Versuch 101
Das Trägheitsmoment

TU Dortmund, Fakultät Physik

Anfänger-Praktikum

Marc Posorske
marc.posorske@tu-dortmund.de

Fabian Lehmann
fabian.lehmann@tu-dortmund.de

22.November 2012

Inhaltsverzeichnis

1 Theorie

Rotationsbewegungen lassen sich durch drei Parameter charakterisieren. Zum einen durch das Trägheitsmoment I, zum anderen durch das Drehmoment M und die Winkelbeschleuningung $\ddot{\phi}$.
Das Trägheitsmoment ist von der Drehachsenlage und von der Masse des drehenden Körpers abhängig.

$$\text{Punktmasse } I = mr^2 \tag{1}$$

$$\text{i Punktmassen } I = \sum_{k=1}^{i} m_k r_k^2 \tag{2}$$

$$\text{infinitisimale Massen } I = \int r^2 dm \tag{3}$$

$$\text{mit } r : \text{Drehachsenabstand}$$

Aus diesen Gleichungen (Gl.1-3) lassen sich Trägheitsmomente für geometrische Standartkörper mit Drehungen um ihren Masseschwerpunkt herleiten.

$$\text{langer dünner Stab}(\vec{l} \perp \vec{\omega}) \ I = \frac{1}{12} ml^2 \tag{4}$$

$$\text{Kugel } I = \frac{2}{5} mR^2 \tag{5}$$

$$\text{Zylinder}(\vec{R} \perp \vec{\omega}) \ I = \frac{1}{2} mR^2 \tag{6}$$

$$\text{Zylinder}(\vec{R} \| \vec{\omega}) \ I = m(\frac{1}{4}R^2 + \frac{1}{12}h^2) \tag{7}$$

Für den Fall, dass die Schwerpunktachse um a parallel verschoben ist, gilt der Steinersche Satz:

$$I = I_{Schwerpunkt} + ma^2 \tag{8}$$

Das Drehmoment M bei die Rotation ist vergleichbar mit der Kraft F bei Translation.

$$\vec{M} = \vec{F} \times \vec{r} \tag{9}$$

$$M = Fr \ , \ \vec{r} \perp \vec{F} \tag{10}$$

$$M = D\phi \tag{11}$$

$$\Rightarrow D = \frac{Fr}{\phi} \ , \ \vec{r} \perp \vec{F} \tag{12}$$

$$D : \text{Winkelrichtgröße}$$

Das Direktionsmoment D beschreibt also eine Proportionalitätskonstante zwischen der Auslenkung ϕ und M. Dieser Zusammenhang kann also eine durch Torsion hervorgerufene rücktreibende Kraft beschreiben, durch welche das System Schwingungen ausführen kann.

Dabei ist eine weitere Größe die Schwingungsdauer T. Damit gibt es nun zwei Möglichkeiten zur Bestimmung des Direktionsmoments. Die statistische Methode (Gl. 12) folgt aus dem Zusammenhang mit dem Drehmoment. Die dynamische Methode (Gl. 14) lässt sich bei bekanntem Trägheitsmoment aus der Periodendauer T bestimmen.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}} \text{ (für kleine Winkel)} \tag{13}$$

$$\Rightarrow D = I(\frac{T}{2\pi})^{-2} \tag{14}$$

2 Durchführung

2.1 Eigenschaftenbestimmung der Versuchsanordnung

Um die Winkelrichtgröße D des Versuchsapperates zu bestimmen, wurde in einem Abstand r von der Drehachse die Kraft $F(\phi)$, welche senkrecht zur Drehachse und zum Drehachsenabstand wirkte, abhängig von dem Auslenkwinkel gemessen.
Das Eigenträgheitsmoment I_D der Drillachse wurde durch die Messung unterschiedliche Schwingungsdauer T bei verschiedenen Abständen zweier Massen von der Drehachse bestimmt, welche sich auf einer leichten Metallstange senkrecht zur Drehachse befanden. Auch wurden die Gewichte der Masssen und der Stange bestimmt.

2.2 Trägheitsmoment einer Kugel und einer Scheibe

Die Holzkugel, beziehungsweise die Holzscheibe, wurde in die Versuchsanordnung eingespannt, sodass die Drehachse durch den Massenschwerpunkt führte. Daraufhin wurde das Objekt un einen kleinen Drehwinkel ausgelenkt und die jeweilige Schwingungsdauer gemessen. Außerdem wurden die Massen und Ausmaße der Körper bestimmt.

2.3 Trägheitsmoment einer Holzpuppe

Die Versuchsdurchführung verlief analog zu 2.2. Dabei wurde die Holzpuppe in zwei physikalisch verschiedenen Stellungen aufgestellt, einmal mit senkrecht zur Drehachse ausgestreckten Armen und Beinen, das zweite mal mit senkrecht zur Drehachse ausgestreckten Beinen und angewinkelten Armen. Eine Versuchsanordnung mit angewinkelten Beinen war aufgrund einer aperiodischen Schwingung nicht möglich. Desweiteren wurden bei der Körpermaßbestimmung mehrere Messwerte an verschieden Stellen des Körpers zwecks einer späteren Vereinfachung durch Zylinder gemessen.

Radius [cm]	Auslenkwinkel [°]	Kraft [N]	Winkelrichtgröße [$\frac{Nm}{\circ} * 10^{-4}$]
5,9	40	0,4	5,900
5,9	75	0,5	3,933
5,9	33	0,2	3,576
10,1	12	0,1	8,417
10,1	33	0,2	6,121
10,1	53	0,3	5,717
10,1	70	0,4	5,771
10,1	95	0,5	5,316
10,1	112	0,6	5,411
11,9	60	0,3	5,950
11,9	40	0,2	5,950

Tabelle 3.1: Auslenkwinkel der Drillachse in Abhängigkeit von kraft und Radius

3 Auswertung

3.1 Winkelrichtgröße und Eigenträgheitsmoment der Drillachse

Zur Bestimmung der Winkelrichtgröße wird für jedes Wertepaar die Winkelrichtgröße $D = \frac{Fr}{\varphi}$ bestimmt. Siehe Tabelle 3.1. Als Mittelwert ergibt sich

$$D = (5,642 \pm 1,247) * 10^{-4} \frac{Fr}{\varphi} \tag{15}$$

Das Eigenträgheitsmoment der Drillachse wird Graphisch bestimmt. Dazu wird T^2 ge-

Abstand $a + 0,014$	Periodendauert $T * 3$	Abstand a^2	Periodendauer T^2
0,0438	6,32	0,00088804	4,438
0,06	6,81	0,002116	5,1529
0,08	7,86	0,004356	6,8644
0,1	8,6	0,007396	8,21777778
0,12	9,84	0,011236	10,7584
0,14	10,8	0,015876	12,96
0,16	12,3	0,021316	16,81
0,18	13,5	0,027556	20,25
0,2	14,66	0,034596	23,879511
0,22	16,35	0,042436	29,7025

Tabelle 3.2: Werte zur Bestimmung des Eigenträgheitsmomentes

gen a^2 (Tab. 3.2) aufgetragen. Aus Abbildung 1 ergibt sich ein y-Achsen Schnitt bei $y(0) = 3,926 \pm 0,181$.

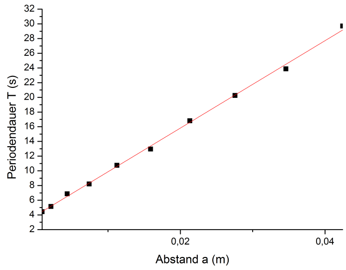

Abbildung 1: Graphische Bestimmung des Eigenträgheitsmoment

Aus Gleichung 13 und dem Steinerschen Satz 8 lässt sich das Trägheitsmoment

$$I_{DS} = \frac{T^2 * D}{4\pi^2} = (5,611 \pm 1,268) * 10^{-5} kgm^2 \tag{16}$$

bestimmen.
In I_{DS} ist allerdings nicht nur das Trägheitsmoment der Drillachse, sondern auch das, des Stabes enthalten. Dieses lässt sich nach 14 berechenen und von I_{SD} subtrahieren. Mit m=96,3g und l=60cm ergibt sich

$$I_D = I_{DS} - I_{St} = I_{DS} - \frac{ml^2}{12} = (-2,833 \pm 0,013) * 10^{-3} kg * m^2 \tag{17}$$

als Eigendrehmoment der Drillachse.

3.2 Trägheitsmoment einer Kugel und eines Zylinders

Kugel T [s]	Scheibe T [s]
1,813	1,830
1,820	1,803
1,813	1,823
1,810	1,843
1,850	1,833

Tabelle 3.3: Periodendauer der Kugel und Scheibe

Aus Tabelle 3.3 ergeben sich die gemittelten Periodendauern

$$T_{Scheibe} = 1,827\text{s}$$
$$T_{Kugel} = 1,821\text{s}$$

Aus Gleichung 13 ergibt sich für beide Körper ein gemessenes Trägheitsmoment von

$$I_{Scheibe} = 4,700 * 10-5kg * m^2 \tag{18}$$
$$I_{Kugel} = 4,739 * 10^{-5}kg * m^2 \tag{19}$$

Die Theoriewerte, mit Gleichung 5 für die Kugel und 6 für den Zylinder, ergeben sich für $d_{Kugel} = 0,1473$m, $m_{Kugel} = 1,11786$kg und $d_{Scheibe} = 0,21845$m, $m_{Scheibe} = 0,4245$kg.

$$I_{Scheibe} = 2,532 * 10^{-3}\text{kg*m}^2$$
$$I_{Kugel} = 6,944 * 10^{-2}\text{kg*m}^2$$

3.3 Trägheitsmoment der Trägheitspuppe

a	Radius	Höhe	Masse
Arm	$(6,850 \pm 1,765) * 10^{-3}$	0,142	0,01447±53,96
Kopf	$(1,23 \pm 0,324) * 10^{-2}$	0,053	0,01744±55,11
Torso	$(1,82 \pm 0,25) * 10^{-2}$	0,0975	0,06991±31,85
Bein	$(8,375 \pm 1,395) * 10^{-3}$	0,149	0,02270±37,00

Tabelle 3.4: Messdaten der Trägheitspuppe

Aus den gemessen Werten in Tab 3.4 und dem Abstand des Mittelpunktes der Beine $a_{Beine} = 6,85cm$ und Arme $a_{Arm,an} = 7,8cm$ und $a_{Arm,ab} = 9,15cm$ ergibt sich

$$I_{Bein} = m\left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12}\left(+ m * a^2_{Bein} = (5,462 \pm 1,914) * 10^{-4}\text{kg*m}^2 \tag{20}$$

$$I_{Torso} = \frac{mR^2}{2} = 1,158 * 10^{-5}\text{kg*m}^2 \pm 38,85 I_{kopf} \qquad = \frac{mR^2}{2} = 1,319 * 10^{-6}\text{kg*m}^2, 53I_{\!\!/} \tag{21}$$

$$I_{Arm,ab} = m\left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12}\left(+ m * a^2_{Arm,ab} = (1,456 \pm 0,493) * 10^{-4}\text{kg*m}^2 \tag{22}$$

als Trägheitsmoment für die einzelnen Körperteile.
Addiert man die einzelnen Trägheitsmomente ergibt sich für die Puppe mit angewinkelten Armen $I_{an} = (1,289 \pm 0,279) * 10^{-3}$kg*m^2 und für die Puppe mit abgewinkelten Armen $I_{an} = (1,397 \pm 0,280) * 10^{-3}$kg*m^2.

Die Berechnung aus der gemittleten Periodendauer

$$T_{an} = (0,704 \pm 0,045)s \qquad T_{ab} = (0,882 \pm 0,012)s$$

ergibt Trägheitsmomente von

$$I_{an} = 0,708 * 10^{-6}\text{kg*m2} \pm 23,01 \qquad I_{ab} = 1,112 * 10^{-6}\text{kg*m2} \pm 22,14$$

4 Diskussion