CICLOS HAMILTONIANOS, EULARIANOS E O PROBLEMA DO CAIXEIRO VIAJANTE

DCE529 - Algoritmos e Estruturas de Dados III

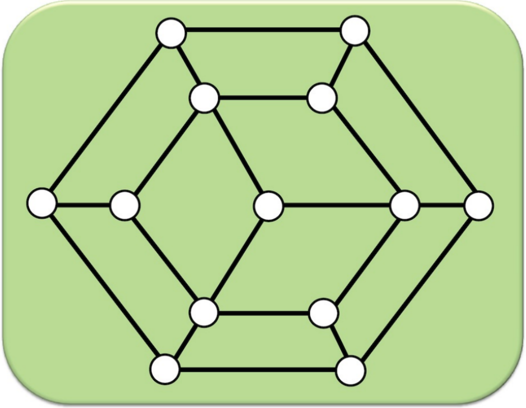
Atualizado em: 2 de maio de 2025

Iago Carvalho

Departamento de Ciência da Computação

CAMINHO E CICLO HAMILTONIANO

Em 1856, Thomas Penyngton Kirkman, escreveu um trabalho que examinava as condições de existência de ciclos que não repetissem vértices ou arestas, desenvolvidos sobre certos tipos de sólidos.



CICLO HAMILTONIANO

O problema tratado por Kirkman é um dos principais problemas tratando ciclos em grafos

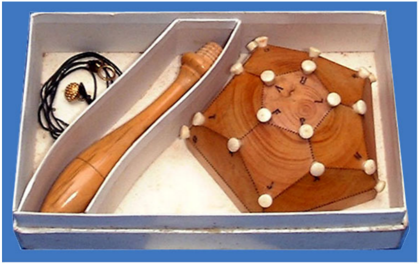
- Um ciclo que passa por todos os vértices do grafo sem repetir nenhum
- Início e fim no mesmo vértice

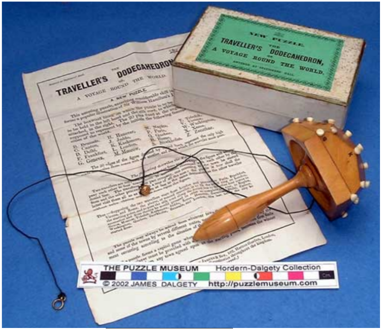
Diversas aplicações

- Tanto teóricas quanto reais

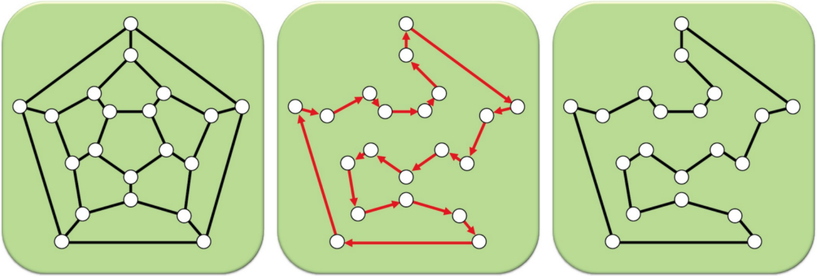
Historicamente, estes ciclos são denominados **Hamiltonianos**, devido a William Rowan Hamilton (matemático, físico e astrônomo irlandês), que, em 1957 propôs um jogo que denominou *Around the World*

AROUND THE WORLD





AROUND THE WORLD



GRAFOS HAMILTONIANOS E SEMI-HAMILTONIANOS

Caminho hamiltoniano: caminho que passa por cada vértice do grafo uma única vez

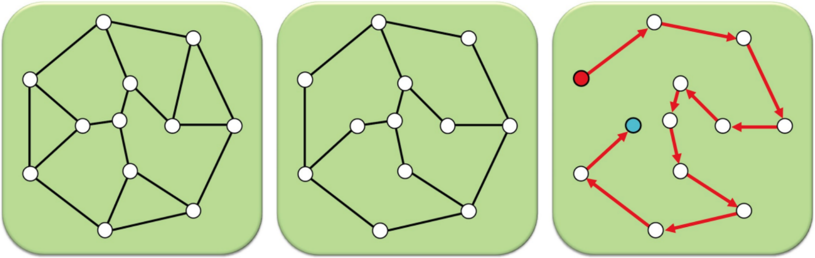
Ciclo hamiltoniano: caminho hamiltoniano que retorna ao vértice inicial

Grafo hamiltoniano: um grafo que possui um ciclo hamiltoniano

Grafo semi-hamiltoniano: grafo que possui um caminho hamiltoniano

- Todo grafo hamiltoniano também é semi-hamiltoniano

GRAFOS HAMILTONIANOS



COMO DESCOBRIR SE GRAFO É HAMILTONIANO

Teorema de Dirac, 1952

Um grafo G é hamiltoniano se $|V| \geq 3$ e $d(v) \geq \frac{|V|}{2} \, \forall v \in V$

Teorema de Ore, 1961

Se $|V| \geq 3$ e a soma dos graus de cada par de vértice não adjacente é maior ou igual que $|V|$, então o grafo é hamiltoniano

Teorema de Bondy e Chvátal, 1976

Se o fecho hamiltoniano de G for um grafo completo, então ele é hamiltoniano

FECHO HAMILTONIANO

O fecho hamiltoniano $\phi(G)$ de um grafo pode ser obtido seguindo o procedimento abaixo

1. Para cada par de vértices $u, v \in V$ não adjacente
2. Se a soma dos graus de u e v é maior ou igual a $|V|$
3. Adicione uma aresta entre u e v

O procedimento acima é repetido até que não exista nenhum par de vértice u e v que satisfaça a esta condição

COMPLEXIDADE

Decidir se o grafo possui um ciclo hamiltoniano é um problema NP-Completo

A proposição acima é verdade mesmo se

- Se o grafo é planar
- Se o grafo possui um caminho hamiltoniano ▸ Link

CICLO EULERIANO

CICLO EULERIANO

Teoricamente, diz-se que o problema do ciclo euleriano deu início a área de teoria de grafos

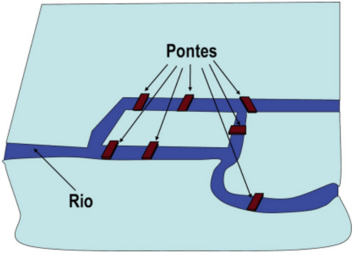
Euler estava visitando a cidade de Königsberg (Kaliningrado, Rússia) no Século XVIII

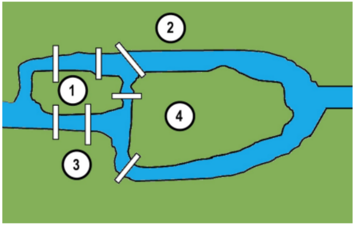
- O rio Pregolya cortava a cidade de ponta a ponta, dividindo-a em duas ilhas
- Existem sete pontes sob o rio Pregolya

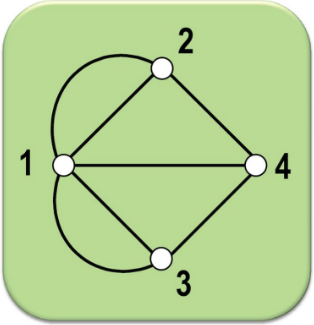
Alguns amigos de Euler disseram a ele que estavam tentando criar um caminho que atravesasse todas as pontes da cidade e retornasse ao ponto inicial

- Não era permitido repetir nenhuma ponte

KÖNIGSBERG







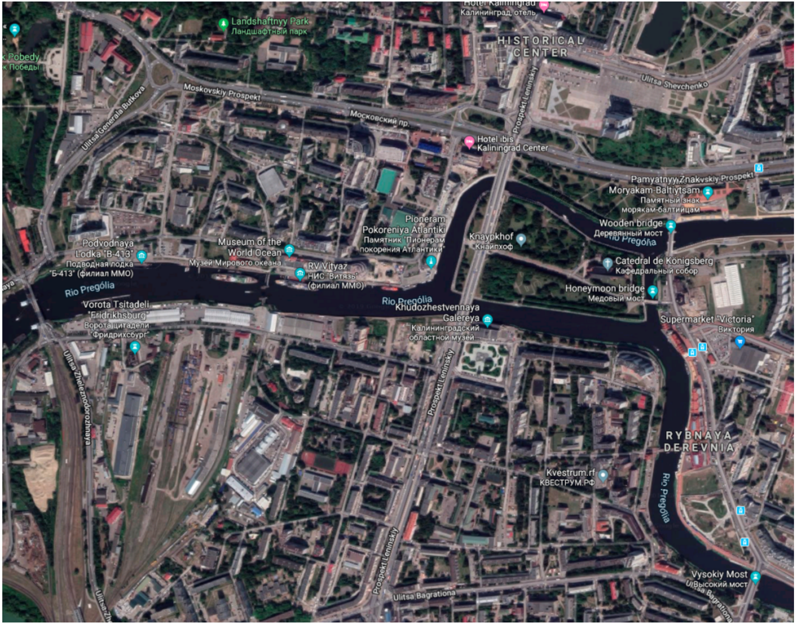
CAMINHO EULERIANO

Estudando o problema, Euler "inventou"a teoria de grafos

Ele demonstrou que o percurso pretendido era impossível

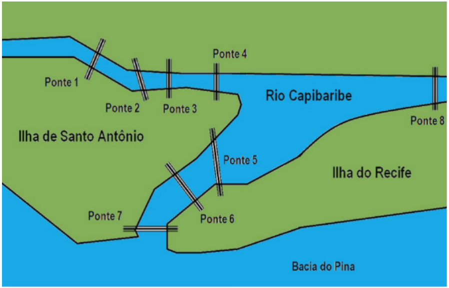
A partir daí, o problema de determinar se um grafo possui um ciclo fechado, passando por todas suas arestas sem repetição, passou a ser conhecido como Ciclo Euleriano

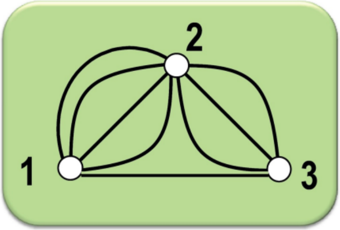
ATUAL CIDADE DE KALININGRADO



RECIFE

A cidade de Recife, em Pernambuco, possui um desenho semelhante a Königsberg





Ela possui um ciclo euleriano?

GRAFOS EULERIANOS E SEMI-EULERIANOS

Caminho euleriano: caminho que passa por cada aresta do grafo uma única vez

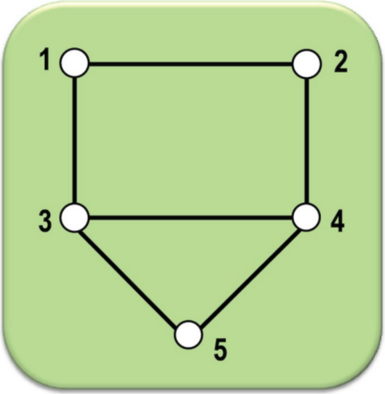
Ciclo euleriano: caminho euleriano que retorna ao vértice inicial

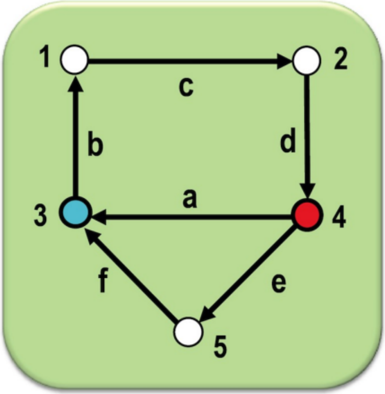
Grafo euleriano: um grafo que possui um ciclo euleriano

Grafo semi-euleriano: grafo que possui um caminho euleriano

- Todo grafo euleriano também é semi-euleriano

GRAFO SEMI-EULERIANO E SEU CAMINHO





COMO DESCOBRIR SE GRAFO É EULERIANO

Grafo euleriano (Teorema de Euler, 1952)

Um grafo G é euleriano se e somente se todos seus vértices possuem grau par

Grafo não euleriano

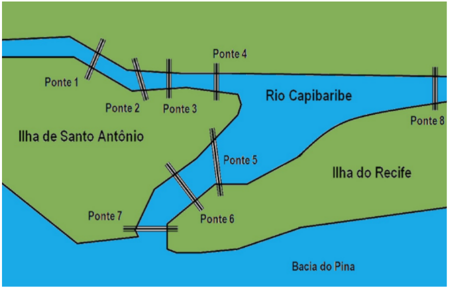
Um grafo G não é euleriano se e somente se existem dois ou mais vértices de grau ímpar

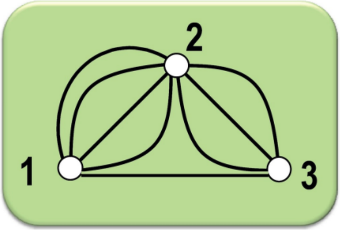
Grafo semi-euleriano

Um grafo G é semi-euleriano se e somente se existem exatamente dois vértices de grau ímpar

RECIFE

As pontes de Recife admitem um ciclo euleriano? E um caminho?





COMPLEXIDADE

Decidir se um grafo possui ou não caminho euleriano pode ser resolvido em tempo quadrático no número de vértices do grafo

- Basta verificar o grau de cada vértice

Encontrar este caminho ainda é um problema polinomial

- Algoritmo de Fleury ▸ Link

CAIXEIRO VIAJANTE

O PROBLEMA DO CAIXEIRO VIAJANTE

O Problema do Caixeiro Viajante (TSP, do inglês *Traveling Salesman Problem*) é um dos problemas de otimização mais estudados no mundo

Nele, existe um caixeiro que deseja passar por um conjunto de cidades e retornar a seu ponto de origem

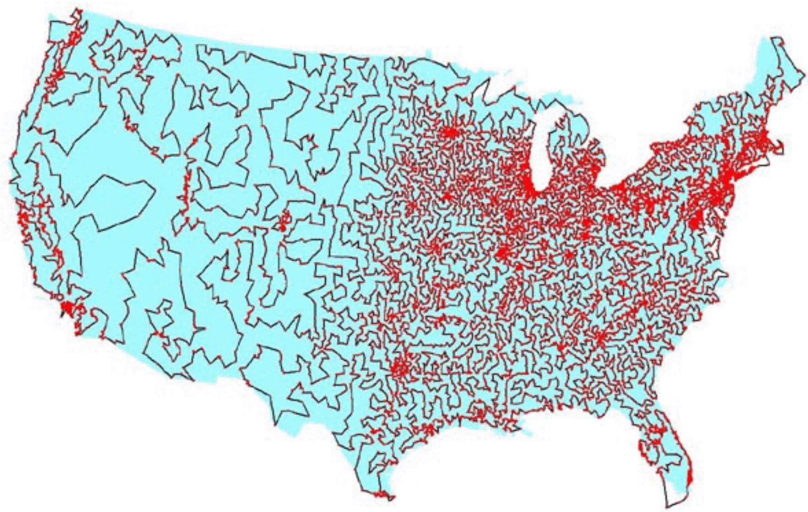
- Sem repetir nenhuma cidade
- Arestas representam o custo de viagem entre duas cidades

É um problema de otimização NP-Difícil

- Qual é a rota do caixeiro com o menor custo possível?
- Versão de decisão NP-Completo

O PROBLEMA DO CAIXEIRO VIAJANTE

O PROBLEMA DO CAIXEIRO VIAJANTE



O PROBLEMA DO CAIXEIRO VIAJANTE

O PROBLEMA DO CAIXEIRO VIAJANTE

Este problema é uma generalização do problema do ciclo hamiltoniano

- Agora, com peso nas arestas

O peso das arestas pode representar diversos aspectos da viagem

- Custo
- Tempo
- Emissão de CO_2

Geralmente, este problema é representado como um grafo completo

ALGORITMOS PARA O TSP

Existem diversos algoritmos para o TSP

- Algoritmos exatos baseados em métodos de programação matemática
- Algoritmos aproximativos
- Heurísticas e meta-heurísticas

No decorrer de nosso curso, vamos estudar mais algoritmos para este problema

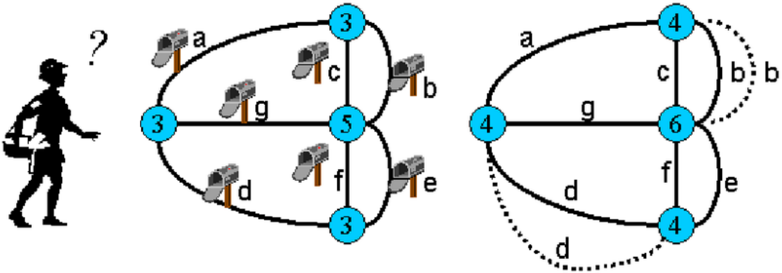
- Metaheurísticas de busca local
- Esquemas de vizinhança
- Metaheurísticas evolutivas
- Algoritmo aproximativo de Lin–Kernighan

VARIAÇÕES - PROBLEMA DO CARTEIRO CHINÊS

Este problema é similar ao problema do cíclulo euleriano em grafos com pesos

Deve-se obter um caminho passando por todas as arestas do grafo com o menor peso possível

- Deve-se voltar ao ponto original
- É possível repetir arestas



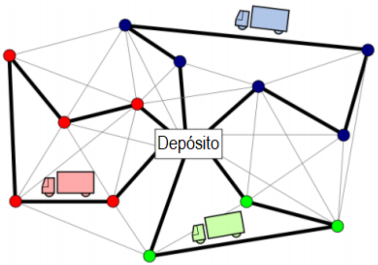
VARIAÇÕES - PROBLEMA DE ROTEAMENTO DE VEÍCULOS

Neste problema considera-se que existem múltiplos caixeiros

- Cada caixeiro representa um veículo

Deve-se obter uma rota para cada veículo

- Todas as cidades devem ser atendidas por um único veículo
- Custo total da rota é minimizada



VARIAÇÕES - TSP COM DRONES

Agora, o caixeiro viajante possui um drone capaz de realizar entregas para ele

- Drone possui bateria limitada
- Drone pode realizar entregas fora da rota do caixeiro