

V102

Drehschwingung

Jonas Osterholz
jonas.osterholz@tu-dortmund.de

Moritz Rempe
moritz.rempe@tu-dortmund.de

Durchführung: 02.11.2018

Abgabe: 09.11.2018

Inhaltsverzeichnis

1	Zielsetzung	3
2	Theorie	3
2.1	Bestimmung des Torsionsmoduls	4
2.2	Bestimmung des Elastizitätsmoduls	5
2.3	Magnetische Moment	6
3	Aufbau	7
4	Durchführung	8
5	Auswertung	9
5.1	Messung ohne B-Feld	10
5.1.1	Schubmodul G	10
5.1.2	Querkontraktionszahl	10
5.1.3	Kompressionsmodul	11
5.2	Messung mit B-Feld	11
6	Diskussion	13
7	Literatur	13

1 Zielsetzung

Bei dem Versuch 'Drehschwingung' sollen sowohl die elastischen Konstanten eines Metalls, als auch das magnetische Moment eines Permanentmagneten bestimmt werden.

2 Theorie

Wirken Kräfte auf einen Festkörper ein, so kann es zu Gestalts- und Volumenänderungen kommen. Zudem wird unterschieden zwischen Volumenkräften, die die Bewegung eines Körpers beeinflussen können (Translation / Rotation), und Oberflächenkräften, die lediglich Gestalts-/Volumenänderungen hervorrufen.

Beschrieben wird die Kraft durch die Größe Spannung (Kraft/Fläche). Die senkrecht dazu verlaufende Komponente wird als Normalspannung σ oder Druck P bezeichnet. Die zur Spannung oberflächenparallel verlaufende Komponente wird als Tangential-/Schubspannung τ bezeichnet. Diese Oberflächenkräfte lassen sich an jeder Querschnittsfläche des Körpers messen. Nimmt der Körper nach Einwirken der Kraft seine vorherige Form wieder an, so handelt es sich um eine elastische Deformation. Bei kleinen Spannungen gilt das Hookesche Gesetz:

$$\sigma = E \frac{\Delta L}{L} \quad (1)$$

$$P = Q \frac{\Delta V}{V} \quad (2)$$

Hierbei ist L die Länge und V das Volumen des Körpers.

Der im Experiment verwendete Körper ist isotrop, das heisst, die elastischen Konstanten sind richtungsunabhängig. Zwei Konstanten können somit das Verhalten des Körpers vollständig beschreiben. Aus praktischen Gründen werden jedoch vier Konstanten verwendet. Das Torsionsmodul G , als Größe für die Gestaltselastizität, das Kompressionsmodul Q , als Größe für die Volumenelastizität. Zudem das Elastizitätsmodul E , als relative Längenänderung in Normalspannungsrichtung, und die Possonsche Querkontraktionszahl μ , welche die relative Längenänderung senkrecht zur Normalspannung beschreibt.

$$\mu := -\frac{\Delta B}{B} \cdot \frac{L}{\Delta L} \quad (3)$$

B ist die Dicke und L die Länge des Körpers.

Es ergibt sich folgender Zusammenhang zwischen den vier Konstanten:

$$E = 2G(\mu + 1) \quad (4)$$

$$E = 3(1 - 2\mu)Q \quad (5)$$

2.1 Bestimmung des Torsionsmoduls

Wirken auf einen Körper Tangentialspannungen so kommt es zu einer Scherung. Die Grundflächen werden dabei leicht verschoben, die Oberfläche bleibt jedoch gleich. Der Zusammenhang zwischen Schubspannung τ und Scherungswinkel α kann beschrieben werden durch:

$$\tau = G\alpha \quad (6)$$

Genauer lässt sich G mithilfe der Torsion eines zylindrischen Drahtes ermitteln. Wird der Draht an einer Seite befestigt und greifen an der anderen Seite zwei diametrale Kräfte an, so wirkt ein Drehmoment M 1.

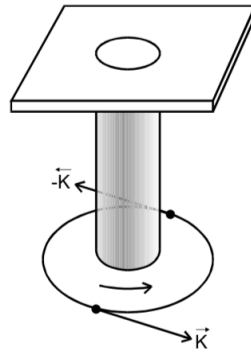


Abbildung 1: Torsion eines Drahtes, [1].

Die untere Fläche wird nun um den Winkel ρ verdreht. Für das Drehmoment am Kreisring mit Radius r gilt dann:

$$dM = r dK \quad (7)$$

Aus $\tau = \frac{dK}{dF}$ folgt

$$dM = r \cdot D \cdot \alpha dF \quad (8)$$

Aus 2 erkennt man, dass $\alpha = \frac{r\rho}{L}$ gilt. Damit erhält man für M

$$M = \frac{\pi}{2} G \frac{R^4}{L} \rho \quad (9)$$

Es wird der Proportionalitätsfaktor D , auch Richtgröße des Zylinders genannt, definiert als

$$D := \frac{\pi G R^4}{2L} \quad (10)$$

Aufgrund von elastischer Nachwirkung bei dieser Methode, also dass die Deformation eines Körpers nach Ende des Einwirkens der Kräfte nicht direkt vollkommen zurückgeht,

2.3 Magnetische Moment

Das magnetische Moment \vec{m} kann als Produkt der Polstärke p und dem Abstand \vec{a} zwischen den beiden Polen des Permanentmagneten beschrieben werden.

$$\vec{m} = p \cdot \vec{a} \quad (13)$$

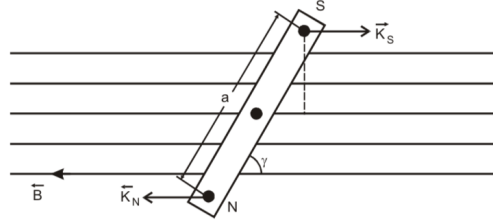


Abbildung 3: Permanentmagnet im homogenen Magnetfeld [1].

In einem homogenen Magnetfeld mit Flussdichte \vec{B} wirken die beiden Kräfte \vec{K}_N und \vec{K}_S (siehe Abb.:3). Daraus folgt das Drehmoment \vec{M}_{Mag}

$$\vec{M}_{\text{Mag}} = p\vec{a} \times \vec{B} = \vec{m} \times \vec{B} \quad (14)$$

Das Magnetfeld \vec{B} wird hierbei durch ein Helmholtzspulenpaar erzeugt. Aus dem Spulenzradius und -abstand R und dem Strom I ergibt sich für \vec{B} in der Mitte der Helmholtzspule somit:

$$B(0) = \frac{\mu_0 I R^2}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (15)$$

x ist der halbe Abstand R .

Wird das in 2.1 beschriebene System, mit einem Magneten in der Kugel, in Schwingung versetzt, so führt die Lösung der Schwingungsgleichung zu

$$T_m = 2\pi \sqrt{\frac{\theta}{mB + D}} \quad (16)$$

T_m ist die, durch das zusätzliche Drehmoment, geänderte Periodendauer.

3 Aufbau

Der Aufbau der Versuche zur Bestimmung des Schubmoduls G und des magnetischen Moments besteht hauptsächlich aus zwei Elementen.

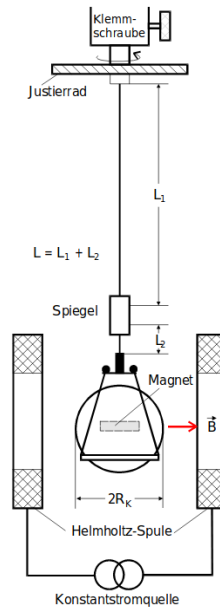


Abbildung 4: Versuchsapparatur[1].

Der erste Bestandteil ist die Messapparatur aus Abb.: 4, an der der Torsionsdraht über ein Justierrad an einer Klemmschraube fixiert ist. Am anderen Ende des Drahtes ist eine Kugel durch eine Schraube befestigt. Zur Messung des magnetischen Momentes wird zusätzlich ein Helmholtzspulenpaar benötigt, welches an eine konstante Stromquelle angeschlossen ist. Im Zentrum des Spulenpaares befindet sich die Kugel, in deren Inneren sich ein Permanentmagnet befindet. An dem Torsionsdraht über der Kugel ist ein ebener Spiegel angebracht.

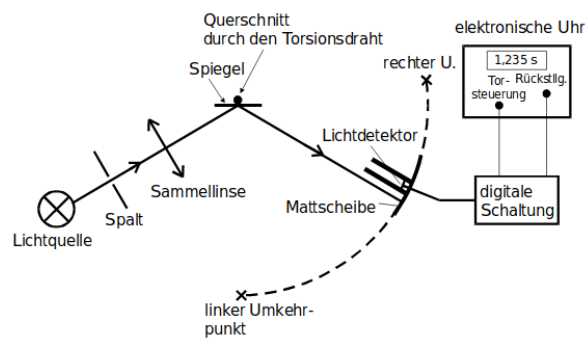


Abbildung 5: Schematische Darstellung der Periodendauermessung.

Der zweite Teil des Aufbaus wird in Abb.: 5 dargestellt. Hier wird das Licht einer Lampe durch einen Spalt und eine Sammellinse auf den gerade beschriebenen Spiegel gebündelt. Falls der Lichtstrahl in einem bestimmten Winkel von dem Spiegel reflektiert wird, trifft dieser auf einen Lichtdetektor. Durch den Lichtdetektor und eine digitale Schaltung, die in Abbildung 6 dargestellt ist, wird das optische Signal in ein elektrisches Signal umgewandelt und an eine elektronische Uhr weitergeleitet.

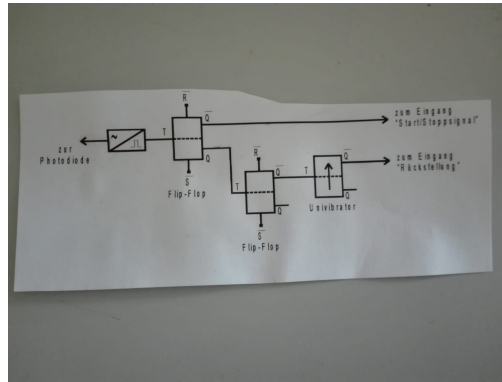


Abbildung 6: Schematischer Aufbau der Schaltung

4 Durchführung

Die Durchführungen der Versuche zur Bestimmung des Schubmoduls und des magnetischen Momentes sind nahezu identisch. Zu Beginn wird der reflektierte Lichtstrahl durch das Justierad so eingestellt, dass dieser einen geringen Abstand zum Lichtdetektor aufweist. Um an dem Draht Torsionsschwingungen zu erzeugen, wird das Justierad einmal um einen kleinen Winkel aus der eingestellten Ausgangslage heraus- und wieder zurückgedreht. Dabei sollte beachtet werden, dass die Kugel keine Pendelbewegung ausführt, sondern nur rotiert. Das Element des Aufbaus aus Abbildung 5 misst die Schwingungsdauer, da sich der reflektierte Lichtstrahl durch die Torsion am Lichtdetektor vorbei bewegt und somit anfängt die Zeit zu messen. Bei dem nächsten Überlaufen des Lichtstrahls über den Detektor, wird die Zeit noch nicht gestoppt, sondern erst nachdem der Lichtstrahl erneut den Detektor übertreten hat. Außerdem sollte bei der Bestimmung des Schubmoduls die Dipolachse des in der Kugel enthaltenen Magneten parallel zu dem Torsionsdraht stehen, damit das Magnetfeld der Erde die Messung nicht beeinflusst. Bei der Bestimmung des magnetischen Momentes wird zusätzlich die Stromquelle für das Helmholtzspulenpaar eingeschaltet, sodass ein Magnetfeld erzeugt wird. Außerdem muss darauf geachtet werden, dass die Dipolachse parallel zu dem magnetischen Feld ausgerichtet ist um Messungenauigkeiten zu vermeiden. Die Dipolachse ist durch einen weißen Punkt auf der Kugel gekennzeichnet.

5 Auswertung

Die Abmessungen des Drahtes und die Kugelmasse m_k , sowie der Kugelradius R_k ergeben:

Tabelle 1: Abmessungen Draht und Kugel.

	l_{Draht}/cm	d_{Draht}/mm	m_k/g	$2R_k/mm$
	67.00	0.16	588.3	51.03
	66.00	0.17		
	66.00	0.16		
	66.00	0.16		
	67.00	0.17		
	67.00			
	67.00			
	66.00			
	68.00			
	67.00			
Mittelwert, Gl.(17)	66.66	0.164	588.3	51.03
Abweichung, Gl.(18)	0.0024	$2.45 \cdot 10^{-6}$	$2.4 \cdot 10^{-4}$	$2.04 \cdot 10^{-5}$

Der Mittelwert wurde hierbei anhand der Formel

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (17)$$

bestimmt. Die Abweichung σ mit $i = 1, \dots, n$:

$$\sigma_i = \frac{s_i}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n (v_j - \bar{v}_i)^2}{n * (n - 1)}} \quad (18)$$

5.1 Messung ohne B-Feld

5.1.1 Schubmodul G

Für die Schwingungsdauern ergaben sich folgende Werte:

Tabelle 2: Periodendauer der Schwingungen der Kugel ohne magnetisches Feld.

	T/s
	18.544
	18.540
	18.551
	18.570
	18.252
	18.537
	18.579
	18.563
	18.554
	18.589
Mittelwert, Gl.(17)	18.528
Abweichung, Gl(18)	0.031

Das Schubmodul G wird nun nach Gl.(11) mit den obigen Werten berechnet. Mit der Fehlerfortpflanzung:

$$\Delta x_i = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial k_1} * \sigma_{k_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial k_2} * \sigma_{k_2}\right)^2 + \dots} \quad (19)$$

$$\Delta G = \sqrt{\left(\frac{\partial G}{\partial m_k} * \sigma_{m_k}\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial R_k} * \sigma_{R_k}\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial T} * \sigma_T\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial d} * \sigma_d\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial l} * \sigma_l\right)^2}$$

Somit ist:

$$G = (1.678 \pm 0.101) 10^{11} \text{N/m}^2$$

5.1.2 Querkontraktionszahl

Aus (4) ergibt sich mit einem Fehler nach (19)

$$\Delta \mu = \sqrt{\left(\frac{\partial \mu}{\partial E} * \sigma_E\right)^2 + \left(\frac{\partial \mu}{\partial G} * \sigma_G\right)^2}$$

für die Querkontraktionszahl

$$\mu = -0,37 \pm 0,04$$

Das E-Modul wurde aufgrund der entfallenden Messung wie folgt angegeben:

$$E = (21.00 \pm 0.05) 10^{10} \text{N/m}^2$$

5.1.3 Kompressionsmodul

Aus (5) ergibt sich mit dem Fehler nach (19)

$$\Delta Q = \sqrt{\left(\frac{\partial Q}{\partial E} * \sigma_E\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial \mu} * \sigma_\mu\right)^2}$$

für das Kompressionsmodul

$$Q = (4.00 \pm 0.17) 10^{10} \text{Pa}$$

5.2 Messung mit B-Feld

Für die Schwingungsdauern im Abhängigkeit von der Stromstärke, bzw. dem Magnetfeld, ergaben sich folgende Werte:

Tabelle 3: Periodendauer der Schwingungen der Kugel mit magnetischem Feld (0.5A-2-5A).

I / A	T/s				
	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5
	11.310	8.756	7.467	6.583	5.975
	11.102	8.779	7.465	6.608	5.973
	11.101	8.762	7.460	6.596	5.981
Mittelwert, Gl.(17)	11.17	8.766	7.464	6.596	5.976
Abweichung, Gl(18)	0.07	0.007	0.002	0.007	0.0024

Tabelle 4: Periodendauer der Schwingungen der Kugel mit magnetischem Feld(3.0A-5.0A).

I / A	T/s				
	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0
	5.521	5.136	4.538	4.558	4.336
	5.526	5.132	4.577	4.587	4.330
	5.519	5.142	4.865	4.556	4.344
Mittelwert, Gl.(17)	5.522	5.137	4.67	4.567	4.337
Abweichung, Gl(18)	0.002	0.003	0.1	0.01	0.004

Nach Gleichung (15) mit $N = 80$ und $R_H = 72 \text{ mm}$ können die B -Werte im folgenden $\frac{1}{T^2} - B$ Diagramm wiedergegeben werden:

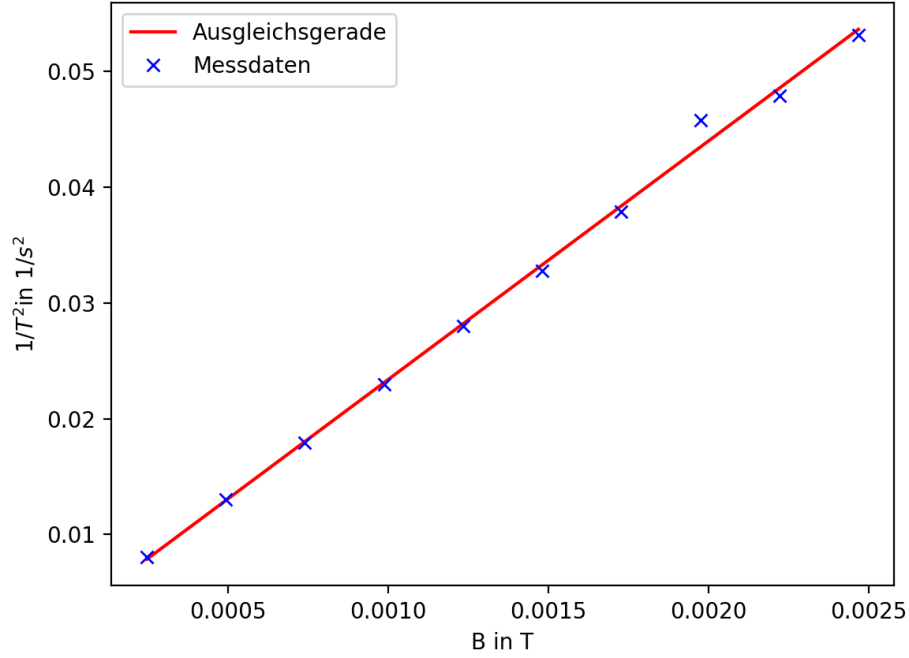


Abbildung 7: $1/T - B$ Diagramm zur Berechnung des magn. Momentes.

Über Formel

$$m \cdot x + b \quad (20)$$

wird die Steigung und der Fehler der Ausgleichsgerade von Python Modul Scipy Curve fit berechnet.

$$a = 10.187 \pm 0.040 =: \frac{1}{T^2 * B}$$

$$b = 0.0027 \pm 3.82 \cdot 10^{-7}$$

Die Ausgleichsgerade hat somit die Form:

$$(10.187 \pm 0.040) * x + (0,0027 \pm 3.82 \cdot 10^{-7})$$

Mit Gleichung (10), (16) und (19) ergibt sich für das magnetische Moment m_{magn} die Formel:

$$m_{magn} = \frac{4\pi^2}{B * T^2} * \theta - \frac{D}{B} = 4\pi^2 * m * \theta - \frac{D}{B} \quad (21)$$

Nach (16) und (19) ergibt sich dann mit der Fehlerfortpflanzung

$$\Delta m_{\text{magn}} = \sqrt{\left(\frac{\partial m_{\text{magn}}}{\partial m} * \sigma_m\right)^2 + \left(\frac{\partial m_{\text{magn}}}{\partial R_k} * \sigma_{R_k}\right)^2 + \left(\frac{\partial m_{\text{magn}}}{\partial M_k} * \sigma_{M_k}\right)^2 + \left(\frac{\partial m_{\text{magn}}}{\partial D} * \sigma_D\right)^2 + \left(\frac{\partial m_{\text{magn}}}{\partial \bar{B}} * \sigma_{\bar{B}}\right)^2}$$

das magnetische Moment

$$m_{\text{magn}} = (0.056\,01 \pm 0.000\,28) \text{ A m}^2$$

6 Diskussion

Bei der Durchführung des Versuches 'Drehschwingungen' konnte es durch mehrere Fehlerquellen zu Ungenauigkeiten bei der Messung und Auswertung kommen. Obwohl statt Scherung die Torsion verwendet wird, wird die elastische Nachwirkung zwar minimiert aber nicht komplett vermieden. Zudem war es nicht möglich die Schwingung bei sehr kleinem Auslenkwinkel zu messen was dazu führt, dass die Kleinwinkelnäherung noch ungenauer ist. Pendelbewegungen der Kugel konnten nicht komplett vermieden werden, was zur Beeinflussung der Schwingung und somit der genauen Messung führt.

Die Durchführung des Versuches ergab folgende Werte:

$$\begin{aligned} G &= (1.6780 \pm 0.1018) 10^{11} \text{ N/m}^2 \\ \mu &= -0,37 \pm 0,04 \\ E &= (21.00 \pm 0.05) 10^{10} \text{ N/m}^2 \\ Q &= (4.00 \pm 0.17) 10^{10} \text{ Pa} \\ m_{\text{magn}} &= (0.056\,01 \pm 0.000\,28) \text{ A m}^2 \end{aligned}$$

Alle berechneten Größen sind durch die vielen einfließenden Messwerte stark Fehler durchzogen. Das magnetische Moment ist jedoch trotz alledem mit einem kleinen Fehler sehr genau.

Verglichen mit den Literaturwerten für Schubmodule verschiedener Stoffe, kann angenommen werden, dass es sich bei dem hier verwendeten Stoff um Kupfer ($G = 125 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$) oder Stahl ($G = 200 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$) handelt [2].

7 Literatur

- [1] TU Dortmund. Versuchsanleitung zum Experiment V102 - Drehschwingungen. 2018.
- [2] https://www.fkp.tu-darmstadt.de/media/fkp/profstuehn/lehre/physik1ws0809/vorlesung_4/folien_woche_08.pdf, 28.11.2018