Exercícios Propostos[1]

⚠ *Domínio de funções e curvas de nível*

1. Determine e esboce os domínios das funções dadas

(a) $f(x,y)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$

(b) $f(x,y)=\sqrt{xy}$

(c) $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

(d) $f(x,y)=\dfrac{1}{e^x+e^y}$

(e) $f(x,y)=\sqrt{x}+\sqrt{y}$

(f) $f(x,y)=\dfrac{1}{x-y^2}$

(g) $f(x,y)=\sqrt{x+y}$

(h) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-1}$

(i) $f(x,y)=\sqrt{y-x}\ln(x+y)$

2. Faça o mapa de contorno da função mostrando algumas curvas de nível.

(a) $f(x,y)=xy$

(b) $f(x,y)=x+y$

(c) $f(x,y)=y^2-x^2$

(d) $f(x,y)=x-y^2$

(e) $f(x,y)=x^2+y^2$

(f) $f(x,y)=(y-2x)^2$

3. Uma placa fina de metal, localizada no plano xy, tem temperatura $T(x,y)$ no ponto (x,y). As curvas de nível de T são chamadas de *isotérmicas* porque todos os pontos em uma dessas curvas têm a mesma temperatura. Faça o esboço de algumas isotérmicas se a função temperatura for dada por $T(x,y)=\dfrac{100}{1+x^2+2y^2}$.

4. Se $V(x,y)$ é o potencial elétrico em um ponto (x,y) no plano xy, então as curvas de nível de V são chamadas de *curvas equipotenciais*, porque em todos os pontos dessa curva o potencial elétrico é o mesmo. Esboce algumas curvas equipotenciais de $V(x,y)=\dfrac{10}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$.

⚠ *Parametrização de curvas no plano*

5. Determine a velocidade $(\mathbf{r}'(t))$ e a aceleração $(\mathbf{r}''(t))$ e a velocidade escalar (norma do vetor velocidade, isto é, $||\mathbf{r}'(t)||$) da partícula cuja função posição $\mathbf{r}(t)=(x(t),y(t))=x(t)\mathbf{i}+y(t)\mathbf{j}$ é dada. Esboce a trajetória da partícula no plano xy e desenhe os vetores velocidade e aceleração para os valores de t especificados.

(a) $\mathbf{r}(t)=\left(-\dfrac{t^2}{2},t\right)$, $t=2$

(b) $\mathbf{r}(t)=\left(2-t,4\sqrt{t}\right)$, $t=1$

(c) $\mathbf{r}(t)=2\cos t\ \mathbf{i}+2\sin t\ \mathbf{j}$, $t=\pi/3$.

(d) $\mathbf{r}(t)=e^t\mathbf{i}+e^{2t}\mathbf{j}$, $t=0$

⚠ *Limites usando fatoração*

6. Encontre os limites realizando primeiro a simplificação das frações.

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)}\frac{x^2-2xy+y^2}{x-y}$

(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)}\frac{x^2-y^2}{x-y}$

[1]Resolva os exercícios sem omitir nenhuma passagem em seus cálculos. Respostas sem resolução e/ou justificativa não serão consideradas. **Data máxima de entrega: 26/06/2025 até 14:00 horas**

(c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{xy - y - 2x + 2}{x - 1}$

(d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,-4)} \frac{y + 4}{x^2y - xy + 4x^2 - 4x}$

(e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x - y + 2\sqrt{x} - 2\sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$

(f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(4,3)} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y+1}}{x - y - 1}$

(g) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{x^3 + y^3}{x + y}$

(h) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{x - y}{x^4 - y^4}$

⚠ *Limites usando parametrizações*

7. Mostre que os limites abaixo não existem.

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4}{x^4 + y^2}$

(c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 - y^2}{x^4 + y^2}$

(d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{|xy|}$

(e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{xy^2 - 1}{y - 1}$

(f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{xy + 1}{x^2 - y^2}$

8. Utilize coordenadas polares para determinar o limite, isto é, considere a parametrização $\gamma_\theta(r) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$. Note que se (r, θ) são as coordenadas polares de (x, y) com $r \geq 0$, tem-se que $r \to 0^+$ quando $(x, y) \to (0, 0)$.

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^2}$

(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}$

(c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

(d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$

(e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2 + y^2)\ln(x^2 + y^2)$

(f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{-x^2-y^2} - 1}{x^2 + y^2}$

9. Determine o limite, se existir, ou mostre que o limite não existe.

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,2)} (5x^3 - x^2y^2)$

(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{4 - xy}{x^2 + 3y^2}$

(c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \ln\left(\frac{1 + y^2}{x^2 + xy}\right)$

(d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{xy - y}{(x - 1)^2 + y^2}$

(e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 + \sin^2 y}{2x^2 + y^2}$

(f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,-1)} e^{-xy}\cos(x + y)$

(g) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy\cos y}{3x^2 + y^2}$

(h) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}$

⚠ *Continuidade de funções*

10. Seja $f(x, y) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ x^3, & x < 0 \end{cases}$. Encontre os seguintes limites:

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(3,-2)} f(x, y)$

(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(-2,1)} f(x, y)$

(c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$

11. Seja $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2y}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ k, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$, onde k é uma constante.

(a) f é uma função contínua para $(x, y) \neq (0, 0)$? Justifique.

(b) Calcule $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$.

(c) Para qual valor de k a função f é contínua em todo o $\mathbb{R}^2$? Justifique.