V204

Das Kugelfall-Viskosimeter nach Höppler

Jonas Osterholz
jonas.osterholz@tu-dortmund.de

Moritz Rempe
moritz.rempe@tu-dortmund.de

Durchführung: 11.01.2019 Abgabe: 18.01.2019

TU Dortmund – Fakultät Physik – Grundpraktikum

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung

Das Ziel dieses Versuchs ist es, die dynamische Viskosität von destilliertem Wasser zu bestimmen. Dafür wird die Temperaturabhängigkeit berücksichtigt und untersucht.

2 Theorie

Die dynamische Viskosität η beschreibt die Eigenschaft einer Flüssigkeit, einen Widerstand für einen sich durch die Flüssigkeit bewegenden Körpers darzustellen. Diese ist dabei sehr temperaturabhängig und ist von der Geschwindigkeit v und der Berührungsfläche A abhängig. Zur Bestimmung der Viskosität wird das Kugelfall-Viskosimeter nach Höppler verwendet. Der oben beschriebene Widerstand wird durch Reibung ausgelöst, die Stokessche Reibung. Am Beispiel einer Kugel, die im Viskosimeter verwendet wird, ergibt sich folgender Zusammenhang:

$$F_R = 6\,\pi\,\eta\,v\,r \tag{1}$$

. Zusätzlich zu der Reibungskraft $\vec{F}_R$ wirken die Gewichtskraft $\vec{F}_G$ und die Auftriebskraft $\vec{F}_A$, die der Gewichtskraft entgegenwirkt. Da die Reibungskraft mit wachsender Geschwindigkeit auch größer wird, stellt sich nach einer bestimmten Zeit ein Kräftegleichgewicht ein, wodurch sich die Kugel mit einer konstanten Geschwindigkeit weiterbewegt. Die dynamische Viskosität lässt sich dann aus der Dichte der Kugel ρ_{K}, der Dichte der Flüssigkeit ρ_{Fl}, der Fallzeit t und der Apparaturkonstante K nach

$$\eta = K \cdot (\rho_K - \rho_{\mathrm{Fl}}) \cdot t \tag{2}$$

bestimmen. Dabei setzt sich K unter Anderem aus der Fallhöhe und der Kugelsymmetrie zusammen. Zusätzlich lässt sich aufgrund der starken Temperaturabhängigkeit der dynamischen Viskosität die Andradsche Gleichung aufstellen.

$$\eta\,(T) = A \cdot exp\left(\frac{B}{T}\right) \tag{3}$$

Hinzufügend wird die Reynoldszahl für das Fallrohr bestimmt, die angibt ob eine laminare oder turbulente Strömung vorliegt. Dazu wird folgende Gleichung verwendet.

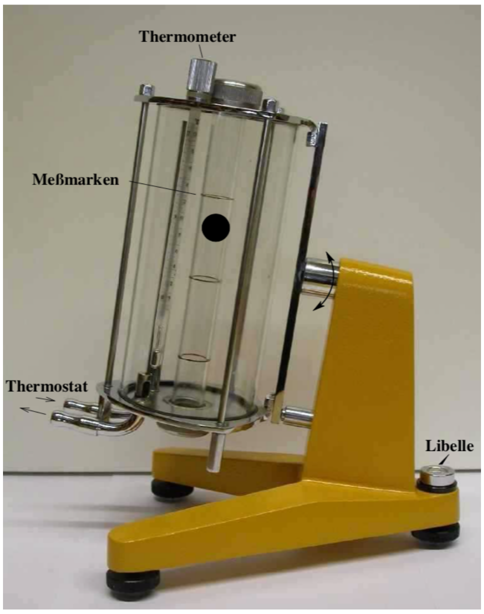
$$Re = \frac{\rho \cdot v \cdot d}{\eta} \tag{4}$$

Hierbei ist v die Geschwindigkeit der fallenden Kugel, d der Durchmesser der Kugel und η die Viskosität der Flüssigkeit. Dabei wird der Wert $Re_{\mathrm{krit}} \approx 2300$ definiert, ab dem die Strömung von einer laminaren auf eine turbulente Strömung wechselt.

3 Aufbau und Durchführung

Das Viskosimeter nach Höppler besteht hauptsächlich aus zwei Bestandteilen und ist in Abbildung 1 dargestellt. Das wichtigste Element ist das Fallrohr, in dem sich die zu untersuchende Flüssigkeit und die Kugel befinden. An beiden Enden des Fallrohrs ist eine Öffnung, die durch Stopfen und Schrauben luftdicht verschlossen werden, nachdem die oben genannten Materialien in das Fallrohr gegeben werden. Dabei sollte darauf geachtet werden, dass in der Flüssigkeit keine Luftbläschen vorhanden sind um das Messergebnis nicht zu verfälschen. Der zweite Bestandteil ist das um das Fallrohr befindliche, aber räumlich getrennte, Wasserbad, welches erwärmt bzw. abgekühlt wird und dessen Temperatur durch das Thermostat eingestellt werden kann. Ein angebrachtes Thermometer zeigt die Temperatur der Flüssigkeit im Fallrohr. Während des Versuchs wird die Einrichtung minimal gekippt, damit die Kugel keine turbulenten Ströme auslöst und das Messergebnis ungenauer wird. An dem Fallzylinder sind Messmarken angebracht um die zurückgelegte Strecke zu überprüfen. Dabei sollte darauf geachtet werden, die Kugel erst eine annähernd konstante Geschwindigkeit erreichen zu lassen. Nach einer Messung kann das Viskosimeter durch eine Drehapparatur, die Libelle, um 180° gedreht werden und eine weitere Messung durchgeführt werden. Es werden die Zeiten gemessen, die die Kugel für eine gleichbleibenden Strecke benötigt, und ausgewertet. Während des Versuchs werden für zwei unterschiedlich schwere Kugeln gleichen Materials die Fallzeiten für die gleichen Zeiten gemessen. Außerdem wird die Fallzeit für die Größere der beiden Kugeln gemessen, wobei die Temperatur nach zwei Messungen verändert wird. Dabei wird die Temperatur der äußeren Flüssigkeit aufgeheizt, wodurch auch das destillierte Wasser im Fallrohr erwärmt wird. Es werden jeweils zwei Zeiten für zehn verschiedene Temperaturen gemessen.

Abbildung 1: Das Fallviskosimeter nach Höppler



4 Auswertung

Die Apparatkonstante K_{kl} und die Fallstrecke zwischen den Messmarken werden der Anleitung entnommen. Die Massen und Radien der Kugeln, werden gemessen:

$$
\begin{aligned}
r_{\mathrm{kl}} &= 7.75 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m} \\
r_{\mathrm{gr}} &= 7.9 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m} \\
m_{\mathrm{kl}} &= 0.004\,84\,\mathrm{kg} \\
m_{\mathrm{gr}} &= 0.005\,36\,\mathrm{kg} \\
K_{\mathrm{kl}} &= 7.640 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{Pa\,m^3\,kg^{-1}} \\
l &= 0.1\,\mathrm{m}.
\end{aligned}
$$

Die Dichten der Kugeln kann über die Formel

$$\rho = \frac{3 \cdot m}{4 \cdot \pi r^3} \tag{5}$$

berechnet werden. Somit ergeben sich die Dichten:

$$
\begin{aligned}
\rho_{\mathrm{kl}} = \rho = \frac{3 \cdot m_{\mathrm{kl}}}{4 \cdot \pi r_{\mathrm{kl}}^3} = 2482.285\,\mathrm{kg\,m^{-3}} \\
\rho_{\mathrm{gr}} = \rho = \frac{3 \cdot m_{\mathrm{gr}}}{4 \cdot \pi r_{\mathrm{gr}}^3} = 2595.343\,\mathrm{kg\,m^{-3}}
\end{aligned}
$$

Bei 20°C beträgt die Dichte von Wasser [2]:

$$\rho_{\mathrm{Fl}} = 998.2\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$$

Nun wird die Apparatkonstante K_{gr} bestimmt. In Tabelle 1 sind Fallzeiten t_{kl} der kleinen Kugel mit r_1 bei 22°C angegeben, in Tabelle 2 die Fallzeiten t_{gr} der grossen Kugel mit r_2 bei 22°C.

Tabelle 1: t_{kl} der kleinen Kugel.

t/s
11.67
11.67
11.76
11.58
11.60
11.50
11.58
11.55
11.57
11.55

Tabelle 2: t_{gr} der grossen Kugel.

t/s
66.09
65.47
66.23
64.92
65.09
66.27
65.76
65.56
65.83
64.87

Für den Mittelwert von t_{kl} ergibt sich:

$$\overline{t_{\mathrm{kl}}} = (11.603 \pm 0.024)\,\mathrm{s}$$

Der Mittelwert wurde hierbei anhand der Formel

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{6}$$

bestimmt. Die Abweichung σ mit $i = 1, ..., n$:

$$\sigma_i = \frac{s_i}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{n}(v_j - \overline{v_i})^2}{n * (n-1)}} \tag{7}$$

Zunächst muss der Wert der Viskosität ermittelt werden. Hierzu werden die Werte aus Tabelle 1, K_{kl} und ρ_{Fl} in Gleichung (2) eingesetzt, daraus folgt:

$$\eta = (1.3156 \pm 0.0027) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{Pa\,s}$$

Der Fehler ergibt sich nach der Fehlerfortpflanzungsformel

$$\Delta x_i = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial k_1} * \sigma_{k_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial k_2} * \sigma k_{k_2}\right)^2 + ...} \tag{8}$$

Hier folgt für den Fehler von η dann

$$\Delta\eta = \sqrt{\left(K \cdot (\rho_\mathrm{K} - \rho_\mathrm{Fl}) \cdot \sigma_t\right)^2}. \tag{9}$$

Um nun K_gr zu ermitteln, wird (2) nach diesem Wert umgestellt:

$$K_\mathrm{gr} = \frac{\eta}{(\rho_\mathrm{gr} - \rho_\mathrm{Fl}) \cdot t_\mathrm{gr}} = (9.543 \pm 0.024) \cdot 10^{-9}\,\mathrm{Pa\,m^3\,kg^{-1}}$$

Der Fehler wird nach 8 wie folgt berechnet:

$$\Delta K_\mathrm{gr} = \sqrt{\left(\frac{1}{(\rho_\mathrm{gr} - \rho_\mathrm{Fl}) \cdot t_\mathrm{gr}} \cdot \sigma_\eta\right)^2 + \left(-\frac{\eta}{(\rho_\mathrm{gr} - \rho_\mathrm{Fl}) \cdot t_\mathrm{gr}^2} \cdot \sigma_{t_\mathrm{gr}}\right)^2}$$

Tabelle 3: Messung der Fallzeit der grossen Kugel mit r_2 bei verschiedenen Temperaturen.

$T/°C$	t/s	$\rho_\mathrm{Fl}/\mathrm{kg\,m^{-3}}$	$\eta/10^{-3}$Pa s
28	59.80	996.8	0.912 ± 0.0023
28	58.47	996.8	0.892 ± 0.0022
32	54.95	995.0	0.839 ± 0.0022
32	54.13	995.0	0.827 ± 0.0021
36	51.09	993.7	0.781 ± 0.0020
36	50.04	993.7	0.765 ± 0.0019
40	47.40	992.2	0.725 ± 0.0018
40	46.69	992.2	0.714 ± 0.0018
47	42.76	989.4	0.655 ± 0.0016
47	41.93	989.4	0.643 ± 0.0016
51	39.61	987.6	0.608 ± 0.0015
51	38.67	987.6	0.593 ± 0.0015
56	36.23	985.2	0.557 ± 0.0014
56	36.32	985.2	0.558 ± 0.0014
60	34.20	983.2	0.526 ± 0.0013
60	34.09	983.2	0.524 ± 0.0013
65	32.40	980.6	0.499 ± 0.0013
65	32.10	980.6	0.495 ± 0.0012
70	30.27	977.8	0.467 ± 0.0012
70	29.78	977.8	0.460 ± 0.0012

Der Fehler von η wird mit Gleichung 9 berechnet. Anhand der Werte aus Tabelle 3 können nun die Konstanten der Andradeschen Gleichung (3) bestimmt werden. Für die Dichte des Wassers ρ_Fl, bei den verschiedenen Temperaturen, wurden Literaturwerte verwendet

[2].Die Viskosität wurde mithilfe der Gleichung (2) bestimmt. Die Messwertpaare mit selber Temperatur werden jeweils wie oben gemittelt.

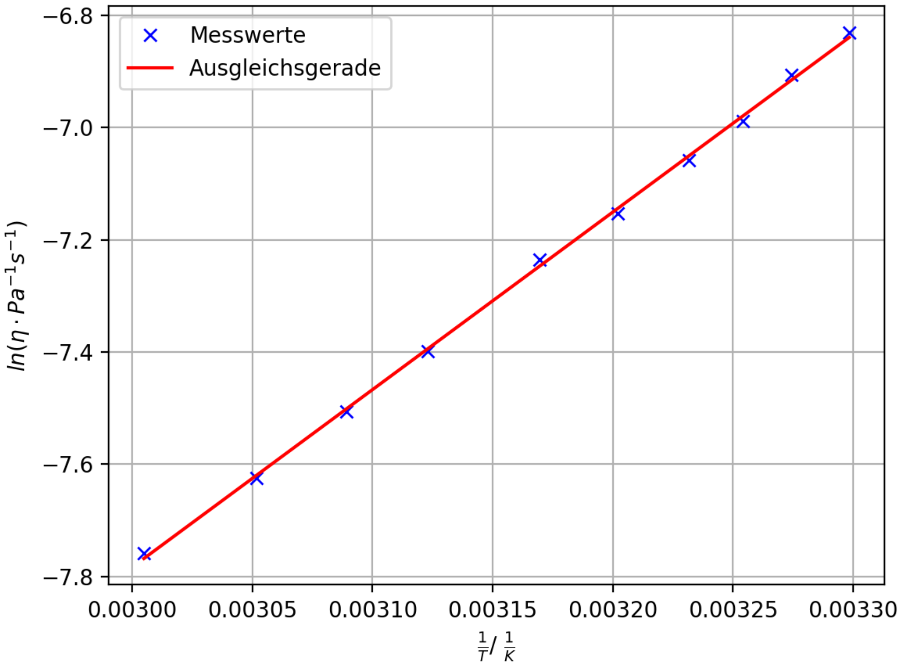


Abbildung 2: Bestimmung der Konstanten der Andradeschen Gleichung.

Mithilfe der Pythonfunktion CurveFit können so die beiden Konstanten der Andradeschen Gleichung berechnet werden. Dabei wird die Ausgleichsfunktion der Form $\mathrm{A} \cdot x + \mathrm{B}$ verwendet.

$$\mathrm{A} = (8.613 \pm 0.005) \cdot 10^{-6}\,\mathrm{Pa\,s}$$
$$\mathrm{B} = (3164.07 \pm 905.73)\,\mathrm{K}$$

Zuletzt werden, zur Überprüfung der Laminarität der Strömung, die Reynoldszahlen bestimmt. Durch Gleichung (4) erhält man somit für die beiden Kugeln:

$$\text{kleine Kugel: } \mathrm{Re} = 331.6 \pm 0.7$$
$$\text{grosse Kugel: } \mathrm{Re} = 62 - 5 \pm 0.16$$

Der Fehler ergibt sich nach 8. Somit folgt

$$\Delta Re = \sqrt{\left(-\frac{\rho \cdot v \cdot d}{\eta^2} \cdot \sigma_{eta}\right)^2}$$

5 Diskussion

Bei den hier vorliegenden Strömung handelt es sich offensichtlich um laminare Strömungen. Sowohl die Reynoldszahl der kleinen Kugel ($\mathrm{Re} = 331,6 \pm 0,7$), als auch die Reynoldszahl der großen Kugel ($\mathrm{Re} = 62,5 \pm 0,16$) liegen weit unter dem kritischen Wert von $Re_{\mathrm{krit}} \approx 2300$. Der Fehler der Apparatkonstante für die große Kugel ist sehr klein ($K_{\mathrm{gr}} = (9.543 \pm 0.024) \cdot 10^{-9}\,\mathrm{Pa\,m^3\,kg^{-1}}$), was auf eine genaue Messung schließen lässt. Der Literaturwert der Viskosität von Wasser bei 20° lautet $\eta_{\mathrm{W}} = 1.00 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{Pa\,s}$ [3]. Der experimentell Wert liegt bei $\eta = (1.3156 \pm 0.0027) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{Pa\,s}$ und weicht somit 31% von dem Literaturwert ab. Zurückzuführen ist diese Abweichung auf eventuell vorhandene Luftblasen oder eine geringe Reibung zwischen Glaskugel und Gefäßrand, welche hier nicht berücksichtigt wurde. Die Ausgleichsgerade zur Bestimmung der Konstanten der Andradschen Gleichung liegt nah an den Messwerten, was für die Genauigkeit des Versuches spricht.

6 Literatur

[1] TU Dortmund. Versuchsanleitung zum Experiment V207 - Das Kugelfall-Viskosimeter nach Höppler. 2019.
[2] `https://www.internetchemie.info/chemie-lexikon/daten/w/wasser-dichtetabelle.php`, 12.01.2019
[3] `https://de.wikipedia.org/wiki/Viskosität`, 14.01.2019