Algoritmo SIMPLEC para acoplamento P-V/ρ

Alunos: André Medeiros, Fernando Grossi, Henrique Favarini

Algoritmo geral

1. Estimar os campos de u, v, P e ρ em $t = t+\Delta t$.

Ciclo:

- Ciclo:
  - 2. Calcular os coeficientes das equações de momento em x e y com os campos disponíveis.
  - Ciclo:
    - 3. Calcular os coeficientes das equações de correção de pressão (P').
    - 4. Calcular o campo u* e v* usando o campo de pressões de P*.
    - 5. Calcular o termo fonte das equações de correção de pressão.
    - 6a. Resolver as equações de correção de pressão (P').
    - 6b. Corrigir as velocidades (u* e v*) e a densidade (ρ*).
    - 6c. Calcular um novo campo de pressões.
  - 7. Retornar ao item 3 e iterar até convergir.
- 8. Retornar ao item 2 e iterar até convergir.
- 9a. Calcular os coeficientes das equações de energia.
- 9b. Resolver as equações de energia.
- 9c. Determinar um novo campo de temperaturas.
- 10. Determinar um novo campo de densidades pela equação de estado.

11. Retornar ao item 2 e iterar até convergir.

12. A solução obtida em $t=t+\Delta t$ é usada como campo inicial para o próximo intervalo de tempo.

Equação do momento em x:

$$\int_{V,t} \frac{\partial}{\partial t}(\rho u)\,dV\,dt + \int_{V,t} \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2)\,dV\,dt + \int_{V,t} \frac{\partial}{\partial y}(\rho u v)\,dV\,dt$$

$$= \int_{V,t} \frac{\partial}{\partial x}(\mu \frac{\partial u}{\partial x})\,dV\,dt + \int_{V,t} \frac{\partial}{\partial y}(\mu \frac{\partial u}{\partial y})\,dV\,dt + \int_{V,t} S\,dV\,dt$$

Termo fonte:

$$\int_{V,t} S\,dV\,dt \;=$$

$$\int_{V,t} \left[\frac{\partial}{\partial x}(\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \vec{V}) + \frac{\partial}{\partial x}(\mu \frac{\partial v}{\partial x}) - \frac{\partial P}{\partial x} \right] dV\,dt$$

Termo fonte discretizado:

$$\int_{V,t} S\,dV\,dt \approx S_P u_P + S_e u_E + S_w u_W + S_c$$

$$S_w = \frac{\Delta t\,\Delta y\,\mu_w}{3\,\Delta x} \qquad S_P = \frac{\Delta t\,\Delta y}{3\,\Delta x}\left(-\mu_e - \mu_w\right) \qquad S_e = \frac{\Delta t\,\Delta y\,\mu_e}{3\,\Delta x}$$

$$S_c = \Delta t\,\Delta x\left[\mu_n\left(\frac{\partial v^*}{\partial x}\right)_n - \mu_s\left(\frac{\partial v^*}{\partial x}\right)_s\right]$$
$$+\ \Delta t\,\Delta y\left[-\frac{2}{3}\mu_e\left(\frac{\partial v^*}{\partial y}\right)_e + \frac{2}{3}\mu_w\left(\frac{\partial v^*}{\partial y}\right)_w\right] - \Delta t\,\Delta y\left(P_E - P_W\right)$$

Exemplo de cálculo de μ nas faces:

$$\mu_e = \left(\frac{1}{2} + \gamma_e\right)\mu_P + \left(\frac{1}{2} - \gamma_e\right)\mu_E$$

Equação do momento-x discretizada:

$$A_P u_p + A_e u_E + A_w u_W + A_n u_N + A_s u_S = S_c + \frac{\rho_P^{(0)} \Delta x \Delta y}{\Delta t} u_P^{(0)}$$

$$A_P = -A_e - A_w - A_n - A_s - S_P + \frac{\rho_P^{(0)} \Delta x \Delta y}{\Delta t}$$

$$A_e = \left(\frac{1}{2} - \gamma_e\right) \rho_e{}^* u_e{}^* \Delta y - \frac{\mu_e \Delta y}{\Delta x} \beta_e - S_e$$

$$A_w = -\left(\frac{1}{2} + \gamma_w\right) \rho_w{}^* u_w{}^* \Delta y - \frac{\mu_w \Delta y}{\Delta x} \beta_w - S_w$$

$$A_n = \left(\frac{1}{2} - \gamma_n\right) \rho_n{}^* v_n{}^* \Delta x - \frac{\mu_n \Delta x}{\Delta y} \beta_n$$

$$A_s = -\left(\frac{1}{2} + \gamma_s\right) \rho_s{}^* v_s{}^* \Delta x - \frac{\mu_s \Delta x}{\Delta y} \beta_s$$

Observação: cálculos das velocidades nas interfaces:

$$u_e{}^{*} = \frac{(A_P)_P u_P{}^{*} + (A_P)_E u_E{}^{*}}{(A_P)_P + (A_P)_E}$$

Algoritmo geral

1. Estimar os campos de u, v, P e ρ em t = t+Δt.
Ciclo:
    Ciclo:
    2. Calcular os coeficientes das equações de momento em x e y com os campos disponíveis.
        Ciclo:
            3. Calcular os coeficientes das equações de correção de pressão (P').
            4. Calcular o campo u* e v* usando o campo de pressões de P*.
            5. Calcular o termo fonte das equações de correção de pressão.
            6a. Resolver as equações de correção de pressão (P').
            6b. Corrigir as velocidades (u* e v*) e a densidade (ρ*).
            6c. Calcular um novo campo de pressões.
        7. Retornar ao item 3 e iterar até convergir.
    8. Retornar ao item 2 e iterar até convergir.
    9a. Calcular os coeficientes das equações de energia.
    9b. Resolver as equações de energia.
    9c. Determinar um novo campo de temperaturas.
    10. Determinar um novo campo de densidades pela equação de estado.
11. Retornar ao item 2 e iterar até convergir.
12. A solução obtida em t=t+Δt é usada como campo inicial para o próximo intervalo de tempo.

Equação de correção das pressões:

$$L_P P_P' + L_e P_E' + L_w P_W' + L_n P_N' + L_s P_S' = b^{P'}$$

$$L_P = \frac{m_P^\rho}{R T_P} + m_e^u d_e^u - m_w^u d_w^u + m_n^v d_n^v - m_s^v d_s^v$$

$$L_e = \frac{m_e^\rho}{R \ \ T_E} - m_e^u d_e^u \qquad L_w = \frac{m_w^\rho}{R \ \ T_W} + m_w^u d_w^u$$

$$L_n = \frac{m_n^\rho}{R \ \ T_N} - m_n^v d_n^v \qquad L_s = \frac{m_s^\rho}{R \ \ T_S} + m_s^v d_s^v$$

Onde (por exemplo):

$$d_e^u = \left(\frac{\Delta y}{A_P}\right)_e \qquad m_e^\rho = \left(\frac{1}{2} - \gamma_e\right) u_e{}^* \Delta y$$

$$m_e^u = \left[\left(\frac{1}{2} + \gamma_e\right)\rho_P{}^* + \left(\frac{1}{2} - \gamma_e\right)\rho_E{}^*\right]\Delta y$$

Algoritmo geral

1. Estimar os campos de u, v, P e ρ em t = t+Δt.

Ciclo:

Ciclo:

2. Calcular os coeficientes das equações de momento em x e y com os campos disponíveis.

Ciclo:

3. Calcular os coeficientes das equações de correção de pressão (P').
4. Calcular o campo u* e v* usando o campo de pressões de P*.
5. Calcular o termo fonte das equações de correção de pressão.

6a. Resolver as equações de correção de pressão (P').

6b. Corrigir as velocidades (u* e v*) e a densidade (ρ*).

6c. Calcular um novo campo de pressões.

7. Retornar ao item 3 e iterar até convergir.

8. Retornar ao item 2 e iterar até convergir.

9a. Calcular os coeficientes das equações de energia.

9b. Resolver as equações de energia.

9c. Determinar um novo campo de temperaturas.

10. Determinar um novo campo de densidades pela equação de estado.

11. Retornar ao item 2 e iterar até convergir.

12. A solução obtida em t=t+Δt é usada como campo inicial para o próximo intervalo de tempo.

Termo fonte da equação de correção de pressões:

$$b^{P'} = \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} \rho_P^{(0)} - m_P^{\rho} \rho_P{}^{*} - m_e^{\rho} \rho_E{}^{*} - m_w^{\rho} \rho_W{}^{*} - m_n^{\rho} \rho_N{}^{*} - m_s^{\rho} \rho_S{}^{*}$$

Algoritmo geral

1. Estimar os campos de u, v, P e ρ em t = t+Δt.

Ciclo:

Ciclo:

2. Calcular os coeficientes das equações de momento em x e y com os campos disponíveis.

Ciclo:

3. Calcular os coeficientes das equações de correção de pressão (P').
4. Calcular o campo u* e v* usando o campo de pressões de P*.
5. Calcular o termo fonte das equações de correção de pressão.

6a. Resolver as equações de correção de pressão (P').

6b. Corrigir as velocidades (u* e v*) e a densidade (ρ*).

6c. Calcular um novo campo de pressões.

7. Retornar ao item 3 e iterar até convergir.
8. Retornar ao item 2 e iterar até convergir.

9a. Calcular os coeficientes das equações de energia.

9b. Resolver as equações de energia.

9c. Determinar um novo campo de temperaturas.

10. Determinar um novo campo de densidades pela equação de estado.
11. Retornar ao item 2 e iterar até convergir.
12. A solução obtida em t=t+Δt é usada como campo inicial para o próximo intervalo de tempo.

Correção de velocidades e densidades:

$$u_e = u_e{}^* - d_e^u (P_E{}' - P_P{}')$$

$$u_w = u_w{}^* - d_w^u (P_P{}' - P_W{}')$$

$$v_n = v_n{}^* - d_n^v (P_N{}' - P_P{}')$$

$$v_s = v_s{}^* - d_s^v (P_P{}' - P_S{}')$$

$$u_P = \frac{u_e + u_w}{2} \qquad v_P = \frac{v_n + v_s}{2}$$

$$\rho = \rho^* + \frac{P'}{RT}$$

Algoritmo geral

1. Estimar os campos de u, v, P e ρ em t = t+Δt.

Ciclo:

  Ciclo:

  2. Calcular os coeficientes das equações de momento em x e y com os campos disponíveis.

   Ciclo:

   3. Calcular os coeficientes das equações de correção de pressão (P').
   4. Calcular o campo u* e v* usando o campo de pressões de P*.
   5. Calcular o termo fonte das equações de correção de pressão.
   6a. Resolver as equações de correção de pressão (P').
   6b. Corrigir as velocidades (u* e v*) e a densidade (ρ*).
   6c. Calcular um novo campo de pressões (P = P* + P').
   7. Retornar ao item 3 e iterar até convergir.

  8. Retornar ao item 2 e iterar até convergir.
  9a. Calcular os coeficientes das equações de energia.
  9b. Resolver as equações de energia.
  9c. Determinar um novo campo de temperaturas.
  10. Determinar um novo campo de densidades pela equação de estado.

11. Retornar ao item 2 e iterar até convergir.

12. A solução obtida em t=t+Δt é usada como campo inicial para o próximo intervalo de tempo.

Equação da energia:

$$\int_{V,t} \frac{\partial}{\partial t}(E_t)\,dV\,dt \;+\; \int_{V,t} \frac{\partial}{\partial x}\left[(E_t+p)u-u\tau_{xx}-v\tau_{xy}+q_x\right]dV\,dt$$
$$+\;\int_{V,t} \frac{\partial}{\partial y}\left[(E_t+p)v-u\tau_{xy}-v\tau_{yy}+q_y\right]dV\,dt \;=\; 0$$

Versão discretizada:

$$F_P(E_t)_P+F_e(E_t)_E+F_w(E_t)_W+F_n(E_t)_N+F_s(E_t)_S \;=\; B$$

Coeficientes da equação da energia:

$$F_P = 1 + \frac{\Delta t}{\Delta x} u_e \left(\frac{1}{2} + \gamma_e \right) - \frac{\Delta t}{\Delta x} u_w \left(\frac{1}{2} - \gamma_w \right) + \frac{\Delta t}{\Delta y} v_n \left(\frac{1}{2} + \gamma_n \right) - \frac{\Delta t}{\Delta y} v_s \left(\frac{1}{2} - \gamma_s \right)$$

$$F_e = \frac{\Delta t}{\Delta x} u_e \left(\frac{1}{2} - \gamma_e \right) \qquad F_w = - \frac{\Delta t}{\Delta x} u_w \left(\frac{1}{2} + \gamma_w \right)$$

$$F_n = \frac{\Delta t}{\Delta y} v_n \left(\frac{1}{2} - \gamma_n \right) \qquad F_s = - \frac{\Delta t}{\Delta y} v_s \left(\frac{1}{2} + \gamma_s \right)$$

Termo fonte da equação da energia:

$$B = (E_t^{(0)})_P$$
$$- \frac{\Delta t}{\Delta x}\left[(pu)_e - (u\tau_{xx})_e - (v\tau_{xy})_e + (q_x)_e - (pu)_w + (u\tau_{xx})_w + (v\tau_{xy})_w - (q_x)_w\right]$$
$$- \frac{\Delta t}{\Delta y}\left[(pv)_n - (u\tau_{xy})_n - (v\tau_{yy})_n + (q_y)_n - (pv)_s + (u\tau_{xy})_s + (v\tau_{yy})_s - (q_y)_s\right]$$

Exemplos de cálculos dos membros do termo fonte:

$$(E_t^{(0)})_P = \rho_P^{(0)}\left(c_v T_P^{(0)} + \frac{(u_P^{(0)})^2 + (v_P^{(0)})^2}{2}\right)$$

$$p_e = \left(\frac{1}{2} + \gamma_e\right) p_P + \left(\frac{1}{2} - \gamma_e\right) p_E$$

$$(\tau_{xy})_e \approx \mu_e\left(\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_e + \frac{(v_e - v_P)}{\Delta x}\right)$$

Algoritmo geral

1. Estimar os campos de u, v, P e ρ em $t = t+\Delta t$.

Ciclo:

Ciclo:

2. Calcular os coeficientes das equações de momento em x e y com os campos disponíveis.

Ciclo:

3. Calcular os coeficientes das equações de correção de pressão (P').
4. Calcular o campo u* e v* usando o campo de pressões de P*.
5. Calcular o termo fonte das equações de correção de pressão.

6a. Resolver as equações de correção de pressão (P').

6b. Corrigir as velocidades (u* e v*) e a densidade (ρ*).

6c. Calcular um novo campo de pressões ($P = P^* + P'$).

7. Retornar ao item 3 e iterar até convergir.
8. Retornar ao item 2 e iterar até convergir.

9a. Calcular os coeficientes das equações de energia.

9b. Resolver as equações de energia.

9c. Determinar um novo campo de temperaturas.

10. Determinar um novo campo de densidades pela equação de estado.
11. Retornar ao item 2 e iterar até convergir.
12. A solução obtida em $t=t+\Delta t$ é usada como campo inicial para o próximo intervalo de tempo.

Determinar um campo de temperaturas usando energias obtidas:

$$e_P = \frac{(E_t)_P}{\rho_P} - \frac{(u_P^2 + v_P^2)}{2}$$

$$\Rightarrow \quad T_P = \frac{e_P}{c_v}$$

Algoritmo geral

1. Estimar os campos de u, v, P e ρ em t = t+Δt.

Ciclo:

  Ciclo:

  2. Calcular os coeficientes das equações de momento em x e y com os campos disponíveis.

   Ciclo:

   3. Calcular os coeficientes das equações de correção de pressão (P').
   4. Calcular o campo u* e v* usando o campo de pressões de P*.
   5. Calcular o termo fonte das equações de correção de pressão.
   6a. Resolver as equações de correção de pressão (P').
   6b. Corrigir as velocidades (u* e v*) e a densidade (ρ*).
   6c. Calcular um novo campo de pressões (P = P* + P').
   7. Retornar ao item 3 e iterar até convergir.

  8. Retornar ao item 2 e iterar até convergir.
  9a. Calcular os coeficientes das equações de energia.
  9b. Resolver as equações de energia.
  9c. Determinar um novo campo de temperaturas.
  10. Determinar um novo campo de densidades pela equação de estado.

11. Retornar ao item 2 e iterar até convergir.

12. A solução obtida em t=t+Δt é usada como campo inicial para o próximo intervalo de tempo.

Equação de estado:

$$\rho = \frac{p}{R\,T}$$

Algoritmo geral

1. Estimar os campos de u, v, P e ρ em $t = t+\Delta t$.

Ciclo:

Ciclo:

2. Calcular os coeficientes das equações de momento em x e y com os campos disponíveis.

Ciclo:

3. Calcular os coeficientes das equações de correção de pressão (P').
4. Calcular o campo u* e v* usando o campo de pressões de P*.
5. Calcular o termo fonte das equações de correção de pressão.

6a. Resolver as equações de correção de pressão (P').

6b. Corrigir as velocidades (u* e v*) e a densidade (ρ*).

6c. Calcular um novo campo de pressões ($P = P^* + P'$).

7. Retornar ao item 3 e iterar até convergir.

8. Retornar ao item 2 e iterar até convergir.

9a. Calcular os coeficientes das equações de energia.

9b. Resolver as equações de energia.

9c. Determinar um novo campo de temperaturas.

10. Determinar um novo campo de densidades pela equação de estado.
11. Retornar ao item 2 e iterar até convergir.
12. A solução obtida em $t=t+\Delta t$ é usada como campo inicial para o próximo intervalo de tempo.