

MODELAGEM E CONTROLE LQR DE UM SISTEMA DE PÊNDULO INVERTIDO COM VALIDAÇÃO EM SIMULAÇÃO

Renan Michel Machado da Silva,
Engenheiro de Controle e Automação do.
Ensino Superior.
Instituto Federal do Pará - IFPA, Belém.
renan13michel@gmail.com

Rejane de Barros Araújo.
Professora do curso de Engenharia de.
Controle e Automação.
Instituto Federal do Pará - IFPA,
rejane.barros@ifpa.edu.br

Vanessa Souza Alvares de Mello
Professora do curso de Engenharia de
Controle e Automação
Instituto Federal do Pará - IFPA,
vanessa.mello@ifpa.edu.br

Abstract—This work presents the modeling, simulation, and control of an inverted pendulum system, focusing on the application of optimal control techniques. Using the Lagrangian method, the system's equations of motion were derived and represented in state-space form, enabling the implementation of a Linear Quadratic Regulator (LQR) controller in MATLAB/Simulink. The system's performance was evaluated through simulations with various input types and under the influence of white noise, emulating real-world operating conditions. The results demonstrated the effectiveness of the LQR controller in stabilizing the pendulum and tracking reference signals, even in the presence of disturbances. As a continuation of this study, a physical prototype is being developed using 3D printing with PETG material, aimed at assistive applications to support individuals with reduced mobility.

Keywords—Self-balancing robot, Inverted pendulum, State-Space Modeling, LQR Control, Assistive Robotics

I. INTRODUÇÃO

O estudo de sistemas instáveis tem sido, ao longo das décadas, um dos pilares fundamentais da engenharia de controle. Diferente dos sistemas que naturalmente tendem ao equilíbrio, os sistemas instáveis apresentam comportamento imprevisível e exigem a atuação de controladores externos para que se mantenham operacionais. (Kalman, 1960; Routh, 1877; Nyquist, 1932) Comportamentos como os de objetos que naturalmente caem, oscilam ou divergem de sua posição de repouso são um desafio para engenheiros e pesquisadores a desenvolver soluções capazes de mantê-los em equilíbrio mesmo diante de incertezas, perturbações ou variações nos parâmetros do sistema (Mironchenko & Prieur, 2019).

A relevância desses estudos vai além da teoria: sistemas instáveis estão presentes em diversas aplicações modernas, como veículos autônomos, robôs móveis, satélites e drones (Spong, Hutchinson & Vidyasagar, 2006; Siciliano & Khatib, 2016). Nessas aplicações, a estabilidade não é apenas uma vantagem. Ela é uma condição essencial para o funcionamento desses dispositivos (Franklin, Powell & Emami-Naeini, 2015). Portanto, entender os princípios que regem a dinâmica desses sistemas e desenvolver técnicas eficazes para calcular valores ótimos de controle e estabilizá-los é uma demanda constante na formação de engenheiros e no avanço da pesquisa científica (Nise, 2015; Dorf & Bishop, 2021).

Dentre os modelos mais emblemáticos utilizados para estudar essa classe de sistemas está o pêndulo invertido. Considerado um benchmark no ensino e na pesquisa em controle, o pêndulo invertido sintetiza, de forma acessível,

uma série de desafios relacionados à estabilidade, resposta dinâmica e atuação de controladores (Spong et al., 2006; Ogata, 2010). Sua estrutura representa uma problemática complexa, tornando-o uma ferramenta poderosa para testar e validar abordagens de controle em um contexto seguro e controlado (Dorf & Bishop, 2021; Ferreira, Rossini & Brolin, 2024).

O uso de simulações computacionais desempenha papel crucial nesse cenário. Elas permitem investigar o comportamento do sistema sob diferentes condições, testar hipóteses de controle e ajustar parâmetros sem os riscos e custos associados a experimentos físicos (Franklin, Powell & Emami-Naeini, 2015; Ogata, 2010). Em ambientes educacionais, as simulações também favorecem a compreensão prática dos conceitos teóricos, permitindo que os alunos explorem os efeitos das decisões de projeto em tempo real (Nise, 2015; Silva et al., 2019).

Neste contexto, este trabalho tem como objetivo estudar o comportamento de um sistema de pêndulo invertido por meio de modelagem e simulações computacionais sob diferentes condições, avaliando seu desempenho dinâmico e os desafios envolvidos na sua estabilização, utilizando um controlador LQR (Linear Quadratic Regulator). Através desta abordagem, busca-se compreender a fundo o funcionamento de sistemas instáveis e contribuir para a formação de uma base sólida para futuras implementações físicas ou estudos avançados em controle automático.

II. METODOLOGIA

A. Modelagem do sistema

O pêndulo invertido montado sobre uma base com rodas foi modelado como um sistema dinâmico com quatro variáveis de estado. A modelagem foi realizada utilizando a formulação de Lagrange, considerando as seguintes variáveis:

x : posição do carrinho (m),
 \dot{x} : velocidade do carrinho (m/s),
 θ : ângulo do pêndulo em relação à vertical (rad),
 $\dot{\theta}$: velocidade angular do pêndulo (rad/s).

A partir do método de Lagrange, utilizando as expressões da energia cinética T e da energia potencial V , foram obtidas as equações de movimento não lineares do sistema.

$$(M + m)\ddot{x} + ml \cos(\theta) \ddot{\theta} - ml \sin(\theta) \dot{\theta}^2 + b\dot{x} = u \quad (1)$$

$$l\ddot{\theta} + \cos(\theta)\dot{x} + g\sin(\theta) = 0 \quad (2)$$

Essas equações foram posteriormente linearizadas em torno do ponto de equilíbrio $\theta \approx 0$, o que permitiu a formulação do sistema no espaço de estados. As matrizes resultantes do modelo linearizado são:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (3)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (4)$$

As matrizes A e B, considerando o modelo linearizado, são dadas por:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{b}{M} & \frac{mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{b}{Ml} & \frac{(M+m)g}{Ml} & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ \frac{1}{Ml} \end{bmatrix} \quad (6)$$

As matrizes C e D utilizadas na simulação são:

$$C = I_{4 \times 4} \quad (7)$$

$$D = 0_{4 \times 1} \quad (8)$$

Os parâmetros utilizados no modelo foram definidos com base no protótipo real do sistema, sendo:

- $M = 1,3$ kg: massa da base móvel;
- $m = 0,65$ kg: massa do pêndulo;
- $l = 0,175$ m: distância do ponto de fixação ao centro de massa do pêndulo;
- $g = 9,81$ m/s²: aceleração da gravidade;
- $b = 0,2$ N·s/m: coeficiente de atrito viscoso.

B. Projeto e simulação do controlador LQR no Simulink

Para estabilizar e melhorar desempenho do sistema, foi implementado um controlador ótimo do tipo LQR. Esse controlador busca minimizar uma função de custo quadrática associada aos estados do sistema e ao esforço de controle, gerando uma lei de realimentação de estados ótima.

A função de custo adotada é dada por:

$$J = \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (9)$$

Em que x é o vetor de estados, u é o sinal de controle, Q é a matriz de ponderação dos estados e R é a matriz de ponderação do esforço de controle. A escolha das matrizes Q e R afeta diretamente o desempenho do sistema e, geralmente, é realizada de forma empírica, a partir de testes e ajustes via simulação. No presente trabalho, os valores exatos dessas matrizes não foram registrados, porém a matriz de ganho ótima obtida foi:

$$K = [-14.1421, 171.8846, -25.2787, 54.7535] \quad (10)$$

Dessa maneira, a lei de controle implementada na planta é dada por:

$$u(t) = -Kx(t) \quad (11)$$

Para a realização das simulações do sistema foi necessário implementar a lógica de controle no ambiente Simulink do MATLAB. A Figura 1 apresenta o diagrama geral do sistema de controle, incluindo os blocos de referência, controlador LQR e planta linearizada do pêndulo invertido. A Figura 2 detalha a estrutura interna do bloco da planta, evidenciando como o modelo em espaço de estados foi montado a partir das equações do sistema.

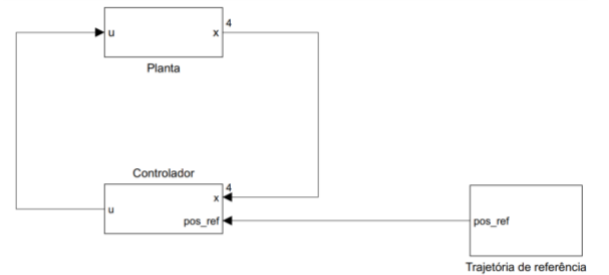


Figura 1 – Diagrama geral do sistema de controle

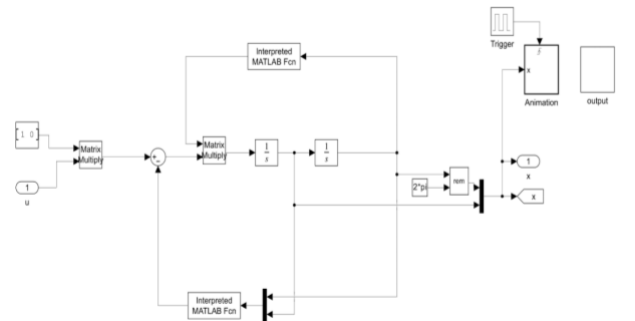


Figura 2 – Estrutura interna do bloco da planta

A Figura 3 exibe uma visualização gerada no MATLAB que representa graficamente o comportamento do pêndulo invertido sobre rodas durante a simulação. Essa animação

auxilia na interpretação do modelo físico simulado, ilustrando de forma intuitiva a interação entre o carrinho e o pêndulo ao longo da movimentação.

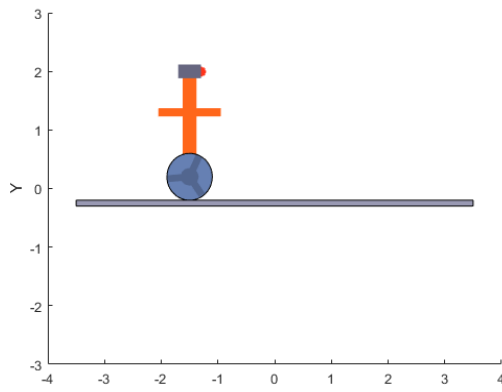


Figura 3 – Visualização gráfica do pêndulo durante simulação.

Os resultados da simulação são representados pela Figura 4, onde o primeiro gráfico mostra a posição do carrinho (q_1) rastreando um sinal de referência quadrado, enquanto o segundo gráfico exibe o comportamento do ângulo do pêndulo (q_2), que retorna rapidamente à posição vertical após cada mudança na referência. Esses resultados confirmam a estabilidade do sistema e o bom desempenho do controlador LQR projetado.

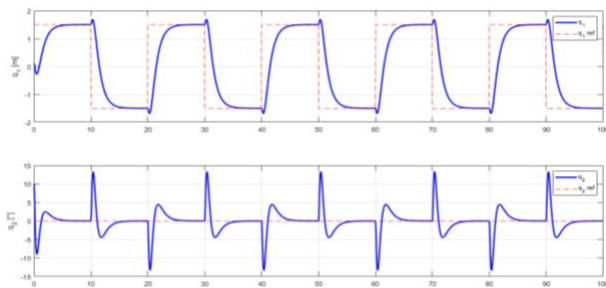


Figura 4 – Respostas simuladas de q_1 e q_2 com o controlador LQR

C. Diferentes condições de simulação

Após a implementação do controlador LQR e sua validação com um sinal de referência quadrado, foi realizada uma análise mais abrangente do desempenho do sistema sob diferente condição de operação. Essa etapa visa verificar a robustez e a eficiência do controle em cenários mais realistas, incluindo presença de ruído.

Para aproximar as simulações das condições práticas, foi incorporado ruído branco limitado em banda nos sinais de posição e ângulo do carrinho e pêndulo invertido. Utilizou-se o bloco Band-Limited White Noise do Simulink, configurado para gerar ruído com potência ajustada para cada uma das variáveis simuladas, simulando perturbações típicas de medições sensoriais.

Os parâmetros do bloco foram definidos conforme segue: potência de ruído [0.001, 0.001], tempo de amostragem de 0,1 segundos e sementes distintas para garantir independência estatística entre os ruídos aplicados. O ruído foi somado diretamente aos sinais antes da

combinação dos estados no multiplexador, permitindo a análise do desempenho do sistema sob condições realistas.

A Figura 5 apresenta os resultados da simulação do sistema sob a ação de um ruído branco adicionado como perturbação externa ao pêndulo. As curvas em azul representam as variáveis de estado simuladas: no gráfico superior, observa-se a posição da base do sistema (x_1), e no gráfico inferior, o ângulo do pêndulo em relação à vertical (x_3). As linhas tracejadas vermelhas correspondem às referências impostas para a posição da base.

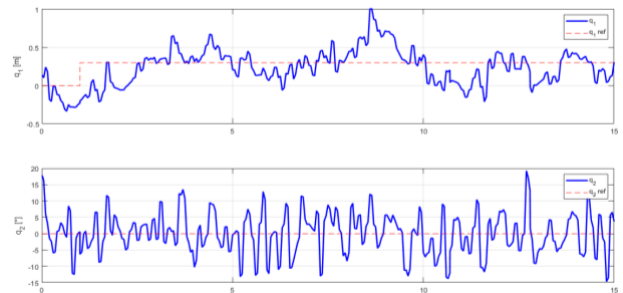


Figura 5 – Resposta do sistema com ruído branco limitado em banda.

Observa-se que o ruído afeta significativamente ambas as variáveis de estado, principalmente o ângulo do pêndulo, que apresenta oscilações de alta frequência com amplitudes visivelmente elevadas. Ainda assim, o controlador LQR mantém a estabilidade do sistema em malha fechada, evitando que o pêndulo diverja da posição de equilíbrio. A resposta da posição da base também é influenciada pelas perturbações, apresentando pequenas variações em torno da referência, mas sem comprometer a estabilidade geral.

Esse experimento destaca a sensibilidade do sistema a ruídos externos e evidencia a importância de projetar controladores que mantenham o desempenho aceitável mesmo em cenários adversos. Embora não tenha sido projetado especificamente para rejeitar ruído, o LQR apresentou comportamento robusto, sendo capaz de manter o sistema operando dentro de uma faixa segura de estabilidade, ainda que com aumento da variabilidade nas respostas.

III. RESULTADOS E CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os resultados obtidos nas simulações realizadas demonstram a eficácia do controlador LQR na estabilização de um sistema de pêndulo invertido, mesmo diante de sinais de referência não triviais e da presença de ruídos. A modelagem matemática por meio do método de Lagrange e a linearização do sistema permitiram uma representação precisa da dinâmica envolvida, e o uso do espaço de estados viabilizou a implementação eficiente do controle no ambiente Simulink.

Durante os testes, foi possível observar que o carrinho foi capaz de seguir com precisão um sinal de referência quadrado, mantendo o pêndulo na posição vertical com tempo de acomodação e resposta satisfatórios. A inserção de ruído branco limitado em banda simulou condições mais próximas da realidade, indicando que o controlador LQR confere ao sistema uma resposta estável sob ruído, embora com maior sensibilidade no ângulo do pêndulo.

As análises indicam que o modelo desenvolvido e o controlador implementado formam uma base sólida para futuras aplicações físicas do sistema. A simulação com ruído mostrou-se essencial para prever comportamentos do protótipo em um ambiente real, auxiliando no refinamento do controle antes da implementação prática.

Com este estudo, pretende-se avançar para a implementação física do sistema de pêndulo invertido, utilizando como base os resultados obtidos em simulação. O protótipo será desenvolvido com estrutura impressa em 3D, utilizando o filamento PETG, escolhido por sua resistência mecânica, durabilidade térmica e viabilidade de fabricação em ambiente educacional. O projeto encontra-se atualmente na etapa de fabricação do corpo mecânico, modelado no software Fusion 360, conforme ilustrado na Figura 6.

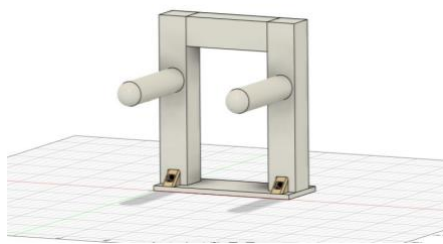


Figura 6 – Modelo tridimensional do corpo do pêndulo no Fusion 360.

A proposta futura envolve o desenvolvimento de um sistema autoestabilizante com aplicação potencial como um dispositivo assistivo, especialmente voltados à mobilidade de pessoas com deficiência física. Embora este artigo tenha se concentrado exclusivamente na modelagem e simulação computacional, o conhecimento adquirido servirá como base para a calibração do sistema real, contribuindo para o refinamento dos algoritmos de controle e a avaliação prática de desempenho.

Além da aplicação prática, o protótipo também poderá ser explorado em contextos acadêmicos, servindo como ferramenta didática para o ensino de controle de sistemas instáveis e validação de controladores. A longo prazo, espera-se que o sistema desenvolvido possa não apenas fomentar pesquisas na área de robótica assistiva, mas também contribuir de forma concreta para a inclusão social, oferecendo soluções tecnológicas acessíveis e funcionais.

REFERÊNCIAS

- [1] E. J. Routh, *A Treatise on the Stability of a Given State of Motion*. London: Macmillan and Company, 1877.
- [2] H. Nyquist, "Regeneration theory," *Bell System Technical Journal*, vol. 11, no. 1, pp. 126–147, 1932.
- [3] R. E. Kalman, "A new approach to linear filtering and prediction problems," *Transactions of the ASME—Journal of Basic Engineering*, vol. 82, no. 1, pp. 35–45, 1960.
- [4] A. Mironchenko and C. Prieur, "Input-to-state stability of infinite-dimensional systems: recent results and open questions," *arXiv preprint*, arXiv:1910.01714, 2019.
- [5] M. W. Spong, S. Hutchinson, and M. Vidyasagar, *Robot Modeling and Control*, New York: Wiley, 2006.
- [6] B. Siciliano and O. Khatib (Eds.), *Springer Handbook of Robotics*, 2nd ed. Cham: Springer, 2016.
- [7] G. F. Franklin, J. D. Powell, and A. Emami-Naeini, *Feedback Control of Dynamic Systems*, 7th ed. Boston: Pearson, 2015.
- [8] N. S. Nise, *Control Systems Engineering*, 7th ed. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2015.
- [9] R. C. Dorf and R. H. Bishop, *Modern Control Systems*, 14th ed. Boston: Pearson, 2021.
- [10] K. Ogata, *Modern Control Engineering*, 5th ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2010.
- [11] L. A. Ferreira, F. L. Rossini, and L. C. Brolin, "Modelagem e análise de estabilidade de um drone terrestre de duas rodas," *ResearchGate*, 2024. [Online]. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/37756114>
- [12] A. A. da Silva, F. M. Fernandes, and T. G. P. Teixeira, "Modelagem e simulação de sistemas dinâmicos como ferramenta de ensino em engenharia," *Revista de Ensino de Engenharia*,
- [13] Pedroso, C.; Modesto, e. **Sistema de Controle de Pêndulo Invertido**. trabalho de conclusão de curso—Universidade Tecnológica Federal do Paraná: [s.n.].
- [14] LEONOR, M.; NEVES, M. Construção de um pêndulo invertido sobre um robô móvel controlado com o executivo SHaRK. *REVISTA DO DETUA*, v. 4, n. 2, p. 4, jan. 2004.
- [15] Y. A. Yusuff, "The Importance of System Modeling, Simulation and Control Engineering," *AZoRobotics*, Mar. 17, 2020. [Online]. Available: <https://www.azorobotics.com/Article.aspx?ArticleID=372>.
- [16] N. Fang, K. Nielson, and S. Kawamura, "Using Computer Simulations with a Real-World Engineering Example to Improve Student Learning of High School Physics: A Case Study of K-12 Engineering Education," *International Journal of Engineering Education*, vol. 29, no. 1, pp. 1–10, 2013. [Online]. Available: https://www.ijee.ie/articles/Vol29-1/16_ijee2648ns.pdf.
- [17] D. Gorinevsky, "Lecture 9 – Modeling, Simulation, and Systems Engineering," *EE392m – Control Engineering*, Stanford University, Spring 2005. [Online]. Available: https://web.stanford.edu/class/archive/ee/ee392m/ee392m.1056/Lecture9_ModelSim.pdf.