

Esquemas de diferenças finitas em problemas de convecção-difusão estacionários

Cada esquema faz referência à situação governada pela equação abaixo:

$$\frac{d}{d x}(\rho u \varphi) = \frac{d}{d x}\left(\Gamma \frac{d \varphi}{d x}\right)$$

Onde Γ é o coeficiente difusivo e φ é uma propriedade do fluido.

Diferenciação atrasada

(*"Upwind"*)

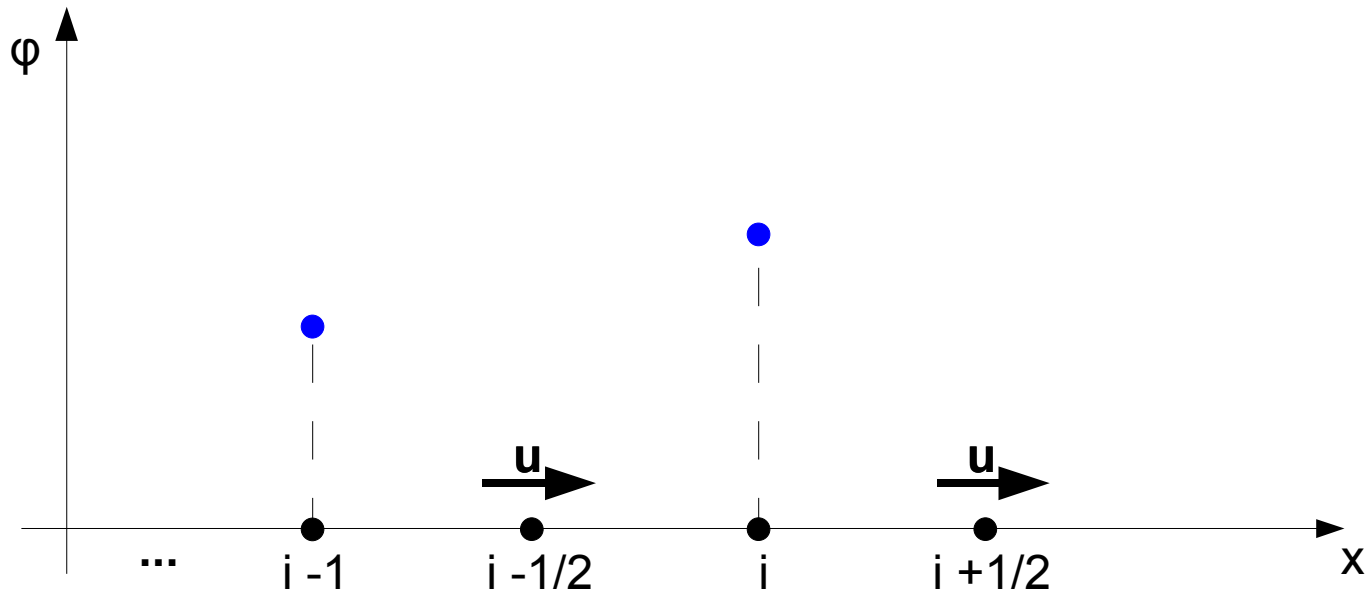
Idéia geral: considerar valores no sentido contrário ao fluxo, devido à dominação da convecção sobre a difusão.

Diferenciação atrasada

Se $u_{i-1/2} > 0$ e $u_{i+1/2} > 0$, então:

$$\varphi_{i-\frac{1}{2}} = \varphi_{i-1}$$

$$\varphi_{i+\frac{1}{2}} = \varphi_i$$

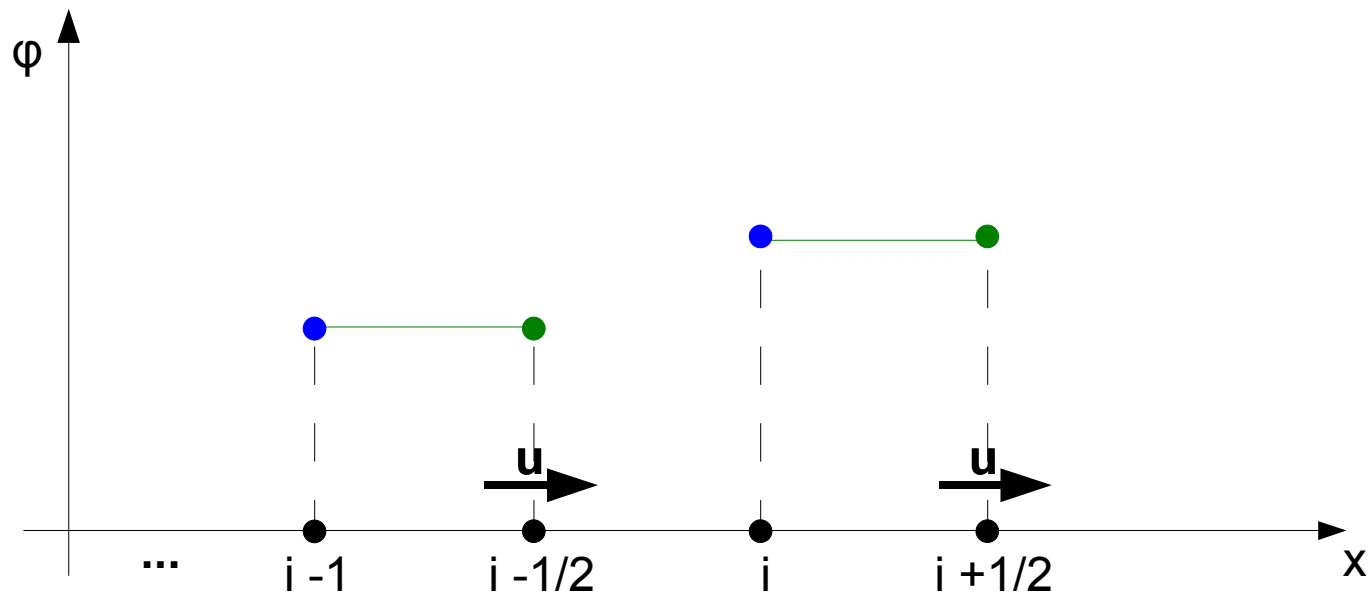


Diferenciação atrasada

Se $u_{i-1/2} > 0$ e $u_{i+1/2} > 0$, então:

$$\varphi_{i-\frac{1}{2}} = \varphi_{i-1}$$

$$\varphi_{i+\frac{1}{2}} = \varphi_i$$

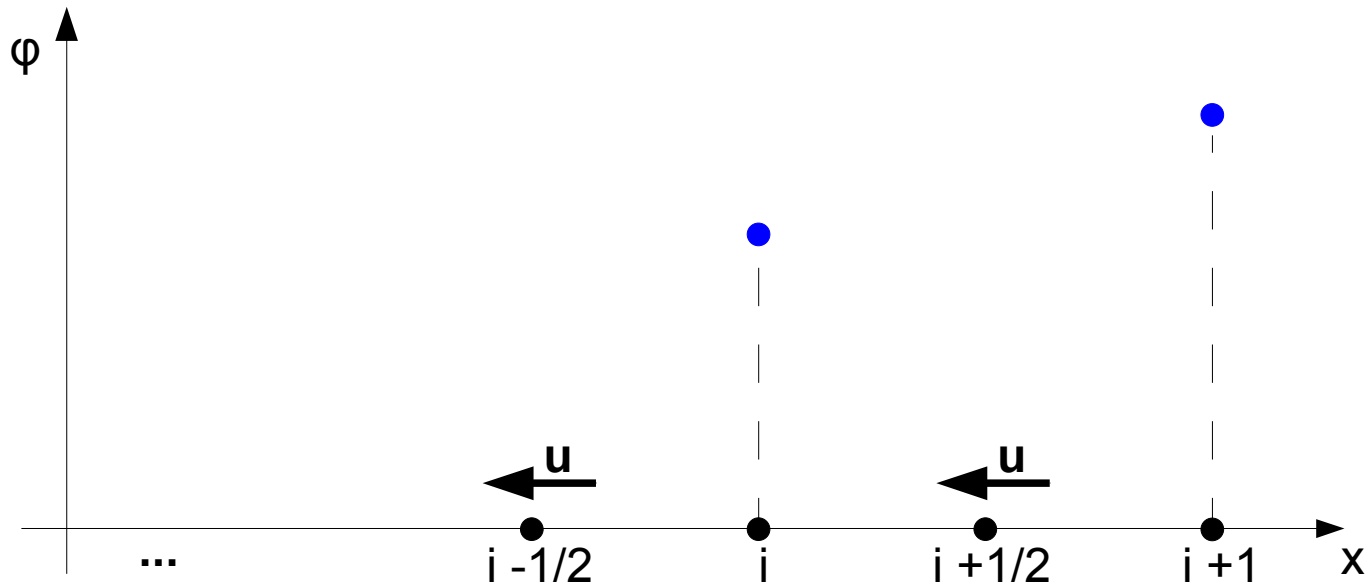


Diferenciação atrasada

Se $u_{i-1/2} < 0$ e $u_{i+1/2} < 0$, então:

$$\varphi_{i-\frac{1}{2}} = \varphi_i$$

$$\varphi_{i+\frac{1}{2}} = \varphi_{i+1}$$

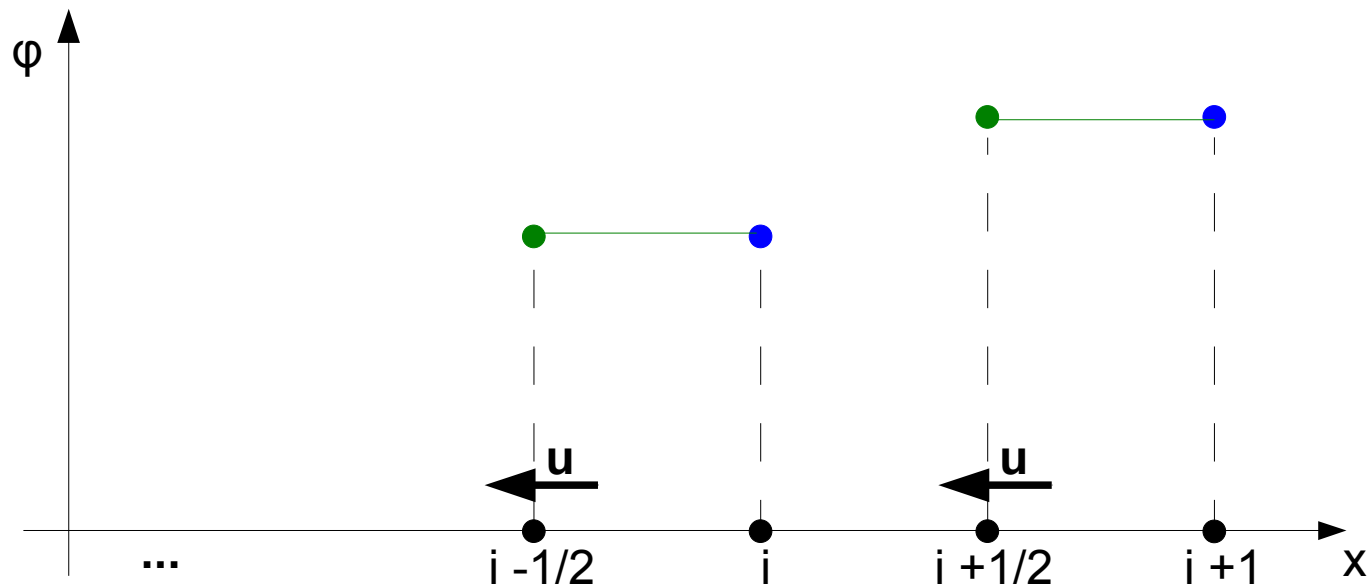


Diferenciação atrasada

Se $u_{i-1/2} < 0$ e $u_{i+1/2} < 0$, então:

$$\varphi_{i-\frac{1}{2}} = \varphi_i$$

$$\varphi_{i+\frac{1}{2}} = \varphi_{i+1}$$



Diferenciação atrasada

Propriedades:

- A formulação matemática é conservativa;
- É um esquema incondicionalmente estável;
- É sensível ao transporte de fluido, pois considera a convecção.

Desvantagens:

- Precisão de primeira ordem;
- Produz erros numéricos em um fluxo com direção diferente das direções dos eixos coordenados.

Diferenciação híbrida

(*"Hybrid"*)

Idéia geral: usa diferenças centrais quando a convecção é fraca, e usa diferenças atrasadas quando a convecção domina a difusão.

Diferenciação híbrida

Esquema:

(diferenças centrais)

$$\left| \frac{(\rho u)_{i\pm 1/2}}{\Gamma_{i\pm 1/2}/\Delta x} \right| < 2 \Rightarrow \begin{aligned} \varphi_{i+1/2} &= (\varphi_i + \varphi_{i+1})/2 \\ \varphi_{i-1/2} &= (\varphi_{i-1} + \varphi_i)/2 \end{aligned}$$

(diferenças atrasadas)

$$\frac{(\rho u)_{i\pm 1/2}}{\Gamma_{i\pm 1/2}/\Delta x} \geq 2 \Rightarrow \begin{aligned} \varphi_{i+1/2} &= \varphi_i \\ \varphi_{i-1/2} &= \varphi_{i-1} \end{aligned}$$

(diferenças atrasadas)

$$\frac{(\rho u)_{i\pm 1/2}}{\Gamma_{i\pm 1/2}/\Delta x} \leq -2 \Rightarrow \begin{aligned} \varphi_{i+1/2} &= \varphi_{i+1} \\ \varphi_{i-1/2} &= \varphi_i \end{aligned}$$

Diferenciação híbrida

Propriedades:

- A formulação matemática é conservativa;
- É um esquema incondicionalmente estável;
- É sensível ao transporte de fluido, semelhante à diferenciação atrasada;
- É mais preciso que a diferenciação atrasada em fluxos onde a convecção não domina a difusão.

Desvantagens:

- Precisão de primeira ordem;
- Produz erros numéricos em um fluxo com direção diferente das direções dos eixos coordenados.