## Exercícios Propostos[1]

⚠ *Derivadas parciais*

**1.** Determine as derivadas parciais de primeira ordem da função.

(a) $f(x,y) = y^5 - 3xy$

(b) $f(x,y) = x^4y^3 + 8x^2y$

(c) $f(x,t) = e^{-t}\cos \pi x$

(d) $f(x,t) = \sqrt{x}\ln t$

(e) $z = (2x+3y)^{10}$

(f) $z = \tan xy$

(g) $f(x,y) = \dfrac{x}{y}$

(h) $f(x,y) = \dfrac{x}{(x+y)^2}$

(i) $w = \dfrac{e^v}{u+v^2}$

(j) $w = \operatorname{sen}\alpha \cos\beta$

(k) $f(x,y) = x^y$

(l) $f(x,y,z) = x\operatorname{sen}(y-z)$

(m) $w = \ln(x+2y+3z)$

(n) $w = ze^{xyz}$

**2.** Determine as derivadas parciais indicadas.

(a) $f(x,y) = \ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)$; $\quad f_x(3,4)$

(b) $f(x,y,z) = \dfrac{y}{x+y+z}$; $\quad f_y(2,1,-1)$

(c) $f(x,y,z) = \sqrt{\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^2 y + \operatorname{sen}^2 z}$; $\quad f_z(0,0,\pi/4)$

**3.** Use a derivação implícita para encontrar $\partial z/\partial x$ e $\partial z/\partial y$.

(a) $x^2+2y^2+3z^2 = 1$

(b) $x^2-y^2+z^2-2z = 4$

(c) $e^z = xyz$

(d) $yz + x\ln y = z^2$

**4.** A lei dos gases para $n$ mols de um gás ideal à temperatura absoluta $T$, pressão $P$ e volume $V$ é $PV = nRT$ (equação de Clapeyron), onde $R$ é a constante universal dos gases. Mostre que $\dfrac{\partial P}{\partial V}\dfrac{\partial V}{\partial T}\dfrac{\partial T}{\partial P} = -1$ e $\dfrac{\partial P}{\partial T}\dfrac{\partial V}{\partial T} = \dfrac{nR}{T}$.

⚠ *Derivadas parciais de ordens superiores*

**5.** Determine todas as derivadas parciais de segunda ordem.

(a) $f(x,y) = x+y+xy$

(b) $f(x,y) = x^3y^5 + 2x^4y$

(c) $f(x,y) = \operatorname{sen}^2(mx+ny)$

(d) $w = \sqrt{u^2+v^2}$

(e) $v = \dfrac{xy}{x-y}$

(f) $r = \ln(x+y)$

**6.** Verifique se a conclusão do Teorema de Clairaut é válida, isto é, $u_{xy} = u_{yx}$.

(a) $u = x^4y^3 - y^4$

(b) $u = e^{xy}\operatorname{sen} y$

(c) $u = \cos(x^2y)$

(d) $u = \ln(x+2y)$

[1] Resolva os exercícios sem omitir nenhuma passagem em seus cálculos. Respostas sem resolução e/ou justificativa não serão consideradas. **Data máxima de entrega: 26/06/2025 até 14:00 horas**

**7.** Soluções da equação de Laplace são chamadas de *funções harmônicas* e são muito importantes no estudo de condução do calor, escoamento de fluidos e potencial elétrico. Determine se cada uma das seguintes funções é solução da equação de Laplace:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

(a) $u = x^2 - y^2$

(b) $u = x^3 + 3xy^2$

(c) $u = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$

(d) $u = e^{-x}\cos y - e^{-y}\cos x$

**8.** Determine a(s) derivada(s) parcial(is) indicada(s).

(a) $f(x,y) = x^4y^2 - x^3y$; $f_{xxx}$, $f_{xyx}$

(b) $f(x,y) = \operatorname{sen}(2x+5y)$; $f_{yxy}$

(c) $f(x,y,z) = e^{xyz^2}$; $f_{xyz}$

(d) $u = e^{r\theta}\operatorname{sen}\theta$; $\dfrac{\partial^3 u}{\partial r^2 \partial\theta}$

⚠ *Diferenciabilidade, plano tangente e linearização*

**9.** Determine uma equação do plano tangente e da reta normal à superfície no ponto especificado.

(a) $z = 3y^2 - 2x^2 + x$, $(2,-1,-3)$

(b) $z = xe^{xy}$, $(2,0,2)$

(c) $z = x\sin(x+y)$, $(-1,1,0)$

(d) $z = \ln(x-2y)$, $(3,1,0)$

**10.** Explique por que a função é diferenciável no ponto dado. A seguir, encontre a linearização $L(x,y)$ (ou $L(x,y,z)$) da função naquele ponto.

(a) $f(x,y) = 1 + x\ln(xy-5)$, (2,3)

(b) $f(x,y) = \dfrac{x}{x+y}$, (2,1)

(c) $f(x,y) = \sqrt{x + e^{4y}}$, (3,0)

(d) $f(x,y,z) = xy + yz + xz$, $(1,1,1)$

(e) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, $(0,1,0)$

(f) $f(x,y,z) = e^x + \cos(y+z)$, $\left(0, \frac{\pi}{2}, 0\right)$

**11.** Resolva os seguintes exercícios:

(a) Dado que $f$ é uma função diferenciável e $f(2,5) = 6$, $f_x(2,5) = 1$ e $f_y(2,5) = -1$, use uma aproximação linear para estimar $f(x_0, y_0)$, onde $x_0 = 2,2$ e $y_0 = 4,9$.

(b) Determine a aproximação linear da função $g(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ em $(3,2,6)$ e use-a para aproximar o número $\sqrt{(3,02)^2 + (1,97)^2 + (5,99)^2}$.

**12.** Resolva os exercícios abaixo.

(a) O comprimento e a largura de um retângulo foram medidos como 30 cm e 24 cm, respectivamente, com um erro de medida de, no máximo, 0,1 cm. Utilize as diferenciais para estimar o erro máximo cometido no cálculo da área do retângulo.

(b) A resistência total $R$ de dois resistores $R_1$ e $R_2$, ligados em paralelo, é dada por $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}$. Se as medidas de $R_1$ e $R_2$ são 100 e 200 ohm, respectivamente, com erro máximo de $\pm 1\%$ em cada medida, encontre uma aproximação do erro máximo no valor calculado de $R$.