

V353

Relaxationsverhalten eines RC Kreises

Jonas Osterholz
jonas.osterholz@tu-dortmund.de

Moritz Rempe
moritz.rempe@tu-dortmund.de

Durchführung: 20.12.2018

Abgabe: 11.01.2019

Contents

1 Theorie

1.1 Allgemeine Relaxationsgleichung

Von Relaxation wird gesprochen, wenn ein System nach Auslenkung ,nicht-oszillatorisch in seinen Ausgangszustand zurückkehrt. Hier wird ein RC-Kreis, also eine einfache Schaltung aus Widerstand und Kondensator betrachtet. Die Änderungsgeschwindigkeit zur Zeit t der Größe A ist proportional zu dessen Abweichung vom Endzustand $A(\infty)$

$$\frac{dA}{dt} = c[A(t) - A(\infty)] \quad (1)$$

Durch Integration folgt:

$$A(t) = A(\infty) + [a(0) - A(\infty)]e^{ct}. \quad (2)$$

Hier muss $c < 0$ sein, da A sonst nicht beschränkt ist.

1.2 Entladung

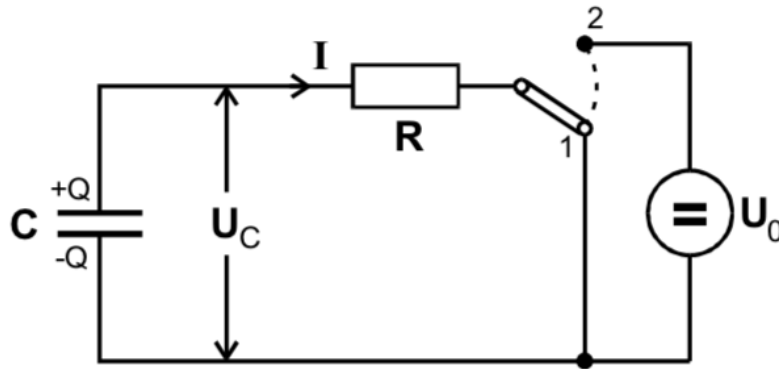


Figure 1: Entladung (1) und Aufladung (2) eines Kondensators über einen Widerstand, [1].

Zwischen den beiden Platten eines Kondensators mit Kapazität C und Ladung Q liegt eine Spannung U_C an:

$$U_C \quad (3)$$

Nach dem ohmschen Gesetz folgt der Strom I durch den Widerstand R :

$$I = \frac{U_C}{R} \quad (4)$$

Zeitlich verändert sich die Ladung Q auf den Platten mit:

$$dQ = -Idt \quad (5)$$

Somit folgt aus (3),(4) und (5):

$$Q(t) = Q(0) \cdot e^{\left(-\frac{t}{RC}\right)} \quad (6)$$

1.3 Aufladung

Der Aufladevorgang lässt sich mit der Gleichung

$$Q(t) = CU_0(1 - e^{(-\frac{t}{RC})}) \quad (7)$$

beschreiben. RC ist dabei die Zeitkonstante des Relaxationsvorganges. Sie beschreibt die Geschwindigkeit, in der das System dem Endzustand $Q(\infty)$ zugeht. Während der Zeit $\Delta T = RC$ ändert sich die Ladung auf dem Kondensator um

$$\frac{Q(t = RC)}{Q(0)} = \frac{1}{e} \approx 0,368$$

10% des Ausgangswertes sind nach $\Delta T = 2,3 RC$ noch vorhanden, 1 % nach $4,6 RC$.

1.4 Relaxation bei periodischer Auslenkung

Es wird eine äußere Wechselspannung $U(t)$ angelegt:

$$U(t) = U_0 \cos \omega t$$

Ist ω klein genug, also $\omega \ll \frac{1}{RC}$, so wird die Spannung U_C gleich $U(t)$ sein. Je höher

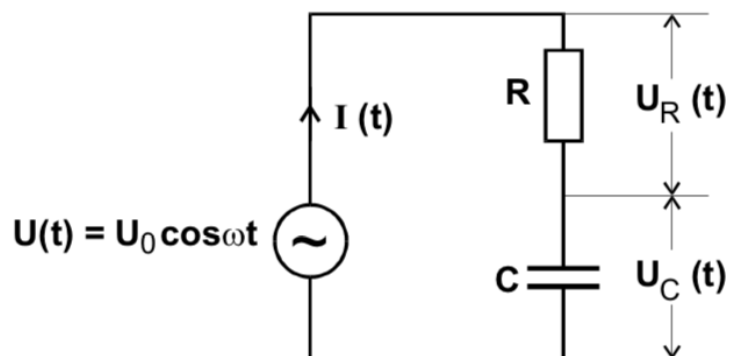


Figure 2: Schaltung eines RC-Kreises mit angelegter Wechselspannung, [1].

die Frequenz, desto mehr verschiebt sich die Auf-/Entladung des Kondensators über den Widerstand hinter den Verlauf der Generatorspannung. Es entsteht also eine Phasenverschiebung φ zwischen den beiden Spannungen. Zudem nimmt die Amplitude A der Kondensatorspannung ab. Veranschaulicht wird der Vorgang in Abbildung ???. Die ausgehende Wechselspannung wird nun als

$$U_C(t) = A(\omega) \cos(\omega t + \varphi(\omega)) \quad (8)$$

beschrieben. Zudem gilt:

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = C \frac{dU_C}{dt} \quad (9)$$

Über die bisherigen Gleichungen und dem Kirchhoff'schen Gesetz folgt dann:

$$A(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \quad (10)$$

Diese Gleichung stellt eine Beziehung zwischen Kondensatorspannungs-Amplitude und der Kreisfrequenz der Erregerspannung auf. Für $\omega \rightarrow \infty$ läuft $A(\omega)$ gegen 0 und für $\omega \rightarrow 0$ gegen U_0 . Zudem ist $A(1/RC) = U_0 / \sqrt{2}$. Wegen diesen Zusammenhängen nutzt man RC-Kreise in der elektrischen Schaltungstechnik als Tiefpässe, da sie Frequenzen, die klein gegen $1/RC$ laufen ungehindert hindurchlassen und hohe Frequenzen $\omega \gg 1/RC$ schlecht durchlassen.

1.5 RC-Kreis als Integrator

Ein RC-Kreis kann unter bestimmten Bedingungen auch als Integrator verwendet werden. ω muss dabei $\gg 1/RC$ sein. Dann folgt aus

$$U(t) = RC \frac{dU_C}{dt}$$

unter besagter Voraussetzung:

$$U_C(t) = \frac{1}{RC} \int_0^t U(t') dt' \quad (11)$$

2 Aufbau und Durchführung

2.1 Bestimmung der Zeitkonstante

Zu Beginn wird die Zeitkonstante gemessen. Dazu wird die Schaltung wie in Abbildung ?? aufgebaut.

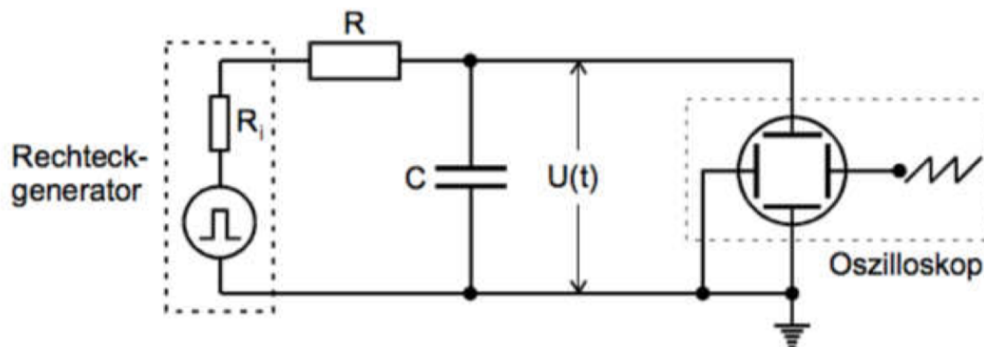


Figure 3: Aufbau der Schaltung zur Bestimmung der Zeitkonstante, [1].

Die Schaltung besteht aus einer Kapazität C , einem Widerstand R , einem Oszilloskop und einem Spannungsgenerator, welcher eine Rechteckspannung $U_0(t)$ erzeugt. Auf dem Oszilloskop sind dann die Auflade- und Entladevorgänge des Kondensators zu sehen.

2.2 Bestimmung der Spannungsamplitude

Nun wird die Spannungsamplitude der Kondensatorspannung gemessen. Erneut wird die Schaltung aus Abbildung ?? verwendet. Der Spannungsgenerator liefert diesmal eine Sinusspannung $U_0(t)$. die Frequenz f der Spannung wird logarithmisch erhöht und die dazugehörigen Amplituden A notiert.

2.3 Bestimmung der Phasenverschiebung

In der dritten Messreihe wird die Phasenverschiebung der Spannung am Kondensator und der erregenden Spannung untersucht. Dazu wird die Schaltung aus Abbildung ?? verwendet.

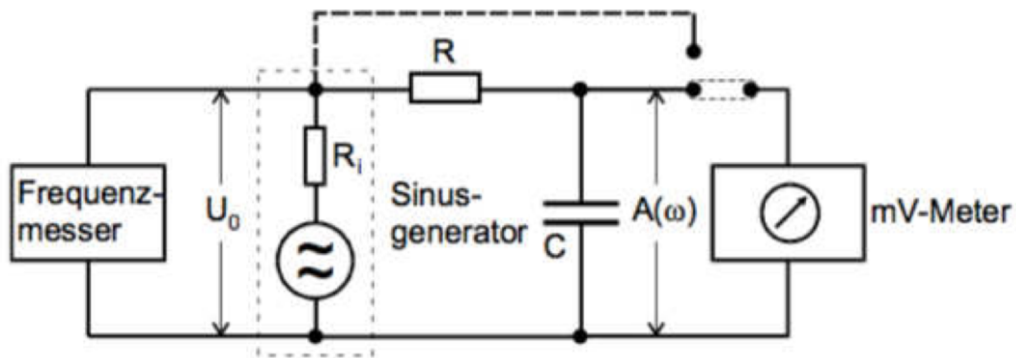


Figure 4: Aufbau der Schaltung zur Bestimmung der Phasenverschiebung, [1].

Der Spannungsgenerator erzeugt eine Sinusspannung, wodurch auf dem Oszilloskop zwei Spannungsverläufe zu sehen sind, der Spannungsverlauf am Kondensator $U_C(t)$ und der generierten Spannung $U_G(t)$. Die Frequenzen werden logarithmisch erhöht und die Differenzen der Nullstellen beider Kurven und die Wellenlänge der Kurve $U_0(t)$ notiert.

2.4 Bestätigung der Integratorfunktion

Zum Schluss wird die Schaltung aus Abbildung ?? aufgebaut.

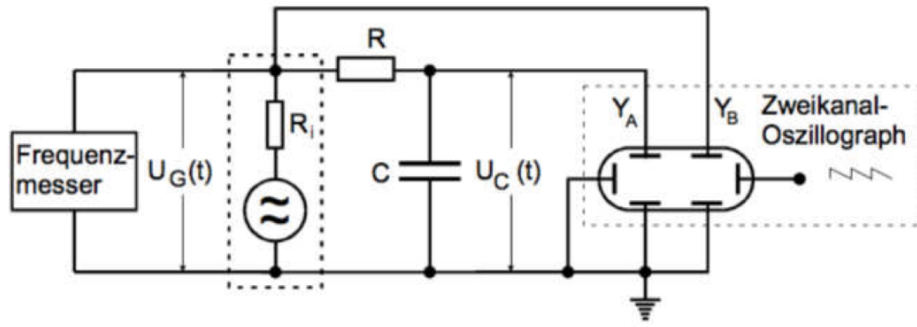


Figure 5: Aufbau zur Bestätigung der Integratorfunktion, [1].

Auf dem Oszilloskop sind jetzt der Spannungsverlauf $U_0(t)$ der generierten Spannung und der integrierte Spannungsverlauf $U_C(t)$ sichtbar. Der Reihe nach wird eine Rechteckspannung, eine Dreiecksspannung und eine Sinusspannung angelegt und die Thermoabdrücke des Oszilloskops abgespeichert.

3 Auswertung

3.1 Entladevorgang

Um die Zeitkonstante zu bestimmen, wird der Entladevorgang des Kondensators anhand der Spannung gemessen. Darüber hinaus werden die Messwerte aus Tabelle ?? in einem halblogarithmischen Diagramm aufgetragen und durch lineare Regression mit folgender Formel ausgewertet.

$$y = m \cdot x + b \quad (12)$$

Dabei wird die Zeit gegen den natürlichen Logarithmus der gemessenen Spannung in Diagramm 1 aufgetragen. Es ergibt sich aus dem Logarithmieren von (6), dass die Steigung m der Ausgleichsgeraden dem Inversen der Zeitkonstante τ entspricht. Dabei ergibt sich dann Folgendes.

$$\ln(U(t)) = \ln(U_0 e^{-\frac{t}{RC}}) = \ln(U_0) - \frac{t}{RC} \quad (13)$$

Somit folgt für die lineare Regression und die Zeitkonstante.

$$m = (-710.610 \pm 7.038) \frac{1}{s}$$

$$b = 4.693$$

Und letztendlich lässt sich die Zeitkonstante mit der Gaußschen Fehlerfortpflanzung aus (11) und (12) auf folgenden Wert bestimmen.

$$\tau = RC = -\frac{1}{m} = (1.407 \pm 0.014) \text{ ms}$$

Die folgende Gleichung beschreibt die Gaußsche Fehlerfortpflanzung.

$$\Delta\tau = \sqrt{\left(\frac{\partial\tau}{\partial m} * \sigma_m\right)^2}$$

Table 1: Entladevorgang

$\Delta t/s$	U/V
0	108.8
20	107.2
40	105.6
60	104.8
80	103.2
100	101.6
120	100.0
140	98.4
160	97.6
180	96.0
200	94.4
250	91.2
300	88.0
350	84.8
400	82.4
450	80.0
500	76.0
600	71.2
700	66.4
800	61.6
900	57.6
1000	53.6
1100	50.4
1200	47.2
1500	38.4
1800	30.4
2100	24.8
2400	19.2
7000	0

3.2 Frequenzabhängigkeit der Amplitude

Hierbei werden die in der Tabelle ?? eingetragenen Werte in einem halblogarithmischen Diagramm aufgetragen. Aus (10) folgt mithilfe nichtlinearer Regression folgender Wert

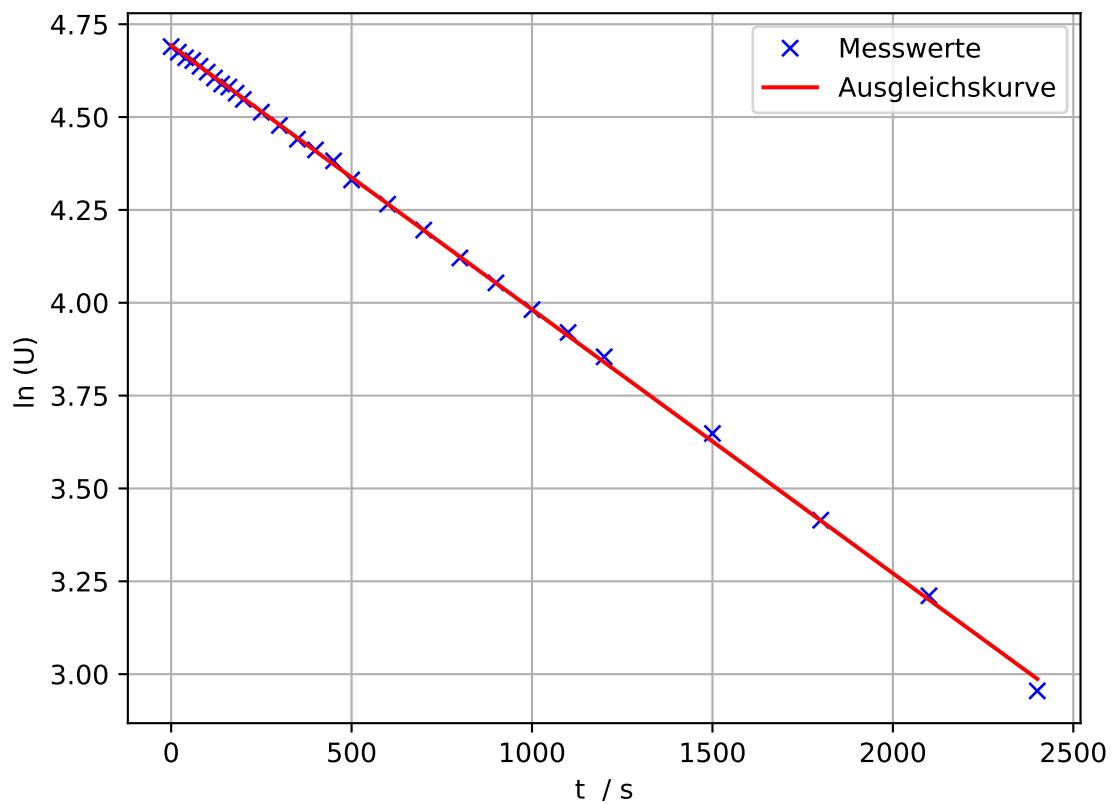


Figure 6: Entladekurve des Kondensators

für die Zeitkonstante.

$$\tau = RC = (1.420 \pm 1.217) 10^{-7} \text{ms}$$

Das dazugehörige Diagramm 2 beschreibt die dazugehörige Ausgleichskurve.

Table 2: Frequenzabhängigkeit der Amplitude

f/Hz	U_0/V
10	50.00
20	50.00
40	47.60
60	44.40
80	41.20
100	37.60
200	25.20
300	17.20
400	13.70
500	11.10
750	7.50
1000	5.50
2000	2.84
3000	1.88
4000	1.94
5000	1.16
10 000	0.58
20 000	0.30
30 000	0.22
40 000	0.16
50 000	0.12

3.3 Phasenverschiebung

Die Zeitkonstante kann auch durch die Messung der Phasenverschiebung bestimmt werden. Hierbei wurde die Phasenverschiebung mit folgender Gleichung bestimmt.

$$\varphi = \frac{a}{b} \cdot 2\pi \quad (14)$$

Dabei ist a der Abstand der Nulldurchgänge und b die Periodendauer der beiden Schwingungen, die identisch ist. Diese Werte wurden für verschiedene Frequenzen bestimmt und in Tabelle ?? aufgetragen.

Aus (8) und (9) kann dann der Quotient der Amplitude und der Ausgangsspannung folgendermaßen beschrieben werden.

$$\frac{A}{U_0} = -\frac{\sin(\varphi)}{\omega RC} \quad (15)$$

Eine nichtlineare Ausgleichsrechnung nach (15) liefert dann folgenden Wert.

$$\tau = RC = (1.580 \pm 4.450) 10^{-4} \text{ms} \quad (16)$$

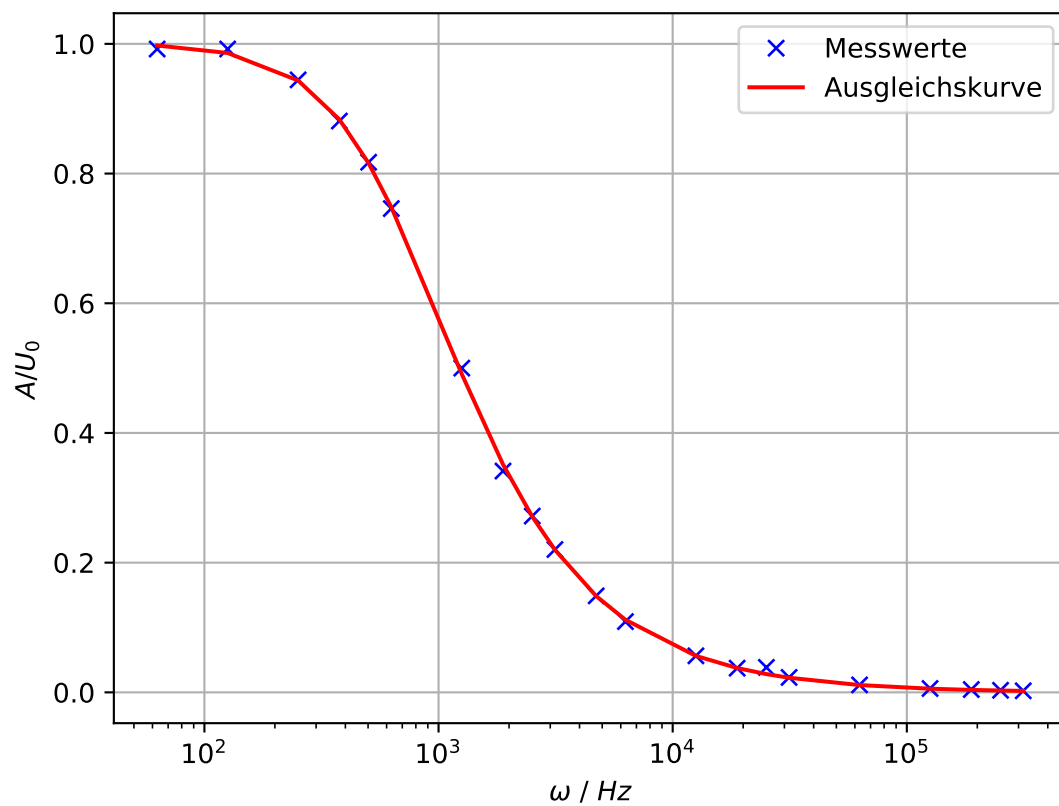


Figure 7: Frequenzabhängige Spannung am Kondensator

Table 3: Phasenverschiebung

f/Hz	φ/rad
10	0.73
20	0.55
30	0.49
40	0.60
60	0.68
80	0.68
100	0.75
200	1.13
400	1.41
600	1.43
800	1.46
1000	1.51
2000	1.63

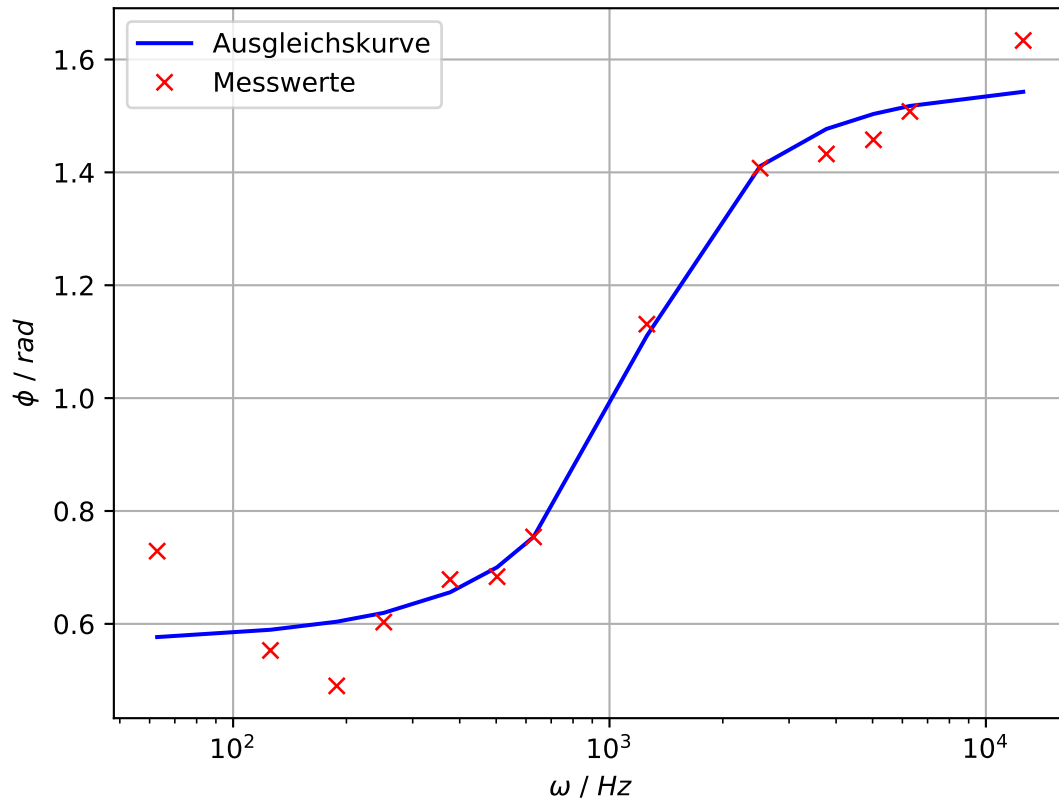


Figure 8: Phasenverschiebung am Verhältnis der Amplitude

3.4 Integrität

Der letzte Versuchsteil beschäftigt sich mit der Integrationsfähigkeit eines RC-Kreises. Dabei werden drei verschiedene Eingangsspannungen verwendet. Nach (11) wurden eine Rechtecks-, Dreiecks- und Sinusspannung integriert und experimentell überprüft. Zunächst die Rechtecksspannung.

$$f_{\text{Rechteck}}(t) = \begin{cases} A & 0 \leq t \leq d \\ -A & d \leq t \leq 2d \end{cases} \quad (17)$$

Integriert man diese Funktion so ergibt sich Folgendes.

$$F_{\text{Rechteck}}(t) = \begin{cases} A \cdot t & 0 \leq t \leq d \\ -A \cdot t & d \leq t \leq 2d \end{cases} \quad (18)$$

Die Stammfunktion würde also theoretisch einer Dreiecksspannung entsprechen. Die

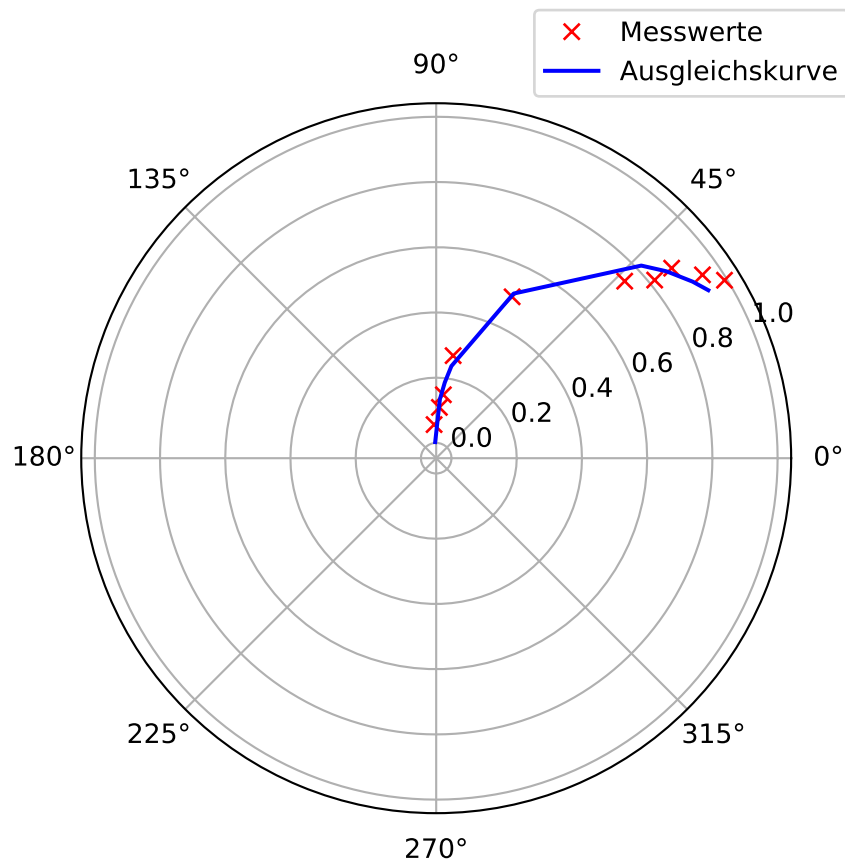


Figure 9: Polardiagramm mit Relativamplitude $\frac{A}{U_0}$ gegen die Phasenverschiebung φ

nächste untersuchte Funktion ist die Dreiecksspannung.

$$f_{\text{Dreieck}}(t) = \begin{cases} A \cdot t & 0 \leq t \leq d \\ -A \cdot t & d \leq t \leq 2d \end{cases} \quad (19)$$

$$F_{\text{Dreieck}}(t) = \begin{cases} \frac{A}{2} \cdot t^2 & 0 \leq t \leq d \\ -\frac{A}{2} \cdot t^2 & d \leq t \leq 2d \end{cases} \quad (20)$$

Die integrierte Funktion würde einer Sinusspannung entsprechen. Zuletzt wird eine Sinusspannung untersucht.

$$f_{\text{Sinus}} = A \cdot \sin(t) \quad (21)$$

$$F_{\text{Sinus}} = -A \cdot \cos(t) \quad (22)$$

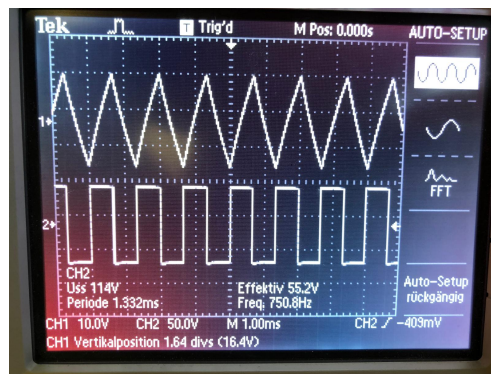


Figure 10: Rechteck- und integrierte Rechteckspannung

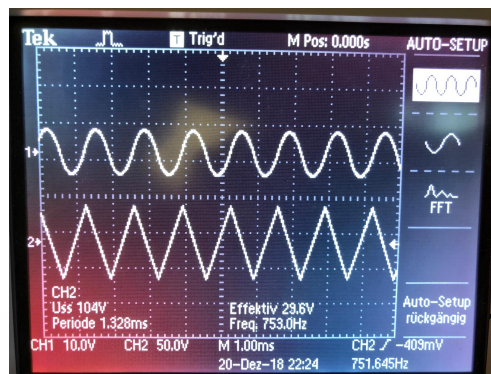


Figure 11: Dreieck- und integrierte Dreieckspannung

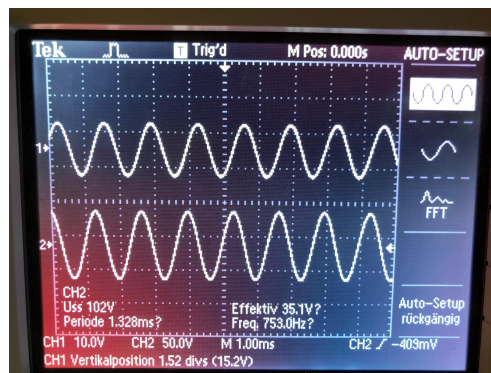


Figure 12: Sinus- und integrierte Sinusspannung

4 Diskussion

Die bestimmten Werte der Zeitkonstante RC unterscheiden sich stark. Dies lässt auf große Ungenauigkeiten in den einzelnen Messmethoden schließen. Die Graphen aus den experimentellen Werten ähneln stark den theoretischen Graphen. Wie erwartet nimmt die Amplitude der Kondensatorspannung exponentiell ab und die Phasenverschiebung bleibt im Bereich von 0 und $\frac{\pi}{2}$. Vermutlich führen Ableseschwierigkeiten am Oszilloskop zu Ungenauigkeiten und Abweichungen, die vor allem in Abbildung 8 sichtbar werden. Das RC-Glied kann gut als Integrator verwendet werden, da die Abbilder des Oszilloskopbildschirms die jeweiligen Funktionen zeigen, wie sie vorher bestimmt worden sind.

5 Literatur

[1] TU Dortmund. Versuchsanleitung zum Experiment V353 - Das Relaxationsverhalten eines RC-Kreises. 2018.