1 Theorie

1.1 Allgemeine Relaxationsgleichung

Von Relaxation wird gesprochen, wenn ein System nach Auslenkung ‚nicht-oszilllatorisch in seinen Ausgangszustand zurückkehrt. Hier wird ein RC-Kreis, also eine einfache Schaltung aus Widerstand und Kondensator betrachtet. Die Änderungsgeschwindigkeit zur Zeit t der GröSSe A ist proportional zu dessen Abweichung vom Endzustand A(∞)

$$\frac{dA}{dt} = c[A(t) - A(\infty)] \tag{1}$$

Durch Integration folgt:

$$A(t) = A(\infty) + [a(0) - A(\infty)]e^{ct}. \tag{2}$$

Hier muss c $<$ 0 sein, da A sonst nicht beschränkt ist.

1.2 Entladung

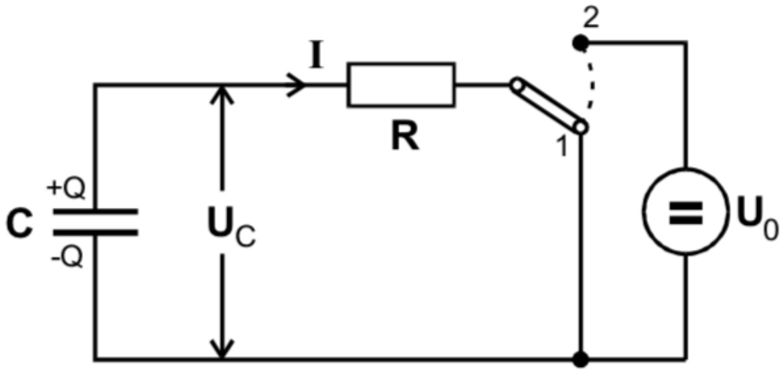

Abbildung 1: Entladung (1) und Aufladung (2) eines Kondensators über einen Widerstand, [**1**].

Zwischen den beiden Platten eines Kondensators mit Kapazität C und Ladung Q liegt eine Spannung U_C an:

$$U_\mathrm{C} \tag{3}$$

Nach dem ohmschen Gesetz folgt der Strom I durch den Widerstand R:

$$I = \frac{U_\mathrm{C}}{R} \tag{4}$$

Zeitlich verändert sich die Ladung Q auf den Platten mit:

$$dQ = -Idt \tag{5}$$

Somit folgt aus (3),(4) und (5):

$$Q(t) = Q(0) \cdot e^{(-\frac{t}{RC})} \tag{6}$$

1.3 Aufladung

Der Aufladevorgang lässt sich mit der Gleichung

$$Q(t) = CU_0(1 - e^{(-\frac{t}{RC})}) \tag{7}$$

beschreiben. RC ist dabei die Zeitkonstante des Relaxationsvorganges. Sie beschreibt die Geschwindigkeit, in der das System dem Endzustand Q(∞) zugeht. Während der Zeit ΔT = RC ändert sich die Ladung auf dem Kondensator um

$$\frac{Q(t = RC)}{Q(0)} = \frac{1}{e} \approx 0,368$$

10% des Ausgangswertes sind nach ΔT = 2,3 RC noch vorhanden, 1 % nach 4,6 RC.

1.4 Relaxation bei periodischer Auslenkung

Es wird eine äuSSere Wechselspannung U(t) angelegt:

$$U(t) = U_0 cos\omega t$$

Ist ω klein genug, also ω«$\frac{1}{RC}$, so wird die Spannung U_C gleich U(t) sein. Je höher

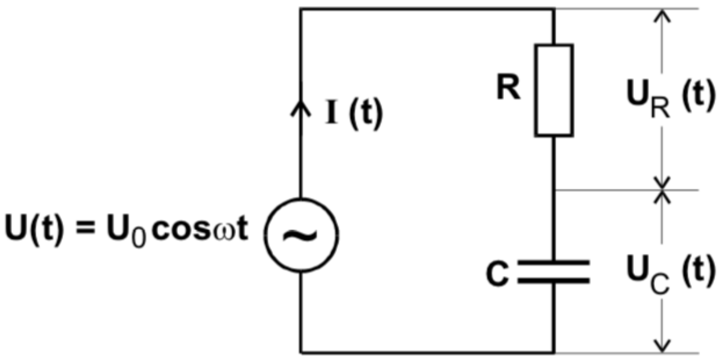

Abbildung 2: Schaltung eines RC-Kreises mit angelegter Wechselspannung, [**1**].

die Frequenz, desto mehr verschiebt sich die Auf-/Entladung des Kondensators über den Widerstand hinter den Verlauf der Generatorspannung. Es entsteht also eine Phasenverschiebung φ zwischen den beiden Spannungen. Zudem nimmt die Amplitude A der Kondensatorspannung ab. Veranschaulicht wird der Vorgang in Abbildung **??**. Die ausgehende Wechselspannung wird nun als

$$U_\mathrm{C}(t) = A(\omega)cos(\omega t + \varphi(\omega)) \tag{8}$$

beschrieben. Zudem gilt:

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = C\,\frac{dU_\mathrm{C}}{dt} \tag{9}$$

Über die bisherigen Gleichungen und dem Kirchhoff'schen Gesetz folgt dann:

$$A(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \tag{10}$$

Diese Gleichung stellt eine Beziehung zwischen Kondensatorspannungs-Amplitude und der Kreisfrequenz der Erregerspannung auf. Für $\omega \to \infty$ läuft A(ω) gegen 0 und für $\omega \to 0$ gegen U_0. Zudem ist A(1/RC) = U_0 / $\sqrt{2}$. Wegen diesen Zusammenhängen nutzt man RC-Kreise in der elektrischen Schaltungstechnik als Tiefpässe, da sie Frequenzen, die klein gegen 1/RC laufen ungehindert hindurchlassen und hohe Frequenzen ω » 1/RC schlecht durchlassen.

1.5 RC-Kreis als Integrator

Ein RC-Kreis kann unter bestimmten Bedingungen auch als Integrator verwendet werden. ω muss dabei » 1/RC sein. Dann folgt aus

$$U(t) = RC\frac{dU_\mathrm{C}}{dt}$$

unter besagter Voraussetzung:

$$U_\mathrm{C}(t) = \frac{1}{RC}\int_0^t U(t')dt' \tag{11}$$