扩展卡尔曼滤波及其简单应用

二零二三年三月

目录

[1 卡尔曼滤波 1](#_Toc129450890)

[1.1 状态转移函数 1](#_Toc129450891)

[1.2 观测函数 1](#_Toc129450892)

[1.3 卡尔曼滤波器的推导过程 2](#_Toc129450893)

[1.3.1 卡尔曼增益的推导 2](#_Toc129450894)

[1.3.2 卡尔曼滤波推导 4](#_Toc129450895)

[1.4 卡尔曼滤波器的五大公式中各参数意义 5](#_Toc129450896)

[1.4.1 公式(1)  6](#_Toc129450897)

[1.4.2 公式(2)  6](#_Toc129450898)

[1.4.3 公式(3)  7](#_Toc129450899)

[1.4.4 公式(4)  7](#_Toc129450900)

[1.4.5 公式(5)  8](#_Toc129450901)

[1.5 扩展卡尔曼滤波器 8](#_Toc129450902)

[2 扩展卡尔曼滤波的简单应用 10](#_Toc129450903)

[2.1 滤波器设计 10](#_Toc129450904)

[2.2 移动机器人运动模型 10](#_Toc129450905)

[2.3 移动机器人观测模型 11](#_Toc129450906)

[2.4 扩展卡尔曼滤波器 12](#_Toc129450907)

[2.5 仿真结果 13](#_Toc129450908)

卡尔曼滤波

状态转移函数

状态转移函数代表系统的模型，该模型可以用来预测系统在给定控制量的未来状态轨迹。模型的准确性直接影响预测的未来状态与实际系统的状态的误差。控制领域有一句话，模型都是错的，但是我们能够得到一个接近真实系统的模型。移动机器人也存在很多被构建的模型(状态转移函数)，可以被用来估计当前移动机器人的位姿或速度等状态。机器人的初始状态已知，每个控制周期的控制量(例如加速度与方向盘转角) 可以由测量单元测量得到，每个控制周期的时长同样可以由系统定时器得到，那么机器人可以通过状态转移函数估计它当前的状态，估算的状态中就包含空间位置信息。上述方法又被称为航迹推算。根据物理学中经典的“测不准”原理，多处测量的不确定性性加大了状态估计结果的随机性，并且航迹推算是以上一时刻的状态作为输入，状态的误差会随着时间不断累积。最后的最后，假定测得准、模型无误差，那么现实的计算系统是离散的;然而，现实世界的系统是连续的。

假定一个移动机器人的状态转移函数为



其中，与为状态向量；为系统在t时刻的输入控制向量；和为参数矩阵；表示状态转移的噪声，一般假设均值为0，方差为的高斯分布；为状态量的个数，为输入控制量的个数。

观测函数

假定系统的状态是可以被观测（可部分被观测），则测量结果与状态（或者可进行线性化）的关系如下线性关系：



其中，为观测向量；为系数矩阵；表示观测的噪声，一般假设均值为0，方差为的高斯分布；为观测量个数，当表示系统是部分可被观测的。

卡尔曼滤波器的推导过程

本节参考BiliBili UP主DR\_CAN视频[【卡尔曼滤波器】全网最详细数学推导](https://space.bilibili.com/230105574/channel/collectiondetail?sid=6939)和知乎其记录[卡尔曼及扩展卡尔曼滤波详细推导-来自DR\_CAN视频](https://zhuanlan.zhihu.com/p/585819291)

卡尔曼增益的推导

现有状态空间方程



其中，为过程噪声，为测量噪声。

假设这些噪声满足正态分布，则其满足，其中

我们将模型直接计算得到的称为先验变量 ，观测器测量得到的称为测量变量 ，二者的表示式如下



由于噪声的存在，这两者都是不准确的，根据数据融合的方法，我们可以得到后验变量的表达式



当时,则更相信计算的结果，当时，，则更相信测量的结果。

令,则可以得到常规的卡尔曼滤波器的表达式



因此，目标就变成了寻找合适的，使得后验值与实际值的误差最小，即最小。

在这里认为后验值与实际值的误差满足



要想要最小，则协方差的迹最小。

而协方差



据此我们需要求得,因此进一步推导



带入状态方程的测量方程得到



带入上式求得



因为为常数，即



由于和相互独立，于是 ,可以得到



因为和 互为转置，对上式两侧取迹，则



要求得极小值，则需求



则对于求导，于是



于是



由于和 是协方差矩阵，为对称阵，则



于是卡尔曼增益为



卡尔曼滤波推导

根据上章的结果，我们进一步求解先验值，其满足，代入式(1)和(5)的关系，可得



因为和相互独立，且 ，则上式可以化简为



通过式进行更新，并代入式，可得



于是卡尔曼滤波器可表达为

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **预测** | 先验 |  |
| 先验协方差 |  |
| **更新卡尔曼增益** |  | |
| **校正** | 后验 |  |
| 更新后验协方差 |  |

卡尔曼滤波器的五大公式中各参数意义

本节参考内容为[《一. 卡尔曼滤波器开发实践之一: 五大公式详解》](https://blog.csdn.net/okgwf/article/details/119940610?spm=1001.2014.3001.5506)

卡尔曼滤波器的两大步骤和五大公式，即

预测步骤:





更新步骤:







公式(1) 

|  |  |
| --- | --- |
| **参数** | **物理意义** |
|  | * 系统状态值向量,是个维列向量 * 为系统状态值向量,一般为系统想要的输出结果集或中间值集 * 表示系统初始状态值(滤波器初始化时设置)或上一时刻状态值, 当表示上一时刻状态值时,它一般就是上一次执行预测和更新步骤后,公式（4）的结果,即上次预测和更新的最优估计值 * 每次更新后最优估计值都会赋给进行下一次循环 |
|  | * 是一个的矩阵 * 根据系统状态变换方程得到的状态转移矩阵,也叫预测矩阵，反应的是: 当测量值未介入计算时,前后两个时刻的状态值变化情况. |
|  | * 不是必须的 * 为系统控制矩阵,具体结构和取值由实际系统控制逻辑决定. * 系统控制向量, 由外部对系统控制信号决定. 可以是单变量(1维向量)或n维向量. |

公式(2) 

|  |  |
| --- | --- |
| **参数** | **物理意义** |
|  | * 的协方差矩阵 * 为针对系统状态列向量的系统不确定性协方差矩阵 * 把系统状态列向量的各个元素看做均值, 的对角线(左上到右下)上的元素就是各个元素的方差, 这个对角线方差表示偏离均值的大小关系，而表示状态变量与状态变量之间的协方差 * 如果认为系统状态初始值的值很准确, 那么对应的就应该是比较小的值; 相反，初始设置了一个不准确的值, 那么对应的就应该是比较大的值 |
|  | * 是一个的矩阵 * 为噪声协方差矩阵 |

公式(3) 

|  |  |
| --- | --- |
| **参数** | **物理意义** |
|  | * 为卡尔曼增益，在卡尔曼滤波器公式推导过程中, 两个高斯曲线方程相乘后,求得一个新的高斯曲线方程, 得到的新的均值和新的方差,并经过合并同类项,提取公因式等操作,提取到的一个公共因数. |
|  | * 是一个的矩阵, m为传感器测量值的个数 * 为传感器噪声协方差矩阵 |

公式(4) 

|  |  |
| --- | --- |
| **参数** | **物理意义** |
|  | * 为本次预测更新的系统状态向量的最优估计值, 作为程序输出结果使用, 并作为下一次预测的估计初始值赋值给 |
|  | * 系统传感器观测值或测量值维列向量或矩阵. 为输入系统的传感器变量个数. |
|  | * 为把当前预测阶段输出的先验估计值列向量()的各个状态值转换为和传感器测量列向量()的对应测量值同一尺度,同一单位,或同一度量的转换函数或映射关系。 * 当映射关系为恒等关系时，对应元素取值为1；当这个映射关系为线性变换关系时，对应元素取值类似于ax+b的直线方程式; 当这个映射关系为非线性关系时，是个雅各比矩阵 |

公式(5) 

|  |  |
| --- | --- |
| **参数** | **物理意义** |
|  | * 同类似，为本次预测更新后获得的最优协方差矩阵. 作为程序输出结果使用, 并作为下一次预测的协方差矩阵赋值给. 做下一次预测和更新. |

扩展卡尔曼滤波器

对以上非线性函数进行泰勒展开，可化为线性形式。所以，扩展卡尔曼滤波算法只比原始卡尔曼滤波算法多了一步线性化的工作。算法形式一模一样。

对于非线性系统



这里，但是正态分布的随机变量通过非线性系统后就不再是正态的。因此想要对其进行卡尔曼滤波，想要采用线性化的方式进行处理，即为扩展卡尔曼滤波。

线性化即需要对目标进行泰勒展开，一阶的泰勒展开结果为



于是我们在上一次的后验估计处对非线性系统的过程方程进行线性化，即



将简化为零，并令，而雅可比矩阵为



对于测量方程，在处线性化为



同样的令，令，而



综上可得，得到线性化后的非线性系统



此时，

于是扩展卡尔曼滤波器的过程为

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **预测** | 先验 |  |
| 先验协方差 |  |
| **更新卡尔曼增益** |  | |
| **校正** | 后验 |  |
| 更新后验协方差 |  |

扩展卡尔曼滤波的简单应用

本章案例参考开源代码[PythonRobotics](https://atsushisakai.github.io/PythonRobotics/)和[MATLABRobotics](https://github.com/AtsushiSakai/MATLABRobotics)中定位部分的扩展卡尔曼滤波器对应代码，由于两者原理相同，只是代码实现语言不同，因此就进对Python代码进行了标注。

滤波器设计

本节以非完整约束的单车模型为例，来设计卡尔曼滤波。此处，移动机器人在时间t时刻的状态为四维向量:



其中，为二维笛卡尔坐标系的x轴坐标值，为二维笛卡尔坐标系的y轴坐标值，为移动机器的航向角，为移动机器人的行驶线速度.

机器人的状态协方差为，状态转移噪声协方差R，观测噪声方差为Q。

移动机器人装载有速度传感器与陀螺仪，可分别测量时刻t的速度与角速度为



同样，假定移动机器人装载有GNSS (卫星导航定位)传感器，可以实时获得自身的位置作为自身的观测向量为



移动机器人运动模型

运动学模型为1.1节的切线模型，其连续的运动学模型为



经过离散化得到



状态向量为，输入控制量为，可以得到状态转移函数：



其中，





由于控制向量的系数B中包含状态量，所以上面的状态转移矩阵为非线性，此处需要求得状态函数的Jacobian矩阵：



移动机器人观测模型

机器人可以从GPS中获得x-y位置信息。可得观测模型为:





观测方程的状态方程为



其雅可比矩阵为

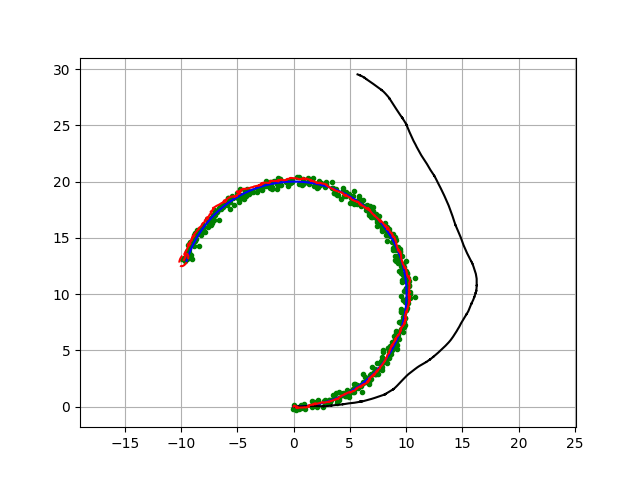


扩展卡尔曼滤波器

|  |  |
| --- | --- |
| **预测** |  |
| **更新** |  |

以上形式的扩展卡尔曼滤波器的为代码中实现的公式，与推导的形式有所不同，主要是将扩展卡尔曼滤波器更新部分的两个公式进行了拆分进行计算的。

仿真结果



蓝线是真实的轨迹，黑线是受噪声影响的轨迹，绿点是定位观测（如GPS），红线是用EKF估计的轨迹，红色的椭圆是用EKF估计的协方差椭圆。