

# Versuch 402 - Dispersionsmessungen am Glasprisma

TU Dortmund, Fakultät Physik  
Anfänger-Praktikum

Oliver Zietek

oliver.zietek@tu-dortmund.de

Fabian Lehmann

fabian.lehmann@tu-dortmund.de

20. Dezember 2012

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Theorie</b>	<b>2</b>
1.1	Brechung und Dispersion . . . . .	2
1.2	Dispersion an einem Prisma . . . . .	2
1.3	Prismenspektralapparat . . . . .	3
1.4	Bestimmung des Brechungswinkels zwischen brechenden Oberflächen des Prismas . . . . .	4
1.5	Bestimmung der Brechungswinkel der Spektrallinien . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Durchführung</b>	<b>5</b>
2.1	Bestimmung des Brechungswinkels zwischen brechenden Oberflächen des Prismas . . . . .	5
2.2	Bestimmung der Brechungswinkel der Spektrallinien . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Auswertung</b>	<b>5</b>
3.1	Bestimmung der Brechungsindices . . . . .	5
3.2	Bestimmung der Dispersionskurve . . . . .	6
3.3	Bestimmung der Abbesche Zahl . . . . .	7
3.4	Auflösungsvermögen . . . . .	9
3.5	Absorptionsstelle . . . . .	9
<b>4</b>	<b>Diskussion</b>	<b>9</b>
4.1	Statistische Fehler . . . . .	9
4.2	Grundsätzliche Ungenauigkeiten . . . . .	9

# 1 Theorie

## 1.1 Brechung und Dispersion

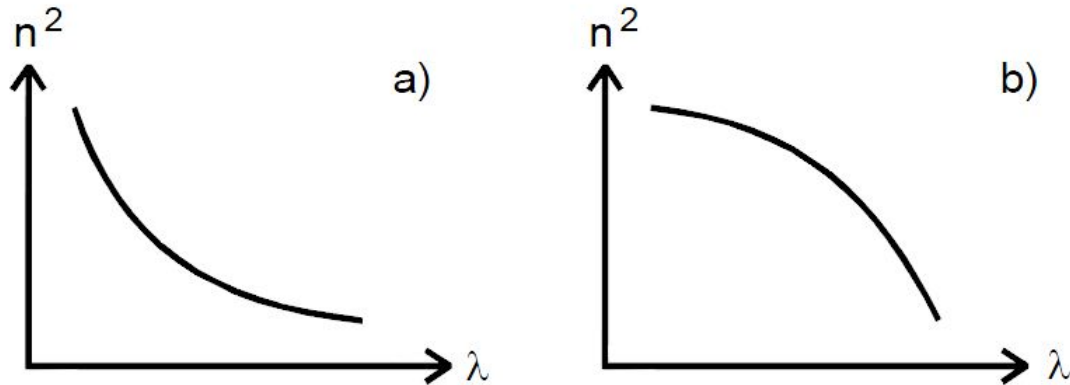


Abbildung 1: Gestalt möglicher Dispersionskurven[1]

Durch Wechselwirkungen mit Elektronen ist die Geschwindigkeit von Licht in Materie geringer als die Vakuumlichtgeschwindigkeit. Dadurch kommt es zu Brechungen an Materiegrenzflächen nach Gleichung (1) mit dem Brechungsindex  $n$ . Da die Ausbreitungsgeschwindigkeit von der Wellenlänge  $\lambda$  des Lichtes abhängt, wird Licht unterschiedlicher Frequenz verschieden stark gebrochen. Dieses Phänomen wird Dispersion genannt. Eine Abhängigkeit nach (2) heißt Dispersionskurve[1] (vgl. Abb. 1).

$$n = \frac{v_1}{v_2} \quad (1)$$

$v_1, v_2$  : materialabhängige Geschwindigkeit von Licht

$$n = f(\lambda) \quad (2)$$

Aus dem Huygensschen Prinzip lässt sich das Snelliussche Brechungsgesetz (Gl. (3)) folgern, bei einem Eintritt unter einem Winkel  $\alpha$  folgt mit dem Brechungsindex  $n$  ein Austrittswinkel  $\beta$ .

$$n = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \quad (3)$$

## 1.2 Dispersion an einem Prisma

Unter Annahme eines Strahlendurchgangs von sichtbarem Licht von Luft in ein durchsichtiges, farbloses Material lassen sich Dispersionsgleichungen [1] ableiten: Gilt für die Absorptionsstelle  $\lambda_1$  mit der Wellenlänge  $\lambda$  im Vakuum, dass  $\lambda \gg \lambda_1$ , so gilt Gleichung

(4), welche in Abbildung 1 als a) dargestellt ist. Gilt hingegen  $\lambda \ll \lambda_1$ , so gilt Gleichung (5), welche in Abbildung 1 als b) dargestellt ist. Beide Kurven beschreiben normale Dispersion, also Abnahme von  $n$  bei Zunahme von  $\lambda$ .

$$n^2(\lambda) = A_0 + \frac{A_2}{\lambda^2} + \frac{A_4}{\lambda^4} + \dots \text{ mit } A_i > 0 \quad (4)$$

$$n^2(\lambda) = 1 - A'_2\lambda^2 - A'_4\lambda^4 - \dots \text{ mit } A'_i > 0, i \geq 2 \quad (5)$$

### 1.3 Prismenspektralapparat

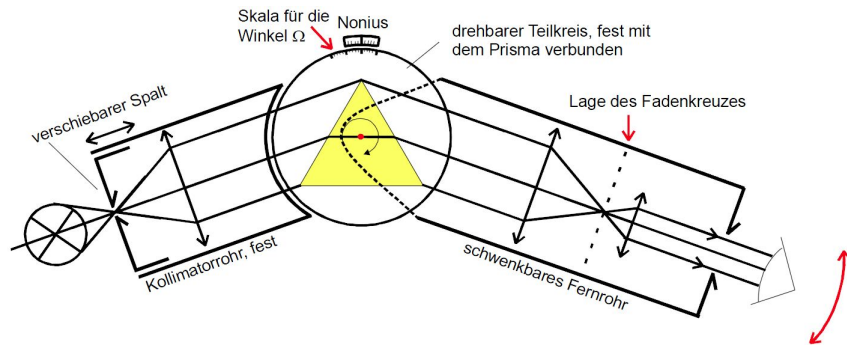


Abbildung 2: Schematische Darstellung des Prismenspektralapparates[1]

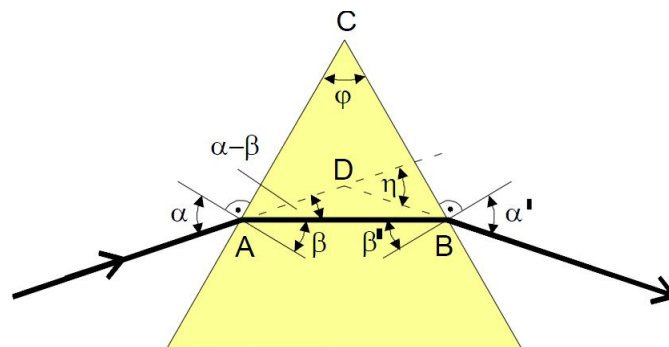


Abbildung 3: Symmetrischer Strahlengang durch ein Prisma[1]

Mit Hilfe eines Prismenspektralapparates (siehe Abb. 2) lässt sich der Brechungsindex abhängig von der Wellenlänge durch Ablesen von Winkeln bestimmen. Das Gerät macht

sich das Snelliussche Brechungsgesetz zu nutze, bei dem symmetrischen Durchgang des Lichtstrahls (Abb. 3) lässt sich folgende Gleichung herleiten.

$$n = \frac{\sin \frac{\eta + \phi}{2}}{\frac{\phi}{2}} \quad (6)$$

$$\text{mit } \alpha = \frac{\eta + \phi}{2} \quad (7)$$

#### 1.4 Bestimmung des Brechungswinkels zwischen brechenden Oberflächen des Prismas

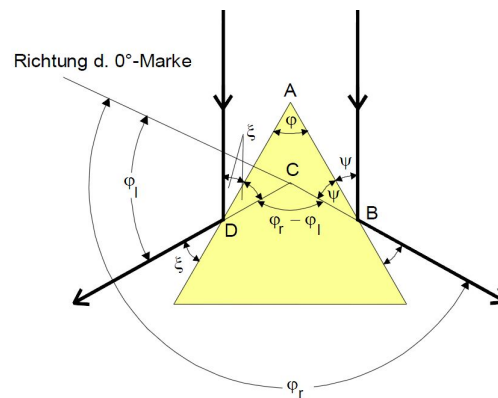


Abbildung 4: Bestimmung des Winkels zwischen den brechenden Oberflächen[1]

Wird das Prisma wie in Abbildung 4 ausgerichtet, kann aus einfachen Winkelbeziehungen durch Messen der Reflektionswinkel beider Lichtstrahlen der brechende Winkel  $\phi$  des Prismas bestimmt werden.

$$\phi = \frac{1}{2}(\phi_r - \phi_l) \quad (8)$$

#### 1.5 Bestimmung der Brechungswinkel der Spektrallinien

Aus zwei zueinander spiegelsymmetrischen Stellungen des Prismas können die Brechungswinkel bestimmt werden. Bei dem Zusammenfallen der gebrochenen Lichtstrahlen mit dem reflektierten Lichtstrahl lässt sich mit Abbildung 5 folgende Beziehung ableiten.

$$\eta = 180 - (\Omega_r - \Omega_l) \quad (9)$$

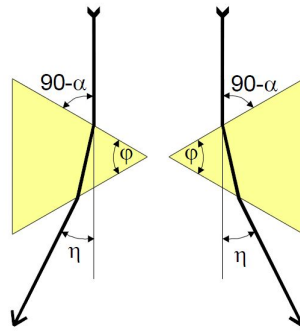


Abbildung 5: Brechwinkelbestimmung mit spiegelbildlicher Prismenstellung[1]

## 2 Durchführung

### 2.1 Bestimmung des Brechungswinkels zwischen brechenden Oberflächen des Prismas

Das Prisma wird mit der brechenden Kante ungefähr auf das Kollimatorrohr ausgerichtet (vgl. Abb. 4). Dann werden die Reflexionswinkel mit dem Fernrohr gemessen. Dieser Vorgang wird mehrfach für die verschiedenen Kanten wiederholt.

### 2.2 Bestimmung der Brechungswinkel der Spektrallinien

Das Prisma wird so lange gedreht, bis die jeweilige Farbe des gebrochenen Lichtspektrums mit dem reflektierten Lichtstrahl zusammenfällt. Dann wird das Prisma in eine spiegelsymmetrische Stellung gebracht und der Vorgang wird wiederholt (vgl. Abb. 5).

## 3 Auswertung

### 3.1 Bestimmung der Brechungsindizes

Zur Messung des Brechungsindex benutzen wir einen Prismenspektralapparat. Dabei ist ein Glasprisma auf dem Drehteil eines Goniometers montiert. Durch einen Spalt und eine Sammellinse fällt Licht aus einer Heliumlampe auf das Prisma. Dadurch, dass der Spalt in der Brennebene der Linse steht, erhalten wir paralleles Licht. Nach der Brechung fällt das Licht in die Brennebene einer Lupe, durch welche wir die Spektrallinien sehen können. Da wir nur den symmetrischen Fall betrachten, bei dem  $a = a'$  und  $b = b'$  ist, folgt

$$n = \frac{\sin\left(\frac{\varphi+\eta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$$

Um sicherzustellen, dass ein symmetrischer Strahlenverlauf vorliegt, bringt man den gebrochenen Strahl mit dem an der Basis des Prismas reflektierten Strahl zur Deckung.

Dann misst man die Auslenkung des gebrochenen Strahles links und rechts und berechnet den Brechungswinkel wie folgt:

$$-\eta = 180^\circ + \Omega_l - \Omega_r$$

Weiterhin sollte der Winkel an der brechenden Kante gemessen. Dafür wurde diese Kante auf das Kollimatorrohr gerichtet und der Winkel des reflektierten Strahles gemessen. Dieser Winkel wurde auf beiden Seiten fünf mal abgelesen, wobei das Prisma mit der brechenden Kante über den Strahl hinweg auf eine spiegelverkehrte Position gedreht wurde. Damit ergibt sich mit der Formel:

$$\varphi = \frac{1}{2}(\varphi_r - \varphi_l)$$

$\varphi_l$ in $^\circ$	$\varphi_r$ in $^\circ$	$\varphi$ in $^\circ$
263,9	383,6	59,9
229,2	349,2	60,0
229,5	349,3	59,9
241,4	361,5	60,1
240,0	360,0	60,0

**Tabelle 3.1:** Winkel  $\Phi$  an der brechenden Kante des Prismas

Somit lautet der Mittelwert:  $\varphi = 59,96^\circ \pm 0,04^\circ$  Der Fehler wird mit der Formel der Standardabweichung des Mittelwertes berechnet.

Für die Indices  $n$  und  $\eta$  folgt damit:

Farbe	$\lambda$ in nm	$\Omega_l$ in $^\circ$	$\Omega_r$ in $^\circ$	$\eta$ in $^\circ$	$n$	$\Delta n$
Rot	706,3	147,5	386,2	58,7	1,721	0,028
Gelb	578,4	147,3	386,7	59,4	1,727	0,028
Grün	501,5	146,8	387,2	60,4	1,736	0,028
Blau	447,1	146,4	387,5	61,1	1,742	0,029

**Tabelle 3.2:** Brechungsindices  $n$  und  $\eta$

### 3.2 Bestimmung der Dispersionskurve

Um die Dispersionskurve zu bestimmen, werden die Quadrate der Brechungsindizes gegen Quadrate der Wellenlängen und einmal gegen die Kehrwerte der Wellenlängenquadrate aufgetragen. Somit kann man eine lineare Regression  $y = mx + b$  bestimmen. Durch die

Abweichung der Kurve von den Messwerten kann bestimmt werden, welche Dispersionskurve [1] die richtige ist,

$$n^2(\lambda) = A_0 + \frac{A_2}{\lambda^2} + \dots \quad (10)$$

$$\text{oder } n^2(\lambda) = A'_0 - A'_2 \lambda^2 - \dots \quad (11)$$

Aus Tabelle 3.3 lassen sich die Gleichungen wie folgt bestimmen,

$n^2$	$\lambda^2 \cdot 10^{23} / \text{m}^2$	$1/\lambda^2 \cdot 10^{-24} / (1/\text{m}^2)$
2,96	4,99	2,00
2,98	3,35	2,99
2,98	3,35	2,99
3,01	2,52	3,98
3,04	2,00	5,00

**Tabelle 3.3:** Basiswerte für die Methode der kleinsten Quadrate

$$n^2(\lambda) = (2,91 \pm 0,01) + \frac{(2,5 \pm 0,1) \cdot 10^4}{\lambda^2} \quad (12)$$

$$\text{oder } n^2(\lambda) = (3,08 \pm 0,02) - (2,4 \pm 0,5) \cdot 10^{-7} \lambda^2. \quad (13)$$

Daraus lässt sich über die Bestimmung der Summe der Abweichungsquadrate[1] die richtige Dispersionsgleichung bestimmen.

$$s_n^2 = \frac{1}{z-2} \sum_{i=1}^z \left( n^2(\lambda_i) - A_0 - \frac{A_2}{\lambda_i^2} \right)^2 = 9,38 \cdot 10^{-6} \quad (14)$$

$$s_{n'}^2 = \frac{1}{z-2} \sum_{i=1}^z \left( n^2(\lambda_i) - A'_0 + A'_2 \lambda_i^2 \right)^2 = 5,20 \cdot 10^{-2} \quad (15)$$

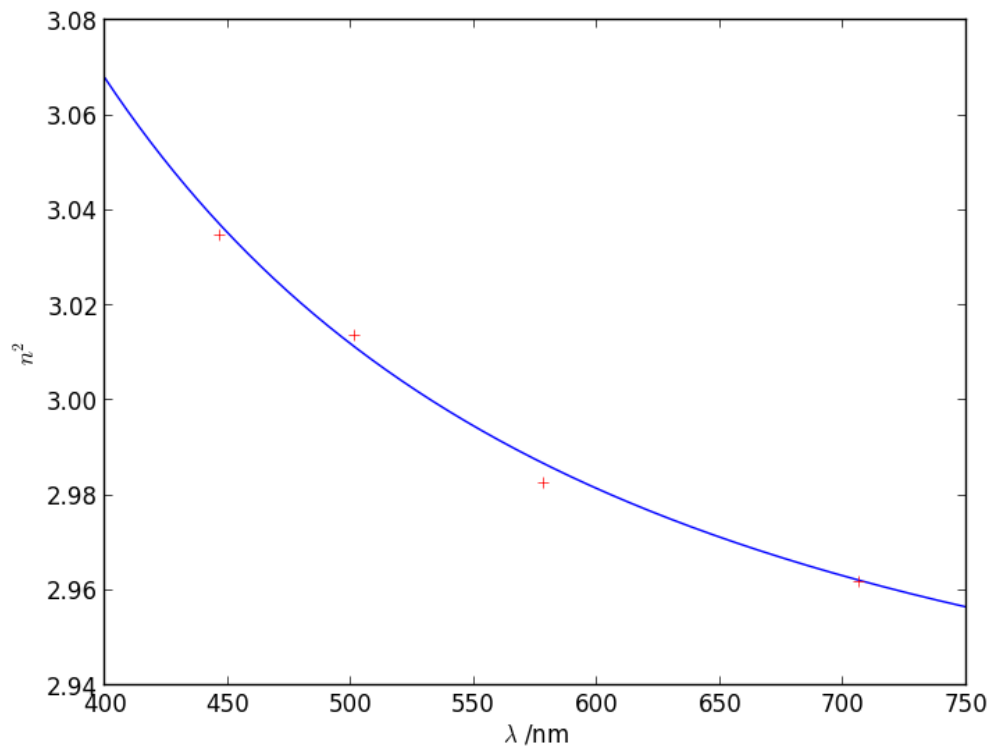
$$Z = 4 \text{ Anzahl der Messwertepaare} \quad (16)$$

Da Gleichung (10) das kleinere  $s^2$  besitzt, handelt es sich dabei um die hier gültige Gleichung, welche in Abbildung 6 dargestellt ist.

### 3.3 Bestimmung der Abbesche Zahl

Zur Berechnung der Abbeschen Zahl benötigt man die Formel

$$v = \frac{n_D - 1}{n_F - n_C}$$



**Abbildung 6:** Dispersionskurve

Für die man die Brechungsindizes der Fraunhofer'schen Linien benötigt. Diese erhält man indem man  $\lambda_C = 656\text{nm}$ ,  $\lambda_D = 589\text{nm}$  und  $\lambda_F = 486\text{nm}$  in die Gleichung (10) einsetzt.

$$n_C = (1,72 \pm 0,002)$$

$$n_D = (1,73 \pm 0,002)$$

$$n_F = (1,74 \pm 0,002)$$

$$v = (53 \pm 11)$$



### 3.4 Auflösungsvermögen

Das theoretische Auflösungsvermögen  $A$  bei voll ausgeleuchtetem Prisma mit einer Basisbreite von  $b = 3 \text{ cm}$  lässt sich mit Gleichung (17) mit Gleichung (10) für  $\lambda_F$  und  $\lambda_C$  berechnen [1].

$$A = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = b \frac{dn}{d\lambda} \quad (17)$$

$$n(\lambda) = \left( A_0 + \frac{A_2}{\lambda^2} \right)^{1/2} \quad (18)$$

$$\frac{dn}{d\lambda} = A_2 \lambda^{-3} \left( A_0 + \frac{A_2}{\lambda^2} \right)^{-1/2} \quad (19)$$

$$\Rightarrow A_C = 1530 \pm 80, A_F = 3400 \pm 500 \quad (20)$$

### 3.5 Absorptionsstelle

Die dem sichtbaren Licht nächst gelegene Absorptionsstelle  $\lambda_i$  lässt sich berechnen, wenn in Gleichung (10)  $n = 1$  gesetzt wird.

$$\lambda_i = \left( \frac{A_2}{A_0 - 1} \right)^{1/2} = (114 \pm 6) \text{ nm} \quad (21)$$

## 4 Diskussion

### 4.1 Statistische Fehler

Die Messung lies einige statistische Fehler zu:

1. Die Apparatur verwackelt bei Drehung des Fernrohres und des Prisma.
2. Die Spektrallinien können nicht als idealisiert betrachtet werden, da man einen Spalt endlicher Breite hat.
3. Der Raum war nicht richtig abgedunkelt bzw. die im Raum befindlichen Lichtquellen, wie Leselampen, haben den Versuch beeinflusst.
4. Auf der Apparatur befindet sich teilweise Staub. Sowohl auf dem Prisma, als auch auf den optischen Bauteilen des Fern- und Kollimatorrohres.

Die Messung des Winkels  $\varphi$  zwischen den Oberflächen war mit  $59,96^\circ \pm 0,04^\circ$  im Bereiches der erwarteten  $60^\circ$  des Prismas, Abweichungen lassen sich auf statistische Fehler beim Messvorgang zurückführen. Zusätzlich gab es nur wenige Punkte die ausgewertet werden konnten, da die Lichtverhältnisse mehr nicht zuließen. Auch dies führte zu weiteren Ungenauigkeiten.

### 4.2 Grundsätzliche Ungenauigkeiten

Neben diesen apparaturbedingten Fehlern ist ein grundsätzlicher Fehler unterlaufen, als ein gespiegeltes Spektrum ausgemessen wurde. Dies ließ sich jedoch aufgrund einfacher

geometrischer Zusammenhänge wieder auf das eigentlich zu messende Spektrum schließen. Die Abbesche Zahl,

$$v = 50 \pm 10, \quad (22)$$

sowie das theoretische Auflösungsvermögen für  $\lambda_C$  und  $\lambda_F$ ,

$$A_C = 1530 \pm 80, \quad A_F = 3400 \pm 500, \quad (23)$$

sind verhältnismäßig ungenau. Den ebenso wie die Berechnung der Absorptionsstelle,

$$\lambda_i = (114 \pm 6) \text{ nm}, \quad (24)$$

beruhen die Werte auf den Anfangs errechneten Werten der auch nur genäherten Dispersionskurve. Wenn diese Anfangswerte nun aber aus ungenau gemessenen, teilweise erst noch gespiegelten Messwerten errechnet worden sind, so sind darauf folgende Werte mit einem mindestens gleich großen Fehler behaftet.

## Literatur

- [1] Versuch Nr. 402 - Dispersionsmessungen am Glasprisma.  
[http://129.217.224.2/HOMEPAGE/Anleitung\\_AP.html](http://129.217.224.2/HOMEPAGE/Anleitung_AP.html) (12.12.2012).
- [2] <http://www.ampelplanet.de/studium.htm> (04.01.2013).
- [3] [http://www.enzyklo.de/Begriff/helium neon laser](http://www.enzyklo.de/Begriff/helium%20neon%20laser) (04.01.2013).