

Versuch 351 - Fourier-Analyse und Synthese

TU Dortmund, Fakultät Physik
Anfänger-Praktikum

Fabian Lehmann

fabian.lehmann@tu-dortmund.de

13. Dezember 2012

Inhaltsverzeichnis

1	Theorie	2
1.1	Einführung	2
1.2	Fourier-Analyse	2
1.3	Fourier-Synthese	3
1.4	Gibbsches Phänomen	3
1.5	Fourier-Transformation	3
2	Durchführung	3
2.1	Fourier-Synthese	3
2.2	Fourier-Analyse	3
3	Auswertung	4
3.1	Berechnung der Fourier-Koeffizienten	4
3.2	Fourier-Synthese	6
3.3	Fourier-Analyse	9
4	Diskussion	12
4.1	Fourier Synthese	12
4.2	Fourier-Analyse	12

1 Theorie

1.1 Einführung

Die Fourier-Analyse und Synthese mit der Fourier-Transformation beschreiben Verfahren, die Funktionen durch unendliche Reihen, beziehungsweise Integrale über einen unendlichen Bereich, annähern.

1.2 Fourier-Analyse

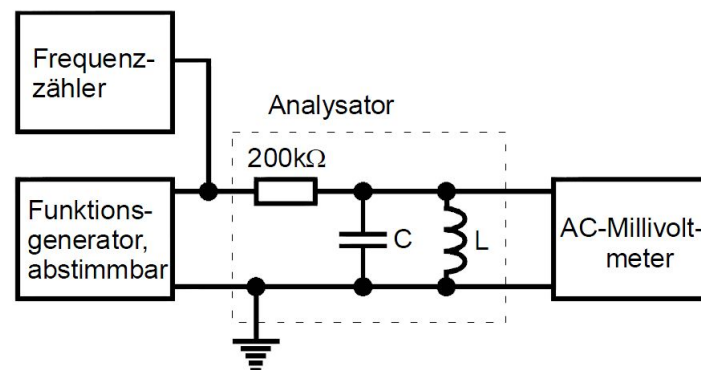


Abbildung 1: Schaltung zur Fourier-Analyse [1]

Periodischen Funktionen f mit der Periodendauer T lassen sich durch Cosinus- und Sinusfunktionen beschreiben (Gl. 1, [1]). Gleichheit in Gleichung (1) gilt bei den meisten physikalischen Prozessen.

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) + b_n \sin\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) \right) \quad (1)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) dt, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) dt, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3)$$

Die Fourier-Analyse beschreibt das Ermitteln der Vorfaktoren, beziehungsweise der Amplituden a_n und b_n für bekannte Funktionen. Dabei kann man sich zunutze machen, dass bei geraden Funktionen f alle $b_n = 0$ werden und bei ungeraden Funktionen alle a_n verschwinden. Die Darstellung der Amplituden in Abhängigkeit zu von der zugehörigen Frequenz n/T heißt Frequenzspektrum. Ein solches lässt sich beispielsweise mit einer Schaltung wie in Abbildung (1) bestimmen, welche auf der Proportionalität zwischen Resonanzspannung und Amplitude der Oberwellen beruht.

1.3 Fourier-Synthese

Im Gegensatz dazu wird bei der Fourier-Synthese eine Funktion aus bekannten Koeffizienten zusammengesetzt. Durch schrittweises Hinzufügen der einzelnen Summanden wird die Funktion angenähert. Bei der praktischen Umsetzung können Lissajous-Figuren, Kurven, die bei einer Schwingungsüberlagerung entstehen, helfen, die Phase der einzelnen Komponenten zu kalibrieren.

1.4 Gibbsches Phänomen

Das Gibbsche Phänomen tritt auf, wenn die Funktion $f(t)$ Unstetigkeiten aufweist. An den Stellen der Unstetigkeit tritt immer ein endlicher Über-, beziehungsweise Unterschwingung auf, da diese Stellen nicht approximiert werden können.

1.5 Fourier-Transformation

Mit der Fourier-Transformation lässt sich das gesamte Frequenzspektrum, unabhängig einer möglichen Periodizität der Funktion, bestimmen. Ähnlich zu Gleichung (1) lässt sich auch die Fourier-Transformation beschreiben.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\nu) e^{-i\nu t} d\nu \quad (4)$$

$$g(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\nu t} dt \quad (5)$$

2 Durchführung

2.1 Fourier-Synthese

Zuerst wird mit einem Oszilloskop der Oberwellensynthesizer auf die richtige Phasenlage kalibriert. Dazu wird die Grundschiwingung auf den X-Eingang und die einzustellende Schwingung auf den Y-Eingang gelegt. Dann wird die dabei entstehende Lissajous-Figur soweit durch verändern der Phase verändert, bis eine einzelne Kurve zu sehen ist. Dann kann durch Phasensprünge von 90° oder 180° die Phase zu den Oberwellen passend eingestellt werden.

Jetzt werden die vorher berechneten Amplituden der Fourierreihenkomponenten mit dem Synthesizer angepasst und dann schrittweise unter Phasenlagenüberprüfung addiert und auf einem Oszilloskop ausgegeben. Das ganze wird je für eine Dreieck-, eine Sägezahn- und eine Rechteckspannung durchgeführt.

2.2 Fourier-Analyse

Ein passend eingestellter Funktionengenerator wird an ein Oszilloskop mit eingebautem Rechner angeschlossen, welcher eine Fourieranalyse (vgl. Gl. 5) durchführt und auf dem Bildschirm ausgibt. Dann werden mit dem Cursor die Amplituden der einzelnen Schwingungsbestandteile abgelesen.

3 Auswertung

3.1 Berechnung der Fourier-Koeffizienten

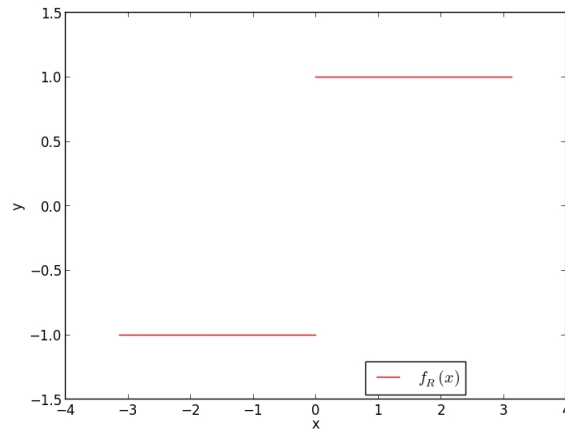


Abbildung 2: Periodisch fortzusetzende Funktion f_R

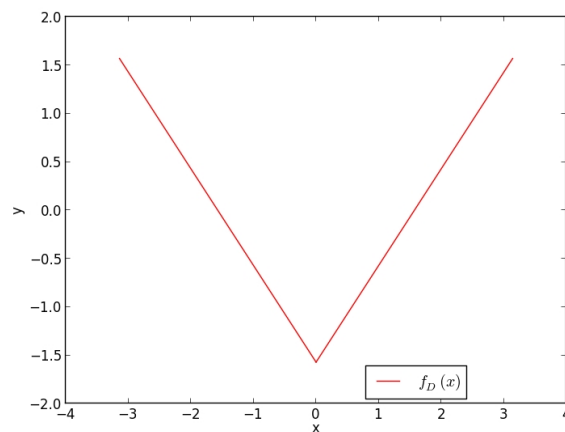


Abbildung 3: Periodisch fortzusetzende Funktion f_D

Die Koeffizienten der einzelnen periodischen Funktionen berechnen sich nach den Gleichungen (2) und (3). Dabei wurde die Rechteckfunktion f_R , Abbildung (2), als ungerade Funktion gewählt, für alle i ist $a_i = 0$. Die Dreieckfunktion f_D , Abbildung (3), und die

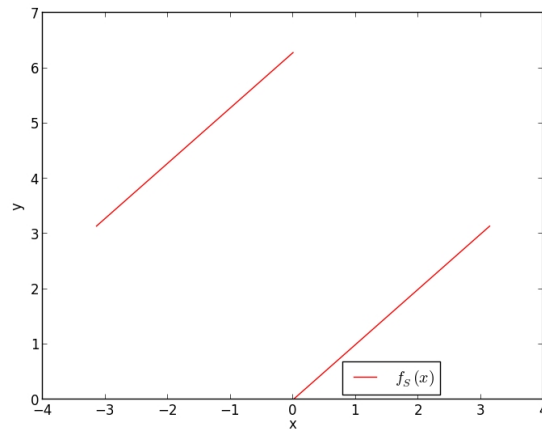


Abbildung 4: Periodisch fortzusetzende Funktion f_S

Sägezahnfunktion f_S , Abbildung (4), sind als gerade Funktionen definiert worden, für alle i gilt also $b_i = 0$.

Es gilt für die Funktionen der Definitionsbereich $\pi \geq x > -\pi$ mit einer periodischen Fortsetzung von $T = 2\pi$.

$$f_R(x) = \frac{|x|}{x} \quad (6)$$

$$f_D(x) = |x| - \frac{\pi}{2} \quad (7)$$

$$f_S(x) = \begin{cases} x + 2\pi, & -\pi \leq x < 0 \\ x, & 0 \leq x < \pi \end{cases} \quad (8)$$

Es ergeben sich die folgenden Fourierkoeffizienten mit $N = 1, 2, \dots$

$$f_R : a_0 = 0, \quad a_n = 0, \quad (9)$$

$$b_n = \begin{cases} \frac{4}{n\pi}, & n \text{ ungerade} \\ 0, & n \text{ gerade} \end{cases} \quad (10)$$

$$f_D : a_0 = 0, \quad b_n = 0, \quad (11)$$

$$a_n = \begin{cases} -\frac{4}{n^2\pi}, & n \text{ ungerade} \\ 0, & n \text{ gerade} \end{cases} \quad (12)$$

$$f_S : a_0 = \pi, \quad a_n = 0, \quad b_n = -\frac{2}{n} \quad (13)$$

n	b_n/mV
1	585,90
2	0,00
3	195,30
4	0,00
5	117,18
6	0,00
7	83,70
8	0,00
9	65,10

Tabelle 3.1: Amplituden der Fourier-Koeffizienten bei Synthese der Rechteckspannung ($a_0 = a_n = 0 \text{ mV}$)

n	a_n/mV
1	585,90
2	0,00
3	65,10
4	0,00
5	23,44
6	0,00
7	11,96
8	0,00
9	7,23

Tabelle 3.2: Amplituden der Fourier-Koeffizienten bei Synthese der Dreieckspannung ($a_0 = b_n = 0 \text{ mV}$)

3.2 Fourier-Synthese

Aus den Koeffizientengleichungen aus 3.1 ergeben sich die einzustellenden Amplituden des Oberwellengenerators (Tab. 3.1 - 3.3). Nach der Aufsummierung der Oberwellen ergeben sich die Graphen 5 bis 7 auf dem Oszilloskop.

n	b_n/mV
1	585,90
2	292,90
3	195,30
4	146,48
5	117,18
6	97,65
7	83,70
8	73,24
9	65,10

Tabelle 3.3: Amplituden der Fourier-Koeffizienten bei Synthese der Sägezahnspannung ($a_0 = a_n = 0 \text{ mV}$)

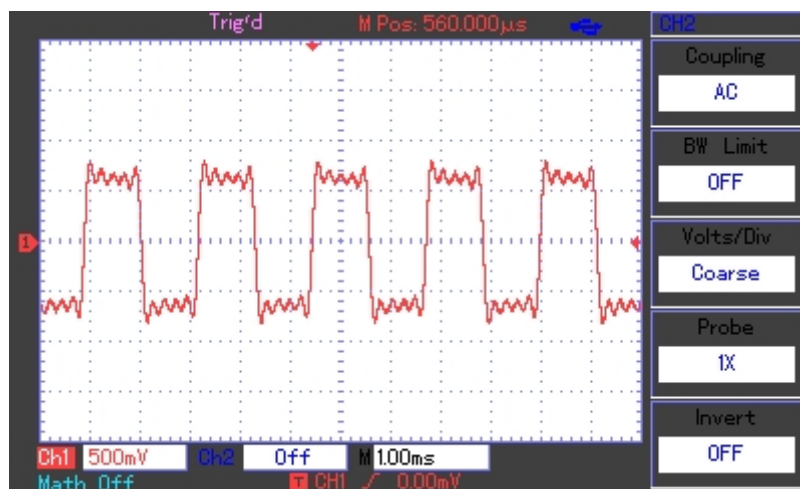


Abbildung 5: Fouriersynthese der Rechteckspannung

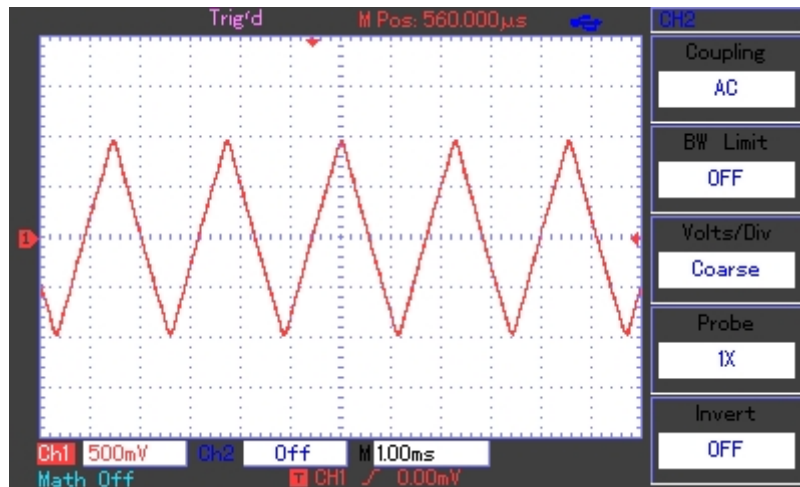


Abbildung 6: Fouriersynthese der Dreiecksspannung

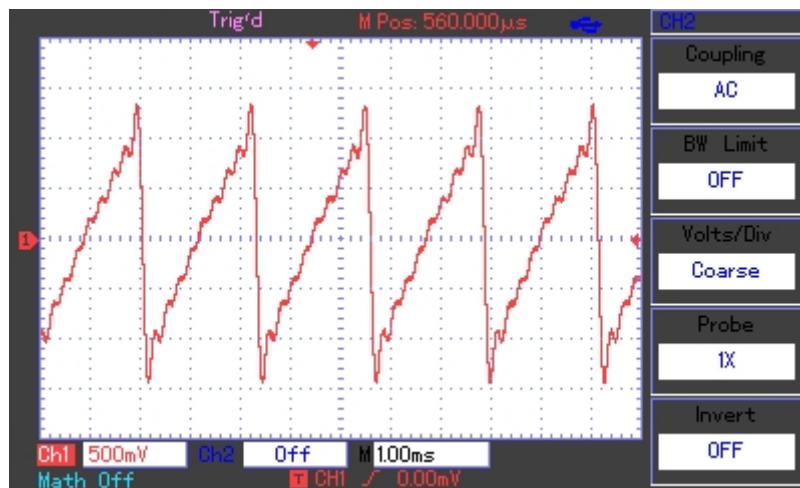


Abbildung 7: Fourier-Synthese der Sägezahnspannung

3.3 Fourier-Analyse

n	$b_{n,\text{mess}}/\text{mV}$	$b_{n,\text{theorie}}/\text{mV}$	Δa_n
1	7320	7320,00	0,0%
2	0	0,00	0,0%
3	2960	2440,00	21,3%
4	0	0,00	0,0%
5	1460	1464,00	0,3%
6	0	0,00	0,0%
7	1010	1045,71	3,4%
8	0	0,00	0,0%
9	952	813,33	17,0%

Tabelle 3.4: Amplituden der Fourier-Koeffizienten bei Analyse der Rechteckspannung ($a_0 = a_n = 0 \text{ mV}$)

n	$a_{n,\text{mess}}/\text{mV}$	$a_{n,\text{theorie}}/\text{mV}$	Δa_n
1	4760,0	4760,00	0,0%
2	0,0	0,00	0,0%
3	636,0	528,89	20,3%
4	0,0	0,00	0,0%
5	162,0	190,40	14,9%
6	0,0	0,00	0,0%
7	99,2	97,14	2,1%
8	0,0	0,00	0,0%
9	61,2	58,77	4,1%

Tabelle 3.5: Amplituden der Fourier-Koeffizienten bei Analyse der Dreieckspannung ($a_0 = b_n = 0 \text{ mV}$)

Die abgelesenen Amplituden in den Tabellen 3.4 bis 3.6 ergeben sich aus den Graphen 8 bis 10 des Oszilloskops. Die Theoriewerte ergeben sich dabei aus der Normierung des ersten Messwertes und der darauf aufbauenden Berechnung gemäß Gleichungen (2) und (3).

n	$b_{n,\text{mess}}/\text{mV}$	$b_{n,\text{theorie}}/\text{mV}$	Δa_n
1	3680	3680,00	0,0%
2	1800	1840,00	2,2%
3	1460	1226,67	19,0%
4	920	920,00	0,0%
5	716	736,00	2,7%
6	700	613,33	14,1%
7	500	525,71	4,9%
8	464	460,00	0,9%
9	464	408,89	13,5%

Tabelle 3.6: Amplituden der Fourier-Koeffizienten bei Analyse der Sägezahnspannung ($a_0 = a_n = 0 \text{ mV}$)

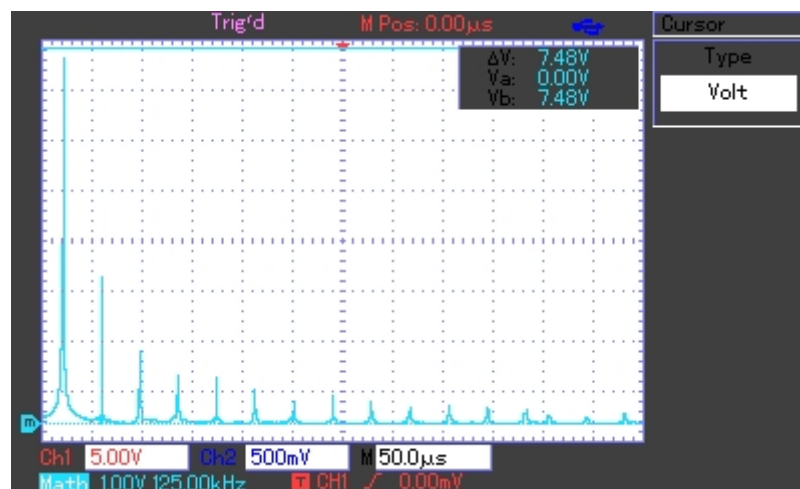


Abbildung 8: Fourieranalyse der Rechteckspannung

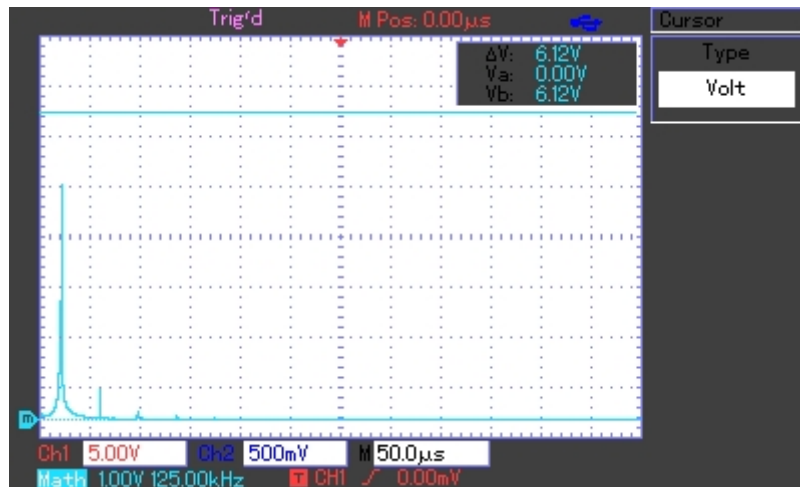


Abbildung 9: Fourieranalyse der Dreiecksspannung

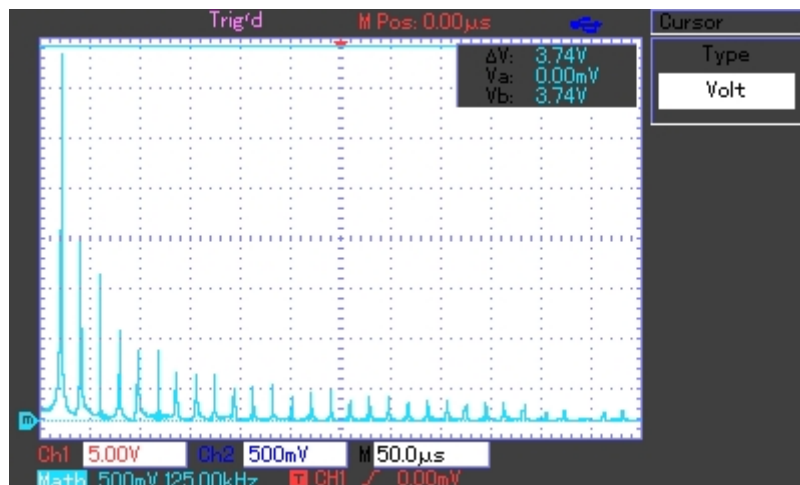


Abbildung 10: Fourieranalyse der Sägezahnspannung

4 Diskussion

4.1 Fourier Synthese

Während sich die Phaseneinstellung über die Lissajous-Figuren noch relativ gut durchführen ließ, war die Einstellung der Koeffizienten aufgrund der schwankenden Größe der Amplituden des Synthesizers schwieriger und damit fehleranfällig.

Auf den Abbildungen 5 bis 7 ist gut die Näherung der Fourier-Reihe an die jeweilige Funktion zu erkennen. Zwar sind die Koeffizienten bis $n = 9$ noch eine recht grobe Näherung, dennoch lassen sich qualitative Unterschiede erkennen.

Die Rechteckspannung ist nur relativ ungenau angenähert, an den Stellen der Unstetigkeit lässt sich gut der Über- beziehungsweise Unterschwing der Schwingung, also das Gibbsche Phänomen erkennen. Desweiteren ist eine Tendenz zu einem abnehmenden Plateau anstatt einem Plateau mit konstanten Wert zu erkennen, was eventuell mit kleinen Phasendifferenzen zu erklären wäre. Das Plateau selbst ist auch nicht als Gerade, sondern deutlich als Schwingung genähert.

Bei der Dreieckspannung ist hingegen eine gute Annäherung zu erkennen, ohne Sprungstellen der anzunähernden Funktion, sind nur die abgerundeten Spitzen der Fourier-Reihe als erkennbarer Unterschied identifizierbar.

Die Sägezahnspannung ist ähnlich zur Rechteckspannung zwar zu erkennen, aber nur ungenau genähert. Auch hier sind die ansteigenden Geraden noch deutlich als Schwingung zu erkennen und auch das Gibbsche Phänomen tritt wieder auf.

4.2 Fourier-Analyse

Die ausgegebenen Schwingungen des Funktionengenerators passen grundsätzlich gut zu den erwarteten Werten. Bei allen drei Funktionen pendelt die Genauigkeit jedoch recht stark, es treten messbare Abweichungen im Bereich von ungefähr 1% bis 20% auf. Dabei lassen sich jedoch keine Regelmäßigkeiten erkennen, auch wenn ein Koeffizient ungenau ist, so kann ein nachfolgender Koeffizient wieder genau sein, was natürlich zur Orthogonalität der Sinus- und Kosinus-Funktionen passt. Die Abweichungen ließen sich durch Messfehler erklären, denn die Amplituden der Ausgabe auf dem Bildschirm besaßen einen schwankenden Wert, so dass sich die Amplitude häufig nicht genau ablesen ließ.

Literatur

- [1] Versuch Nr. 351 – Fourier-Analyse und Synthese.
http://129.217.224.2/HOMEPAGE/Anleitung_AP.html (1.12.2012).

351

<u>Dreieck:</u>	Synthese		Analyse	
	n	d_n in mV	n	a_n in mV
	1	585,9	1	4760
	3	65,10	3	636
	5	23,44	5	162
	7	11,96	7	94,2
	9	7,23	9	61,2
	11			
	13			
	15			
	17			

P. Salmer 13.12.12

<u>Sägezahn:</u>	Synthese		Analyse	Rechteck	Synthese	
	n	b_n in mV			n	b_n in mV
	1	585,9	3680		1	585,9
	2	292,99	1800		3	195,3
	3	195,3	1460		5	117,78
	4	146,48	920		7	83,70
	5	117,78	716		9	65,10
	6	92,65	700			
	7	83,70	500			
	8	71,24	464			
	9	65,10	464			

Analyse	
n	b_n in mV
1	7320
3	2960
5	1460
7	1010
9	952