COMPLEXITÉ ET CALCULABILITÉ

Mini-projet

Rémy KALOUSTIAN

SI4 – G3

Table des matières

Sujet

Les mots de Dyck

Il s'agit ici de traiter les mots de Dyck, autrement dit, les mots bien parenthésés. Notre mission est de réaliser des machines de Turing à une seule bande pour reconnaître les mots de Dyck et en créer.

Pour une définition plus scientifique, un mot de Dyck est :

un mot *w* de longueur *n* (*n*>=0) sur l'alphabet {O, F} - "O" représente "(" (ouvrante) et "F" représente ")" (fermante).

Enfin, notre but est de bien saisir la différence entre une machine EFFICACE et une machine qui ne l'est pas.

Quelques exemples pour votre compréhension :

()()()()() , ((((())))) et (((())()(()))) sont des mots de Dyck car pour chaque parenthèse ouvrante, il y a une parenthèse fermante qui lui correspond.

)()()()(,)et ((())))) ne sont pas des mots de Dyck car il existe des parenthèses fermantes qui n'ont pas d'ouvrantes correspondantes et vice-versa.

Questions posées

Trois questions nous ont été posées.

1) Réaliser une machine simple, qui peut être de complexité élevé, et qui reconnaît les mots de Dyck.

2) Réaliser une machine efficace pour le même problème.

3) Réaliser une machine aussi efficace que possible qui supprime un minimum de lettres du mot pour transformer ce dernier en mot de Dyck.

Vous trouverez dans ce document les illustrations des machines de Turing sous Visual Turing, les explications des machines, des exemples pour montrer leur fonctionnement, ainsi qu'une étude de la complexité.

1) Reconnaître les mots de Dyck

Notre but est de reconnaître les mots de Dyck, sans se soucier de la complexité de la machine, dans un premier temps. La construction d'une machine plus optimisée se fera pour la question suivante.

Description de la machine

Nous disposons d'une seule bande pour cette machine. Nous démarrons à gauche. Tant que nous avons des parenthèses gauches ou des parenthèses déjà marquées (symbole $), nous continuons vers la droite, dans le but de trouver une parenthèse fermante. Une fois la parenthèse fermante trouvée, on la marque ($), on revient vers la gauche pour chercher la parenthèse ouvrante correspondante. Une fois cette parenthèse ouvrante trouvée, on la marque($), on repart à droite pour trouver une parenthèse fermante, et une fois trouvée et marquée, on reviendra à gauche pour trouver sa parenthèse ouvrante correspondante, et ainsi de suite jusqu'à avoir un mot entièrement en $ (sauf si pas un mot de Dyck).

Exemple N°1, cas valide (la position du curseur est indiquée par une couleur différente)

Mot : (())()

Application de la machine

On démarre à gauche.

(())()

Tant qu'on voit des (on va à droite (état 0).

(())()

On a une), on écrit $ et on va à gauche (état 0 vers état 1).

(($)()

On voit une (, on écrit $ et on va à droite (état 1 vers état 0).

($$)()

On voit un $, on va à droite, pour trouver la prochaine fermante (état 0).

($$)()

On voit une fermante, on écrit $, on va à gauche pour trouver l'ouvrante correspondante (état 0 vers 1).

($$$()

On voit $, on se déplace à gauche jusqu'à la prochaine parenthèse ouvrante (état 1).

($$$()

On voit (, on écrit $ et on va droite pour trouver la prochaine parenthèse fermante (état 1 à état 0).

$$$$()

Tant qu'on voit des des $ ou (, on va à droite (état 0).

$$$$()

On voit), on écrit $, on va à gauche (état 0 à état 1).

$$$$($

On voit (, on écrit $, on va à droite pour trouver la prochaine parenthèse fermante (état 1 à état 0).

$$$$$$

Tant qu'on voit des $, on va à droite.

$$$$$$b

On est arrivé au blanc de droite, on écrit b et on va à gauche (état 0 vers état 2).

$$$$$$

Tant qu'on voit des $, on va à gauche (état 2).

b $$$$$$

On arrive au blanc gauche, on va dans l'état final (état 2 vers état 3).

On est bien arrivé à l'état final, la machine a reconnu le mot de Dyck.

Exemple N°2, cas invalide (la position du curseur est indiquée par une couleur différente)

Mot :)()((

Application de la machine

On commence à gauche

)()((

On voit), on écrit $, on va à gauche (état 0 vers 1)

b$()((

On voit un blanc, on écrit b, on est en Stationnaire (état 1 vers état 4)

On est arrivé dans l'état puis, le mot n'est pas reconnu car il n'est pas un mot de Dyck.

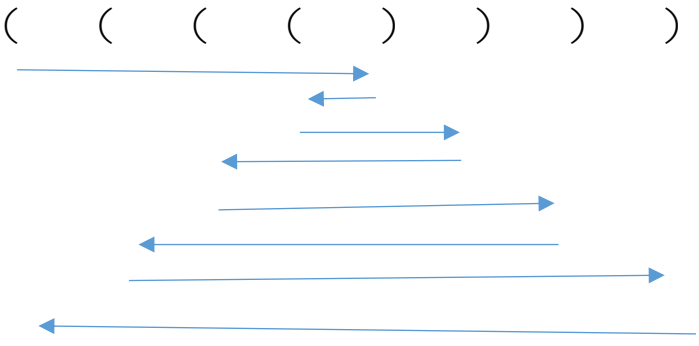
Étude de la complexité

Concentrons-nous sur le pire des cas : (((())))

Ici, on va effectuer N/2 parcours. A chaque parcours, la taille du parcours augmente de 2. On peut exprimer la longueur Lp du parcours de la maière suivante :

$Lp_k = Lp_{k-1} + 2$

Schéma représentatif du parcours :



On arrive alors à une complexité de N pour l'agrandissement du parcours, car à chaque parcours dans un sens, il y a un autre parcours plus grand dans l'autre sens.

Notre complexité générale est :

N/2*O(N)

= $O(N^2)$

On se retrouve donc avec une complexité de $O(N^2)$.

2) Reconnaissance efficace

3) Corriger un mot

Notre but est ici de corriger un mot, autrement dit supprimer des parenthèses ouvrantes et/ou fermantes afin de transformer un mot quelconque en mot de Dyck.

Nous devons y arriver en réalisant un minimum de changement.

Description de la machine

La machine parcourt d'abord le mot afin d'identifier un couple ouvrante-fermante. Ensuite, lorsqu'on trouve une autre parenthèse, elle vérifie sa validité. Par exemple, si on a trouvé une fermante après avoir trouvé un couple ouvrante-fermante, on revient tout à gauche. L'absence d'ouvrante pour la fermante trouvée nous fera repartir à droite jusqu'au blanc ou une parenthèse non marquée. A gauche de ce blanc/parenthèse non marquée se trouve notre fermante précédemment trouvée, que l'on marquera ave un $, car elle n'a pas d'ouvrante correspondante.

On procède de même pour le reste du mot. L'idée principale est de noter les ouvrantes avec o, les fermantes avec f, afin d'identifier les couples ouvrante-fermante, et de vérifier leur validité. La validation se fera par un parcourt tout à gauche, puis un tout à droite. Chaque trouvaille d'une fermante va enclencher un parcours de vérification.

Cet exemple semble pertinent car il ne marchait pas pour la première version de la machine correspondant à cette question. Étudions sa correction (la position du curseur est indiquée par une couleur différente).

Mot : ())))

Application de la machine

Nous démarrons à gauche.

(()))

On lit (, on va à droite.

())

On voit), on écrit f, on va à gauche.

(f))

On voit (, on écrit o, on va à droite.

of))

On lit f, on va à droite.

of))

On lit), on écrit f, on va à gauche.

off)

On lit f, on va à gauche

off)

Tant qu'on lit f, on va à gauche

boff)

On lit b, on va à droite.

off)

Tant qu'on lit o ou f, on va à droite.

off)

On lit), on va à gauche.

off)

On lit f, on écrit $, on va à droite.

of$)

On lit), on écrit f, on va à gauche.

of$f

Tant qu'on lit f ou o ou $, on va à gauche.

bof$f

On lit b, on va à droite.

of$f

Tant qu'on lit f ou o ou $, on va à droite.

of$fb

On lit b, on a à gauche.

of$f

On lit f, on écrit $, on va à droite.

of$$b

On lit b, on va à gauche.

of$$

Tant qu'on lit o,f,$, on va à gauche.

bof$$

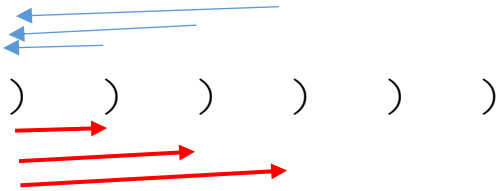
On lit b, on est en stationnaire dans l'état final.

Le mot a été corrigé avec succès.

Étude de la complexité

Dans le pire des cas :)))))) , autrement dit un mot avec seulement des parenthèses fermantes.

Ici pour chaque parenthèse fermante, on va effectuer un parcours pour marquer f, on va revenir tout à gauche, puis repartir tout à droite, trouver une fermante et maquer $ sur la fermante précédente.



Les parcours en bleu sont effectués N fois, tout comme les parcours en rouge. On a donc une complexité de O(N) dans chaque parcours. Pour chaque parcours dans un sens, il y a un autre parcours dans l'autre sens.

Pour un mot de longueur N, la complexité vaut :

N * Pg +N * Pd (avec Pg le parcours vers la gauche, et Pd le parcours vers la droite)

= N*O(N)+ N*O(N)

=2*O(N^2)

= O(N^2)

La complexité du pire des cas est donc de l'ordre de N^2.

Dans le meilleur des cas : ((()))

ici, à chaque parcours pour trouver les correspondances ouvrante-fermante, on réduit le parcours de 2 unités.

On fait ainsi N/2 parcours. Imaginons k l'indice d'un parcours, on peut exprimer la longueur Lp d'un parcours de la manière suivante :

$Lp_k = Lp_{k-1} - 2$

Malgré tout, le fait que chaque parcours dans un sens soit suivi d'un parcours dans l'autre conserve la complexité à O(N^2). La diminution du parcours rend toutefois une complexité moins importante que dans le pire des cas.