

V302

Elektrische Brückenschaltungen

Jonas Osterholz
jonas.osterholz@tu-dortmund.de

Moritz Rempe
moritz.rempe@tu-dortmund.de

Durchführung: 30.11.2018

Abgabe: 07.12.2018

TU Dortmund – Fakultät Physik – Grundpraktikum

Inhaltsverzeichnis

1	Zielsetzung	3
2	Theorie	3
2.1	Wheatstonesche Brücke	4
2.2	Kapazitätsmessbrücke	4
2.3	Induktivitätsmessbrücke	5
2.4	Maxwell-Brücke	5
2.5	Wien-Robinson-Brücke	6
2.6	TT-Brücke	7
3	Aufbau und Durchführung	8
4	Auswertung	9
4.1	Wheatstonesche Messbrücke	9
4.2	Kapazitätsmessbrücke	10
4.3	Induktivitätsmessbrücke	12
4.4	Maxwell-Brücke	12
4.5	Wien-Robinson-Filter	12
4.5.1	Sperrfrequenz	13
4.5.2	Klirrfaktor	14
5	Diskussion	15
6	Literatur	15

1 Zielsetzung

In dem Versuch sollen mithilfe von verschiedenen Brückenschaltungen die Werte von unbekannten Widerständen, Kapazitäten und Induktivitäten ermittelt werden. Zudem soll die Frequenzabhängigkeit der Wien-Robinson-Brücke und die Güte eines Sinusspannungsgenerators ermittelt werden.

2 Theorie

Mithilfe von Brückenschaltungen lassen sich Größen, die durch einen elektrischen/komplexen Widerstand ausgedrückt werden können, eindeutig messen. In einer Brückenschaltung

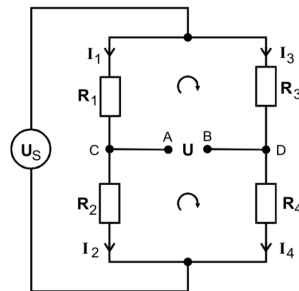


Abbildung 1: einfache Brückenschaltung. [1]

herrscht eine Potentialdifferenz zwischen zwei Punkten. Der Strom teilt sich dabei wie in 1 in zwei Äste auf. Zwischen A und B wird die Brückenspannung gemessen. Um diese zu berechnen, werden die Kirchhoffschen Gesetze verwendet:

1. die Summe aller eingehenden und ausgehenden Ströme an einem Knoten ist gleich Null

$$\sum_k I_k = 0 \quad (1)$$

2. die Summe aller Spannungen eines geschlossenen Stromkreises ist unter Beachtung des Vorzeichens Null

$$\sum_k U_k = 0 \quad (2)$$

So ergibt sich dann für die Brückenspannung U_{Br} :

$$U_{Br} = \frac{R_2 R_3 - R_1 R_4}{(R_3 + R_4)(R_1 + R_2)} U_S \quad (3)$$

Verschwindet die Brückenspannung, so erhält man die Formel einer abgeglichenen Brücke:

$$R_1 R_4 = R_2 R_3 \quad (4)$$

Je genauer die bekannten Widerstände sind, desto genauer wird auch die Messung des unbekannten Widerstandes. Verwendet man, aufgrund von Kapazitäten und Induktivitäten komplexe Widerstände, so muss für diesen Fall die Brückenspannung nach Betrag und Phase Null werden.

2.1 Wheatstonesche Brücke

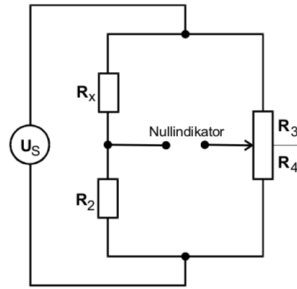


Abbildung 2: Wheatstonesche Brückenschaltung. [1]

In der Schaltung 2 befinden sich nur ohmsche Widerstände. Mithilfe dieser Schaltung kann der Widerstand R_x bestimmt werden:

$$R_x = R_2 \frac{R_3}{R_4} \quad (5)$$

Somit wird nur das Verhältnis von R_3 und R_4 benötigt, weshalb diese in einem Potentiometer vereint sind. Diese Schaltung kann sowohl mit Gleich- als auch mit Wechselstrom betrieben werden.

2.2 Kapazitätsmessbrücke

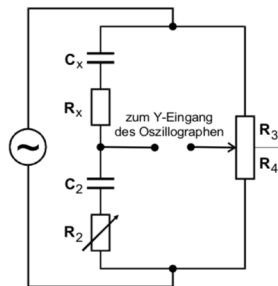


Abbildung 3: Schaltung einer Kapazitätsmessbrücke. [1]

Reale Kondensatoren bestehen aus einer Kapazität und einem Widerstand, der einen Teil der durch sie hindurchfließenden Energie in Wärme umwandelt, abgebildet in 3 durch C_x und R_x . Um C_x zu bestimmen, muss daher noch ein Widerstand R_2 und eine Kapazität C_2 hinzugeschaltet werden. Somit gilt:

$$C_x = C_2 \frac{R_4}{R_3} \quad (6)$$

$$R_x = R_2 \frac{R_3}{R_4} \quad (7)$$

2.3 Induktivitätsmessbrücke

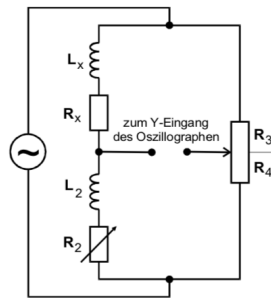


Abbildung 4: Schaltung einer Induktivitätsmessbrücke. [1]

Reale Spulen bestehen aus einer Induktivität und einem Widerstand, der einen Teil der in ihnen enthaltenden magnetischen Feldenergie in Wärme umwandelt, abgebildet in 4 durch L_x und R_x . Wie bei der Kapazitätsmessbrücke werden zur Bestimmung von L_x die Induktivität L_2 und der Widerstand R_2 hinzugeschaltet.

$$L_x = L_2 \frac{R_3}{R_4} \quad (8)$$

$$R_x = R_2 \frac{R_3}{R_4} \quad (9)$$

Die Spule L_2 sollte so geringe Verluste wie möglich besitzen, damit eine genaue Messung gewährleistet werden kann. Dies ist in der Praxis, vor allem bei niedrigen Frequenzen, meist nicht möglich.

2.4 Maxwell-Brücke

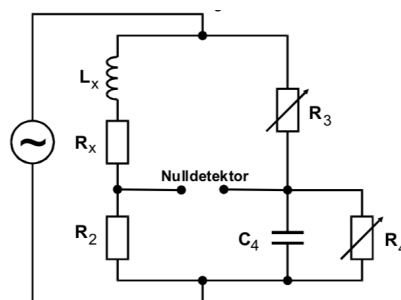


Abbildung 5: Schaltung einer Maxwell-Brücke. [1]

Mithilfe der Maxwell-Brücke (siehe 5) können ebenso Induktivitäten gemessen werden. Ihr Vorteil liegt jedoch darin, dass auf die Induktivität L_2 verzichtet werden kann und stattdessen die Kapazität C_4 verwendet wird. Diese Kapazität hat einen deutlich

geringeren Wirkwiderstand, weshalb L_x genauer gemessen werden kann. Somit folgt:

$$L_x = R_2 R_3 C_4 \quad (10)$$

$$R_x = R_2 \frac{R_3}{R_4} \quad (11)$$

In den vorherigen Abgleichungen wurde die Frequenz der Speisespannung nicht beachtet, weshalb angenommen wurde, dass die Brücken bei allen Frequenzen abgleichbar sind. In der Praxis ist dies jedoch nicht der Fall. Vielmehr gibt es nur einen bestimmten Frequenzbereich, in dem der Abgleich unter optimalen Bedingungen möglich ist. Wird die Kreisfrequenz ω zu hoch gewählt, so werden die Streukapazitäten zu groß, weshalb ein Abgleich nicht mehr möglich ist. Wird ω hingegen zu klein gewählt, so dauert es mehrere Periodendauern bis eine stationäre Brückenspannung auftritt. Eine optimale Frequenz wird erreicht, wenn Wirk- und Blindwiderstände die gleiche Größenordnung besitzen.

2.5 Wien-Robinson-Brücke

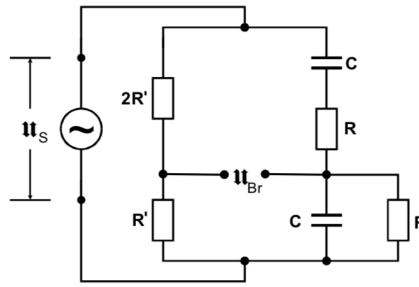


Abbildung 6: Schaltung einer Wien-Robinson-Brücke. [1]

Mithilfe der Wien-Robinson-Brücke (siehe 6) sollen keine Widerstände gemessen werden. Sie dient als elektronischer Filter für ein kontinuierliches Frequenzspektrum. Sie entfernt die Schwingungen mit der Kreisfrequenz ω_0 . Dies wird durch das Verhältnis von Brückenspannung und Speisespannung deutlich:

$$\left| \frac{U_{\text{Br, eff}}}{U_S} \right|^2 = \frac{(\omega^2 R^2 C^2 - 1)^2}{9[(1 - \omega^2 R^2 C^2)^2 + 9\omega^2 R^2 C^2]} \quad (12)$$

Für $\omega_0 = \frac{1}{RC}$ verschwindet die Brückenspannung. Mit

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_0}$$

folgt:

$$\left| \frac{U_{\text{Br, eff}}}{U_S} \right|^2 = \frac{1}{9} \frac{(\Omega^2 - 1)^2}{(1 - \Omega^2)^2 + 9\Omega^2} \quad (13)$$

Mithilfe der Wien-Robinson-Brücke kann der sogenannte Klirrfaktor bestimmt werden. Dieser Faktor beschreibt den Anteil der Oberwellen im Verhältnis zur Grundwelle einer angelegten Sinusspannung. In der Theorie sind diese Oberwellen nicht vorhanden, in der Praxis treten diese jedoch auf. Somit ist die Kleinheit des Klirrfaktors ein Maß für die Güte eines Sinusgenerators.

2.6 TT-Brücke

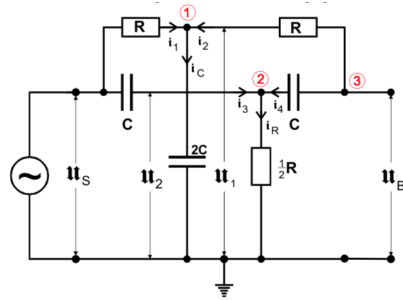


Abbildung 7: Schaltung einer TT-Brücke. [1]

Die TT-Brücke hat denselben Zweck wie die Wien-Robinson-Brücke, hat jedoch den Vorteil, dass sowohl Eingangs-, als auch Ausgangsspannung gegen Masse angeschlossen werden kann (siehe Abbildung 7). Daraus ergibt sich dann:

$$\left| \frac{U_{Br, \text{eff}}}{U_S} \right|^2 = \frac{(\Omega^2 - 1)^2}{(1 - \Omega^2)^2 + 16\Omega^2} \quad (14)$$

Der Frequenzverlauf der TT-Brücke ähnelt stark dem der Wien-Robinson-Brücke.

3 Aufbau und Durchführung

Der Aufbau des Versuchs lässt sich prinzipiell durch die in Abbildung 1 skizzierte Brückenschaltung beschreiben. Die Schaltung besteht grundlegend aus einer Parallelschaltung, deren beide Abzweigungen aus zwei in Reihe geschalteten Bauteilen, beispielsweise Widerständen, Induktivitäten oder Kapazitäten, besteht. Mit einem Oszilloskop, vor dessen Eingang ein Tiefpass angeschlossen wird um hochfrequente Störspannungen zu vermeiden, wird die Brückenspannung U_{Br} zwischen den Punkten A und B gemessen. Als Spannungsquelle wird ein Sinusgenerator mit der Spannung U_S eingesetzt. Im Folgenden werden 5 verschiedene Schaltungen beschrieben, die im Experiment verwendet werden.

a) **Wheatstonesche Brücke**

Die Wheatstonesche Brücke wird auch als Widerstandsbrücke bezeichnet und besteht, wie der Name schon sagt, nur aus ohmschen Widerständen. Hiermit wird der Wert des Widerstands R_X gemessen, indem das Potentiometer so eingestellt wird, dass die Brückenspannung U_{Br} verschwindet.

b) **Kapazitätsmessbrücke**

Die Kapazitätsmessbrücke besteht, wie die Abbildung 3 zeigt, zusätzlich aus Kondensatoren, die zu den Widerständen in Reihe geschaltet werden. Hiermit lassen sich die Werte des Widerstands R_X und der Kapazität C_X realer Kondensatoren bestimmen. Zur Berechnung dieser Werte wird das Verhältnis der Widerstände R_2 , R_3 und R_4 so eingestellt, dass keine Brückenspannung U_{Br} mehr zu messen ist.

c) **Induktivitätsmessbrücke**

Die Induktivitätsmessbrücke wird anhand Abbildung 4 analog zur Kapazitätsbrücke aufgebaut und durchgeführt. Allerdings werden Spulen anstatt Kondensatoren verwendet und Induktivitäten anstatt Kapazitäten bestimmt.

d) **Maxwell-Brücke**

Bei der in Abbildung 5 dargestellten Maxwell-Brücke wird neben der Induktivitätsmessbrücke eine weitere Schaltung zur Bestimmung des Widerstandes und der Induktivität einer realen Spule aufgezeigt. Hier werden erneut das Verhältnis der Widerstände R_3 und R_4 so eingestellt, dass keine Brückenspannung U_{Br} mehr am Oszilloskop abgelesen werden kann.

e) **Wien-Robinson-Brücke**

In Abbildung 6 wird die Wien-Robinson-Brücke gezeigt, mit der man die Frequenzabhängigkeit eines Schwingkreises bestimmen kann. Hierzu werden Kapazitäten und bestimmte, feste Verhältnisse von Widerständen und eine Kapazität verwendet. Dabei wird die Wechselspannung U_S auf verschiedene Frequenzen gestellt und die Brückenspannung U_{Br} in Abhängigkeit der Frequenz gemessen.

4 Auswertung

4.1 Wheatstonesche Messbrücke

Der erste Bestandteil des Versuchs bestand darin mit Hilfe der Wheatstoneschen Brückenschaltung die Werte von zwei verschiedenen Widerständen zu bestimmen. Die zu bestimmenden Bauteile sind die Widerstände R_{13} und R_{14} . Die gemessenen Werte für R_2 , R_3 und R_4 sind in der folgenden Tabelle dargestellt.

Tabelle 1: Messung der Widerstände.

R Wert 13		
R_2/Ω	R_3/Ω	R_4/Ω
332	485	515
664	318	682
1000	235	765
R Wert 14		
332	728	272
664	571	429
1000	468	532

R_2 hat dabei einen relativen Fehler von $\pm 0.2\%$, während der Quotient

$$\frac{R_3}{R_4}$$

des Potentiometers einen relativen Fehler von $\pm 0.5\%$ hat. Es ergibt sich mit der Gausschen Fehlerfortpflanzung allgemein folgender Fehler.

$$\Delta f = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \Delta x_i \right)^2} \quad (15)$$

Mit den gemessenen Werten und nach (5) lässt sich jeweils ein Wert für R_x bestimmen, woraus sich dann der Mittelwert wie folgt berechnen lässt.

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (16)$$

Bei der Berechnung des Mittelwerts ergibt sich allerdings ein Fehler, der über die Varianz V bestimmt werden kann. Aus der Varianz lässt sich der Fehler des Mittelwerts bestimmen, wenn man die Standardabweichung als

$$\sigma = \sqrt{V}$$

definiert. Also ergibt sich für den Fehler des Mittelwerts

$$\Delta \bar{x} = \frac{\sigma}{\sqrt{N(N-1)}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N(N-1)}} \quad (17)$$

Nach (15), (16), (17) und folgender Gausschen Fehlerfortpflanzung lassen sich nun die Werte für R_{13} , R_{14} und deren Fehler bestimmen.

$$\Delta R_x = \sqrt{\left(\frac{\partial R_x}{\partial R_2} \cdot \Delta R_2\right)^2 + \left(\frac{\partial R_x}{\partial \left(\frac{R_3}{R_4}\right)} \cdot \left(\Delta \frac{R_3}{R_4}\right)\right)^2} \quad (18)$$

Für die Werte R_{13} und R_{14} ergeben sich

$$\overline{R_{13}} = (309.819 \pm 0.963)$$

$$\overline{R_{14}} = (884.024 \pm 2.749)$$

Zusätzlich kommt noch der Fehler des Mittelwertes hinzu. Hierbei beträgt

$$\Delta \overline{R_{13}} = 0.963$$

und

$$\Delta \overline{R_{14}} = 1.483$$

4.2 Kapazitätsmessbrücke

Die Kapazitätsmessbrücke ermöglicht es, Verlustwiderstände und Kapazitäten von Kondensatoren zu bestimmen. Zunächst werden Kapazitäten unter der Annahme berechnet, dass der gesuchte Kondensator C_x und der Messkondensator C_2 als ideal angenommen werden. Die folgende Tabelle zeigt die Messwerte auf.

Tabelle 2: Messung der Kapazitäten.

C Wert 3		
C_2/nF	R_3/Ω	R_4/Ω
399	485	515
450	513	487
750	636	364
C Wert 14		
C_2/nF	R_3/Ω	R_4/Ω
399	203	797
450	222	778
750	323	677

Nach (6) aus der Theorie lassen sich die Kapazitäten der als ideal angenommenen Kondensatoren bestimmen. Außerdem wird der Mittelwert aus den jeweils drei berechneten Werten nach (16) und dem entsprechenden Fehler des Mittelwertes aus (17) gebildet. Hinzu

kommt der Fehler der Bauteile, der durch die Gaussche Fehlerfortpflanzung bestimmt wird.

$$\Delta C_x = \sqrt{\left(\frac{\partial C_x}{\partial C_2} \cdot \Delta C_2\right)^2 + \left(\frac{\partial C_x}{\partial \left(\frac{R_3}{R_4}\right)} \cdot \left(\Delta \frac{R_3}{R_4}\right)\right)^2} \quad (19)$$

Hierbei bleibt der Fehler des Potentiometers gleich und die des Kondensators liegt bei $\pm 0.2\%$. Damit ergeben sich folgende Mittelwerte für die Kapazität.

$$\overline{C_3} = (426.706 \pm 1.327) \text{ nF}$$

$$\overline{C_{14}} = (1571.842 \pm 4.887) \text{ nF}$$

Hinzufügend wird noch der Fehler des Mittelwerts bestimmt Hierbei beträgt

$$\Delta \overline{C_3} = 0.938 \text{ nF}$$

und

$$\Delta \overline{C_{14}} = 1.752 \text{ nF}$$

Zusätzlich wird noch ein realer Kondensator betrachtet, der eine Kapazität und einen Verlustwiderstand enthält. In der folgenden Tabelle sind die gemessenen Werte abgebildet.

Tabelle 3: Messung des RC-Bauteils(8).

C Wert 3			
C_2/nF	R_2/Ω	R_3/Ω	R_4/Ω
399	426	573	427
450	378	601	399
750	229	714	286

Nach (6) und (7) aus der Theorie und der Gausschen Fehlerfortpflanzung (18) und (19) lassen sich die jeweiligen Werte für das Bauteil berechnen. Der Mittelwert wird mit (16) gebildet und es ergeben sich folgende Werte

$$\overline{R_8} = (570.909 \pm 1.775)$$

$$\overline{C_8} = (298.836 \pm 0.929) \text{ nF}$$

Durch (17) lassen sich die Fehler der Mittelwerte auf

$$\Delta \overline{R_8} = 0.445$$

und

$$\Delta \overline{C_8} = 0.515 \text{ nF}$$

bestimmen.

4.3 Induktivitätsmessbrücke

Hier wird die Induktivität und der Verlustwiderstand einer Spule bestimmt. Der Fehler des Potentiometers bleibt erneut gleich und der relative Fehler der anderen Bauteile beträgt $\pm 0.2\%$. Durch (8) und (15) folgt

$$\Delta L_x = \sqrt{\left(\frac{\partial L_x}{\partial L_2} \cdot \Delta L_2\right)^2 + \left(\frac{\partial L_x}{\partial \left(\frac{R_3}{R_4}\right)} \cdot \left(\Delta \frac{R_3}{R_4}\right)\right)^2} \quad (20)$$

Zusätzlich wird die Fehlerfortpflanzung (18) des Widerstands verwendet. Es ergeben sich folgende Werte für den Verlustwiderstand und die Induktivität der Spule.

$$R_{19} = (105.149 \pm 0.566)$$

$$L_{19} = (26.753 \pm 0.144) \text{ mH}$$

4.4 Maxwell-Brücke

Die relativen Fehler der Bauteile werden von der Induktivitätsbrücke übernommen. Des Weiteren wird die Gaussche Fehlerfortpflanzung (18) für den Widerstand übernommen. Anders als bei der Induktivität, dort ergibt sich nach (10) und (15) folgende Fehlerfortpflanzung.

$$\Delta L_x = \sqrt{\left(\frac{\partial L_x}{\partial R_2} \cdot \Delta R_2\right)^2 + \left(\frac{\partial L_x}{\partial R_3} \cdot \Delta R_3\right)^2 + \left(\frac{\partial L_x}{\partial C_4} \cdot \Delta C_4\right)^2} \quad (21)$$

Der Widerstand und die Induktivität werden mit (10) und (11) auf folgende Werte bestimmt.

$$R_{19} = (114.331 \pm 4.856)$$

$$L_{19} = (27.553 \pm 0.831) \text{ mH}$$

4.5 Wien-Robinson-Filter

Im Folgenden wird die Frequenzabhängigkeit des Schwingkreises bestimmt. Hierbei ist

$$R' = 332$$

,

$$R = 1000$$

und

$$C = 993 \text{ nF}$$

.

4.5.1 Sperrfrequenz

Zunächst wird die Frequenz des Sinusgenerators, bei der die Brückenspannung U_{Br} verschwindet, theoretisch mit (12) berechnet. Dabei ist

$$\omega_0 = \frac{1}{RC}$$

. Es ergibt sich also für die Sperrfrequenz des Schwingkreises

$$\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi RC} \quad (22)$$

Die Sperrfrequenz beträgt somit

$$\nu_0 = 160.277 \text{ Hz}$$

. Im Folgenden sind die Werte aus Tabelle 4 und die theoretische Kurve, die mit (13) und

$$\Omega = \frac{\nu}{\nu_0}$$

berechnet wurde, aufgetragen. Dabei ist Ω gegen den natürlichen Logarithmus des Quotienten $\frac{U_{Br}}{U_s}$ aufgetragen. Es fällt auf, dass die Kurven sehr gut übereinstimmen. Die experimentelle Sperrfrequenz lässt sich somit auf folgenden Wert bestimmen.

$$\nu_0 = (157.523 \pm 1.246) \text{ Hz}$$

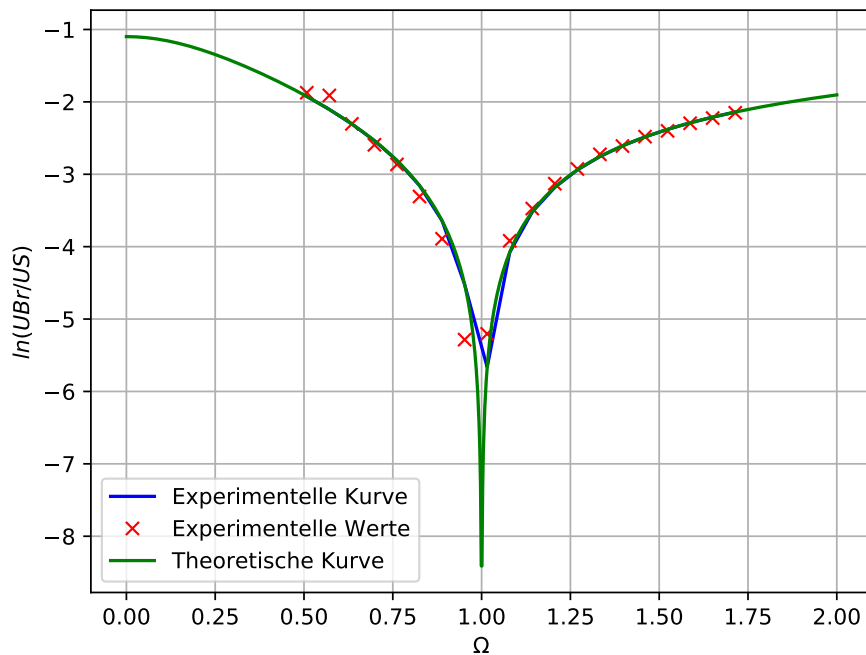


Abbildung 8: Frequenzabhängigkeit.

Tabelle 4: Frequenzabhängigkeit.

ν/Hz	U_{Br}/mV	U_S/V
80	1090	7,10
90	1050	7,10
100	709	7,10
110	531	7,10
120	405	7,10
130	260	7,10
140	145	7,10
150	36	7,10
160	39	7,00
170	139	7,00
180	217	7,00
190	306	7,00
200	375	7,00
210	459	7,00
220	511	6,95
230	582	6,95
240	630	6,95
250	700	6,95
260	752	6,95
270	809	6,95

4.5.2 Klirrfaktor

Der Klirrfaktor lässt sich aus den ungewollten Oberwellen des Sinusgenerators bestimmen und allgemein wie folgt berechnen.

$$k = \frac{\sqrt{U_2^2 + U_3^2 + \dots}}{U_1} \quad (23)$$

Es wird genähert, dass die Summe der Oberwellen aus (23) nur aus der zweiten Oberwelle besteht. Für die zweite Oberwelle ergibt sich außerdem folgende Formel

$$U_2 = \frac{U_{Br}}{f(2)} \quad (24)$$

Hierbei wird (13) als Funktion f bezeichnet und

$$\Omega = 2$$

gesetzt. Es ergibt sich

$$f(2) = \sqrt{\frac{1}{9} \frac{(2^2 - 1)^2}{(1 - 2^2)^2 + 9 \cdot 2^2}} = \frac{\sqrt{5}}{15}$$

Damit lässt sich U_2 aus der Brückenspannung U_{Br} bei der Sperrfrequenz bestimmen. U_1 beschreibt in (23) die Spannung des Sinusgenerators $U_{\text{S,min}}$ bei der Sperrfrequenz ν_0 , die durch die Oberwellen entsteht. Eingesetzt ergibt sich für den Klirrfaktor Folgendes.

$$k = \frac{U_2}{U_1} = \frac{U_{\text{Br}}}{f(2) \cdot U_{\text{S,min}}} = \frac{15}{\sqrt{5}} \cdot \frac{U_{\text{Br}}}{U_{\text{S,min}}}$$

Der Klirrfaktor des verwendeten Sinusgenerators liegt bei 3,45%.

5 Diskussion

In dem Versuch werden viele Fehler durch die Bauteile bestimmt. Zudem müssen Messungenauigkeiten der Messgeräte und Ungenauigkeiten beim Ablesen berücksichtigt werden. Auffällig ist, dass die in 4.3 durch die Induktivitätsmessbrücke gemessene Induktivität einen kleineren Fehler ($\pm 0.144\text{mH}$) als die bei 4.4 durch die Maxwell-Brücke gemessene Induktivität ($\pm 0.831\text{mH}$) hat. Die Maxwell-Brücke ist durch die zusätzlich Kapazität mit mehr Fehlern behaftet als die Induktivitätsmessbrücke. Zudem ist der Innenwiderstand R_{19} der Maxwell-Brücke signifikant größer.

Anhand des Graphen 8 lässt sich erkennen, dass die Messungen mit dem Wien-Robinson-Filter sehr genau sind. Der ausgerechnete Klirrfaktor des Sinusgenerators (3,45%) liegt im Rahmen der theoretischen Werte [2], wobei der Klirrfaktor jedoch standardmäßig im Bereich zwischen 0,1% und 1% liegt.

6 Literatur

- [1] TU Dortmund. Versuchsanleitung zum Experiment V302 - Elektrische Brückenschaltungen. 2018.
- [2] <https://www.delamar.de/faq/klirrfaktor-31992/>, 05.12.2018