Mathématiques pour l'informatique

Vermeiren Rémy

Juin 2015

Résumé

Synthèse du cours de mathématique pour l'informatique donné par Marco Saerens au deuxième BAC en science informatique. Sur base des slides, du livre « Mathématiques discrètes » par H. Rosen et d'une synthèse de Jérôme Thiry

Table des matières

1 Fondements : logique, ensembles et fonctions

1.1 Logique

Une proposition est un énoncé qui peut être vrai ou faux, mais non les deux à la fois.

Les énoncés suivants sont des propositions :

— Washington est la capitale des Etats-Unis. ($Vrai$)

— $2 + 2 = 3$. ($Faux$)

Les énoncés suivants ne sont pas des propositions :

— Quelle heure est-il ?

— $x + 1 = 2$

Le premier point n'est pas un énnoncés, et le deuxième n'est pas une proposition tant qu'une valeur n'est pas attribuée à la variable.

On utilise en général les lettres $p, q, r, s, t, ...$ pour désigner les propositions. Une proposition « vrai » est noté « V » et une proposition « faux » est noté « F ».

C'est le mathématicien George Boole qui a établi les règles du raisonnement par proposisiton en permettant d'en combiné plusieurs avec des opérateurs logiques.

Définition 1. Soit p une proposition. L'énnoncé « Il n'est pas vrai que p. » est une autre proposition, appellée négation de p, qui est noté $\neg p$. La proposition $\neg p$ se lit « non p ».

Exemple. $p \equiv$ « Aujourd'hui, nous sommes vendredi. » donc la négation $\neg p\equiv$ « Aujourd'hui, nous ne somme pas vendredi. »

Exemple. $q \equiv$ « Il pleut aujourd'hui. » donc la négation $\neg q \equiv$ « Il ne pleut pas aujourd'hui. »

Définition 2. Soit p et q deux propositions. La proposition « p et q », notée $p \wedge q$, est vraie si à la fois p et q sont vraies. Elle est fausse dans tous les autres cas. Cette proposition est appelée **conjonction** de p et de q.

Exemple. $p \wedge q \equiv$ « Nous sommes aujourd'hui vendredi et il pleut. »

Définition 3. Soit p et q deux propositions. La proposition « p ou q », notée $p \vee q$, est fausse si p et q sont fausses. Elle est vraie dans tous les autres cas. La proposition $p \vee q$ est appelée **disjonction** de p et de q.

Exemple. $p \vee q \equiv$ « Aujourd'hui, nous sommes vendredi ou c'est un jour de pluie. »

Définition 4. Soit p et q deux propositions. La proposition « p ou exclusif q » notée $p \bigoplus q$, est vraie si soit p, soit q est vraie. Elle est fausse dans tous les autres cas. La proposition $p \bigoplus q$ est appelée **disjonction exclusive** de p et de q.

Exemple. $p \bigoplus q \equiv$ « Aujourd'hui, nous sommes vendredi ou alors c'est un jour de pluie, mais pas les deux. »

Définition 5. Soit p et q deux propositions. L'**implication** $p\rightarrow q$ est une proposition qui est fausse quand p est vrai et q fausse, et qui est vraie dans tous les autres cas. Dans cette implication, p **est appelée l'hypothèse** (ou l'**antécédent** ou la **prémisse**) et q **est appelée la conclusion** (ou la **conséquence**).

Exemple. $p\rightarrow q\equiv$ « Aujourd'hui, c'est un jour de pluie si nous somme vendredi. »

Définition 6. Soit p et q deux propositions. La **biconditionnelle** $p \leftrightarrow q$ est une proposition qui est vraie quand p et q ont les mêmes valeurs de vérité et qui est fausse dans les autres cas.

Exemple. $p \leftrightarrow q \equiv$ « Il est nécessaire d'être vendredi pour que ce soit un jour de pluie, et inversément. »

Récapitulatif des propositions :

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \bigoplus q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
V	V	F	F	V	V	F	V	V
V	F	F	V	F	V	V	F	F
F	V	V	F	F	V	V	V	F
F	F	V	V	F	F	F	V	V

La table de vérité construite avec n propositions est formée avec 2^n lignes.

1.2 Equivalence propositionnelles

Définition 7. Une proposition composée qui est toujours vraie, quelles que soient les valeurs de vérité des propositions qui la composent, est appelée une **tautologie**.

Définition 8. Une proposition composée qui est toujours fausse, quelles que soient les valeurs de vérité des propositions qui la composent, est appelée une **contradiction**.

Définition 9. Une proposition composée qui n'est ni une tautologie ni une contradiction est appelée une **contingence**.

Définition 10. Les propositions p et q sont **logiquement équivalentes** si $p \leftrightarrow q$ est une tautologie. La notation $p \Leftrightarrow q$ signifie que p et q sont logiquement équivalentes.

Equivalence	Nom
$p \vee \neg p \Leftrightarrow V$	Base
$p \wedge \neg p \Leftrightarrow F$	Base
$(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$	Base
$p \wedge V \Leftrightarrow p$	Identité
$p \vee F \Leftrightarrow p$	Identité
$p \vee V \Leftrightarrow V$	Domination
$p \wedge F \Leftrightarrow F$	Domination
$p \vee p \Leftrightarrow p$	Idempotence
$p \wedge p \Leftrightarrow p$	Idempotence
$\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$	Loi de la double négation
$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$	Commutativité
$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$	Commutativité
$(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$	Associativité
$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$	Associativité
$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	Distributivité
$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	Distributivité
$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$	Loi de De Morgan
$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$	Loi de De Morgan

Exemple. Démontrez que les propositions $\neg(p \vee (\neg p \wedge q))$ et $\neg p \wedge \neg q$ sont logiquement équivalentes.

On va établir cette équivalence grâce à une suite d'équivalences logiques.

$$
\begin{array}{lll}
\neg(p \vee (\neg p \wedge q)) & \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg(\neg p \wedge q) & \text{selon la deuxième loi de De Morgan} \\
& \Leftrightarrow \neg p \wedge [\neg(\neg p) \vee \neg q] & \text{selon la première loi de De Morgan} \\
& \Leftrightarrow \neg p \wedge (p \vee \neg q) & \text{selon la loi de double négation} \\
& \Leftrightarrow (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) & \text{selon la loi de distributivité} \\
& \Leftrightarrow F \vee (\neg p \wedge \neg q) & \text{puisque } \neg p \wedge p \Leftrightarrow F \\
& \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee F & \text{selon la commutativité de la disjonction} \\
& \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q & \text{selon l'identité pour } F
\end{array}
$$

Par conséquent, les propositions $\neg(p \vee (\neg p \wedge q))$ et $\neg p \wedge \neg q$ sont logiquement équivalentes.

1.3 Prédicats et quantificateurs

On trouve souvent des énoncés comportant des variables, tels que "$x > 3$", ou encore "$x = y + 3$". Ces énoncés ne sont ni vrais ni faux tant que les valeurs des variables ne sont pas précisées. Cette section servira à obtenir des propositions à partir de tels énoncés. Le **prédicat** du premier énoncé est "est plus grand que 3". La **variable** est x. Cela nous donne donc la **fonction propositionnelle** $P(x) \equiv x < 3$. Une fois une valeur attribuée à x , $P(x)$ acquiert une valeur de vérité.

Quantificateurs

Lorsque l'on a substitué des valeurs aux variables d'une fonction propositionnelle, l'énoncé obtenu a une valeur de vérité. On peut aussi utilisé la **quantification** pour transformer les fonctions propositionnelle en propositions. Quand une proposition est vraie pour toutes les valeurs d'une variable appartenant à un certain domaine, on l'appele **univers du discours**.

Définition 11. La **quantification universelle** de $P(x)$ est la proposition "$P(x)$ est vrai pour toutes les valeurs de x dans l'univers du discours."

Remarque. La notation $\forall x\, P(x)$ désigne la quantification universelle de $P(x)$. La proposition $\forall x\, P(x)$ s'exprime également : "pour tout x, $P(x)$.

$$\forall x\, P(x) \text{ équivaut à } P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge ... \wedge P(x_n)$$

Définition 12. La **quantification existentielle** de $P(x)$ est la proposition "Il existe un élément x dans l'univers du discours tel que $P(x)$soit vraie."

Remarque. La notation $\exists x\, P(x)$ désigne la quantification existentielle de $P(x)$. La proposition $\exists x\, P(x)$ s'exprime également : "Il existe un élément x tel que $P(x)$.

$$\exists x\, P(x) \text{ équivaut à } P(x_1) \vee P(x_2) \vee ... \vee P(x_n)$$

Quantifications d'une variable		
Enoncé	Cet énoncé est-il vrai ?	Cet énoncé est-il faux ?
$\forall x\, P(x)$	$P(x)$est vrai pour tout x.	Il existe un x pour lequel $P(x)$est faux.
$\exists x\, P(x)$	Il existe un x pour lequel $P(x)$est vrai.	$P(x)$ est faux pour tout x.

Quantifications de deux variables		
Enoncé	Cet énoncé est-il vrai ?	Cet énoncé est-il faux ?
$\forall x \forall y\, P(x,y)$ $\forall y \forall x\, P(x,y)$	$P(x,y)$ est vrai pour chaque paire x,y.	Il existe une paire x,y pour laquelle $P(x,y)$ est faux.
$\forall x\, \exists y\, P(x,y)$	Pour chaque x, il existe un y pour lequel $P(x,y)$ est vrai.	Il existe un x tel que $P(x,y)$ est faux pour chaque x.
$\exists x \forall y\, P(x,y)$	Il existe un x pour lequel $P(x,y)$ est vrai pour chaque y.	Pour chaque x, il existe un y pour lequel $P(x,y)$ est faux.
$\exists x\, \exists y\, P(x,y)$ $\exists x\, \exists y\, P(x,y)$	Il existe une paire x,y pour laquelle $P(x,y)$ est vrai.	$P(x,y)$ est faux pour chaque paire x,y.

Lois de De Morgan pour les quantificateurs			
Négation	Enoncé équivalent	Quand la négation est-elle vraie ?	Quand la négation est-elle fausse ?
$\neg\exists x\, P(x)$	$\forall x\, \neg P(x)$	$P(x)$est faux pour tout x.	Il existe un x pour lequel $P(x)$ est vrai.
$\neg\forall x\ P(x)$	$\exists x\, \neg P(x)$	Il existe un x pour lequel $P(x)$ est faux.	$P(x)$ est vrai pour chaque x.

1.4 Forme normales

1.4.1 Forme normale disjonctive

Définition 13. Une proposition est dans sa **forme normale disjonctive** si elle consiste en (1...n) disjonctions où chaque disjonction est une conjonction de (1...m) formules atomiques ou de négations de formules atomiques

Exemple. $(\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$

1.4.2 Forme normale conjonctive

Définition 14. Une proposition est dans sa **forme nomarle conjonctive** si c'est une conjonction de disjonctions.

Exemple. $(p \vee \neg r) \wedge (\neg q \vee p)$

Toutes les propositions peuvent être réécrites sous leurs formes normales conjonctive et disjonctive.

1.4.3 Forme normale disjonctive principale

Définition 15. Les **mintermes** de p et q sont des conjonctions où les variables apparaissent soit niées soit non-niées, mais n'apparaissent pas et niées et non-niées. Les quatre mintermes de p et q sont $p \wedge q$, $p \wedge \neg q$, $\neg p \wedge q$ et $\neg p \wedge \neg q$.

Définition 16. La **forme normale disjonctive principale** d'une formule est une formule équivalent constituée uniquement de disjonctions de mintermes.

Pour construire une forme normale disjonctive principale, il est nécessaire de remplacer les implications et les équivalences au moyen des opérateurs $\wedge, \vee, \neg$.

1.4.4 Forme normale conjonctive principale

Définition 17. Les **maxtermes** de p et q sont des disjonction où les variables apparaissent soit niées soit non-niées, mais n'apparaissent pas et niées et non-niées. Les quatre maxtermes de p et q sont $p \vee q$, $p \vee \neg q$, $\neg p \vee q$ et $\neg p \vee \neg q$.

Définition 18. La **forme normale conjonctive principale** d'une formule est une formule équivalente constituée uniquement de conjonctions de maxtermes.

1.4.5 Forme normale prénexe

Définition 19. Une formule F en logique de premier ordre est dite dans sa forme normale prénexe si et seulement si la formule F est sous forme $(Q_1x_1)...(Q_nx_n)(M)$ où chaque Q_ix_i est soit $\forall x_i$ soit $\exists x_i$ et M est une formule ne contenant aucun quantificateur. $(Q_1x_1)...(Q_nx_n)$ est appelé le préfixe et M la matrice de la formule.

Exemple. $(\forall x)(\forall y)(P(x,y) \wedge Q(y))$ est sous forme normale prénexe.

2 Preuves et raisonnement mathématiques

2.1 Méthodes de preuve (règles d'inférence)

Un argument est divisé en deux parties : les prémisses qui se placent au-dessus de la ligne, et la conclusion qui se place en-dessous.

$$\begin{array}{c} \forall x(Homme(x) \to Mortel(x)) \\ Homme(Socrate) \\ \hline \therefore Mortel(Socrate) \end{array}$$

2.1.1 Règles concernant la logique propositionnelle

Règle d'inférence	Tautologie	Nom
$\begin{array}{c} p \\ \hline \therefore p \vee q \end{array}$	$p \to (p \vee q)$	Addition
$\begin{array}{c} p \wedge q \\ \hline \therefore q \end{array}$	$(p \wedge q) \to q$	Simplification
$\begin{array}{c} p \\ q \\ \hline \therefore p \wedge q \end{array}$	$((p) \wedge (q)) \to (p \wedge q)$	Conjonction
$\begin{array}{c} \neg p \vee r \\ p \vee q \\ \hline \therefore q \vee r \end{array}$	$((\neg p \vee r) \wedge (p \vee q)) \to (q \vee r)$	Résolution
$\begin{array}{c} p \to q \\ p \\ \hline \therefore q \end{array}$	$(p \wedge (p \to q)) \to q$	Modus ponens
$\begin{array}{c} p \to q \\ \neg q \\ \hline \therefore \neg p \end{array}$	$(\neg q \wedge (p \to q)) \to \neg p$	Modus tollens
$\begin{array}{c} p \to q \\ q \to r \\ \hline \therefore p \to r \end{array}$	$((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r).$	Syllogisme par hypothèse
$\begin{array}{c} p \vee q \\ \neg p \\ \hline \therefore q \end{array}$	$(\neg p \wedge (p \vee q)) \to q.$	Syllogisme disjonctif

2.1.2 Règles concernant la logique quantificative

Instantiation universelle

$$\begin{array}{c} \forall x P(x) \\ \hline \therefore P(c) \end{array}$$

Généralisation universelle

$$\begin{array}{c} P(c), \text{ c étant arbitraire} \\ \hline \therefore \forall x P(x) \end{array}$$

Instantiation existentielle

$$\frac{\exists x P(x)}{\therefore P(c) \text{ pour un certain c}}$$

Généralisation existentielle

$$\frac{\therefore P(c) \text{ pour un certain c}}{\exists x P(x)}$$

Modus Ponens universel

$$\frac{\begin{array}{c}\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \\ P(a), \text{ a étant un élément partiulier du domaine}\end{array}}{\therefore Q(a)}$$

2.2 Preuve directe

Les théorèmes sont souvent sous la forme

$$\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$$

On peut les prouver en montrant qu'en prenant un c arbitraire,

$$P(c) \rightarrow Q(c)$$

et en utilisant la généralisation universelle.

On assume que p est vrai. On utilise les règles d'inférences, les axiomes et les équivalences logiques afin de montrer que q est obligatoirement vrai.

Exemple. Une preuve directe pour “si n est un entier impair, alors n^2 est impair”. On assume que n est impair, donc $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{Z}$. Si l'on met les deux cotés de l'équation au carré, on obtient

$$n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2r + 1$$

où $r = 2k^2 + 2k$. On a donc montré que si n est un entier impair, alors n^2 est un entier impair.

2.3 Preuve par contraposition

On assume $\neg q$ et on montre que $\neg p$ est aussi vrai. Si l'on donne une preuve que $\neg q \rightarrow \neg p$ est vrai, alors on donne aussi une preuve pour $p \rightarrow q$.

Exemple. Prouver que si n est un entier et que $3n+2$ est impair, alors n est impair. On assume que n est pair.

$$3n + 2 = 3(2k) + 2 = 6k + 2 = 2(3k + 1) = 2j$$

pour $j = 3k = 1$. On peut donc dire que $3n + 2$ est pair. On a donc prouvé$\neg q \rightarrow \neg p$, et donc $p \rightarrow q$.

2.4 Preuve par contradiction

Pour prouver p, on assume $\neg p$ et on dérive une contradiction telle que $p \wedge \neg p$. On montre donc que si $\neg p \rightarrow F$ est vrai, alors la contraposée $T \rightarrow p$ est vraie aussi.

Prouver que si l'on choisit 22 jours dans un calendrier, au moins 4 d'entre eux tombent le même jour de la semaine. On commence par assumer que pas plus de 3 des 22 jours tombent le même jour. Comme une semaine contient 7 jours, on n'aurait sélectionné seulement 21 jours. Cela contradit donc le fait que l'on ait choisi 22 jours.

2.5 Principe de l'induction

La démonstration par induction que $P(n)$ est vraie pour tout entier positif n se fait en deux étapes :

1. Etape de base : On démontre que la proposition $P(1)$ est vraie.
2. Etape inductive : On démontre que l'implication $P(n) \rightarrow P(n+1)$ est vraie pour tout entier positif n.

$P(n)$ est appelée l'**hypothèse inductive**. Lorsque l'on effectue les deux étapes de la démonstration par induction, on prouve que $P(n)$ est vraie pour tout entier positif n, et donc, $\forall n \, P(n)$ est vraie.

On peut aussi exprimé le principe de l'induction sous forme de règle d'inférence :

$$[P(1) \wedge \forall n \, (P(n) \rightarrow P(n+1))] \rightarrow \forall n \, P(n)$$

Exemple. Disons que $P(n)$ dit que la somme des n premiers entiers positifs impairs est n^2.

— Etape de base : $P(1)$: 1 est bien égal à 1^2.
— Etape inductive : On suppose que $P(n)$ est vrai, et donc

$$\mathbf{1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2}.$$

Pour $n + 1$,

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + ... + (2n-1) + (2n+1) &= [\mathbf{1 + 3 + ... + (2n - 1)}] + (2n+1) \\ &= \mathbf{n^2} + 2n + 1 \\ &= (n+1)^2. \end{aligned}$$

$P(n+1)$ découle donc bien de $P(n)$. Comme $P(1)$ est vrai et que $P(n) \rightarrow P(n+1)$ est vrai pour tous les entiers positifs, $P(n)$ est vrai pour tous les entiers positifs.

3 Dénombrement

3.1 Notions de base du dénombrement

Il existe deux principes fondamentaux de dénombrement. Le **principe de la somme** et le **principe du produit**. Nous verrons par après d'autres principes utiles pour le dénombrement.

3.1.1 Principe de la somme

Si on peut accomplir une tâche de $n_1$façons et une deuxième tâche de n_2 façons, et si on peut effectuer ces tâches simultanéement, alors il y à $n_1 + n_2$ façons d'exécuter l'une ou l'autre de ces tâches.

3.1.2 Principe du produit

On suppose qu'une procédure peut être divisée en deux tâches. S'il existe n_1 façons de faire la première tâche et n_2 façons d'accomplir la deuxième tâche lorsque la première est terminée, alors, il y a $n_1 n_2$ façons d'effectuer la procédure.

3.1.3 Principe d'inclusion-exclusion

On peut formuler ce principe de dénombrement en termes ensemblistes. Soit A_1et A_2 des ensembles. Soit T_1la tâche de choisir un élément de A_1et T_2 la tâche de choisir un élément de A_2. Il existe $|A_n|$ façons de faire T_n. Le nombre de façons d'effectuer T_1 ouT_2 quivaut à la somme du nombre de façons d'éffectuer T_1 et du nombre de façons d'effectuer T_2 , moins le nombre de façons d'exécuter T_1 et T_2. Puisqu'il existe $|A_1 \cup A_2|$ façons d'accomplir soit T_1, soit T_2 et $|A_1 \cap A_2|$ façons de faire T_1 etT_2 on obtient :

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$

3.2 Principe des nids de pigeon

On suppose qu'un groupe de pigeon s'envole vers un ensemble de nids pour s'y percher. Selon le principe des nids de pigeon. S'il y a plus de pigeon que de nids, alors, il doit y avoir au moins un nid dans lequel se trouve au moins deux pigeons.

Théorème. ***Principe des nids de pigeon***
Si $k+1$ objets ou plus sont rangés dans k boites, alors il y a au moins une boîte qui contient deux objets ou plus.

Théorème. ***Principe des nids de pigeon généralisé***

Si N objets sont rangés dans k boîtes, alors, il y a au moins une boîtes qui contient au moins $\lceil N/k \rceil$ objets.

Exemple. Dans un groupe de 27 mots français, il doit y en avoir au moins deux qui commencent par la même lettre, car il n'y a que 26 lettres dans l'alphabet français.

3.3 Permutations et combinaisons généralisées

Type	Avec remise ?	Formule
r-permutations	Non	$\frac{n!}{(n-r)!}$
r-combinaisons	Non	$\frac{n!}{r!(n-r)!}$
r-permutations	Oui	n^r
r-combinaisons	Oui	$\frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}$

3.3.1 Permutations

La **permutation** d'un ensemble d'objets distincts est un arrangement ordonné de ces objets. Un arrangement ordonné de r éléments d'un ensemble est appelé une r**-permutation**. Le nombre de r-permutation d'un ensemble à n éléments est noté $P(n,r)$. On peut trouver $P(n,r)$ en utilisant le principe du produit.

Exemple. Soit $S = \{1, 2, 3\}$. L'arrangement 3,1,2 est une permuation de S. L'arrangement $3, 2$ est une 2-permutation de S.

Théorème. *Le nombre de r-permutation d'un ensemble de n éléments distincts est*

$$P(n,r) = n(n-1)(n-2)...(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$P(n,n) = n!$$

Exemple. De combient de façons peut-on choisir 4 joueurs distincts parmi 10 joueurs dans une équipe pour jouer quetre match de tennis, où les matchs sont ordonnés ?

Solution : $P(10,4) = 10 * 9 * 8 * 7 = 5040$

3.3.2 Permutations avec remise

Théorème. *Le nombre de r-permutations d'un ensemble à n objets avec remise est n^r.*

Démonstration. Il y a n façons de sélectionner un élément dans l'ensemble pour chacune des r positions dans la r-permutation avec remise puisque, pour chaque choix, chacun des n objets est disponible. Ainsi, selon le principe du produit, il y a n^r r-permutations avec remise. □

3.3.3 Permutations d'ensembles d'objets indiscernables

Certains élements peuvent ne pas être discernables dans les problèmes de dénombrement. Il faut donc tenter d'éviter de compter les objets à plusieurs reprise.

Théorème. *Le nombre de différentes permutations de n objets, où il y a n_1 objets indiscernables de type 1, n_2 objets indiscernables de type 2,... et n_k objets indiscernables de type k est*

$$\frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}$$

3.3.4 Combinaisons

Une r-**combinaison** des éléments d'un ensemble est une sélection non ordonnée de r éléments de l'ensemble. Ainsi, une r-combinaison consitue simplement un sous-ensemble de l'ensemble ayant r éléments. Le nombre de r-combinaison d'un ensemble à n éléments disctincts est noté $C(n,r)$.

Exemple. Soit S l'ensemble $\{1,2,3,4\}$. Alors, $\{1,3,4\}$ est une 3-combinaison de S.

Théorème. *Le nombre de r-combinaisons d'un ensemble ayant n éléments, où n est un entier positif et r, un entier avec $0 \leq r \leq n$, est égal à*

$$C(n,r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Corollaire. *Soit n et r des entiers non négatifs avec $r \leq n$. Alors,*

$$C(n,r) = C(n,n-r)$$

Il existe une autre notation courante pour calculer le nombre de r-combinaisons d'un ensemble à n éléments, notament le coefficient binomial : $\left(\begin{array}{c} n \\ r \end{array} \right)$.

3.3.5 Combinaisons avec remise

Théorème. *Il y a $C(n+r-1,r)$ r-combinaisons avec remise pour un ensemble à n éléments.*

$$C(n+r-1,r) = \frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}$$

3.4 Coefficients binomiaux et identité

Théorème. ***Identité de Pascal***
Soit n et k des entiers positifs avec $n \geq k$. Alors,

$$C(n+1,k) = C(n,k-1) + C(n,k)$$

.

$$\begin{array}{c}
\binom{0}{0} \\
\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1} \\
\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2} \\
\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3} \\
\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4} \\
\binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5}
\end{array}$$

Théorème. *Soit n un entier positif. Alors*

$$\sum_{k=0}^{n} C(n,k) = 2^n$$

.

Théorème. ***Théorème du binôme***

Soit x et y des variables et n un entier positif. Alors,

$$\begin{aligned}(x+y)^n &= \textstyle\sum_{j=0}^{n} C(n,j)x^{n-j}y^j \\ &= C(n,0)x^n + C(n,1)x^{n-1}y + C(n,2)x^{n-2}y^2 + ... + C(n,n-1)xy^{n-1} + C(n,n)y^n\end{aligned}$$

Exemple. Quel est le développement de $(x+y)^4$?

Solution : A partir du théorème du binôme, il s'ensuit que

$$\begin{aligned}(x+y)^4 &= \textstyle\sum_{j=0}^{4} C(4,j)x^{4-j}y^j \\ &= C(4,0)x^4 + C(4,1)x^3y + C(4,2)x^2y^2 + C(4,3)xy^3 + C(4,4)y^4 \\ &= x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4\end{aligned}$$

Théorème. *Soit n un entier positif. Alors*

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C(n,k) = 0$$

.

Ce théorème peut être obtenu à partir du théorème du binôme de $((-1)+1)^n = 0$.

4 Techniques de dénombrement avancées

4.1 Relation de récurrence

Définition 20. Une **relation de récurrence** pour la suite $\{a_n\}$ est une formule qui exprime a_n en fonction d'un ou de plusieurs termes qui le précèdent dans la suite, soit $a_0, a_1, ..., a_{n-1}$, pour tout entier n tel que $n \geq n_0$, où n_0 est un nombre entier non négatif. Une suite est une **solution** d'une relation de récurrence si ses termes satisfont la relation de récurrence.

Les **conditions initiales** d'une suite spécifient les éléments qui précèdent le premier élément à partir duquel la relation de récurrence s'applique.

4.2 Solution des relations de récurrence

Relation de récurrence linéaire homogène de degré k à coefficients constants

Définition 21. Une **relation de récurrence linéaire homogène de degré k à coefficients constants** est une relation de réccurence de la forme

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + ... + c_k a_{n-k}$$

où $c_1, c_2, ..., c_k$ sont des nombres réels avec $c_k \neq 0$.

Théorème. *1. Soit c_1 et c_2 des nombres réels. On suppose que l'équation*

$$r^2 - c_1 r - c_2 = 0$$

a une racine double r_0. Alors, la suite $\{a_n\}$ est une solution de la relation de récurrence

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$$

si et seulement si

$$a_n = \alpha_1 r_0^n + \alpha_2 r_0^n$$

pour $n = 0, 1, 2, ...,$ où α_1 et α_2 sont des contantes.

Théorème. *2. Soit c_1 et c_2 des nombres réels avec $c_2 \neq 0$. On suppose que l'équation*

$$r^2 - c_1 r - c_2 = 0$$

possède deux racines distinctes r_1 et r_2. Alors, la suite $\{a_n\}$ est une solution de la relation de récurrence

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$$

si et seulement si

$$a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$$

pour $n = 0, 1, 2, ...,$ où α_1 et α_2 sont des contantes.

Théorème. *3. Soit* $c_1, c_2, ..., c_k$ *des nombres réels. On suppose que l'équation caractéristique*

$$r^k - c_1 r^{k-1} - ... - c_k = 0$$

admet k *racines distinctes* $r_1, r_2, ..., r_k$*. Alors, une suite* $\{a_n\}$ *est une solution de la relation de récurrence*

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + ... + c_k a_{n-k}$$

si et seulement si

$$a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n + ... + \alpha_k r_k^n$$

pour $n = 0, 1, 2, ...,$ *où* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ *sont des constantes.*

Théorème. *4. Soit* $c_1, c_2, ..., c_k$ *des nombres réels. On suppose que l'équation caractéristique*

$$r^k - c_1 r^{k-1} - ... - c_k = 0$$

admet t *racines distinctes* $r_1, r_2, ..., r_t$ *avec des multiplicités* $m_1, m_2, ..., m_t$ *respective tel que* $m_i \geq 1$ *pour* $i = 0, 1, 2, ..., t$
et

$$m_1 + m_2 + ... + m_t = k$$

.

Alors, une suite $\{a_n\}$ *est une solution de la relation de récurrence*

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + ... + c_k a_{n-k}$$

si et seulement si

$$\begin{aligned} a_n = \; & (\alpha_{1,0} + \alpha_{1,1} n + ... + \alpha_{1,m_1-1} n^{m_1-1}) r_1^n \\ & + (\alpha_{2,0} + \alpha_{2,1} n + ... + \alpha_{2,m_2-1} n^{m_2-1}) r_2^n \\ & + ... \\ & + (\alpha_{t,0} + \alpha_{t,1} n + ... + \alpha_{t,m_t-1} n^{m_t-1}) r_t^n \end{aligned}$$

pour $n = 0, 1, 2, ...,$ *où* $\alpha_{i,j}$ *sont des constantes pour* $1 \leq i \leq t$ *et* $0 \leq j \leq m_i - 1$.

Relation de récurrence linéaire non-homogène de degré k à coefficients constants

Définition 22. Une **relation de récurrence linéaire non-homogène de degré k à coefficients constants** est une relation de réccurence de la forme

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + ... + c_k a_{n-k} + F(n)$$

où $c_1, c_2, ..., c_k$ sont des nombres réels, et $F(n)$ est une fonction qui ne dépend pas de 0 mais seulement de n.

La relation de récurrence

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + ... + c_k a_{n-k}$$

est appelée la relation de récurrence homogène associée.

Théorème. *5. Si $\{a_n^p\}$ est une solution particulière de la relation de récurrence non-homogène avec coefficient constant*

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + ... + c_k a_{n-k} + F(n)$$

alors chaque solution de la forme

$$\{a_p^n + a_h^n\}$$

où $\{a_h^n\}$ est une solution de la relation de récurrence homogène associée

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + ... + c_k a_{n-k}$$

4.3 Etat de l'espace

Nous avons l'équation de récurrence suivante :

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + ... + c_k a_{n-k} + F(n)$$

Transformons la en vecteurs et matrices :

$$a_n = \begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ ... \\ a_{n-k+1} \end{bmatrix} a_{n-1} = \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \\ ... \\ a_{n-k} \end{bmatrix} f_n = \begin{bmatrix} F(n) \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{bmatrix}$$

On définit aussi la matrice

$$C = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_{k-1} & c_k \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

On obtient donc l'équation du premier ordre

$$a_n = Ca_{n-1} + f_n$$

Avec la condition initiale $n = 0$, a_0 est donné.
On tente de résoudre cette équation vectoriel :

$$\begin{cases} a_1 = & Ca_0 + f_1 \\ a_2 = & Ca_1 + f_2 = C^2 a_0 + Cf_1 + f_2 \\ a_3 = & Ca_2 + f_3 = C^3 a_0 + C^2 f_1 + Cf_2 + f_3 \\ ... \end{cases}$$

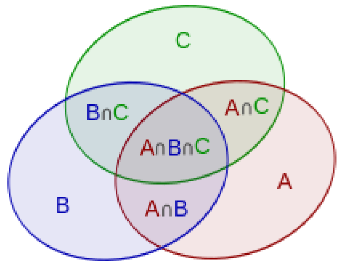
Qui peut aussi s'écrire

$$a_n = C^n a_0 + \sum_{k=1}^{n} C^{k-1} f_{n-k+1}$$

qui nous donne une solution.

4.4 Principe d'inclusion-exclusion

Cas de 3 ensembles finis



$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

5 Graphes

5.1 Introduction au graphes

Définition 23. Un **graphe simple** $G = (V, E)$ est constitué de V, un ensemble non vide de **sommets**, et de E, un ensemble de couples d'éléments disctincts de V appelés les **arcs**.

Définition 24. Un **multigraphe** $G = (V, E)$ est formé d'un ensemble V de sommets, d'un ensemble E d'arcs et d'une fonction f de E dans $\{\{u, v\} | u, v \in V, u \neq v\}$. Les arcs e_1 et e_2 sont appelés des **arcs multiples** (ou **arcs parallèles**) si $f(e_1) = f(e_2)$.

Définition 25. Un **pseudographe** $G = (V, E)$ est formé d'un ensemble V de sommets, d'un ensemble E d'arcs et d'une fonction f de E dans $\{\{u, v\} | u, v \in V\}$. Un arc est une **boucle** si $f(e) = \{u\}$pour certains $u \in V$.

Définition 26. Un **graphe orienté** (V, E) est formé d'un ensemble de sommets V et d'un ensemble d'arcs E qui sont des couples des éléments de V.

Définition 27. Un **multigraphe orienté** $G = (V, E)$ est formé d'un ensemble V de sommets, d'un ensemble E d'arcs et d'une fonction f à partir de E dans $\{(u, v) | u, v \in V\}$. Les arcs e_1 et e_2 sont des arcs multiples si $f(e_1) = f(e_2)$.

Type	Arcs	Les arcs multiples sont-ils autorisés ?	Les boucles sont-elles autorisées ?
Graphe simple	Non orientés	Non	Non
Multigraphe	Non orientés	Oui	Non
Pseudographe	Non orientés	Oui	Oui
Graphe orienté	Orientés	Non	Oui
Multigraphe orienté	Orientés	Oui	Oui

5.2 Terminologie des graphes

5.2.1 Terminologie de base

Définition 28. Deux sommets u et v dans un graphe non orienté G sont **adjacents** (ou voisins) dans G si $\{u, v\}$ est un arc de G. Si $e = \{u, v\}$, l'arc e est **incident** aux sommets u et v. On dit également que l'arc e **relie** u et v. Les sommets u et v sont les points terminaux de l'arc $\{u, v\}$.

Définition 29. Le **degré d'un sommet** dans un graphe non orienté est le nombre d'arcs incidents à ce sommet, et une boucle sur un sommet contribue deux fois au degré du sommet. Le degré du sommet v est noté $deg(v)$.

Remarque. Un sommet de degré 0 est un sommet **isolé**. Un sommet de degré 1 est dit **pendant**.

Théorème. Lemme des poignées de mains

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté avec e arcs.
Alors,

$$2e = \sum_{v \in V} deg(v)$$

(A noter que ce théorème s'applique même dans le cas d'arcs multiples et de boucles.)

Exemple. Combien y a-t-il d'arcs dans un graphe comportant 10 sommets, chacun de degré 6 ?

Solution : Puisque la somme des degrés des sommets est $6 \cdot 10 = 60$, il s'ensuit que $2e = 60$. Donc $e = 30$.

Théorème. *Un graphe non orienté a un nombre pair de sommets de degrés impairs.*

Définition 30. Quand (u, v) est un arc du graphe G avec des arcs orientés, u est adjacent à v et v est adjacent à u. Le sommet u est l'**extrémité initiale** de (u, v) et v est l'**extrémité terminale** ou finale de (u, v). Les extrémités initiale et finale d'une boucle sont identiques.

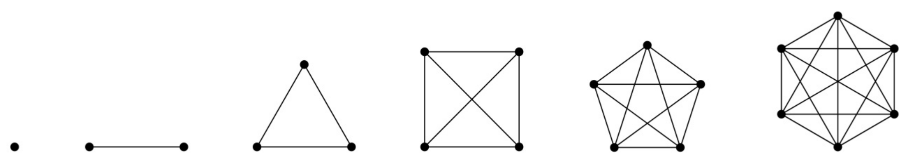
Définition 31. Dans un graphe orienté, le **degré intérieur** d'un sommet v, noté $deg^-(v)$, est le nombre d'arcs qui ont v, comme extrémité finale. Le **degré extérieur** de v, noté $deg^+(v)$, est le nombre d'arcs qui ont v comme extrémité initiale.

Remarque. Une boucle sur un sommet contribue pour 1 à la fois au degré intérieur et au degré extérieur de ce sommet.

Théorème. *Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté. Alors,*

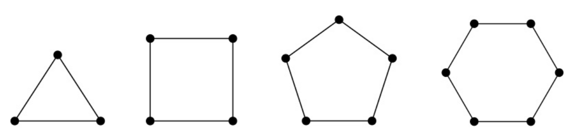
$$\sum_{v \in V} deg^-(v) = \sum_{v \in V} deg^+(v) = |E|$$

Graphes complets : Le graphe complet de n sommets, noté K_n est le graphe simple qui contient exactement un arc entre chaque pair de sommets disctincts.



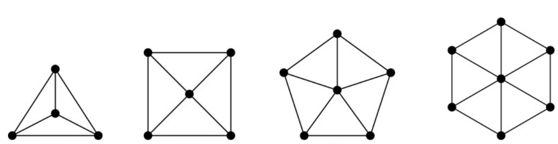
K_1 K_2 K_3 K_4 K_5 K_6

Graphes cycles : Le cycle $C_n, n \geq 3$, consiste en n sommets $v_1, v_2, ..., v_n$ et arcs $\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, ..., \{v_n, v_1\}$.



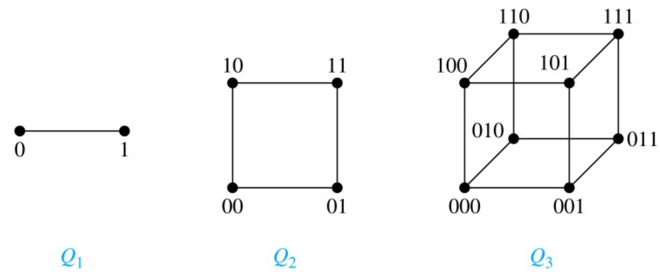
C_3 C_4 C_5 C_6

Graphes roues : On obtient la roue W_n (Wheel) quand on ajoute un sommet supplémentaire au cycle C_n pour $n \geq 3$ et qu'on relie ce nouveau sommet à chacun des sommets n de C_n au moyen de nouveaux arcs.



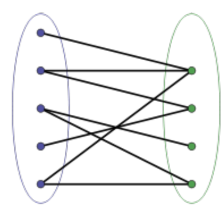
W_3 W_4 W_5 W_6

Graphes cubes de dimension n : Le cube de dimension n, noté Q_n, est le graphe qui a des sommets représentant les chaînes binaires 2^n de longueur n. Deux sommets sont adjacents si et seulement si les chaines binaires qu'il représentent différent d'exactement un bit.



5.2.2 Graphes bipartis

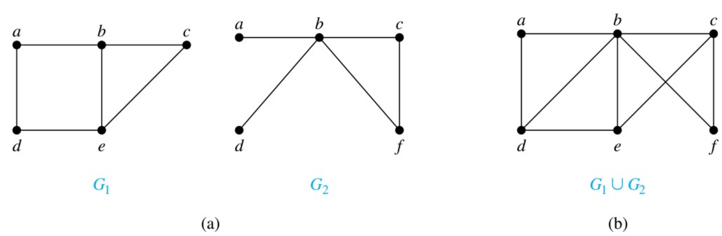
Définition 32. Un graphe simple G est **biparti** si l'ensemble V de ses sommets peut être partitionné en deux ensembles non vides et disjoints V_1et V_2 de telle façon que chaque arc du graphe relie un sommet de V_1à un sommet de V_2 (de telle manière qu'il n'y ait aucun arc de G qui relie soit deux sommets de V_1, soit deux sommets de V_2).



5.2.3 Graphes issus d'un graphe

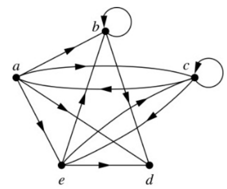
Définition 33. Un **sous-graphe** du graphe $G = (V, E)$ est un graphe $H = (W, F)$, où $W \subseteq V$ et $F \subseteq E$.

Définition 34. L'**union** de deux graphes simples $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$ est un graphe simple qui contient l'ensemble des sommets $V_1 \cup V_2$et l'ensemble des arcs $E_1 \cup E_2$. L'union de G_1et G_2 est notée $G_1 \cup G_2$.



5.3 Représentation des graphes et isomorphisime des graphes

Pour cette section, nous considererons le graphe suivant :



Définition 35. Une **liste d'adjacence** peut être utilisée pour représenter un graphe sans arc multiple en spécifiant les sommets d'adjacence pour chaque sommet du graphe.

Sommet initial	Sommets terminaux
a	b,c,d,e
b	b,d
c	a,c,e
d	
e	b,c,d

Définition 36. Soit $G = (V, E)$ un graphe simple où $|V| = n$. La **matrice d'adjacence** A_G de G est la matrice binaire $n \times n$ où, si

— v_i et v_j sont adjacents, alors $a_{ij} = 1$;
— v_i et v_j ne sont sont pas adjacents, alors $a_{ij} = 0$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Une matrice d'adjacence peut aussi être utilisée pour représenter des multigraphes par exemple. Elle ne sera alors plus binaire, et a_{ij} représentera le nombre d'arêtes entre les noeuds i et j. Dans le cas de graphes dirigés, la matrice ne sera plus symétrique.

Définition 37. Soit $G = (V, E)$ un graphe non-dirigé avec n noeuds et m arcs. La **matrice d'incidence** est la matrice $n \times m$ M où $m_{ij} = 1$ si l'arc e_j est incident avec v_i, et 0 sinon.

Définition 38. Les graphes simples $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$ sont **isomorphes** s'il existe une fonction bijective f de V_1 à V_2 avec la propriété suivante : a et b sont adjacents dans G_1 si et seulement si $f(a)$ et$f(b)$ sont adjacents dans G_2, pour tout a, b dans V_1. Une telle fonction f est un **isomorphisme**.

5.4 Connexité

5.4.1 Chemins

Définition 39. Un **chemin** est une séquence d'arcs qui commence au noeud d'un graphe et qui voyage de noeud en noeud en suivant les arcs du graphe.

Définition 40. Soit n un entier non-négatif et G un graphe non-dirigé. Un **chemin** de longueur n de u à v dans G est une séquence de n arcs de G pour lesquels il existe une séquence $x_0 = u, x_1, ..., x_{n-1}$, $x_n = v$ de noeuds telle que e_i a pour $i = 1, ..., n$, les extrémités x_{i-1} et x_i.

Remarque. Quand le graphe est simple, on peut décrire ce chemin simplement en citant les noeuds par lesquels il passe. Le chemin est un **circuit** si $u = v$ et qu'il a une longueur non-nulle. Un chemin est **simple** s'il ne passe pas plus d'une fois par chaque arc.

5.4.2 Connexité dans un graphe non-dirigé

Définition 41. Un graphe non-dirigé est dit **connexe** si il y a un chemin entre chaque paire de noeuds.

Définition 42. Une **composante connexe** d'un graphe est un sous-graphe connexe de G qui n'est pas un sous-graphe propre d'un autre sous-graphe connexe de G.

5.4.3 Connexité dans un graphe dirigé

Définition 43. Un graphe dirigé est **fortement connexe** s'il existe un chemin de a vers b et de b vers a quels que soient a et b dans le graphe.

Définition 44. Un graphe dirigé est **faiblement connexe** s'il existe un chemin entre a et b dans le graphe non-dirigé correspondant.

Définition 45. Les sous-graphes d'un graphe dirigé qui sont fortement connexes mais qui ne sont pas contenus dans d'autres sous-graphes connexes plus larges (le sous-graphe fortement connexe maximal) sont appelés les composantes fortement connexes de G.

5.4.4 Dénombrer les chemins entre deux noeuds

Théorème 46. *Soit G un graphe et A sa matrice d'adjacence. Le nombre de chemins différents de longueur r de v_i à v_j, où $r > 0$, est égal à la $(i, j)^e$ position de A^r.*

Démonstration. Ce théorème peut être démontré en utilisant l'induction mathématique. Soit G un graphe ayant la matrice d'adjacence A (en présumant l'ordonnancement $v_1, v_2, ..., v_n$ des sommets de G). Le nombre de chemins de v_i à v_j de longueur 1 est le (i, j)-ième élément de A, puisque cet élément représente le nombre d'arcs de v_i à v_j.

On suppose que le (i, j)-ième élément de A^r est le nombre de chemins distincts de longueur r de v_i à v_j, ce qui constitue une hypothèse d'induction. Puisque $A^{r+1} = A^r A$, le (i, j)-ième élément de A^{r+1}est égal à

$$b_{i1}a_{1j} + b_{i2}a_{2j} + ... + b_{in}a_{nj}$$

Où b_{ik} est le (i, k)-ième élément de A^r. En posant cette hypothèse d'induction, b_{ik} est le nombre de chemins de longueur r de v_i à v_k.

Un chemin de longueur $r+1$ de v_i à v_j est constitué d'un chemin de longueur r depuis v_i vers un sommet intermédiaire quelconque v_k et un arc depuis v_k vers v_j. En appliquant le principe de la multiplication, le nombre de ces chemins est le produit du nombre de chemins de longueur r de v_i à v_k, notamment b_{ik}, et du nombre d'arcs de v_k à v_j, notamment a_{kj}. En additionnant ces produits pour tous les sommets intermédiaires possibles v_k et en appliquant le principe de l'addition, on obtient le résultat désiré. □

5.5 Chaînes eulériennes et hamiltoniennes

5.5.1 Chemins et circuits eulériennes

Définition 47. Un **circuit d'Euler** dans un graphe G est un circuit simple qui contient tous les arcs de G.

Définition 48. Un **chemin d'Euler** est un chemin simple qui contient tous les arcs du graphe.

Théorème 49. *Un multigraphe connexe avec au moins deux noeuds a un circuit d'Euler si et seulement si chacun de ses noeuds a un degré pair. Il a un circuit d'Euler si et seulement si exactement deux noeuds du graphe ont un degré impair.*

Conditions nécessaires pour les circuits et les chemins d'Euler

— Le circuit d'Euler commence au noeud a et continue avec un arc reliant a à b. L'arc contribue à hauteur de 1 dans $deg(a)$.
— Chaque fois que le circuit passe par un noeud, il contribue à hauteur de 2 dans le degré du noeud.
— Le circuit se termine à a, et contribue a hauteur de 1 à $deg(a)$. Celui-ci est donc pair.
— Tous les autres degrés sont pairs.
— Si ce n'est pas un circuit mais un chemin, les noeuds initial et final ont un degré impair.

Algorithme pour construire un circuit d'EulerAlgorithme pour construire un circuit d'Euler

Algorithme. ***Construction des cycles eulériens***

```
Procédure Euler(G: multigraphe connexe avec tous les sommets de
        degré pair)
cycle := un cycle dans G commençant à un sommet arbitrairement choisi
        comprenant des arcs ajoutés succesivement de manière à former
        un circuit qui retourne à ce premier sommet
H := G avec les arcs qui ont été elevés à ce cycle
tant que H a au moins une arête
début
        sous-cycle := un cycle dans H commençant à un sommet de H
                qui est également un point terminal d'un arc du cycle
        H := H avec les arcs du sous-cycle et tous les sommets isolés
                ayant été retirés
        cycle := cycle avec sous-cycle inséré au sommet approprié
fin{cycle est un cycle eulérien}
```

5.5.2 Chemins et circuits d'Hamilton

Les chemins et circuits d'Hamilton se basent sur le même principe que ceux d'Euler, à la différence près qu'on ne cherche plus à ne passer par chaque arc qu'une fois mais bien à ce que chaque noeud ne soit traversé qu'une et une seule fois.

Définition 50. Un chemin simple dans un graphe G qui passe par chaque noeud exactement une fois est appelé **chemin d'Hamilton**. Il en va de même pour les **circuits**.

5.6 Problèmes du plus court chemin (ou du chemin minimal)

5.6.1 Algorithme de Dijkstra

Définition 51. Un graphe qui a un nombre assigné à chaque arc est appelé un **graphe pondéré**.

Définition 52. Le **poids** d'un chemin dans un graphe est la somme des poids des arcs qui constituent le chemin.

Théorème 53. *Algorithme de Dijkstra. L'algorithme de Dijkstra calcule la longueur du plus court chemin entre deux noeuds d'un graphe simple pondéré non-dirigé.*

ALGORITHM 1 Dijkstra's Algorithm.

procedure *Dijkstra*(G: weighted connected simple graph, with
  all weights positive)
{G has vertices $a = v_0, v_1, \ldots, v_n = z$ and lengths $w(v_i, v_j)$
  where $w(v_i, v_j) = \infty$ if $\{v_i, v_j\}$ is not an edge in G}
for $i := 1$ **to** n
  $L(v_i) := \infty$
$L(a) := 0$
$S := \emptyset$
{the labels are now initialized so that the label of a is 0 and all
  other labels are ∞, and S is the empty set}
while $z \notin S$
  $u :=$ a vertex not in S with $L(u)$ minimal
  $S := S \cup \{u\}$
  for all vertices v not in S
    if $L(u) + w(u, v) < L(v)$ **then** $L(v) := L(u) + w(u, v)$
    {this adds a vertex to S with minimal label and updates the
    labels of vertices not in S}
return $L(z)$ {$L(z) =$ length of a shortest path from a to z}

Remarque. Tout sous-chemin d'un chemin minimal doit être lui-même un chemin minimal.

5.7 Graphes planaires

Définition 54. Un graphe est dit planaire si il peut être dessiné sans qu'aucun de ses arcs ne se croise.

Théorème 55. *Formule d'Euler. Soit G un graphe planaire connexe avec e arcs et v noeuds. Soit r le nombre de régions d'une représentation planaire de G. Alors*

$$r = e - v + 2$$

5.8 Coloriage de graphes

Définition 56. La **coloration** d'un graphe simple est l'assignation d'une couleur à chaque noeud de façon à ce qu'aucun noeud adjacent n'ait la même couleur. Le nombre minimal de couleurs nécessaires à la coloration d'un graphe est appelé le nombre chromatique du graphe.

Théorème 57. *Le nombre chromatique d'un graphe n'est jamais supérieur à 4. La preuve est très complexe.*

5.9 L'algorithme du page ranking

Pour chaque page (noeud i), on associe un score x_i. Le score x_i de chaque page i est proporionnel au score des pages adjacentes qui pointe vers la page i.

Pour w_{ij}, le poids associé à l'arc entre la page i et la page j (généralement, 0 ou 1, 0 si non lié, 1 sinon).

Alors, W qui est la matrice formée par les éléments w_{ij} est une matrice non symétrique fortement connectée.

En d'autres mots pour calculé le score de la page i,

$$x_i \propto \sum_{j=1}^{n} \frac{w_{ij} x_j}{w_{j.}}$$

$$w_{j.} = \sum_{i=1}^{n} w_{ji}$$

Où $w_{j.}$ est le degré sortant de la page j.

Remarque. Une page avec un haut score est donc une page qui est pointée de nombreuse fois par des pages qui ont elles même de haut scores.

Ces équations peuvent être mise à jour de manière itérative jusqu'à obtenir une convergence des scores calculés x_i. Le vecteur x est normalisé a chaque itération et les pages sont ensuite classées en fonction de leur score.

Surf aléatoire

Si l'on définit la probabilité de suivre un lien de la page j à la page i tel que

$$P(page(k+1) = i | page(k) = j) = \frac{w_{ji}}{w_{j.}}$$

avec

$$w_{j.} = \sum_{i=1}^{n} w_{ji}$$

On peut écrire l'équation de mise à jour tel que

$$x_i(k+1) = P(page(k+1) = i) = \sum_{j=1}^{n} P(page(k+1) = i | page(k) = j) x_j(k)$$

Et donc définir un sufeur aléatoire suivant les liens en fonction de la transition de probabilité

$$P(page(k+1) = i | page(k) = j) = \frac{w_{ji}}{w_{j.}}$$

Suite du page ranking : TO DO.