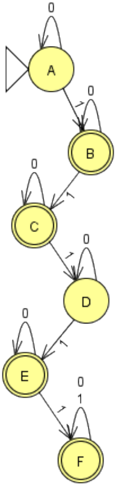


Teoria de Linguagens e Compiladores

Máquina de Turing

Luiz Eduardo da Silva

Universidade Federal de Alfenas

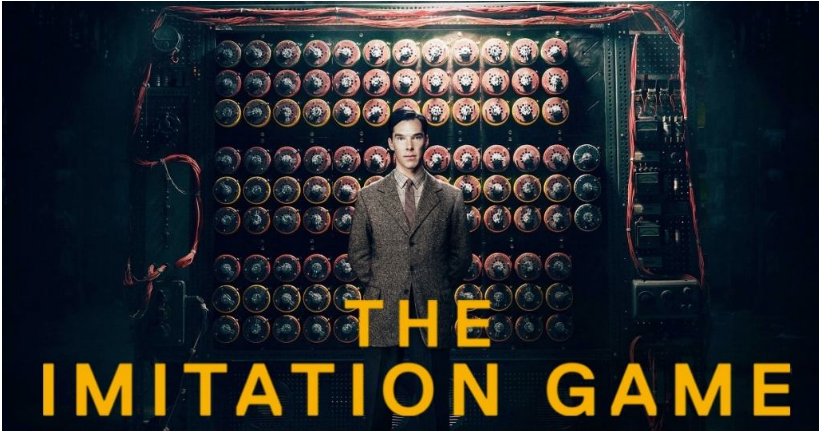
Agenda

Agenda

Máquina de Turing

- Aprendemos alguns modelos de computação:
  - Autômatos finitos: são dispositivos bons para sistemas de memória limitada e esquemas específicos de computação.
  - Autômato de pilha: estende o potencial do autômato com um modelo de armazenamento do tipo "o último que entra é o primeiro que sai", uma memória ilimitada nesse modelo de computação.
- Ainda assim, algumas tarefas simples não podem ser computadas por esses modelos.
- Apresentamos aqui um modelo mais poderoso, proposto por Alan Turing em 1936, chamado **máquina de Turing**.

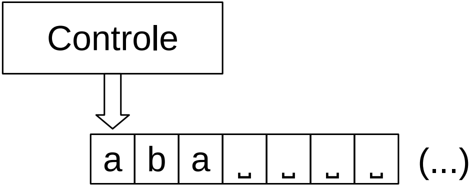
O filme - O Jogo da Imitação



Máquina de Turing

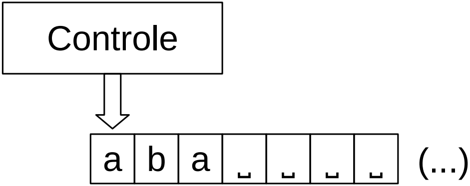
- A máquina de Turing é semelhante a um autômato finito, mas com memória ilimitada.
- É um modelo mais próximo de um computador de uso geral.
- A máquina de Turing faz o que um computador real é capaz de fazer.
- Ainda assim, a máquina de Turing não é capaz de resolver alguns problemas de computação (computabilidade).

Máquina de Turing



- O modelo da máquina de Turing usa uma fita ilimitada como sua memória.
- Ela tem um cabeçote que pode ler ou escrever símbolos na fita e mover-se sobre a fita.
- Inicialmente a fita contém a cadeia de entrada e o restante está em branco.
- Para armazenar informação a máquina escreve na fita.

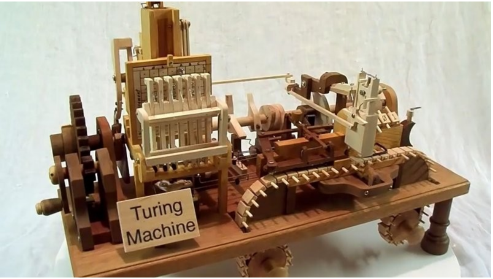
Máquina de Turing



- Para ler novamente a informação escrita a máquina pode mover a cabeça para a posição da fita onde a informação foi escrita.
- A máquina computa até que decide produzir uma saída. As saídas de *aceite* ou *rejeite* são obtidas quando a máquina muda para estados de aceitação e rejeição respectivamente.
- Se a máquina não entrar no estado de aceitação ou rejeição, continuará computando para sempre, sem parar.

Diferenças AF x MT

- MT pode ler e escrever sobre a fita.
- A cabeça de leitura pode mover-se tanto para direita como para esquerda.
- A fita é infinita.
- Os estados finais de aceitação e rejeição tem efeito imediatamente.



Um exemplo

- Para verificar informalmente o funcionamento da MT vamos construir uma máquina para verificar a pertinência de cadeias da linguagem:

$$B = \{w\#w | w \in \{0,1\}^*\}$$

- Suponha que a cadeia de entrada a ser verifica encontra-se já preenchida na fita. O objetivo é verificar se o que está escrito na fita é ou não membro da linguagem B, ou seja, se a entrada é composta de duas sequências idênticas de zeros e uns separados pelo símbolo $\#$.

Um exemplo

M_1 = "Sobre a cadeia de entrada w:

1. Faça um zigue-zague ao longo da fita checando os símbolos correspondentes em ambos os lados do símbolo # para verificar as correspondências. Se os símbolos não são correspondentes então a MT deve rejeitar a entrada. Marque com um x os símbolos que forem verificados para manter o registro de quais são correspondentes.
2. Quando todos os símbolos à esquerda da # for marcado, verifique a existência de algum símbolo à direita de # que não foi marcado. Se existir então rejeite, senão aceite a entrada.

0	1	1	0	0	0	#	0	1	1	0	0	0	⊔	...

Um exemplo

M_1 = "Sobre a cadeia de entrada w:

↴														
0	1	1	0	0	0	#	0	1	1	0	0	0	⊔	...
	↴													
x	1	1	0	0	0	#	0	1	1	0	0	0	⊔	...
							↴							
x	1	1	0	0	0	#	x	1	1	0	0	0	⊔	...
↴														
x	1	1	0	0	0	#	x	1	1	0	0	0	⊔	...
	↴													
x	x	1	0	0	0	#	x	1	1	0	0	0	⊔	...
													↴	
x	x	x	x	x	x	#	x	x	x	x	x	x	⊔	...

Definição formal de uma MT

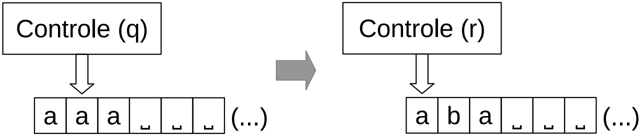
Uma **máquina de Turing** M é uma 7-upla, $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{aceita}, q_{rejeita})$, onde Q, Σ e Γ são conjuntos finitos e:

1. Q é o conjunto de **estados**
2. Σ é o **alfabeto de entrada** sem o símbolo branco $\sqcup$
3. Γ é o **alfabeto da fita**, onde $\sqcup \in \Gamma$ e $\Sigma \subseteq \Gamma$
4. $\delta : Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{E, D\}$ é a **função de transição**
5. $q_0 \in Q$ é o **estado inicial**
6. $q_{aceita} \in Q$ é o **estado de aceitação**
7. $q_{rejeita} \in Q$ é o **estado de rejeição**

A função de transição da MT

$$\delta : Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{E, D\}$$

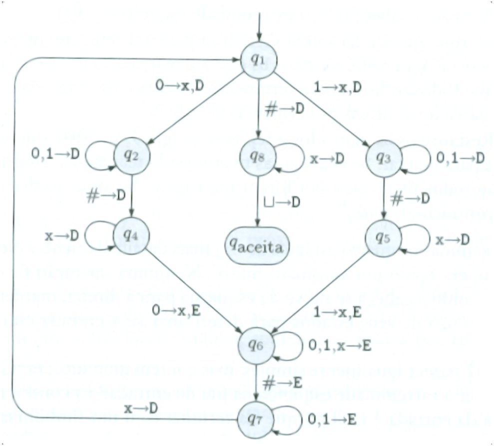
Se M está no estado q e a cabeça de leitura está sobre uma célula da fita contendo a, a transição $\delta(q, a) = (r, b, E)$ diz que M deve ir para o estado r, escrever b na fita e mover o cabeçote para **esquerda (E)**.



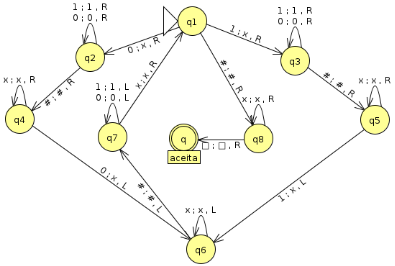
MT exemplo

MT para reconhecer $B = \{w\#w | w \in \{0,1\}^*\}$

1. $Q = \{q_1, q_2, ..., q_8, q_{aceita}, q_{rejeita}\}$.
2. $\Sigma = \{0, 1, \#\}$ e $\Gamma = \{0, 1, \#, x, \sqcup\}$
3. δ está representado no diagrama:



Função de transição



δ	0	1	$\#$	x	$\sqcup$
q_1	(q_2, x, D)	(q_3, x, D)	$(q_8, \#, D)$		
q_2	$(q_2, 0, D)$	$(q_2, 1, D)$	$(q_4, \#, D)$		
q_3	$(q_3, 0, D)$	$(q_3, 1, D)$	$(q_5, \#, D)$		
q_4	(q_6, x, E)			(q_4, x, D)	
q_5		(q_6, x, E)		(q_5, x, D)	
q_6			$(q_7, \#, E)$	(q_6, x, E)	
q_7	$(q_7, 0, E)$	$(q_7, 1, E)$		(q_1, x, D)	
q_8				(q_8, x, D)	$(q_{aceita}, \sqcup, D)$

Computação da MT

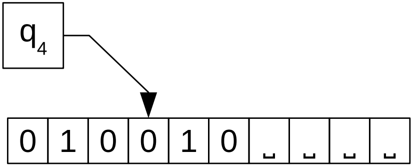
- A MT recebe a entrada $w = w_1 w_2 ... w_n \in \Sigma^*$ sobre as n primeiras células mais à esquerda da fita.
- A cabeça de leitura começa sobre w_1 e depois dos n símbolos estão símbolos em branco que não pertencem a Σ e por isso marcam o fim da cadeia de entrada.
- Se a cabeça tentar mover para uma posição mais à esquerda da primeira célula da fita, ela permanece na mesma posição.
- M continua até que encontra o estado de aceitação ou rejeição e se isso não acontece M continua para sempre.

Configuração

- Pode-se representar cada passo da computação da MT através de uma configuração instantânea.
- Para um estado q e duas cadeias $u, v \in \Gamma^*$, escrevemos uqv para configuração em que o estado atual é q, o conteúdo atual da fita é uv e a cabeça de leitura está sobre o primeiro símbolo de v.

Exemplo:

$$010q_4010$$



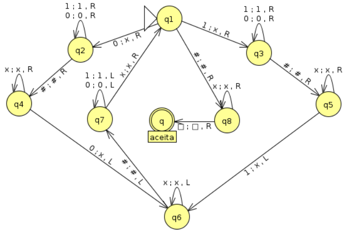
Configuração

Sejam $a, b \in \Gamma$, $u, v \in \Gamma^*$ e $q_i, q_j \in Q$

uaq_ibv	para $\delta(q_i, b) = (q_j, c, E)$ origina	uq_jacv
uaq_ibv	para $\delta(q_i, b) = (q_j, c, D)$ origina	$uacq_jv$

- Casos especiais ocorrem na extremidade da fita (início ou primeira posição de branco). q_ibv origina q_icv para um movimento para esquerda. uaq_i é equivalente a $uaq_i\sqcup$.
- A configuração inicial da MT é q_0w.
- A configuração de aceitação o estado é q_{aceita}.
- A configuração de rejeição o estado é $q_{rejeita}$.
- MT **aceita** a entrada w se temos a sequência de configurações $C_1, C_2, ...C_k$, onde:
  1. C_1 é a configuração inicial
  2. cada C_i origina C_{i+1} para $1 \leq i < k$
  3. C_k é a configuração de aceitação.

Exemplo de computação



$q_1 01\#01$	$xx\#xq_5 1$
$xq_2 1\#01$	$xx\#q_6 xx$
$x1q_2\#01$	$xxq_6\#xx$
$x1\#q_4 01$	$xq_7 x\#xx$
$x1q_6\#x1$	$xxq_1\#xx$
$xq_7 1\#x1$	$xx\#q_8 xx$
$q_7 x1\#x1$	$xx\#xq_8 x$
$xq_1 1\#x1$	$xx\#xxq_8 \sqcup$
$xxq_3\#x1$	$xx\#xx \sqcup \sqcup q_{aceita}$
$xx\#q_5 x1$	

Definições

Definição

Chame uma linguagem de **Turing-reconhecível** *(ou linguagem recursivamente enumerável), se alguma máquina de Turing a reconhece.*

A MT reconhece a linguagem aceitando ou rejeitando a cadeia de entrada, mas eventualmente pode entrar em loop.

Definição

Chame uma linguagem de **Turing-decidível** *(ou linguagem recursiva), se alguma máquina de Turing a decide.*

A MT sempre para com uma decisão de aceitar ou rejeitar a cadeia para a linguagem.

Exemplo 1

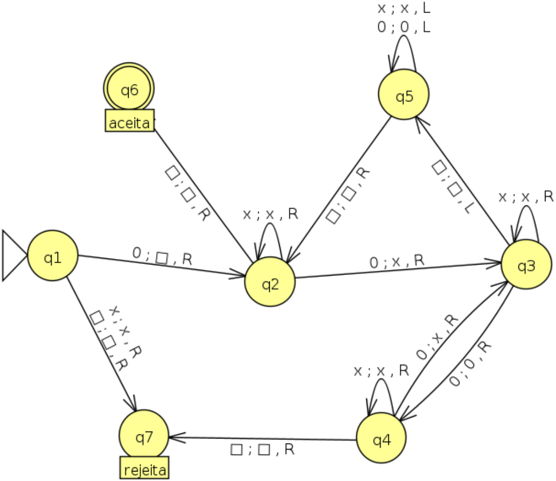
M_1 que decide $A = \{0^{2^n} | n \geq 0\}$

M_1 = "Sobre a cadeia de entrada w:

1. Faça uma varredura da esquerda para direita na fita, marcando um 0 sim e outro não.
2. Se no passo 1, a fita continha um único 0, *aceite*.
3. Se no passo 1, a fita continha mais que um único 0 e o número de 0s era ímpar, *rejeite*.
4. Retorne a cabeça de leitura para a extremidade esquerda da fita.
5. Vá para o passo 1."

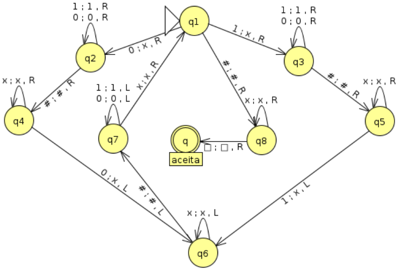
Exemplo 1

M_1 que decide $A = \{0^{2^n} | n \geq 0\}$



Exemplo 2

M_2 que decide $B = \{w\#w | w \in \{0,1\}^*\}$



Exemplo 3

M_3 que decide $C = \{a^i b^j c^k | i \times j = k \text{ e } i, j, k \geq 1\}$

M_3 = "Sobre a cadeia de entrada w:

1. Faça uma varredura da esquerda para direita na fita, para verificar se ela é membro de $a^+b^+c^+$, *rejeite* se não for.
2. Retorne a cabeça para a extremidade esquerda da fita.
3. Marque um a e faça uma varredura para a direita até encontrar um b. Vá e volte entre b's e c's, marcando um de cada até que todos os b's tenham terminado. Se todos os c's forem marcados e tiverem b's não marcados, *rejeite*.
4. Restaure os b's marcados e repita o passo 3, se existe algum outro a para marcar. Se todos os a's foram marcados, verifique se todos os c's também foram marcados. Se sim, *aceite*, senão *rejeite*."

Agenda

Variantes de MT

- Existem definições alternativas para Máquinas de Turing como MT com múltiplas fitas ou MT com indeterminismo.
- A MT e suas variantes tem o mesmo poder, ou seja, reconhecem as mesmas linguagens.
- Chamamos de **Robustez** a invariância da máquina de Turing a certas mudanças.
- Suponha uma MT que além de mover a cabeça para esquerda e direita, também pudesse ficar parada. A função de transição teria a forma: $\delta : Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{E, D, P\}$
- Podemos implementar essa opção (ficar parada) numa MT qualquer substituindo essa transição por duas, uma que move para direita e outra que move para esquerda.

MT Multifita

- Uma MT multifita é como uma MT comum, com a variação de possuir múltiplas fitas. Cada fita tem sua própria cabeça de leitura e escrita. Inicialmente a entrada aparece sobre a fita 1 e todas as outras iniciam em branco.
- A função de transição é modificada para permitir a leitura, escrita e movimentação nas fitas simultaneamente:

$$\delta : Q \times \Gamma^k \rightarrow Q \times \Gamma^k \times \{E, D, P\}^k$$

- A transição:

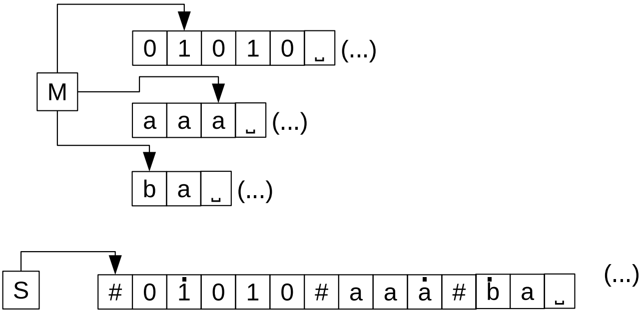
$$\delta(q_i, a_1, ...a_k) = (q_j, b_1, ..., b_k, E, D, ..., E)$$

Significa que se a MT está no estado q_i e lê nas fitas os símbolos $a_1, ..., a_k$, ela muda para o estado q_j, escreve nas fitas os símbolos $b_1, .., b_k$ e vai para direita, esquerda ou fica parada, conforme especificado.

MT Multifita

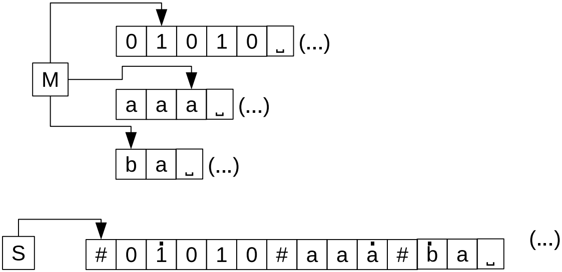
Teorema

Toda máquina de Turing Multifita (M) tem uma máquina de Turing de uma única fita (S) que lhe é equivalente.



Simulação em S

- S simula o efeito de k fitas armazenando sua informação na sua única fita.
- Usa-se o # como delimitador para separar o conteúdo de cada fita.
- Usa-se símbolos especiais (com um ponto acima) para representar a posição da cabeça em cada fita.



MT Não-Determinística

- Uma MT Não-Determinística é como uma MT comum, com a variação de que a qualquer ponto em uma computação, a máquina pode proceder de acordo com várias possibilidades.
- A função de transição é modificada da seguinte forma:

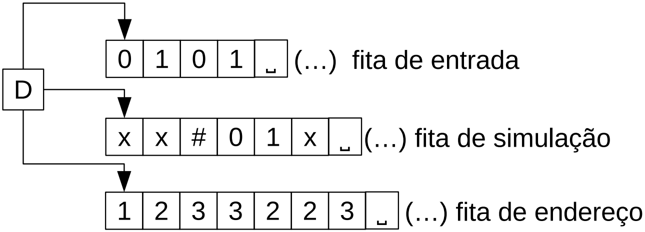
$$\delta : Q \times \Gamma \rightarrow P(Q \times \Gamma \times \{E, D, P\})$$

- A computação de uma máquina de Turing não-determinística é uma árvore em que cada ramo corresponde a uma configuração de computação diferente da MT.

MT Não-Determinística

Teorema

Toda máquina de Turing Não-Determinística (N) tem uma máquina de Turing determinística (D) que lhe é equivalente.



MT Não-Determinística

- A ideia é simular em D todos os ramos de computação não-determinística de N.
- Simulamos a computação de N sobre uma entrada w como uma árvore.
- Se D encontrar, em algum desses ramos de computação, o estado de aceitação, D aceita.
- Para simular esses vários ramos de computação usamos 3 fitas:
  - fita de entrada - que contém a entrada que não é modificada.
  - fita de simulação - que contém uma cópia da fita de entrada em algum ramo de computação
  - fita de endereço - contém o registro da posição de D, na árvore de computação não-determinística de N.

Enumeradores

- Usamos a terminologia *linguagem recursivamente enumerável* para linguagem Turing-reconhecível.
- Esse termo origina de uma máquina equivalente a máquina de turing chamado **enumerador**.
- Vagamente, um enumerador é uma MT com uma impressora, para imprimir as cadeias que ele reconhece.

Teorema

Uma linguagem é Turing-reconhecível se e somente se algum enumerador a enumera.

Equivalência com outros modelos

- Esses diversos modelos são equivalentes em poder, desde que eles satisfaçam a requisitos razoáveis.
- Uma analogia com linguagens de programação: Haskell e C.
  - Ambas tem estrutura e estilos diferentes.
  - Todo algoritmo pode ser implementado numa ou noutra linguagem.
  - Ainda que alguns algoritmos sejam mais fáceis de expressar em Haskell ou em C.

Agenda

Algoritmos

- É uma coleção de operações simples para realizar um tarefa.
- Muito importante na matemática (calculistas!)
- A definição precisa dos algoritmos foi crucial para um importante problema da matemática.
  - O décimo problema de Hilbert (1900) - conceber um algoritmo (*um processo com o qual ela possa ser determinada por um número finito de operações*) que testasse se um polinômio tinha um raiz inteira.

$$6x^3yz + 2xy^2 - x^3 - 10$$

  - A definição para algoritmos veio no sistema de λ-cálculos de Church e nas "máquinas"de Turing (1936).
  - A conexão entre a noção informal de algoritmos e a definição precisa é chamada **"tese de Church-Turing"**.

Terminologias para MTs

- Podemos padronizar a forma de descrever algoritmos para máquinas de Turing:
  - **Descrição formal** que esmiúça todos os detalhes da MT (estados, alfabetos, função de transição)
  - **Descrição da implementação** que usa a linguagem natural para descrever como a máquina de Turing move a cabeça e executa leituras e escritas para resolver o problema.
  - **Descrição de alto-nível** que usa a linguagem natural para descrever o algoritmo, sem se preocupar com os detalhes da implementação.

Exemplo

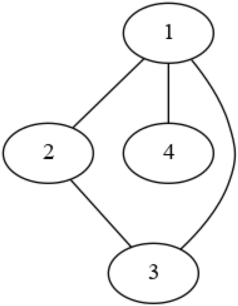
Seja A a linguagem consistindo de todas as cadeias representando grafos não-direcionados que são conexos.

$$A = \{< G > | G \text{ é um grafo não direcionado conexo } \}$$

$M_3 =$ "Sobre a entrada $< G >$, a representação de um grafo G:

1. Selecione o primeiro nó de G e marque-o.
2. Repita o seguinte passo até que nenhuma novo nó seja marcado
   2.1 Para cada nó de G, marque-o, se ele estiver ligado por uma aresta a um nó que já está marcado.
3. Faça uma varredura em todos os nós de G para determinar se eles estão todos marcados. Se sim, *aceite*, senão *rejeite*."

Grafo e sua representação



$$< G >= (1,2,3,4)((1,2),(2,3),(3,1),(1,4))$$