Um método numérico para resolver as equações completas de Navier-Stokes

- Utiliza a técnica de volumes finitos;
- É um método iterativo (Iteração de Picard);
- Usa malhas não-”staggered”.

Seja a forma vetorial das equações de Navier-Stokes:

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial x} + \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial y} = 0$$

Onde:

$$\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E_t \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p - \tau_{xx} \\ \rho u v - \tau_{xy} \\ (E_t + p) u - u \tau_{xx} - v \tau_{xy} + q_x \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho u v - \tau_{xy} \\ \rho v^2 + p - \tau_{yy} \\ (E_t + p) v - u \tau_{xy} - v \tau_{yy} + q_y \end{pmatrix}$$

A idéia inicial é integrar as equações em cada volume de controle do domínio:

$$\int_{n}^{n+1}\int_{V}\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t}\,dV\,dt+\int_{n}^{n+1}\int_{V}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial x}\,dV\,dt+\int_{n}^{n+1}\int_{V}\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial y}\,dV\,dt=0$$

Utilizando o teorema da divergência nas duas últimas integrais e avaliando-as:

$$\int_{V}\left(\int_{n}^{n+1}\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t}\,dt\right)d\,V+\int_{n}^{n+1}\left[(\delta\,A\,E)_{e}-(\delta\,A\,E)_{w}\right]dt+\int_{n}^{n+1}\left[(\delta\,A\,F)_{n}-(\delta\,A\,F)_{s}\right]dt=0$$

Onde δA é a área da face do volume de controle considerado. Avaliando as integrais para o tempo $t = n+1$, teremos:

$$\delta\,V\left(\boldsymbol{U}^{n+1}-\boldsymbol{U}^{n}\right)+\delta\,A\,\Delta\,t\left(\boldsymbol{E}_{e}^{\;n+1}-\boldsymbol{E}_{w}^{\;n+1}\right)+\delta\,A\,\Delta\,t\left(\boldsymbol{F}_{n}^{\;n+1}-\boldsymbol{F}_{s}^{\;n+1}\right)=0$$

Considerando $\delta V/\delta A = \delta L$, obtemos a forma discretizada:

$$\boldsymbol{U}^{n+1}=\frac{\Delta\,t}{\delta\,L}\left(\boldsymbol{E}_{w}^{\;n+1}-\boldsymbol{E}_{e}^{\;n+1}+\boldsymbol{F}_{s}^{\;n+1}-\boldsymbol{F}_{n}^{\;n+1}\right)+\boldsymbol{U}^{n}$$

Utilizando a discretização encontrada para **U**, avaliamos coordenada a coordenada os vetores **U**, **E**, **F**:

$$\rho^{n+1} = \frac{\Delta t}{\delta L}\left((\rho u)_w^{n+1} - (\rho u)_e^{n+1} + (\rho v)_s^{n+1} - (\rho v)_n^{n+1}\right) + \rho^n$$

Observar que a discretização acima é implícita. Através da iteração de Picard, podemos resolver o problema da não-linearidade, introduzindo um sobrescrito k para cada variável a ser calculada, tal que:

$$\phi^{n+1,\,0} = \phi^n \qquad e \qquad \lim_{k\to\infty} \phi^{n+1,k} = \phi^{n+1}$$

Desta forma a discretização fica implícita no tempo mas explícita em cada passo da iteração de Picard:

$$\rho^{n+1,\,k+1} = \frac{\Delta t}{\delta L}\left((\rho u)_w^{n+1,\,k} - (\rho u)_e^{n+1,\,k} + (\rho v)_s^{n+1,\,k} - (\rho v)_n^{n+1,\,k}\right) + \rho^n$$

Como exemplo, no passo $k = 0$ e no tempo $t = 0$, todas as variáveis estão determinadas, portanto a densidade em $t = 1, k = 1$ é calculada diretamente:

$$\rho^{1,1} = \frac{\Delta t}{\delta L}\left((\rho u)_w^0 - (\rho u)_e^0 + (\rho v)_s^0 - (\rho v)_n^0\right) + \rho^0$$

Os valores das variáveis nas faces w, e, s, n são obtidos por interpolação dos valores destas propriedades no centro dos volumes de controle. Os passos k são repetidos até que o erro de ρ seja desprezível:

$$\rho^{1,2} = \frac{\Delta t}{\delta L}\left((\rho u)_w^{1,1} - (\rho u)_e^{1,1} + (\rho v)_s^{1,1} - (\rho v)_n^{1,1}\right) + \rho^0$$

A equação acima não pode ser resolvida diretamente, porque apesar de haver um valor numérico para $\rho^{1,1}$, não temos o correspondente para $u^{1,1}$ e $v^{1,1}$. Torna-se necessário então um procedimento semelhante utilizando a próxima coordenada dos vetores **U**, **E**, **F**.

Repetindo a forma discretizada do vetor U para a sua segunda coordenada, temos:

$$(\rho u)^{n+1,\,k+1} = \frac{\Delta t}{\delta L}\Big((\rho u^2 + p - \tau_{xx})_w^{n+1,\,k} - (\rho u^2 + p - \tau_{xx})_e^{n+1,\,k}\Big)$$
$$+ \frac{\Delta t}{\delta L}\Big((\rho u v - \tau_{xy})_s^{n+1,\,k} - (\rho u v - \tau_{xy})_n^{n+1,\,k}\Big) + (\rho u)^n$$

Semelhantemente, em t = 1, k = 1, o produto $(\rho\ u)$ pode ser diretamente calculado e as derivadas espaciais nas tensões são calculadas por diferenças finitas:

$$(\rho u)^{1,\,1} = \frac{\Delta t}{\delta L}\Big((\rho u^2 + p - \tau_{xx})_w^{0} - (\rho u^2 + p - \tau_{xx})_e^{0}\Big)$$
$$+ \frac{\Delta t}{\delta L}\Big((\rho u v - \tau_{xy})_s^{0} - (\rho u v - \tau_{xy})_n^{0}\Big) + (\rho u)^0$$

Tendo (ρ u) determinado, obter u é simples:

$$u^{1,1} = \frac{(\rho u)^{1,1}}{\rho^{1,1}}$$

Para obter v, o procedimento é análogo ao anterior, desta vez considerando a 3ª coordenada dos vetores **U**, **E**, **F:**

$$(\rho v)^{n+1,k+1} = \frac{\Delta t}{\delta L}\left((\rho u v - \tau_{xy})_w^{n+1,k} - (\rho u v - \tau_{xy})_e^{n+1,k} \right)$$
$$+ \frac{\Delta t}{\delta L}\left((\rho v^2 + p - \tau_{xy})_s^{n+1,k} - (\rho v^2 + p - \tau_{xy})_n^{n+1,k} \right) + (\rho v)^n$$

$$v^{n,k} = \frac{(\rho v)^{n,k}}{\rho^{n,k}}$$

Analogamente a energia interna E_t também é resolvida através da discretização da 4ª coordenada dos vetores **U**, **E**, **F**:

$$
\begin{aligned}
E_t^{n+1,\,k+1} = \frac{\Delta t}{\delta L}\,&\left(\left(E_t + p\right)u - u\,\tau_{xx} - v\,\tau_{xy} + q_x\right)_w^{n+1,\,k} \\
-\,\frac{\Delta t}{\delta L}&\left(\left(E_t + p\right)u - u\,\tau_{xx} - v\,\tau_{xy} + q_x\right)_e^{n+1,\,k} \\
+\,\frac{\Delta t}{\delta L}&\left(\left(E_t + p\right)v - u\,\tau_{xy} - v\,\tau_{yy} + q_y\right)_s^{n+1,\,k} \\
-\,\frac{\Delta t}{\delta L}&\left(\left(E_t + p\right)v - u\,\tau_{xy} - v\,\tau_{yy} + q_y\right)_n^{n+1,\,k} \\
&+ \left(\rho\,v\right)^n
\end{aligned}
$$

Para obter a energia interna e basta decodificar o resultado obtido anteriormente:

$$e^{n,k} = \frac{E_t^{n,k}}{\rho^{n,k}} - \frac{\left[\left(u^{n,k}\right)^2 + \left(v^{n,k}\right)^2\right]}{2}$$

O restante das variáveis do fluido podem ser calculados por simples ajustes, tais como a equação de estado.

$$T^{n,k} = \frac{e^{n,k}}{c_v} \qquad p^{n,k} = R\rho^{n,k}T^{n,k}$$

$$\mu^{n,k} = \mu_0\left(\frac{T^{n,k}}{T_0}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{T_0+110}{T^{n,k}+110}\right) \qquad k = \frac{\mu^{n,k}c_p}{\boldsymbol{Pr}}$$

Um esboço para o algoritmo, seria, de acordo com os detalhes anteriormente explicados:

Receber todos os valores iniciais e de fronteira das variáveis;

Iteração de Picard:

Para cada volume de controle:

Resolver a equação abaixo para a 1ª coordenada, obtendo ρ^*;

$$\boldsymbol{U}^{n+1,\,k+1} = \frac{\Delta t}{\delta L}\left(\boldsymbol{E}_w^{\,n+1,\,k} - \boldsymbol{E}_e^{\,n+1,\,k} + \boldsymbol{F}_s^{\,n+1,\,k} - \boldsymbol{F}_n^{\,n+1,\,k}\right) + \boldsymbol{U}^n$$

Resolver a equação acima para a 2ª coordenada, decodificando para obter u^*;

Resolver a equação acima para a 3ª coordenada, decodificando para obter v^*;

Resolver a equação acima para a 4ª coordenada, decodificando para obter e^*, T^*, p^*, μ^*, k^*;

Fim **Para**;

Repetir até erro de cada variável ser menor que uma dada cota ($0 < C \ll 1$);