt.show
```

[7]:
```
<function matplotlib.pyplot.show(*args, **kw)>
```



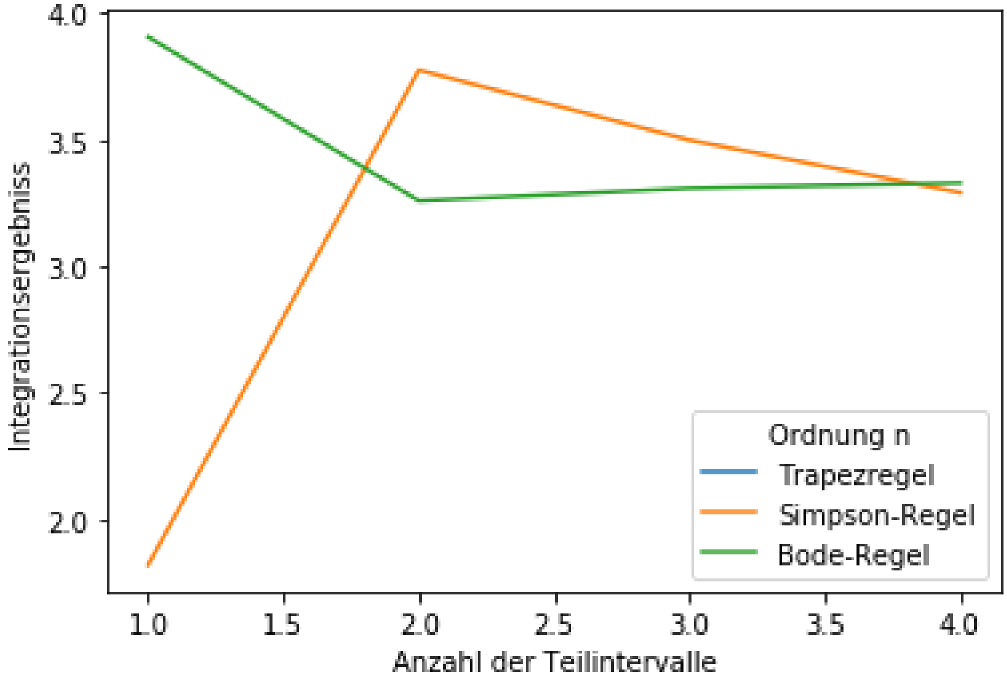
[8]:
```
#Plots der Funktion N.2
plt.plot(*zip(*int2_trapez_liste),label='Trapezregel')
plt.plot(*zip(*int2_simpson_liste),label='Simpson-Regel')
plt.plot(*zip(*int2_bode_liste),label='Bode-Regel')
plt.legend(title="Ordnung n",loc='upper right')
plt.xlabel('Anzahl der Teilintervalle')
plt.ylabel('Integrationsergebniss')
plt.show
```

[8]: <function matplotlib.pyplot.show(*args, **kw)>



[9]:
```
#Plots der Funktion N.1
plt.plot(*zip(*int3_trapez_liste),label='Trapezregel')
plt.plot(*zip(*int3_simpson_liste),label='Simpson-Regel')
plt.plot(*zip(*int3_bode_liste),label='Bode-Regel')
plt.legend(title="Ordnung n",loc='lower right')
plt.xlabel('Anzahl der Teilintervalle')
plt.ylabel('Integrationsergebniss')
plt.show
```

[9]: <function matplotlib.pyplot.show(*args, **kw)>


4.0
3.5
3.0
2.5
2.0
Integrationsergebniss
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
3.5
4.0
Anzahl der Teilintervalle
Ordnung n
Trapezregel
Simpson-Regel
Bode-Regel