Discretização das equações de Navier-Stokes no problema da placa supersônica

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

onde:

$$U=\begin{pmatrix} \rho , \\ \rho u , \\ \rho v , \\ E_t \end{pmatrix} \quad , \quad E=\begin{pmatrix} \rho u , \\ \rho u^2 + p - \tau_{xx} , \\ \rho u v - \tau_{xy} , \\ (E_t + p) u - u \tau_{xx} - v \tau_{xy} + q_x \end{pmatrix} \quad , \quad F=\begin{pmatrix} \rho v , \\ \rho u v - \tau_{xy} , \\ \rho v^2 + p - \tau_{xy} , \\ (E_t + p) v - u \tau_{xy} - v \tau_{yy} + q_y \end{pmatrix}$$

As incógnitas em cada célula são:

ρ *: densidade molar* $\quad u$ *: velocidade horizontal* $\quad v$ *: velocidade vertical* $\quad \|\boldsymbol{V}\|$ *: módulo da velocidade*

p *: pressão* $\quad T$ *: temperatura* $\quad e$ *: energia interna* $\quad \mu$ *: ' ? '* $\quad k$ *: condutividade térmica*

Integrando cada volume de controle em um intervalo de tempo, onde $t=m$ é o tempo atual, temos:

$$\int_m^{m+1} \int_V \frac{\partial U}{\partial t} dV\, dt \; + \; \int_m^{m+1} \int_V \frac{\partial E}{\partial x} dV\, dt \; + \; \int_m^{m+1} \int_V \frac{\partial F}{\partial y} dV\, dt \; = \; 0$$

$$\int_V \left(\int_m^{m+1} \frac{\partial U}{\partial t} dt \right) dV \; + \; \int_m^{m+1} \left[(E\, \Delta A)_e - (E\, \Delta A)_w \right] dt \; + \; \int_m^{m+1} \left[(F\, \Delta A)_n - (F\, \Delta A)_s \right] dt \; = \; 0$$

$$\int_V \left(U^{(m+1)} - U^{(m)} \right) dV \; + \; \Delta A\, \Delta t \left(E_e^{(m+1)} - E_w^{(m+1)} \right) \; + \; \Delta A\, \Delta t \left(F_n^{(m+1)} - F_s^{(m+1)} \right) \; = \; 0$$

$$\left(U^{(m+1)} - U^{(m)} \right) \Delta V \; + \; \Delta A\, \Delta t \left(E_e^{(m+1)} - E_w^{(m+1)} + F_n^{(m+1)} - F_s^{(m+1)} \right) \; = \; 0$$

Sendo $\frac{\Delta V}{\Delta A} = \Delta L$, obtemos:

$$\boxed{U^{(m+1)} \; = \; \frac{\Delta t}{\Delta L} \left(E_w^{(m+1)} - E_e^{(m+1)} + F_s^{(m+1)} - F_n^{(m+1)} \right) \; + \; U^{(m)}}$$

A partir daí, podemos obter cada uma das incógnitas:

$$\boxed{\begin{gathered} \rho = (1,0,0,0) \cdot U^{(m+1)} \quad , \quad u = \frac{(0,1,0,0) \cdot U^{(m+1)}}{\rho} \quad , \quad v = \frac{(0,0,1,0) \cdot U^{(m+1)}}{\rho} \\ e = \frac{(0,0,0,1) \cdot U^{(m+1)}}{\rho} - \frac{(u^2 + v^2)}{2} \quad , \quad \|\boldsymbol{V}\| = \sqrt{u^2 + v^2} \quad , \quad T = \frac{e}{c_v} \\ p = \rho R T \quad , \quad \mu = \mu_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{T_0 + 110}{T + 110} \right) \quad , \quad k = \frac{\mu\, c_p}{\boldsymbol{Pr}} \end{gathered}}$$