Approximation der Kosinusfunktion

May 9, 2020

Rechneranwendungen in der Physik - Übung N.2 Taylorentwicklung der Kosinusfunktion

Santiago.R, Diego Rubio Carrera

[1]:
```
import numpy as np
import scipy as sp
import matplotlib.pyplot as plt
import math
import time
```

Zur Approximation der Kosinusfunktion entwickeln wir die Taylorreihe für $f(x) = cos(x)$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$. Die Taylorreihe, die beliebige Funktionen mithilfe von Polynomen n-ter Ordnungen annähert, ist allgemein definiert als $T(x, x_0, n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$, d.h. also als Summe der Produkte von den k-ten Ableitungen am Entwicklungspunkt und den k-Potenzen der Variable x. Um diese Taylorreihe zu entwickeln müssen also die Ableitungen (oder die Werte der Differentialquotienten am Entwicklungspunkt) bis zur k-ten Ordnung aus der angenäherten Funktion entnommen werden. Diese ist die Kosinusfunktion und diese definieren wir also zunächst im Notebook mithilfe vom Modul Numpy als $y_1(x) = cos(x)$, weshalb folgt;

[2]:
```
def y1(x):
    return np.cos(x)
```

Für die Ableitungen der Kosinusfunktion gilt aus der Lehre in der mathematischen Analyse $f'(x) = -sin(x)$, $f''(x) = -cos(x)$, $f'''(x) = sin(x)$ u.s.w. sodass gilt

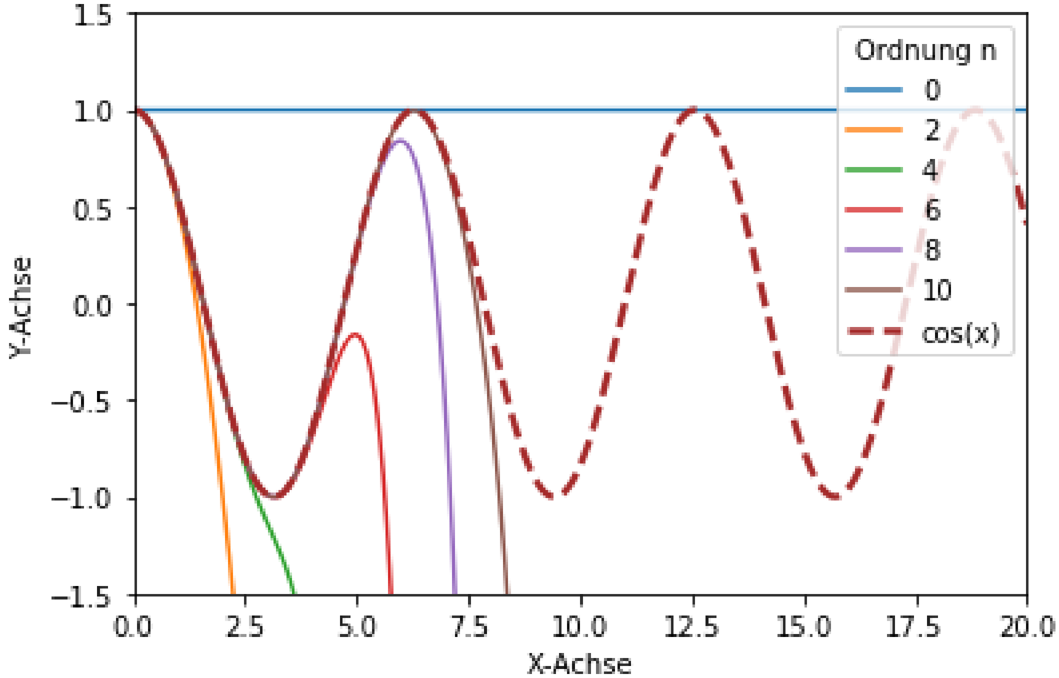
$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} (-1)^i sin(x) & \forall k = 2i - 1 \quad : i \in \mathbb{N} \\ (-1)^j cos(x) & \forall k = 2j \quad : j \in \mathbb{N} \end{cases}$$

wobei aber alle Terme im ersten Fall mit $sin(x)$ für den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ entfallen aufgrund von $sin(0) = 0$. Somit bleiben für die Taylorentwicklung der Kosinusfunktion um den Punkt $x_0 = 0$ nur die Terme von $f^{(k)}(x_0) = (-1)^k cos(x_0) = (-1)^k$ in der Summe s.d. für die Taylorreihe um $x_0 = 0$ folgt; $\quad T_{(0)}(x, n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$

[3]:
```
def T(x, n):
    taylor = 0
    for k in range(n+1):
        taylor += ((-1)**k) * (x ** (2*k)) / (math.factorial(2 * k))
    return taylor
```

Diese Taylorreihe soll nun für $n = 0, 2, 4...10$ entwickelt und die Laufzeiten Δt der nummerischen Berechnungen für jede einzelne Taylorentwicklung angegeben werden. Anschließend werden die ausgewerteten Polynome mitsamt der eigentlichen Kosinusfunktion gemeinsam in einem Plot dargestellt.

[10]:
```
x = np.linspace(0,20,num=20000)
n0=0
t0 = time.time()
plt.plot(x, T(x, n0),label=0)
Laufzeit0 = time.time()-t0
mylist=[]
for n in range(1,11,2):
    t = time.time()
    plt.plot(x, T(x, n),label=n+1)
    Laufzeit = time.time()-t
    mylist.append(Laufzeit)
plt.plot(x, y1(x), color="brown", linewidth=2.5, linestyle="--",label='cos(x)')
plt.legend(title="Ordnung n",loc='upper right')
plt.xlabel('X-Achse')
plt.ylabel('Y-Achse')
startx, endx = 0, 20
starty, endy = -1.5, 1.5
plt.axis([startx, endx, starty, endy])
plt.show()
s = set(mylist)
print('Die Laufzeit der Taylor-Entwicklung bis zur Ordnung n =', 0,'ist t␣
 ↪=',round(Laufzeit0,3),'Sekunden')
for i in range(0,5,1):
    print('Die Laufzeit der Taylor-Entwicklung bis zur Ordnung n =', 2+2*i,'ist␣
 ↪t =',round(list(s)[i],3),'Sekunden')
```




```
Die Laufzeit der Taylor-Entwicklung bis zur Ordnung n = 0 ist t = 0.028 Sekunden
Die Laufzeit der Taylor-Entwicklung bis zur Ordnung n = 2 ist t = 0.005 Sekunden
Die Laufzeit der Taylor-Entwicklung bis zur Ordnung n = 4 ist t = 0.006 Sekunden
Die Laufzeit der Taylor-Entwicklung bis zur Ordnung n = 6 ist t = 0.009 Sekunden
Die Laufzeit der Taylor-Entwicklung bis zur Ordnung n = 8 ist t = 0.008 Sekunden
Die Laufzeit der Taylor-Entwicklung bis zur Ordnung n = 10 ist t = 0.009
Sekunden
```