

V354

Gedämpfte und erzwungene Schwingungen

Jonas Osterholz
jonas.osterholz@tu-dortmund.de

Moritz Rempe
moritz.rempe@tu-dortmund.de

Durchführung: 16.11.2018

Abgabe: 23.11.2018

TU Dortmund – Fakultät Physik – Grundpraktikum

Inhaltsverzeichnis

1	Zielsetzung	3
2	Theorie	3
2.1	gedämpfte Schwinungen	3
2.2	erzwungene Schwingungen	4
3	Aufbau	6
3.1	Zeitabhängigkeit der Amplitude (a)	6
3.2	Dämpfungswiderstand	6
3.3	Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung	7
3.4	Frequenzabhängigkeit der Phasenverschiebung	7
4	Durchführung	7
4.1	Zeitabhängigkeit der Amplitude	7
4.2	Dämpfungswiderstand	8
4.3	Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung	8
4.4	Frequenzabhängigkeit der Phasenverschiebung	8
5	Auswertung	9
5.1	Zeitabhängigkeit der Amplitude (a)	9
5.2	Dämpfungswiderstand	11
5.3	Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung	11
5.4	Frequenzabhängigkeit der Phasenverschiebung	13
6	Diskussion	15
7	Literatur	15

1 Zielsetzung

In diesem Versuch soll der Dämpfungswiderstand eines RLC-Schwingkreises, sowie verschiedene Frequenzabhängigkeiten ermittelt werden.

2 Theorie

2.1 gedämpfte Schwinungen

Wird einem Schwingkreis mit Kapazität C und einer Induktivität L der Strom $I(t)$ zugeführt, schwingt dieser ungedämpft, es handelt sich also von eine gedämpften Schwingung. Wird diesem Schwingkreis nun ein Widerstand R zugeschaltet, so wird die Schwingung gedämpft, da kontinuierlich Energie über den Widerstand in Wärme umgewandelt wird, weshalb fortlaufend die elektrische Energie im Schwingkreis abnimmt. // Für diesen

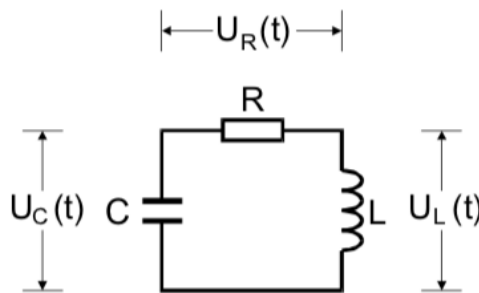


Abbildung 1: Gedämpfter Schwingkreis. [1]

gedämpften Schwingkreis gilt somit nach dem 2. Kirchhoffschen Gesetz

$$U_R(t) + U_C(t) + U_L(t) = 0 \quad (1)$$

Es ergeben sich die Beziehungen

$$U_R(t) = R \cdot I(t) \quad (2)$$

$$U_C(t) = \frac{Q(t)}{C} \quad (3)$$

$$U_L(t) = L \frac{dI}{dt} \quad (4)$$

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad (5)$$

$Q(t)$ beschreibt die Ladung auf dem Kondensator. Somit kann die folgende DGL aufgestellt werden

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI}{dt} + \frac{1}{LC} I = 0 \quad (6)$$

Durch Lösung dieser Differentialgleichung 2. Ordnung im Falle $1/LC > \frac{R^2}{4L^2}$ ergibt sich die Gleichung einer gedämpften Schwingung mit

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \quad (7)$$

$$\mu = \frac{1}{2\pi} \frac{R}{L} \quad (8)$$

zu

$$I(t) = A_0 e^{2\pi\mu t} \cos(2\pi\nu t + \eta) \quad (9)$$

Die Schwingungsdauer ist dabei

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}} \quad (10)$$

Nachdem die Amplitude auf den e-ten Teil des Ursprungswertes gesunken ist ergibt sich

$$T_{\text{ex}} = \frac{1}{2\pi\mu} = \frac{2L}{R} \quad (11)$$

Im Falle von $\frac{1}{LC} < \frac{R^2}{4L^2}$, also ν imaginär, ergibt sich

$$I(t) \propto \left[-\left(\frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} \right) t \right] \quad (12)$$

Ein Sonderfall hierbei ist der aperiodische Grenzfall. Hier geht $I(t)$ am schnellsten gegen null. Dies ist der Fall wenn

$$\frac{1}{LC} = \frac{R_{\text{ap}}^2}{4L^2} \quad (13)$$

gilt. Für die Stromstärke gilt dann

$$I(t) = A e^{-\frac{R}{2L} \cdot t} = A e^{-\frac{t}{\sqrt{LC}}} \quad (14)$$

2.2 erzwungene Schwingungen

Dem zuvor beschriebenen Schwingkreis wird nun eine sinusförmige Wechselspannung $U(t)$ zugeführt, was dazu führt, dass dem System eine Frequenz (der Sinusspannung) aufgezwungen wird.

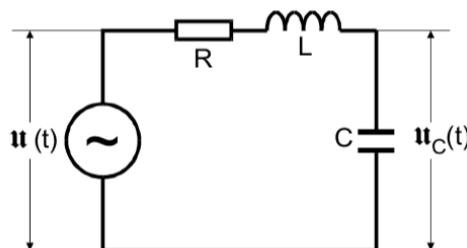


Abbildung 2: Erzwungene Schwingung durch Sinusspannung.[1]

Für $U(t)$ ergibt sich

$$U(t) = U_0 e^{i\omega t} \quad (15)$$

Aus (1) wird dann

$$LC \frac{d^2 U_C}{dt^2} + RC \frac{dU_C}{dt} + U_C = U_0 e^{i\omega t} \quad (16)$$

Die Lösung der Differentialgleichung ergibt

$$U = \frac{U_0(1 - LC\omega^2 - i\omega RC)}{(1 - LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2} \quad (17)$$

Die Phase wird beschrieben mit

$$\varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{-\omega RC}{1 - LC\omega^2}\right) \quad (18)$$

In Abhängigkeit von ω ergibt sich für die Kondensatorspannung U_C

$$U_C(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2}} \quad (19)$$

Diese Gleichung beschreibt die Resonanzkurve. Erreicht U_C bei einer bestimmten Frequenz einen Wert, der größer ist als U_0 , so wird von Resonanz gesprochen. Die Resonanzfrequenz lässt sich berechnen mit

$$\omega_{\text{res}} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}} \quad (20)$$

Im Falle von schwacher Dämpfung, also $\frac{R^2}{2L^2} \ll \frac{1}{LC}$, nähert sich ω_{res} ω_0 der ungedämpften Schwingung. U_C wird somit größer als U_0 :

$$U_{C,\text{max}} = \frac{1}{\omega_0 RC} U_0 = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} U_0 \quad (21)$$

Der Faktor $\frac{1}{\omega_0 RC}$ beschreibt die Resonanzüberhöhung oder Güte q .

Im Falle starker Dämpfung, also $\frac{R^2}{2L^2} \gg \frac{1}{LC}$, geht U_C , vom Wert U_0 aus monoton gegen 0.

Die Abhängigkeit der Phasen zwischen Erreger- und Kondensatorspannung zur Frequenz lässt sich beschreiben mit

$$\omega_1 - \omega_2 = \frac{R}{L} \quad (22)$$

wobei für $\omega_{1,2}$ gilt:

$$\omega_{1,2} = \pm \frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{LC}} \quad (23)$$

3 Aufbau

Der Versuch besteht prinzipiell aus drei Geräten. Dem Nadelimpulsgenerator, dem Schaltkreis aus Kondensator C , Widerstand R und Spule L , und dem Oszilloskop. In den folgenden Abbildungen zu beachten ist, dass auf drei verschiedene Widerstände zugegriffen werden kann. Es sind zwei unterschiedlich große und ein verstellbarer Widerstand gegeben.

3.1 Zeitabhängigkeit der Amplitude (a)

Die Messung des ersten Versuchteils erfolgen über folgende Schaltung:

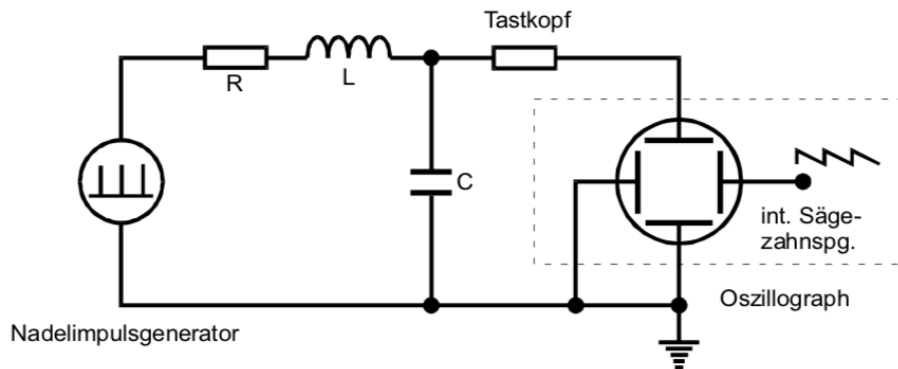


Abbildung 3: Aufbau zu (a), [1].

3.2 Dämpfungswiderstand

Der Dämpfungswiderstand wird über die abgebildete Schaltung 4 bestimmt.

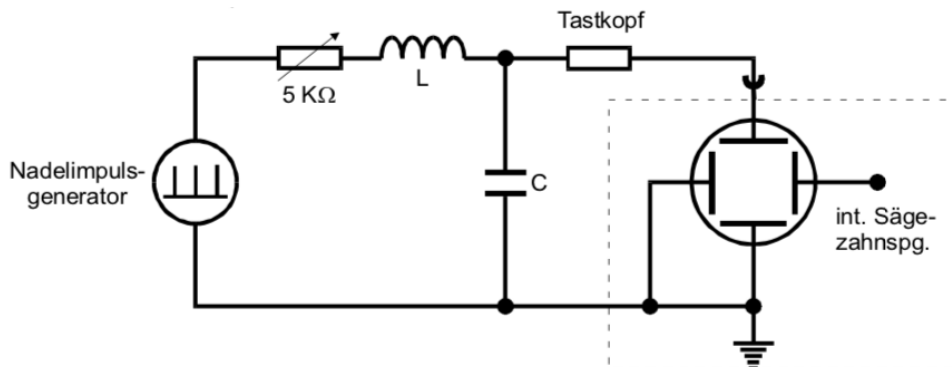


Abbildung 4: Aufbau zu (b), [1].

3.3 Frequenzabhängigkeit der Kondensatorsspannung

Der Aufbau für den dritten Teil des Versuches, der Bestimmung der Frequenzabhängigkeit der Kondensatorsspannung, ist in Abbildung 5 abgebildet.

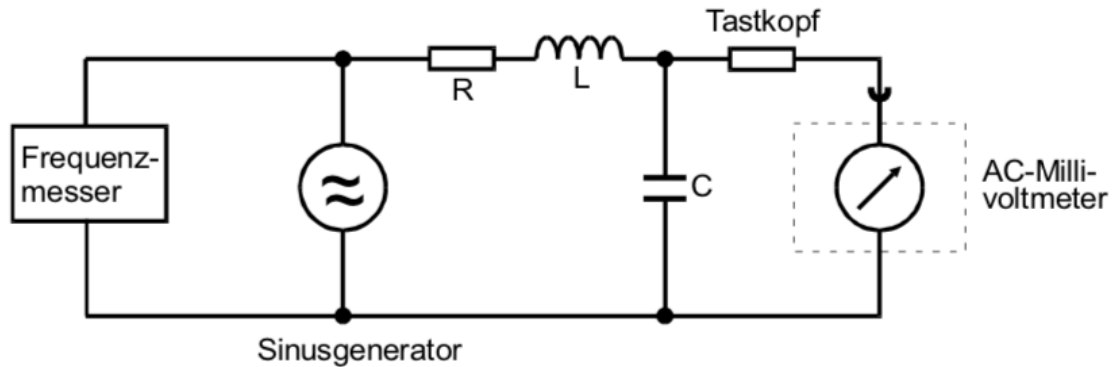


Abbildung 5: Aufbau zu (c), [1].

3.4 Frequenzabhängigkeit der Phasenverschiebung

Zur Bestimmung der Frequenzabhängigkeit der Phasenverschiebung wird der Aufbau aus Abbildung 6 verwendet.

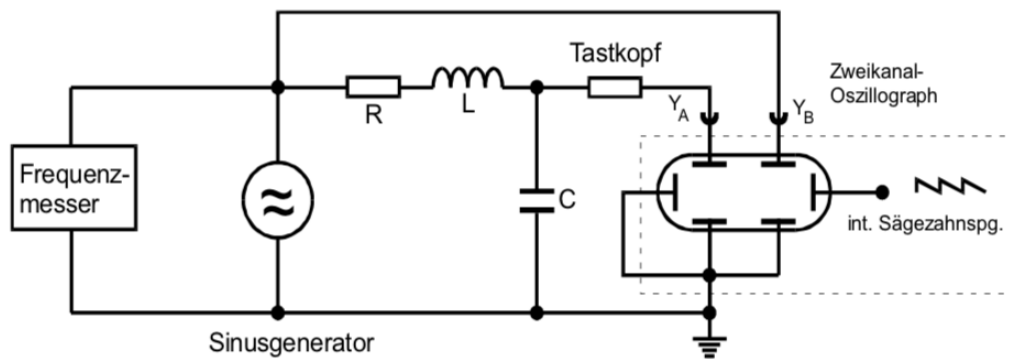


Abbildung 6: Aufbau zu (d), [1].

4 Durchführung

4.1 Zeitabhängigkeit der Amplitude

Mit dem in Abbildung 3 gezeigten Aufbau wird die Zeitabhängigkeit der Amplitude des Schwingkreises gemessen. Da es in der Apparatur zwei wählbare Widerstände gibt, wird hier der kleinere Widerstand in der Schaltung verwendet.

Dazu wird mithilfe des Nadelimpulsgenerators ein einzelner Impuls in den gedämpften

Schwingkreis gegeben. Auf dem Oszilloskop lässt sich dann eine Abnahme der Amplituden ablesen. Die Abstände der Amplituden und die dabei entstehende Zeitdifferenz werden notiert.

4.2 Dämpfungswiderstand

Der zweite Versuchsteil wird mit dem Aufbau aus Abbildung 4 durchgeführt. Der regelbare Widerstand wird zu Beginn auf seinen maximalen Wert gestellt und dann langsam verkleinert. Dies geschieht so lange, bis auf dem Oszilloskop ein "Überschwingen" der Kurve sichtbar ist ($\frac{dU_C}{dt} > 0$). Geschieht dies, so wurde R_{ap} überschritten. Der Dämpfungswiderstand liegt somit genau da, wo das "Überschwingen" gerade wieder verschwindet.

4.3 Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung

Nun wird der Aufbau aus Abbildung 5 verwendet. In diesem Versuchsteil wird der größere der beiden Widerstände verwendet.

Mithilfe eines Sinusgenerators wird über C die Spannung U_C mithilfe des Tastkopfes gemessen. Dies geschieht für verschiedene Frequenzen der Wechselspannung. Da der Tastkopf einen eigenen Frequenzgang besitzt, muss zudem der Quotient aus Kondensatorspannung und Erregerspannung über den Tastkopf ermittelt werden ($\frac{U_C}{U}$).

4.4 Frequenzabhängigkeit der Phasenverschiebung

Für den letzten Versuchsteil wird der Aufbau aus 6 verwendet.

Auf dem Oszilloskop werden zwei Graphen mit einer Phasenverschiebung angezeigt. Nun werden a und b (siehe 7) gemessen.

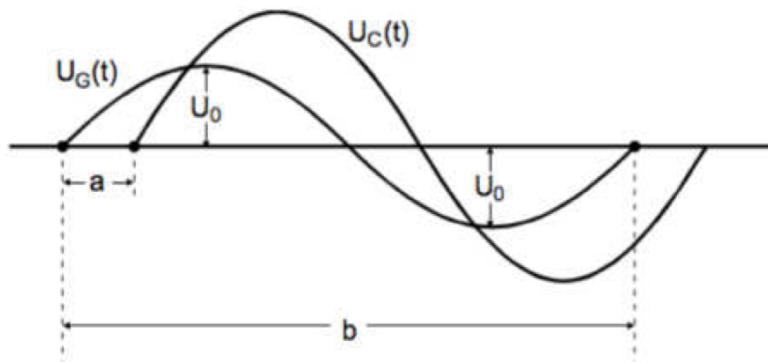


Abbildung 7: Messung der Phasenverschiebung, [1].

Über

$$\varphi = \frac{a}{b} \cdot 2\pi \quad (24)$$

ist dann die Phasenverschiebung gegeben.

5 Auswertung

In den folgenden Rechnungen werden angegebene, bauspezifische Werte der Schaltung verwendet:

$$L = (16.78 \pm 0.09)\text{mH}$$

$$C = (2.066 \pm 0.066)\text{nF}$$

$$R_1 = (67.2 \pm 0.2)$$

$$R_2 = (682 \pm 1)$$

5.1 Zeitabhängigkeit der Amplitude (a)

Bei der ersten Versuchsdurchführung wird eine gedämpfte Schwingung beobachtet, bei der die abklingende Amplitude in Abhängigkeit von der Zeit gemessen wird. Diese in der Tabelle 1 aufgetragenen Wertepaare ergeben näherungsweise folgende Exponentialfunktion.

Bei der Messung ergaben sich folgende Werte:

Tabelle 1: Amplitude.

$T_A / \mu\text{s}$	Amplitude / V
	A_1
40.0	2.60
76.0	1.60
116.0	0.80
152.0	0.20
192.0	-0.60
228.0	-1.20
268.0	-1.80
302.0	-2.20
338.0	-2.60
378.0	-3.00
418.0	-3.40
456.0	-3.60
494.0	-3.80

A_1 ist hierbei der jeweilige Wert der Maximalamplitude zum Zeitpunkt T_A .

Diese in der Tabelle 1 aufgetragenen Wertepaare ergeben näherungsweise folgende Exponentialfunktion,

$$A(t) = A_0 \cdot e^{2\pi\mu} + C \quad (25)$$

welche durch folgende Werte beschrieben wird.

$$A_0 = (9.685\,30 \pm 0.028\,66) \text{ V} \quad (26)$$

$$\mu = (495.953 \pm 3460.051) \text{ s}^{-1} \quad (27)$$

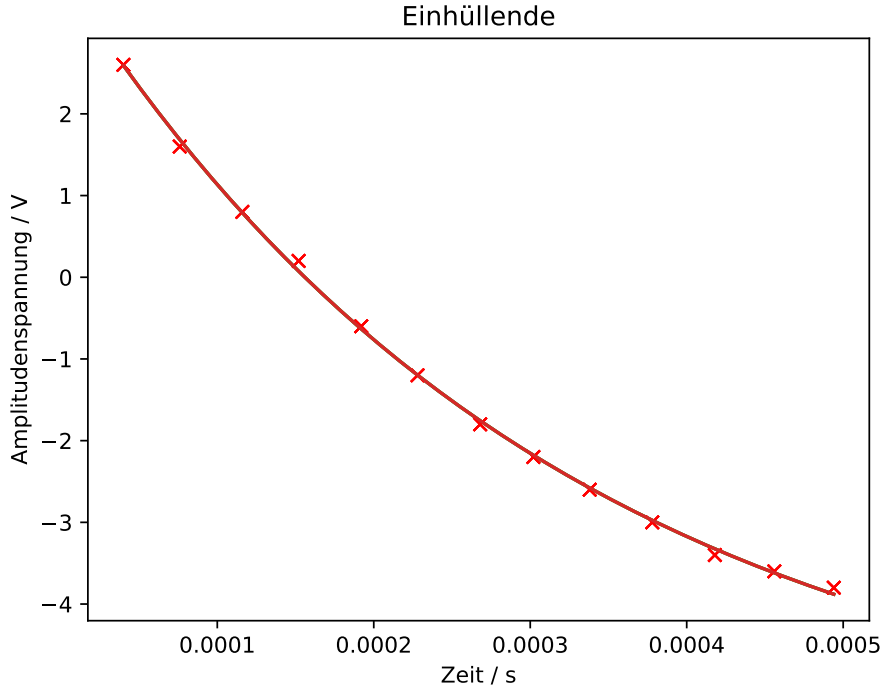


Abbildung 8: Einhüllende.

Der Dämpfungswiderstand wird mit der Formel (10) aus der Theorie berechnet, wobei der Fehler mit der Gaußschen Fehlerfortpflanzung bestimmt wird.

$$\Delta R_{\text{eff}} = \sqrt{\left(\frac{\partial R_{\text{eff}}}{\partial \mu} * \sigma_{\mu}\right)^2 + \left(\frac{\partial R_{\text{eff}}}{\partial L} * \sigma_L\right)^2}$$

Letztendlich ergibt sich für den Widerstand also

$$R_{\text{eff}} = (104.579\,00 \pm 729.599\,34) \, \Omega \quad (28)$$

Die Zeit T_{ex} beschreibt die Abklingdauer, in der die Amplitude auf ein e-ten Teil ihres Ausgangswertes zurückgegangen ist. Experimentell lässt sich diese mit Gleichung (11) bestimmen und es ergibt sich

$$T_{\text{ex}} = (0.000\,32 \pm 0.002\,24) \text{ s} \quad (29)$$

Die theoretische Berechnung von T_{ex} ergibt sich aus der Gleichung (11) und hat den folgenden Wert

$$T_{\text{ex}} = 0.000\,50\,\text{s} \quad (30)$$

5.2 Dämpfungswiderstand

Der Dämpfungswiderstand R_{ap} beim aperiodischen Grenzfall wird gemessen als

$$R_{\text{ap}} = 2.76\,\text{k}\Omega$$

Aus der Gleichung (13) wird der theoretische Wert dieses Widerstandes berechnet. Mit Hilfe der Gaußschen Fehlerfortpflanzung wird dazu noch der Fehler bestimmt

$$\Delta R_{\text{ap}} = \sqrt{\left(\frac{\partial R_{\text{ap}}}{\partial L} * \sigma_L\right)^2 + \left(\frac{\partial R_{\text{ap}}}{\partial C} * \sigma_C\right)^2}$$

Insgesamt ergibt sich also für den theoretisch errechneten Widerstand beim aperiodischen Grenzfall

$$R_{\text{ap}} = (5699.8 \pm 92.3)\,\Omega \quad (31)$$

5.3 Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung

Die Messung der Werte für die Amplituden in Abhängigkeit zur Frequenz ergeben:

Tabelle 2: Amplituden im Verhältnis zur Frequenz.

f /kHz	A /V	f /kHz	A /V
10	5.2	20	9.4
15	6.4	21	10.8
20	9.4	22	12.0
25	16.4	23	13.6
30	10.6	24	15.2
35	5.4	25	16.4
40	3.2	26	17.2
		27	16.4
		28	14.6
		29	12.6
		30	10.6

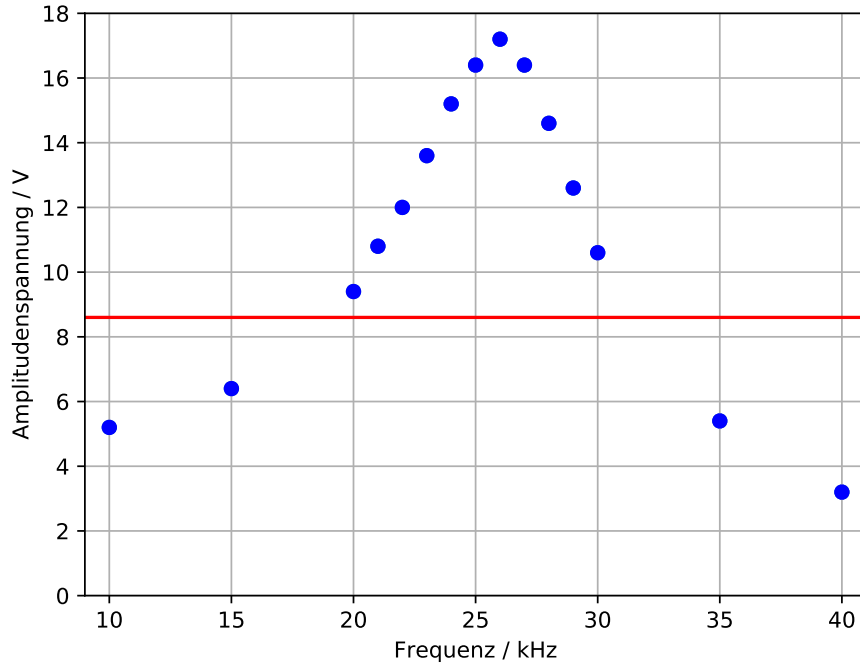


Abbildung 9: Uc-Frequenzabhängigkeit.

Aus dem Diagramm lässt sich der Maximalwert der Amplitude bzw. die Resonanzüberhöhung ablesen.

$$q = (17.2 \pm 0.1) \text{ V} \quad (32)$$

Die theoretische Berechnung mit folgender Fehlerrechnung

$$\Delta q = \sqrt{\left(\frac{\partial q}{\partial R} * \sigma_R\right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial L} * \sigma_L\right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial C} * \sigma_C\right)^2}$$

und der Gleichung (21) ergibt

$$q = (4.179 \pm 0.068) \text{ V} \quad (33)$$

Außerdem werde die Breite der Resonanzkurve ermittelt

$$\nu_+ \nu_- = (14.0 \pm 0.2) \text{ kHz} \quad (34)$$

Aus der Gleichung (21) ergibt sich die theoretisch berechnete Breite der Resonanzkurve. Hierbei wurde ebenfalls mit der Gaußschen Fehlerfortpflanzung gearbeitet.

$$\Delta \nu_+ \nu_- = \sqrt{\left(\frac{\partial(\nu_+ - \nu_-)}{\partial L} * \sigma_L\right)^2 + \left(\frac{\partial(\nu_+ - \nu_-)}{\partial R} * \sigma_R\right)^2}$$

Letzendlich ergab sich folgender Wert

$$\nu_+ \nu_- = (40.643 \pm 0.226) \text{ kHz} \quad (35)$$

5.4 Frequenzabhängigkeit der Phasenverschiebung

Für die Phasenverschiebung für bestimmte Frequenzen wurden folgende Werte gemessen:

Tabelle 3: Phasenverschiebung $U_C - U_G$.

U_G		
f / kHz	$\Delta T_0 / \mu\text{s}$	$a^1 / \mu\text{s}$
10	99.0	1.8
15	67.0	2.2
20	50.0	4.0
25	40.0	8.0
30	33.6	13.0
35	28.8	12.6
40	37.6	11.6
45	33.2	10.6
50	30.0	9.9

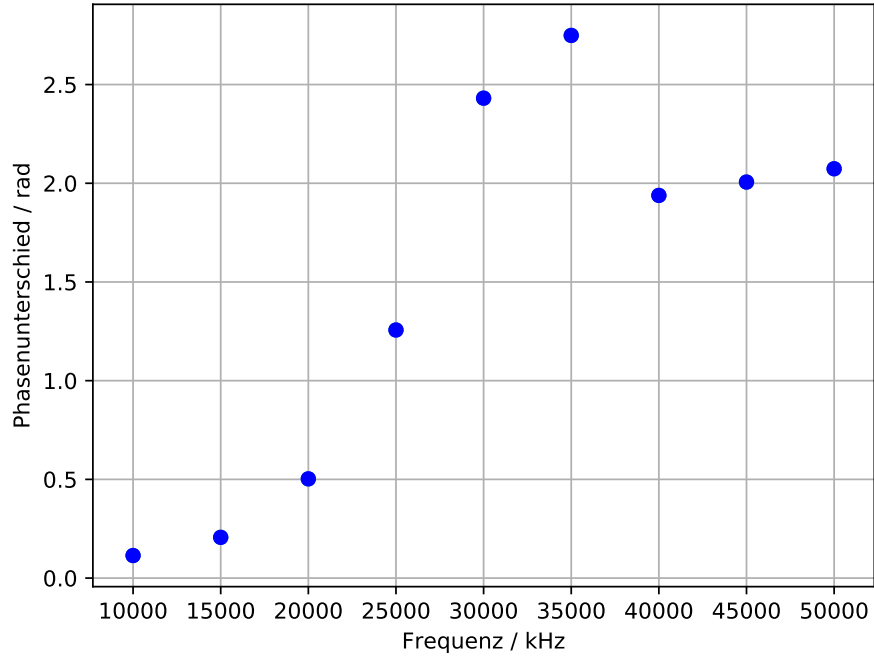


Abbildung 10: Phasenverschiebung.

Aus dem Diagramm werden nun die Werte für ν_{res} , $\nu_{1, \text{exp}}$ und $\nu_{2, \text{exp}}$ abgelesen. Die letzten beiden werden jeweils bei einem Phasenunterschied von $\frac{\pi}{4}$ und $\frac{3\pi}{4}$ abgelesen.

$$\nu_{1, \text{exp}} = (23.0 \pm 0.2) \text{ kHz} \quad (36)$$

$$\nu_{2, \text{exp}} = (30.0 \pm 0.2) \text{ kHz} \quad (37)$$

Dann wird noch ν_{res} am Maximum des Diagramms abgelesen.

$$\nu_{\text{res,exp}} = (35.0 \pm 0.2) \text{ kHz} \quad (38)$$

Die theoretischen werte werden mit den Gleichungen (22)(23) aus der Theorie berechnet. Dabei wird folgende Fehlerrechnung verwendet

$$\Delta v = \sqrt{\left(\frac{\partial \nu}{\partial R} * \sigma_R\right)^2 + \left(\frac{\partial \nu}{\partial L} * \sigma_L\right)^2 + \left(\frac{\partial \nu}{\partial C} * \sigma_C\right)^2}$$

Und damit ergeben sich folgende Werte

$$\nu_{1, \text{the}} = (24.0 \pm 0.4) \text{ kHz} \quad (39)$$

$$\nu_{2, \text{the}} = (37.1 \pm 0.4) \text{ kHz} \quad (40)$$

$$\nu_{\text{res,the}} = (26.6 \pm 0.4) \text{ kHz} \quad (41)$$

6 Diskussion

Bei den Messungen gab es mehrere Fehlerquellen, welche die Ergebnisse verfälschen. Sowohl das Ablesen des Oszilloskop, als auch die Innenwiderstände der Geräte, welche nicht berücksichtigt wurden, führen zu Messungenauigkeiten. Durch längeren Betrieb der Apparaturen erwärmt sich der Schaltkreis, was dazu führt, dass die Widerstände kleiner werden. Somit verändern sich auch die messbaren Werte über die Zeit. Scheinbar sind die Messungenauigkeiten erheblich, da große Fehler berechnet werden.

Die durch Messungen ermittelten Werte unterscheiden sich teils nur minimal, teils jedoch auch stark von den theoretischen Werten. Dies kann mit dem jeweiligen Versuch und den dabei verwendeten Methoden zusammen hängen.

7 Literatur

[1] TU Dortmund, *Anleitung Versuch 354, Gedämpfte und erzwungene Schwingungen*, 2018

¹ $a := U_C - U_G$ Verschiebung