Universidade Federal do Pará
Instituto de Ciências Exatas e Naturais
Faculdade de Computação

GRAFOS

Conceitos Básicos

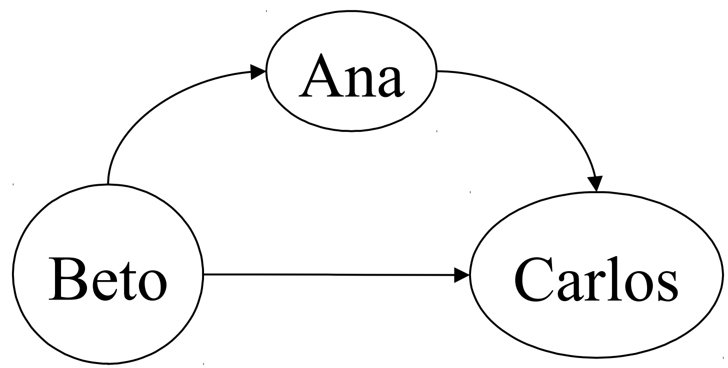
Nelson Cruz Sampaio Neto
nelsonneto@ufpa.br

laps.ufpa.br/nelson

Relações

- Existem dois tipos de relações: simétricas ("ser irmão de") e não simétricas ("gostar de").

- Exemplo:

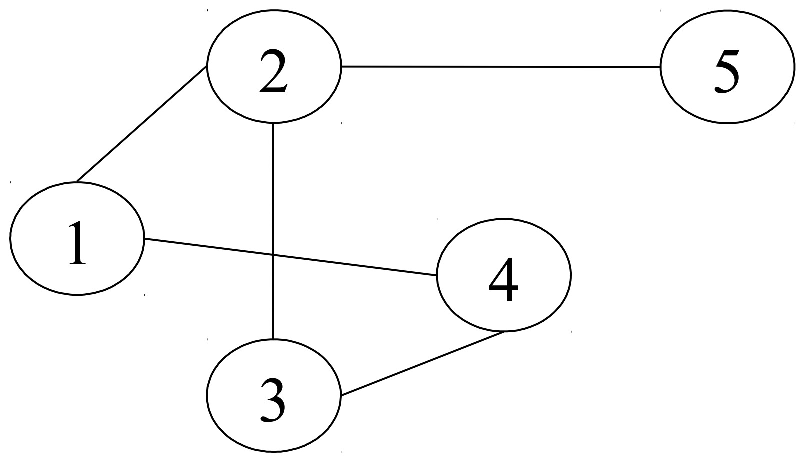


- Analogia com a representação gráfica:
  - Relação simétrica: representação não orientada; e
  - Relação não simétrica: representação orientada.

Definição

- Um grafo **G** consiste de dois conjuntos **V** e **E**, tal que:
  - **V** é um conjunto discreto, finito e não vazio de vértices.
  - **E** é um conjunto definido em função dos elementos de **V**, em duas formas possíveis: estruturas não orientadas (arestas) e estruturas orientadas (arcos).
  - Definição matemática*:* **G = (V, E)**.
  - A caracterização de **V** como discreto possibilita a identificação dos vértices. São os chamados <u>grafos rotulados</u>.

Exemplo



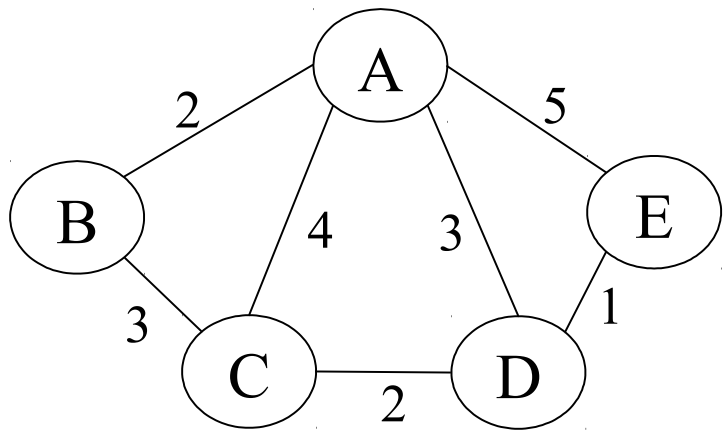
O grafo **G = (V, E)** acima é não orientado, tal que:

V = { 1, 2, 3, 4, 5 } e **|V|** = 5

E = { (1, 2), (1, 4), (2, 3), (2, 5), (3, 4) } e **|E|** = 5

Grafos ponderados ou valorados

- São grafos com pesos (ou valores) associados a seus arcos ou arestas.



- Exemplo de valores associados: custo de transporte, tempo de viagem, distância, entre outros.

Exemplo

- Os turistas Jorge, Alan, Hans, Carla e Maria se encontraram em um bar e começaram a conversar. As línguas disponíveis eram: Inglês, Francês, Português e Alemão.

- Jorge fala todas as línguas; Alan não fala apenas Português; Hans fala Francês e Alemão; Carla fala Inglês e Português; e Maria fala apenas Português.

- Problema: Represente por meio de um grafo **G = (V, A)** todas as possibilidades de um deles dirigir a palavra a outro, sendo compreendido.

Exemplo

- Uma empresa produz os produtos químicos **C1, C2, …, Cn**. Alguns desses produtos podem explodir se colocados em contato com outros.

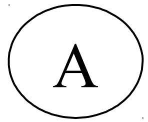
- Como precaução contra acidentes, a empresa quer construir **k** armazéns para armazenar os produtos de tal forma que os incompatíveis fiquem em armazéns diferentes.

- <u>Problema</u>: Encontre o menor número **k** de armazéns que devem ser construídos.

Como resolver este problema com a ajuda de grafos?

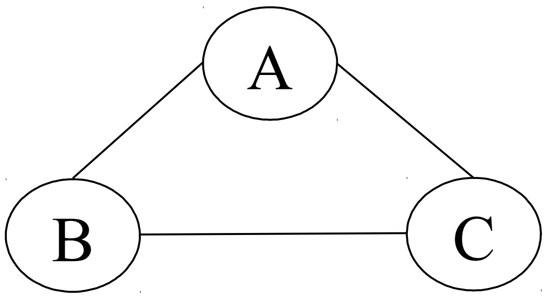
Exemplos

1:



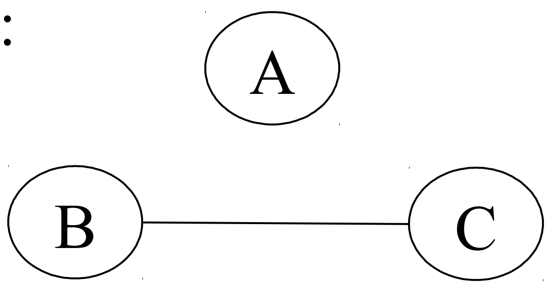
Grafo trivial

2:



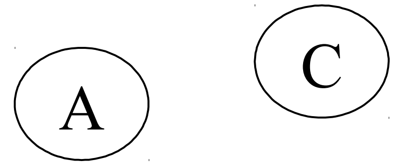
Grafo não orientado e completo

3:



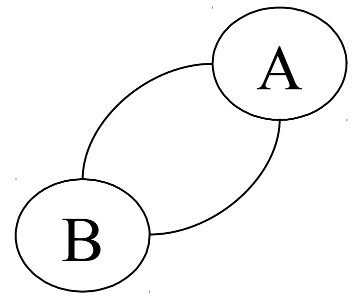
Grafo desconexo

4:



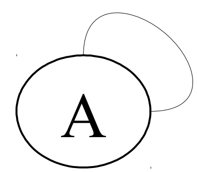
Grafo totalmente desconexo

5:



Multi-grafo

6:

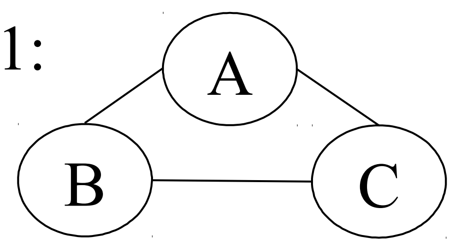


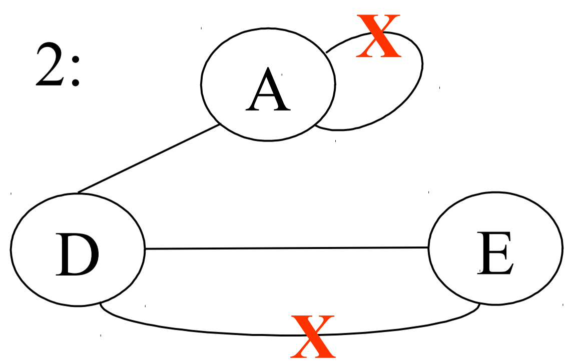
Grafo com *self-loop* ou laço

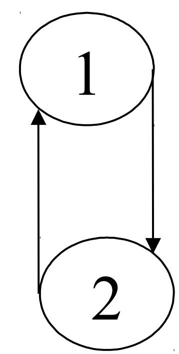
Tipos

- Grafos não orientados:
  - São grafos onde as ligações não possuem direcionamento, ou seja, a aresta **(v_1, v_2)** é a mesma aresta **(v_2, v_1)**.

- Grafos orientados (ou dígrafos):
  - São grafos onde as ligações possuem direcionamento, ou seja, o arco **(v_1, v_2)** é diferente do arco **(v_2, v_1)**.

1:


2:


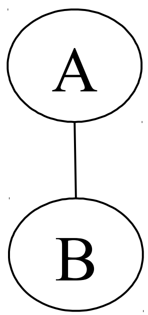
3:


As estruturas 1 e 2 são grafos não orientados, mas apenas o grafo 1 é <u>simples</u>

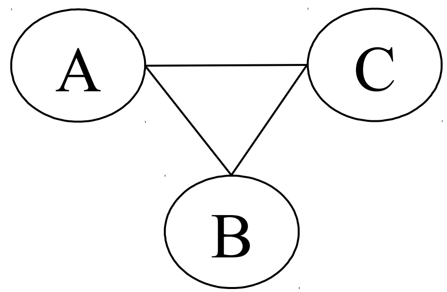
Grafo orientado e simples

Ordem e Tamanho

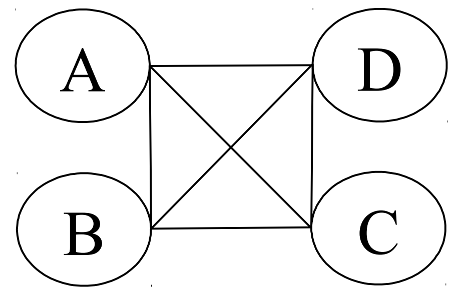
- Exemplos:

1:


R.: Ordem 2
Tamanho 1

2:


R.: Ordem 3
Tamanho 3

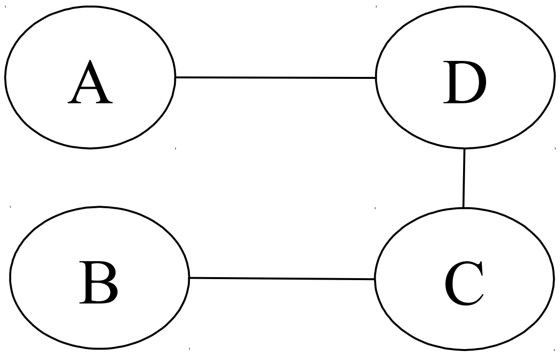
3:


R.: Ordem 4
Tamanho 6

- As estruturas acima são <u>grafos completos</u> (**K_2, K_3, K_4**), com uma ligação associada a cada par de vértices.

Vizinhança

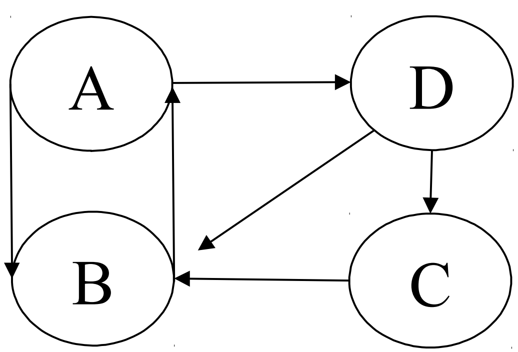
- Vizinhança (também chamada adjacência) diz respeito aos vértices diretamente ligados a um dado vértice.
- Em grafos não orientados, a vizinhança **N(v)** é o conjunto de vértices que possuem ligação direta com o vértice **v**.
- É possível definir uma adjacência na qual **v** está incluído, chamada de vizinhança fechada.



1. $N(A) = \{A, D\}$
2. $N(C) = \{C, B, D\}$

Vizinhança

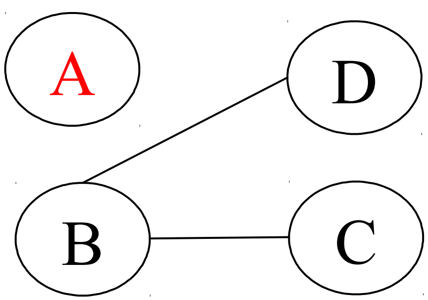
- No grafo orientado **G = (V, E)**, diz-se que **w** $\in$ **V** é sucessor de **v** $\in$ **V**, quando existe **(v, w)** $\in$ **E**.
- Da mesma forma, diz-se que **v** é antecessor de **w**.
- Os conjuntos de sucessores e antecessores do vértice **v** são denotados, respectivamente, **N⁺(v)** e **N⁻(v)**.

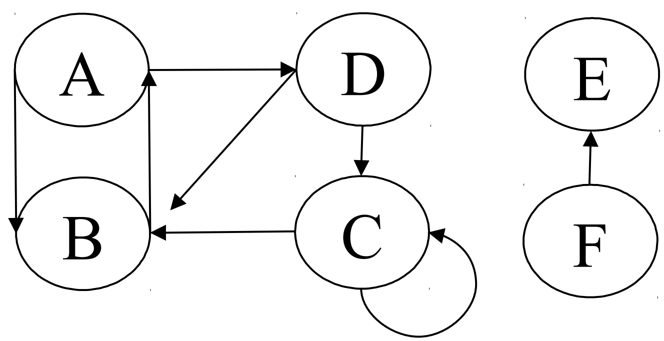


1. $N^{+}(A) = \{A, B, D\}$
2. $N^{-}(B) = \{B, A, C, D\}$

Grau

- Em grafos não orientados, define-se que o grau é o número de arestas que incidem sobre o vértice.
- Já em grafos orientados, o grau é o número de arcos que saem do vértice <u>mais</u> o número de arcos que chegam nele.
- Um vértice é dito <u>isolado</u> quando seu grau é zero.





Grau(A) = 0 Grau(C) = 1
Grau(B) = 2 Grau(D) = 1
Vértice A é dito isolado

Grau(A) = 3 Grau(D) = 3
Grau(B) = 4 Grau(E) = 1
Grau(C) = 4 Grau(F) = 1

Caminho e Comprimento

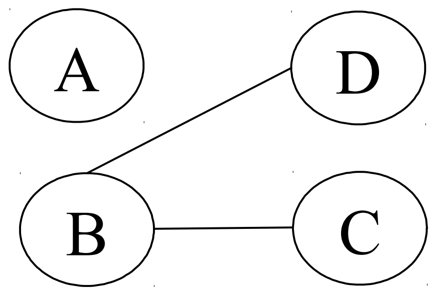
- Um caminho $\mathbf{v_1}$ a $\mathbf{v_k}$ é uma seqüência de vértices $\mathbf{(v_1, v_2, ..., v_k)}$ tal que $\mathbf{(v_i , v_{i+1})} \in \mathbf{E}$, para $\mathbf{i = 1, 2, ..., k - 1}$.

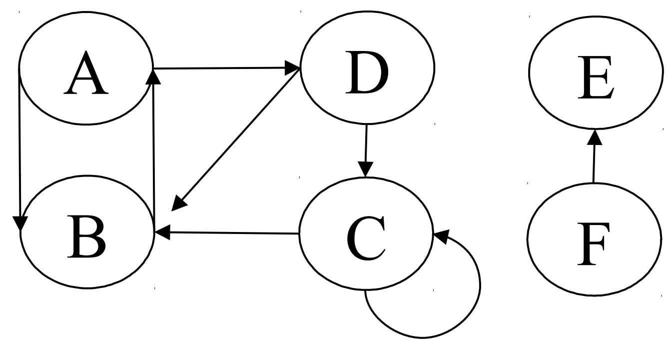
- Um caminho de **k** vértices possui **k – 1** ligações. O valor **k – 1** é o <u>comprimento</u> do caminho.

- Se existir pelo menos um caminho entre $\mathbf{v_1}$ e $\mathbf{v_k}$, então é dito que $\mathbf{v_1}$ <u>alcança</u> $\mathbf{v_k}$.

- Um caminho é dito <u>simples</u> quando não repete vértices. Já um caminho que não repete ligações é chamado de <u>trajeto</u>.

Exemplos





1. Caminho simples: (C, B, D) de comprimento igual a 2.

2. D é alcançável a partir de C.

3. A não é alcançável a partir de nenhum vértice.

1. Caminho simples: (A, D, C, B) de comprimento igual a 3.

2. C é alcançável a partir de A, mas E não é.

3. O caminho (A, B, A, B) não é simples.

Ciclos

- Grafos sem ciclos são <u>acíclicos</u>, e <u>cíclicos</u>, caso contrário.

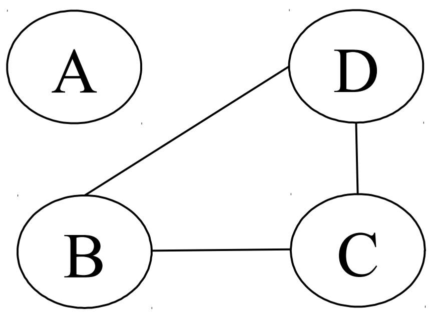
- O ciclo é um caminho $(\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_k}, \mathbf{v_{k+1}})$ sendo $\mathbf{v_1} = \mathbf{v_{k+1}}$.

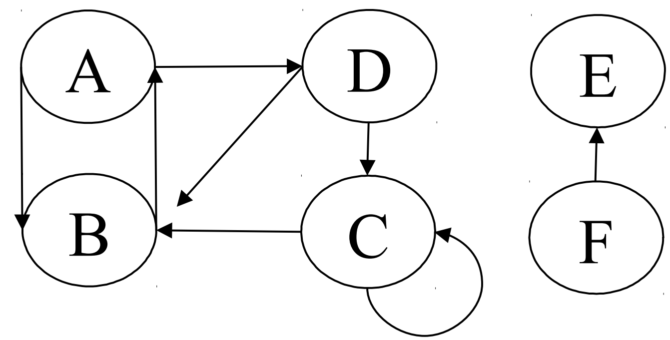
- Se o caminho $(\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_k})$ for simples, então o ciclo também é <u>simples</u>. Note que o elemento $\mathbf{v_{k+1}}$ não é considerado.

- O <u>*self-loop*</u> (ou laço) é um ciclo de comprimento igual a 1.

- <u>Observação</u>: Um grafo simples e não orientado é cíclico caso apresente ciclo(s) simples de comprimento maior que 2.

Exemplos





1. Ciclo simples: (B, C, D, B).

2. Os caminhos (B, C, D, B), (C, D, B, C) e (D, B, C, D) formam o mesmo ciclo.

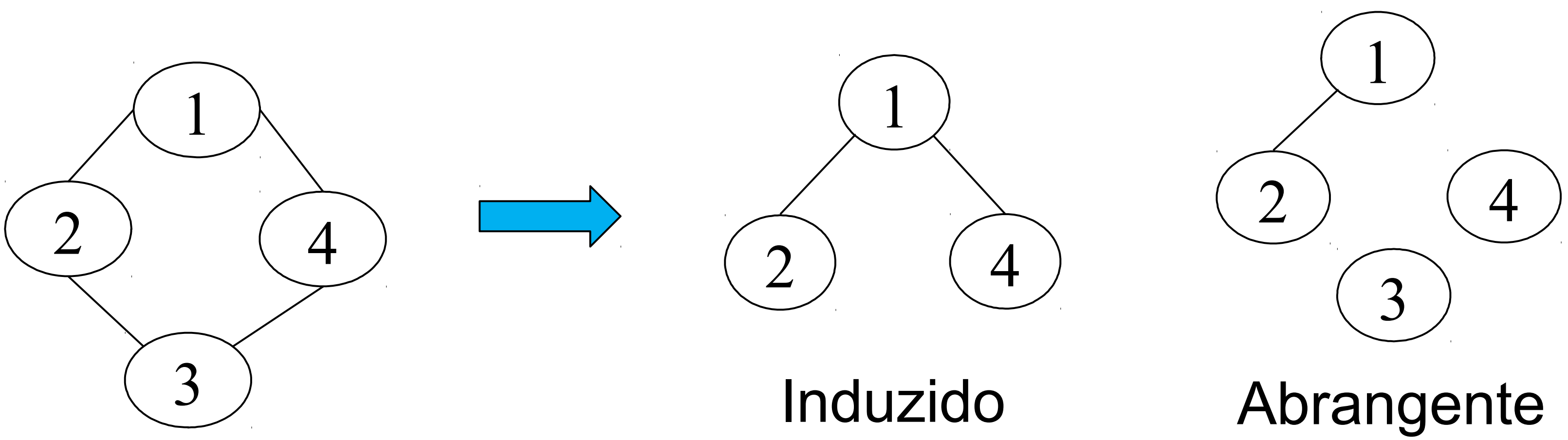
1. Ciclo simples: (A, D, C, B, A).

2. Self-loop: (C, C).

3. Os caminhos (A, D, B, A), (D, B, A, D) e (B, A, D, B) formam o mesmo ciclo.

Subgrafos

- Dados dois grafos **G' = (V', E')** e **G = (V, E)**, então **G'** é um subgrafo de **G** se **V'** $\subseteq$ **V** e **E'** $\subseteq$ **E**.
- <u>Subgrafo abrangente</u>: contém o mesmo conjunto de vértices do grafo original, mas não necessariamente todas as ligações.
- <u>Subgrafo induzido</u>: contém todas as ligações que aparecem no grafo original sobre o mesmo conjunto de vértices.

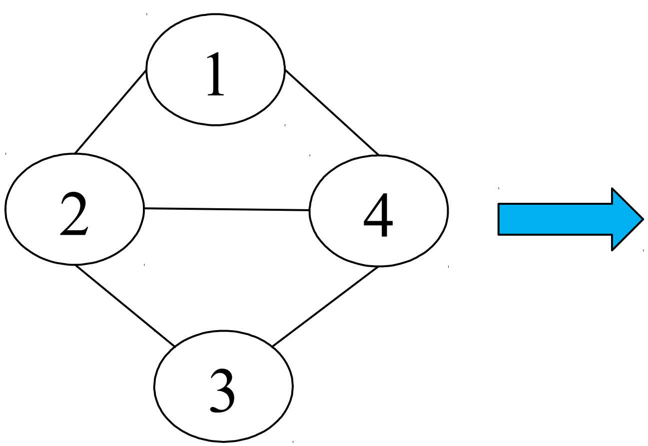


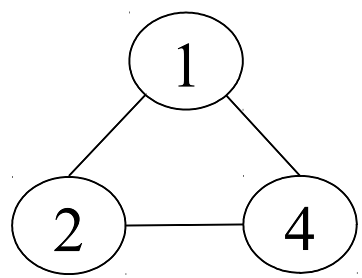
Induzido

Abrangente

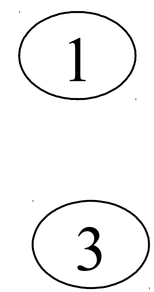
Subgrafos

- O <u>clique</u> de um grafo **G** é um subgrafo completo de **G**.
- <u>Conjunto independente de vértices</u> é um subgrafo induzido do grafo **G** onde os vértices não possuem ligações entre si.





Clique de ordem 3



Conjunto independente de ordem 2

Subgrafos – C.I. de vértices

- Aplicação: modelar problemas de dispersão. Em geral, evitam conflitos entre elementos.

- Exemplo: suponhamos que em um parque pensássemos em instalar o máximo de barracas para venda de sorvete. Sendo que a operadora das barracas faz as seguintes restrições:

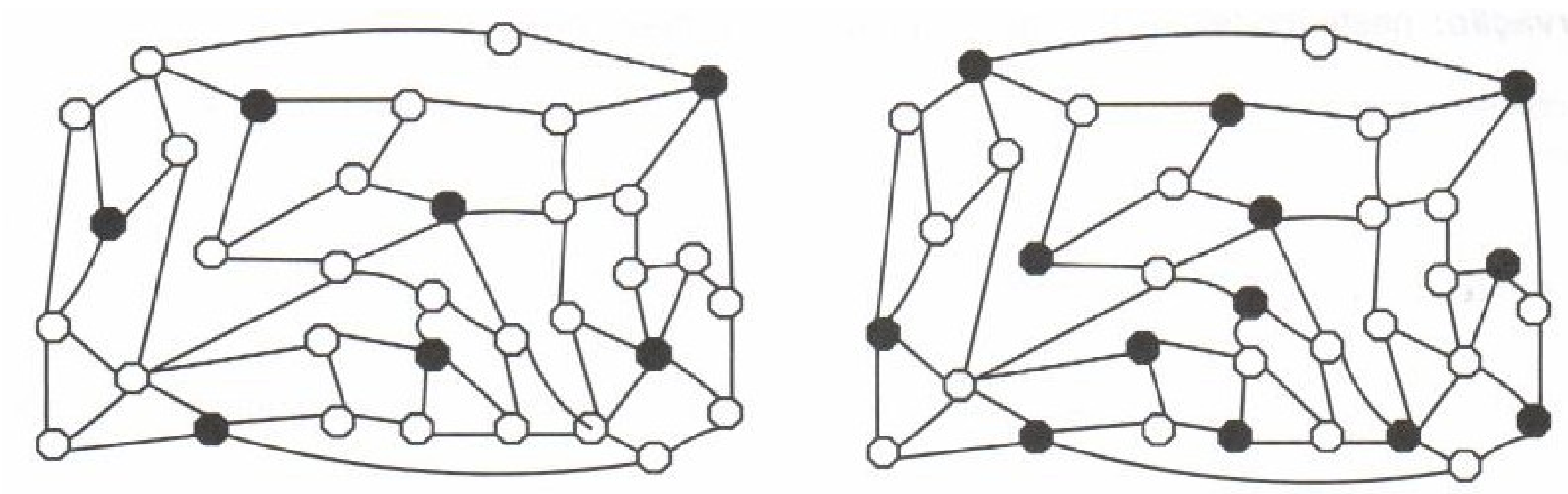
  – Uma barraca deve ser localizada em uma esquina (vértice);

  – Esquinas próximas (adjacentes) só admitem uma barraca.

Como resolver este problema com a ajuda de grafos?

Subgrafos – C.I. de vértices

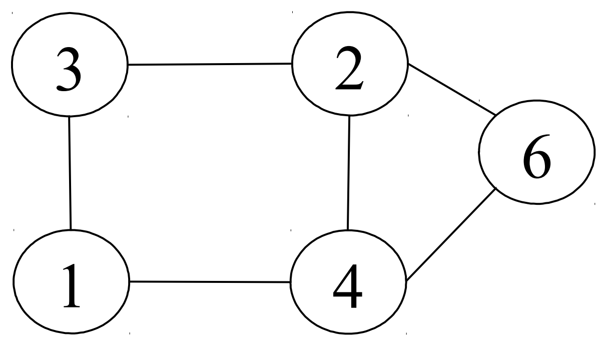
- Os vértices (barracas) em preto formam um conjunto independente de vértices, satisfazendo a condição.
- Note que existe mais de um c.i. de vértices. Mas, para o problema, a solução é o conjunto com o maior número de vértices.



Subgrafos – Clique

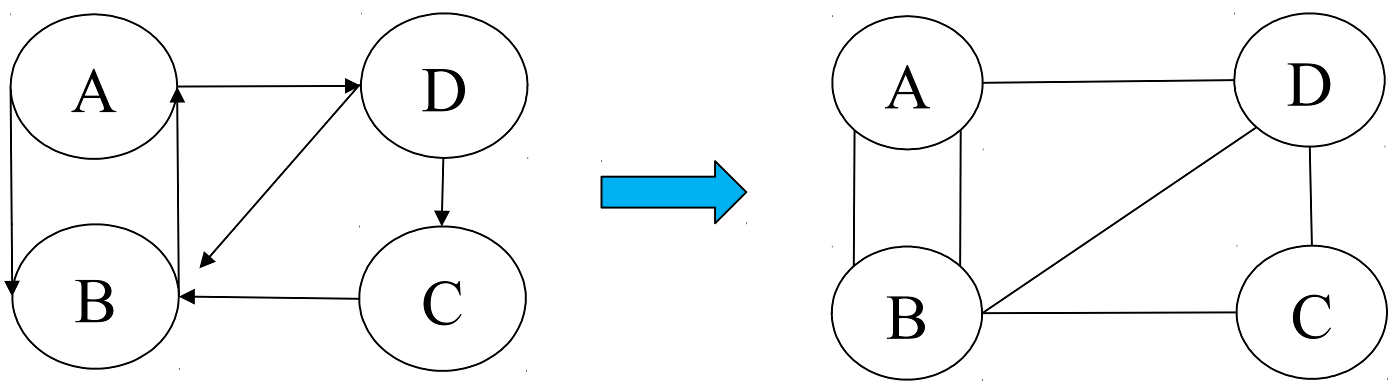
- <u>Aplicação</u>: problemas clássicos que exigem a identificação de agrupamentos de objetos relacionados.

- <u>Exemplo</u>: Problema do armazenamento de produtos químicos. O grafo abaixo mostra a compatibilidade entre os produtos. O maior clique tem ordem 3, restando outro de ordem 2, o que nos leva a construir 2 armazéns.



Grafo subjacente

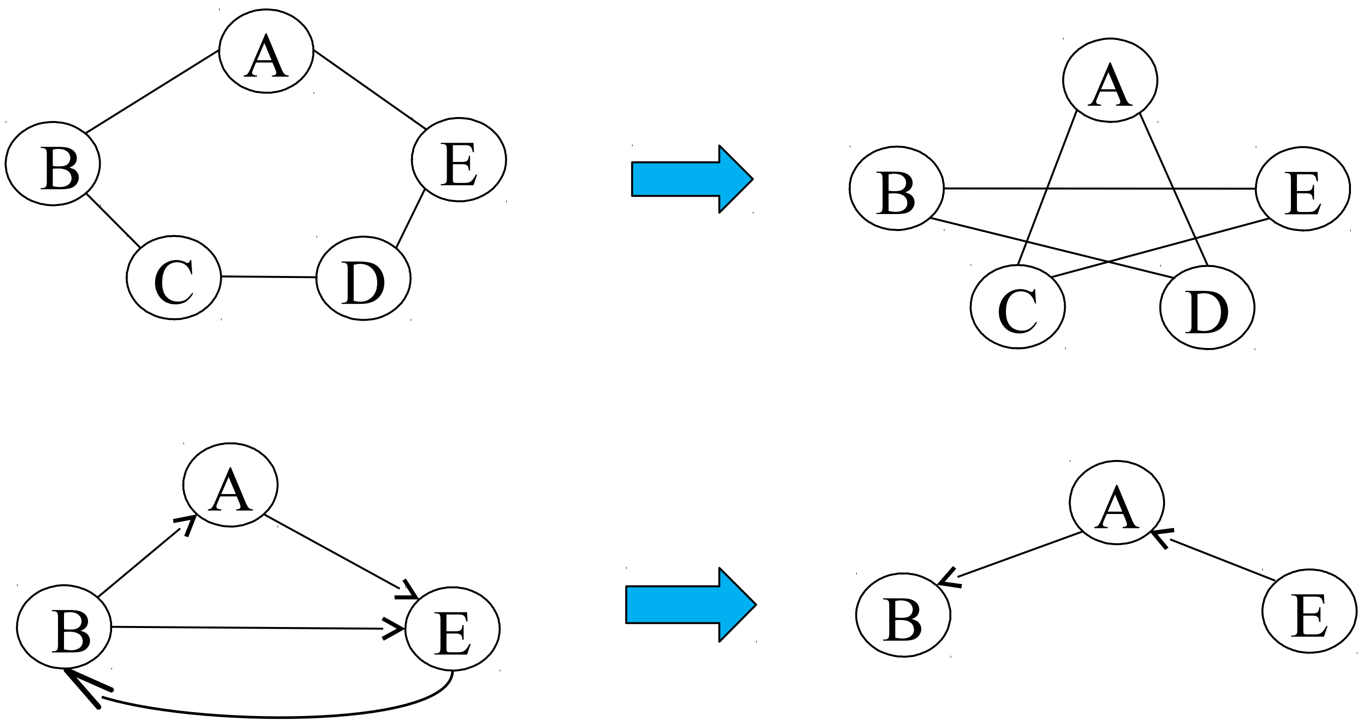
- Se forem retiradas as direções dos arcos de um dígrafo **G** obtém-se um grafo (aceita-se arestas paralelas e laços) não direcionado, chamado de <u>grafo subjacente</u>.



Dígrafo **G** | Grafo subjacente de **G**

Grafo complementar

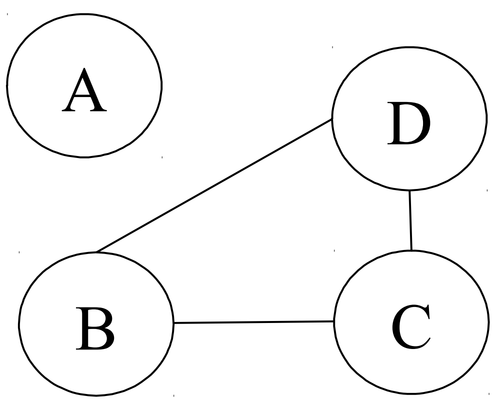
- É um grafo $\mathbf{G}^c$ que possui o mesmo número de vértices e as ligações não existentes de um grafo **G**.



Conexidade

- Um grafo não orientado é <u>conexo</u> se cada par de vértices está conectado por pelo menos um caminho.

- Exemplo:



1. O grafo ao lado é <u>desconexo</u>, pois A não está ligado a outro vértice.

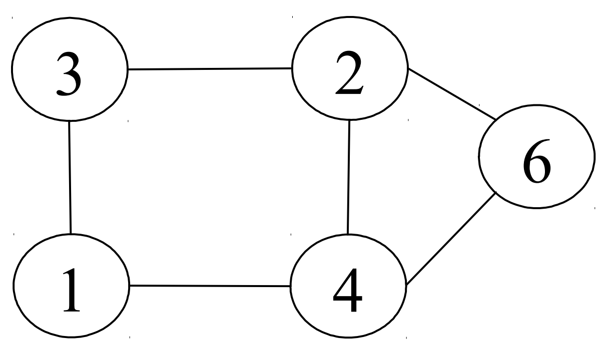
2. O subgrafo {C, D, B} é um <u>componente conexo</u> do grafo original.

3. Inserindo-se a aresta (A, B), o grafo passa a ser conexo. Por conseguinte, essa aresta é chamada de <u>ponte</u>.

Conectividade ou Menor corte

- A conectividade de vértices é definida pelo menor número de vértices que devem ser retirados do grafo para desconectá-lo ou torná-lo trivial.

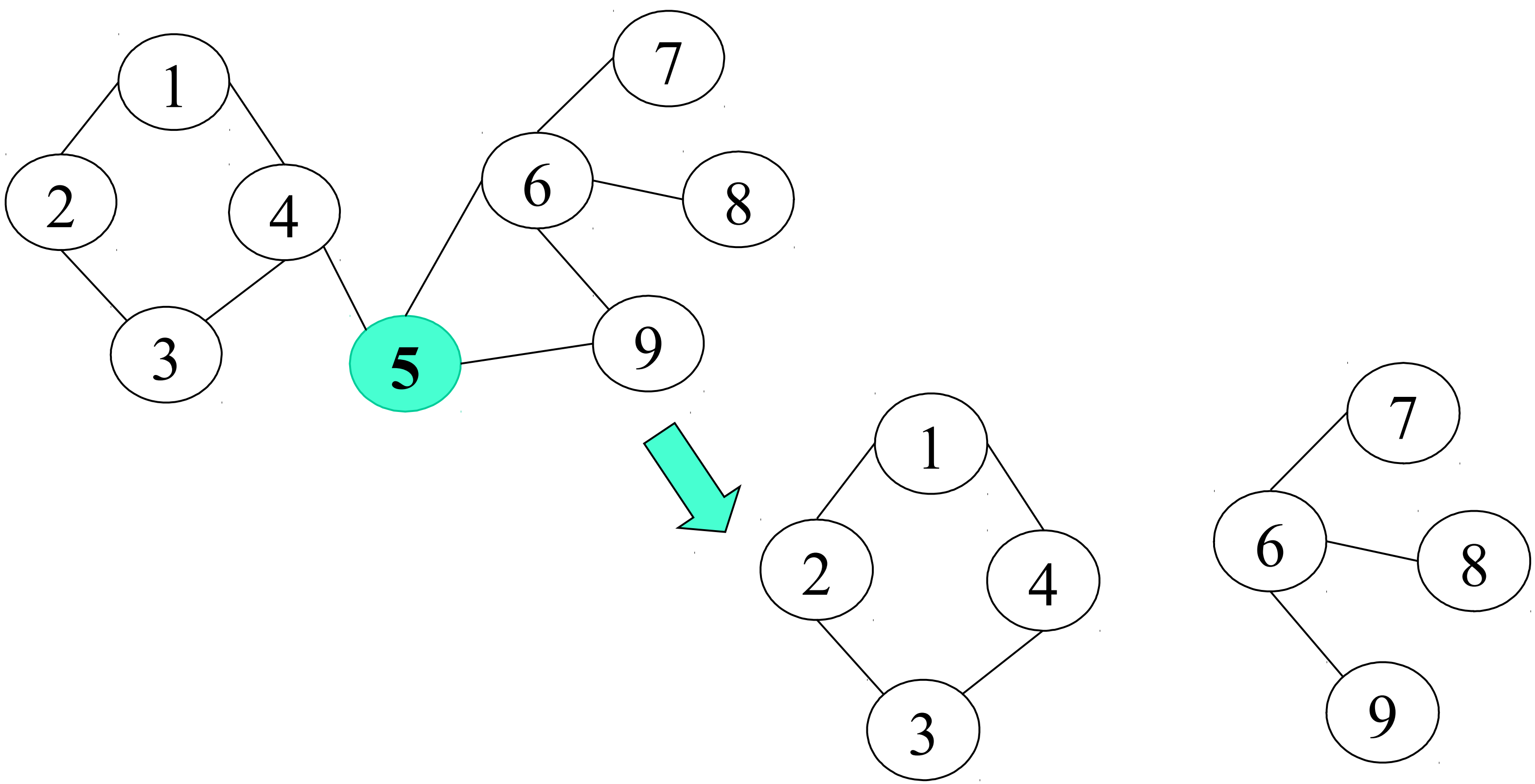
- A conectividade de arestas é dada pelo menor número de arestas que devem ser retiradas do grafo para desconectá-lo.



Conectividade de vértices
e arestas é igual a 2

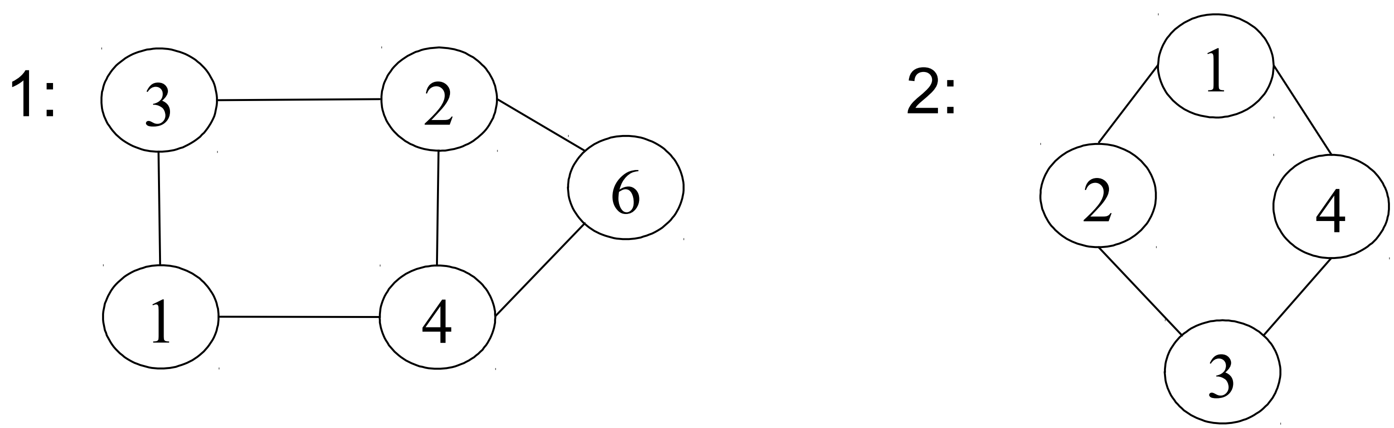
Ponto de articulação

- É um vértice que se retirado de um grafo conexo **G** o torna desconexo. Considerando **| V | > 2**.



Grafo biconexo

- É um grafo sem ponto de articulação.
- É preciso remover pelo menos 2 vértices do grafo biconexo para que ele deixe de ser conexo ou se torne trivial.



Os grafos 1 e 2 são biconexos

Conexidade em dígrafos

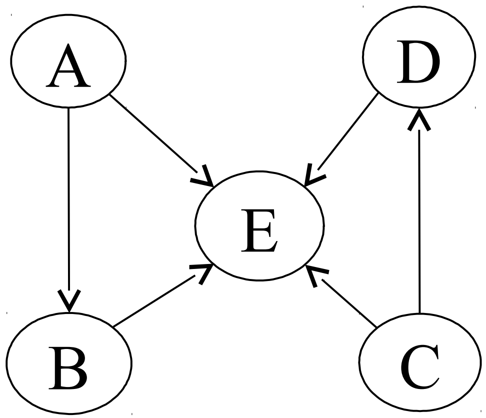
- Um grafo orientado é dito fortemente conexo se para todo par de vértices **(u, v)** existe um caminho de **u** até **v** e existe um caminho de **v** até **u**.

- Se ao menos um desses caminhos existir para todo **v, u** $\in$ **V** então o grafo orientado é unilateralmente conexo.

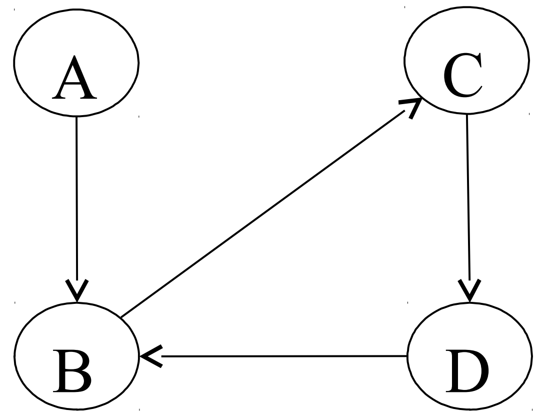
- Um grafo orientado é fracamente conexo ou desconexo, conforme seu grafo subjacente seja conexo ou desconexo, respectivamente.

- Observe que se um dígrafo é fortemente conexo então ele também é unilateralmente e fracamente conexo.

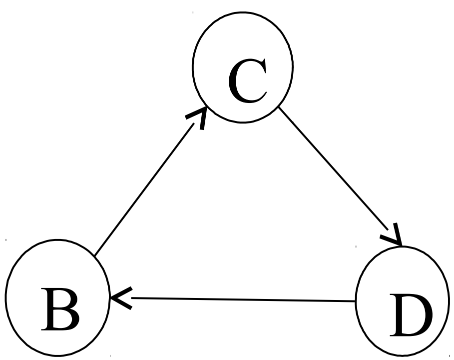
Exemplos



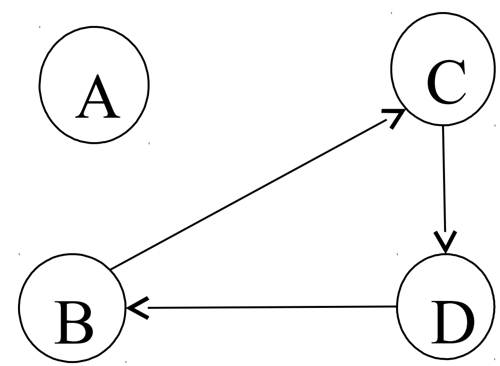
Fracamente ou simplesmente conexo



Unilateralmente ou semi-fortemente conexo

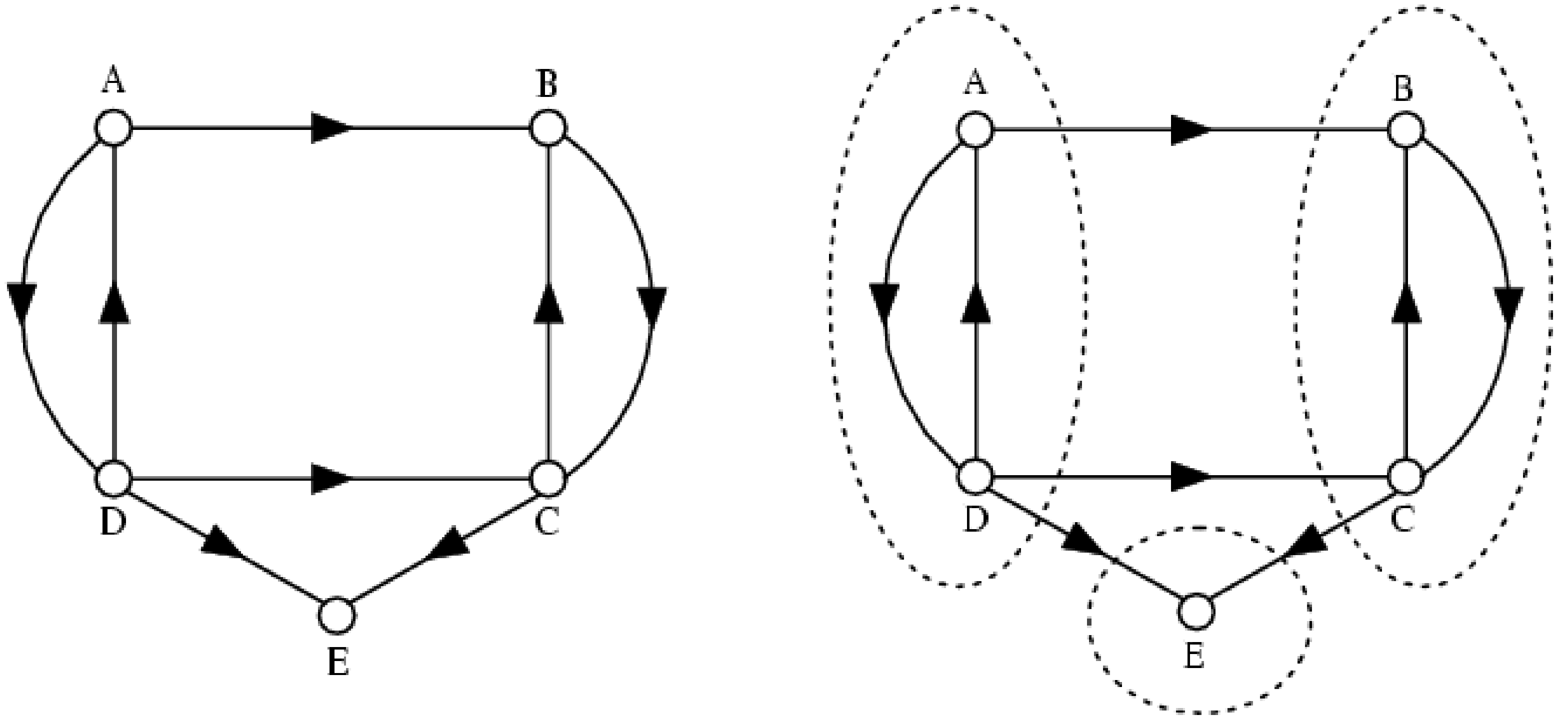


Fortemente conexo



Desconexo

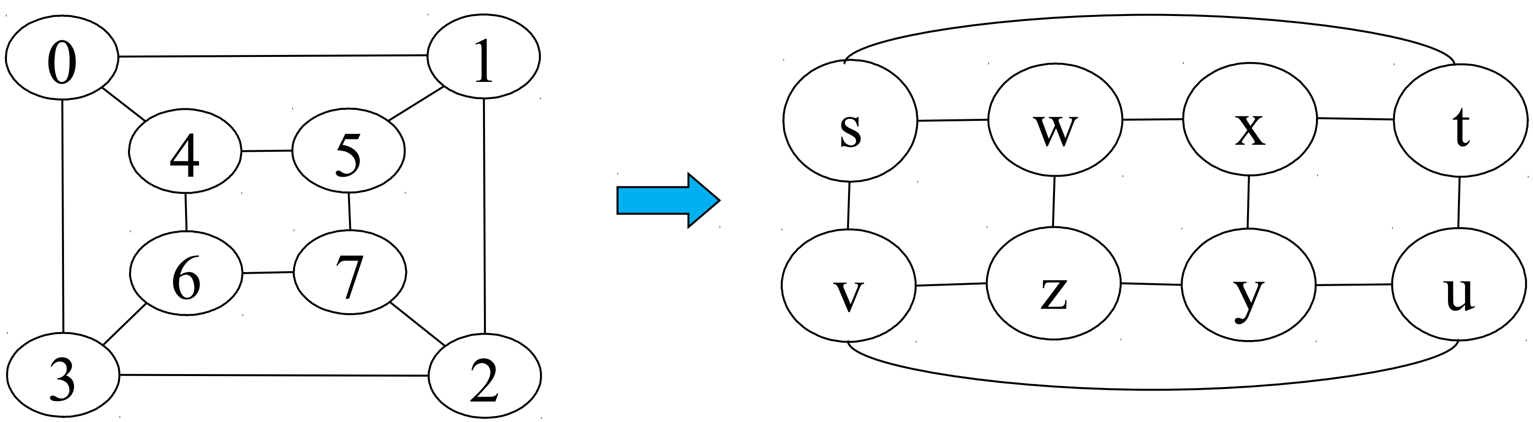
Componentes fortemente conexos



Isomorfismo

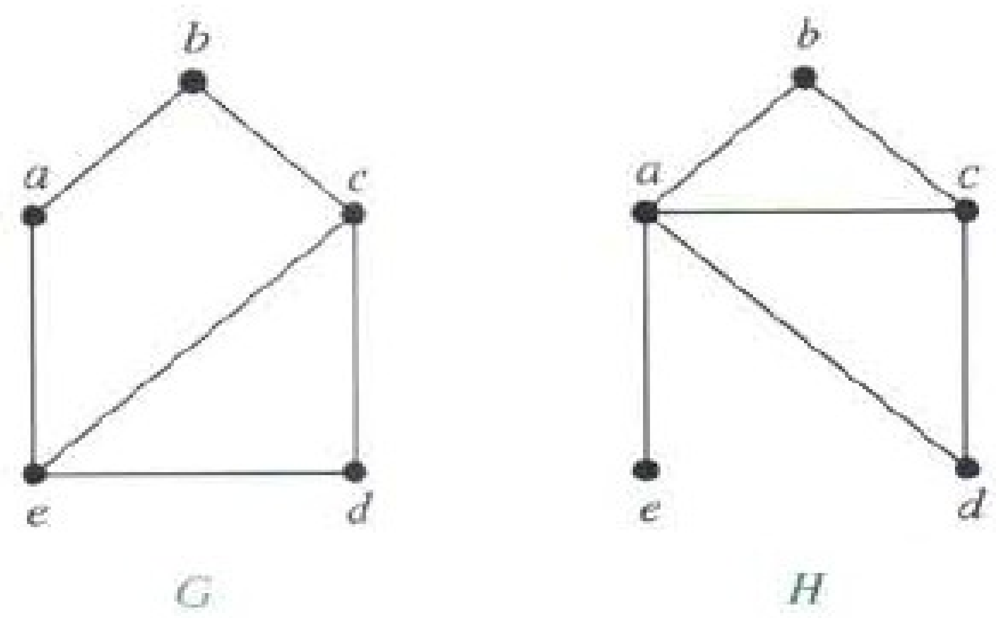
- O grafos **G = (V, E)** e **G' = (V', E')** são isomorfos se existir uma função **f : V → V'**, tal que **(u, v)** $\in$ **E** se e somente se **(f(u), f(v))** $\in$ **E'**.

- Ou seja, existe uma função bijetora entre seus conjuntos de vértices **|V| = |V'|**, que preserve suas relações de adjacência.



Isomorfismo

- Por exemplo, os grafos da figura abaixo não são isomorfos.
- Note que o grafo **H** tem um vértice de grau 4, o que não existe no grafo **G**.



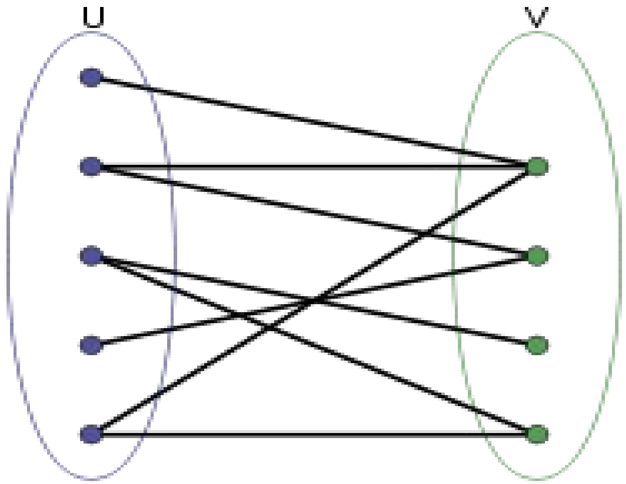
Isomorfismo

- É desconhecido se existe, ou não, algum algoritmo eficiente para o problema geral de isomorfismo de grafos.
- Poderíamos tentar todas as permutações possíveis, mas isso daria um algoritmo de complexidade em $O(n!)$ (muito grande).
- O que pode ser comparado entre os grafos:
  - Mesmo número de vértices e arestas;
  - A quantidade de vértices de mesmo grau deve ser igual;
  - Os subgrafos induzidos contendo os vértices de mesmo grau devem ser isomorfos;
  - Tamanho do clique máximo;
  - ....

Grafo bipartido

- São grafos cujos vértices podem ser divididos em dois conjuntos disjuntos **U** e **V**, tais que toda ligação existente no grafo conecta um vértice de **U** a outro de **V.**

- Os subgrafos **U** e **V** são <u>conjuntos independentes de vértices</u>.



- Um <u>grafo bipartido completo</u> ($\mathbf{K}_{|U|,|V|}$) possui uma ligação para cada par de vértices **u** e **v**, sendo **u** $\in$ **U** e **v** $\in$ **V**.

Definições importantes...

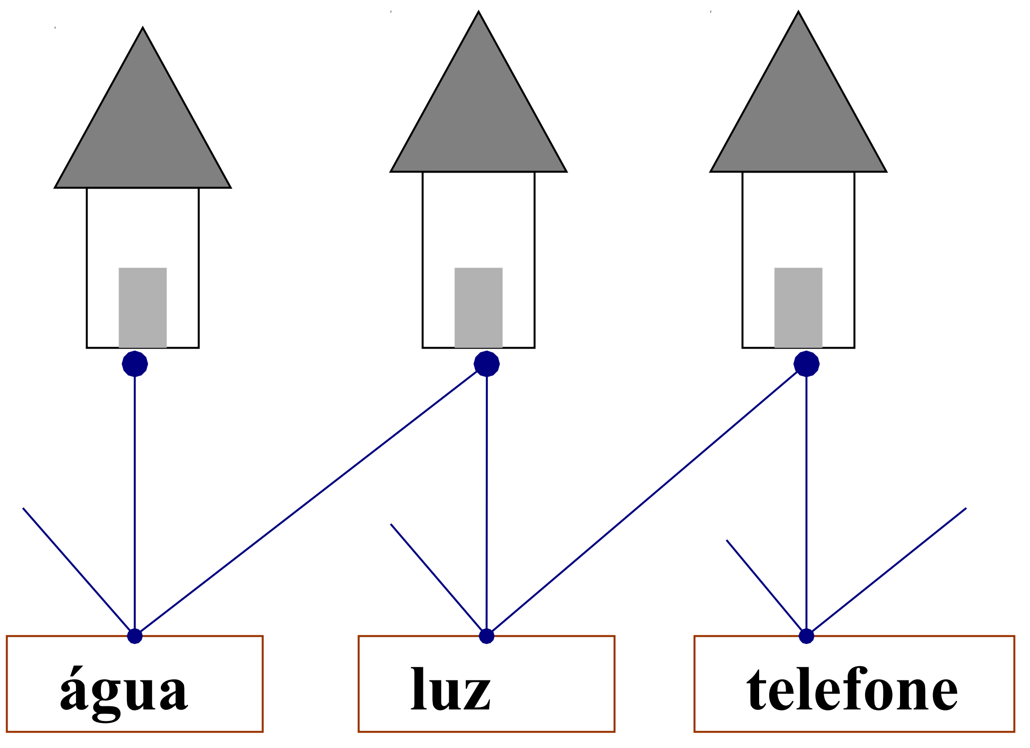
- Grafo com apenas um vértice e sem arestas é dito trivial.
- Grafo simples não possui laços e permite no máximo uma ligação entre quaisquer dois vértices (ou seja, sem arestas ou arcos paralelos).
- Grafo regular é um grafo em que todos os vértices tem o mesmo grau. Logo, é verdade que:

$$\Delta \,.\, |V| = 2 \,.\, |E| \text{ , onde } \Delta \text{ é o grau dos vértices}$$

- Todo grafo completo é regular e simples.
- Multi-grafos: são grafos que permitem a existência de mais de uma ligação entre o mesmo par de vértices.

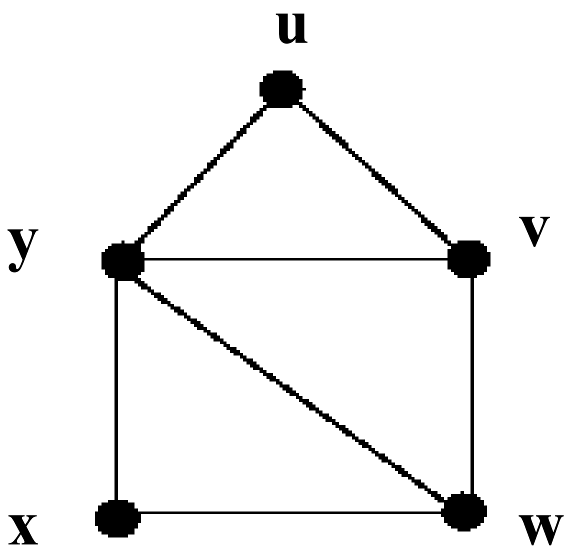
O problema das 3 casas

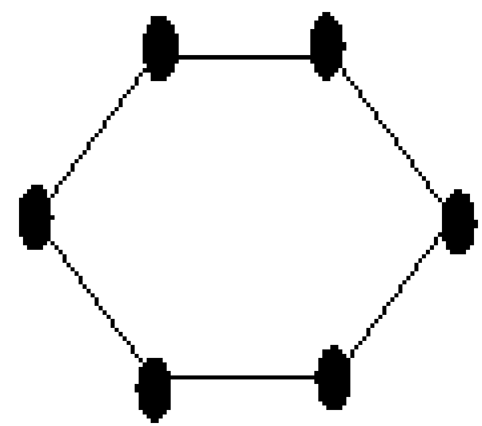
- É possível conectar os 3 serviços às 3 casas sem haver cruzamento de tubulação?



Grafos planares

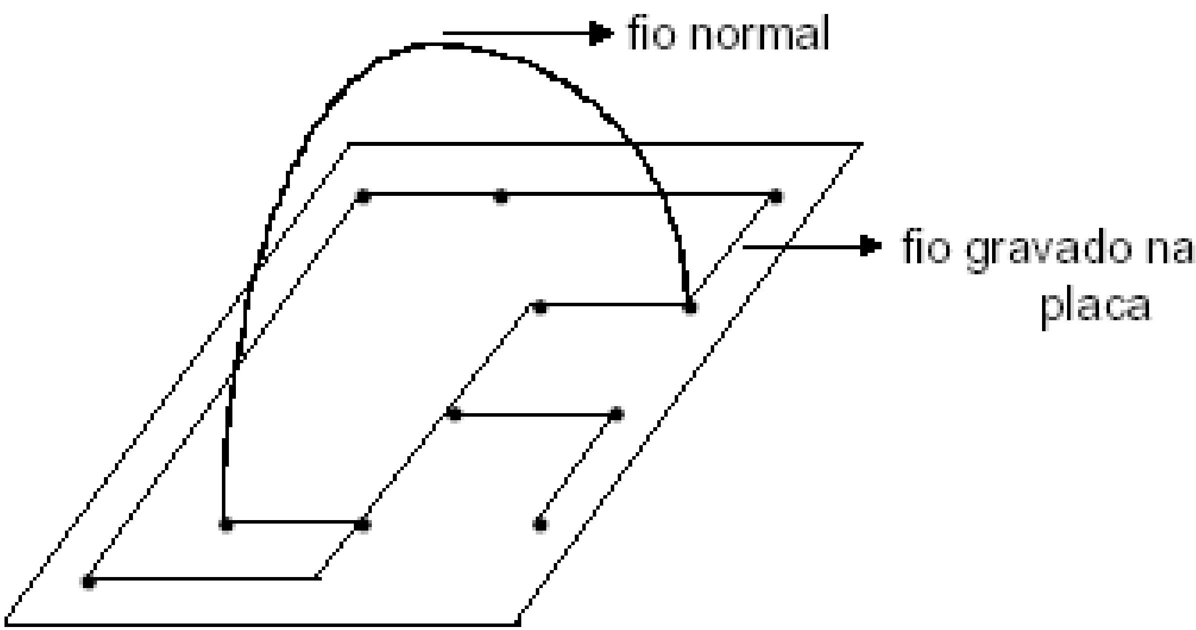
- Definição: São grafos que podem ser desenhados no plano sem cruzamentos, ou seja, duas arestas somente se encontram nos vértices onde são incidentes.





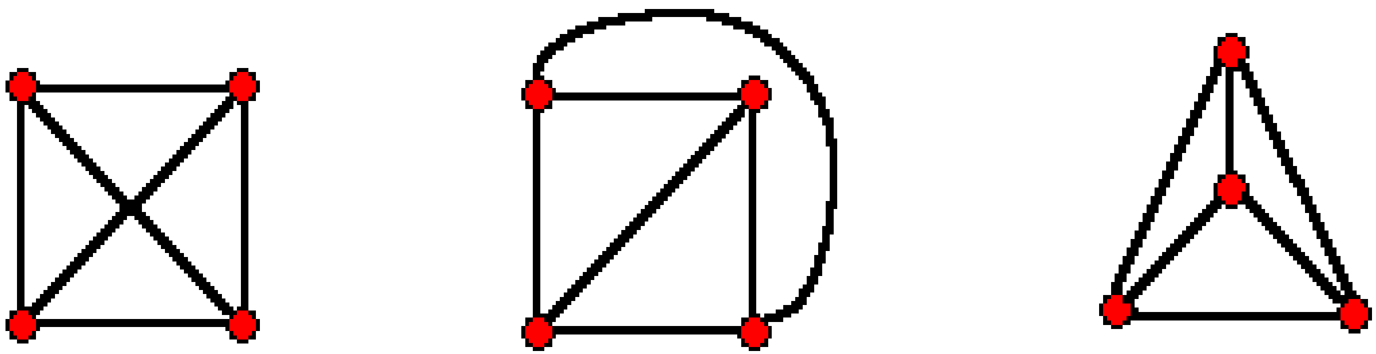
Grafos planares

- Uma aplicação que utiliza o conceito de grafos planares é a disposição de circuitos impressos numa placa.



Grafos planares

- Três representações gráficas distintas para um K_4 :



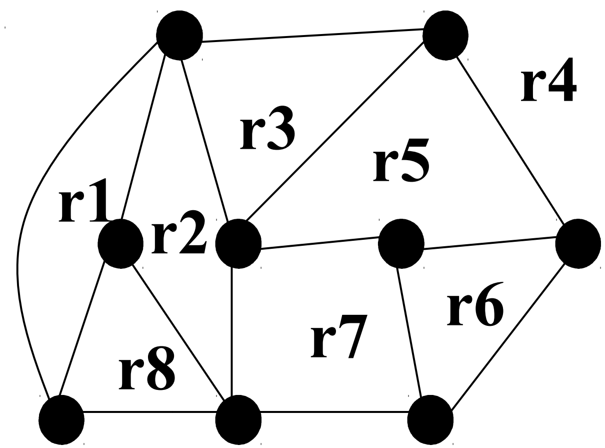
K_4 é um grafo planar pois admite pelo menos uma representação **R** num plano **P** sem que haja cruzamento de arestas (representação planar).

As linhas de **R** dividem **P** em regiões, chamadas <u>faces</u> de **R**.

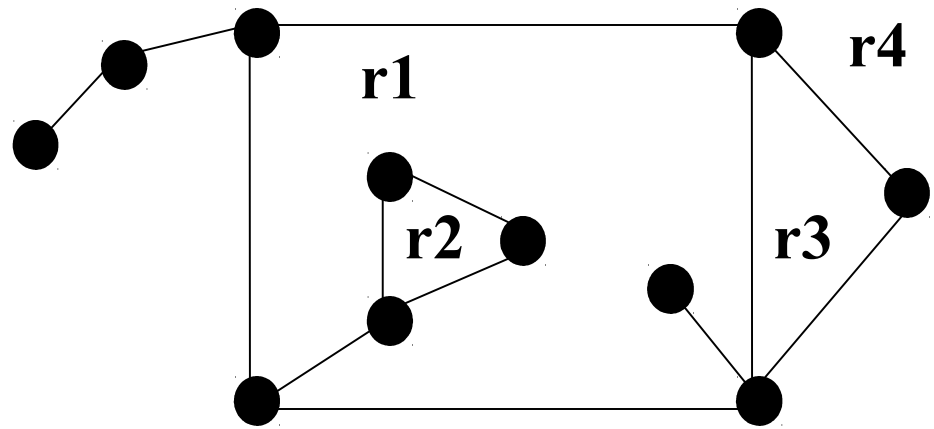
Um grafo K_4 possui <u>4 faces</u>. Observe que sempre uma dessas faces não é limitada. Esta é chamada <u>face externa</u>.

Grafos planares

- Se **G** é um grafo planar, a representação planar **R** de **G** divide o plano em regiões ou faces.



8 regiões



4 regiões

r_4 é a região externa

Fórmula de Euler (1750)

Seja **G** um grafo simples, planar e conexo com **e** arestas e **v** vértices, sendo **f** o número de regiões na representação planar de **G**.

Então,

$$f = e - v + 2$$

Demonstração por indução sobre o número de arestas.

Toda árvore é planar com uma região. O acréscimo de um ciclo separa o plano em duas regiões, uma dentro do ciclo e outra fora dele, contudo não altera a formulação.

Existe um limite máximo para o número de arestas do grafo planar G, dado pela <u>condição necessária, mas não suficiente</u>:

$$e \leq 3v - 6 \quad \text{com} \quad e > 1$$

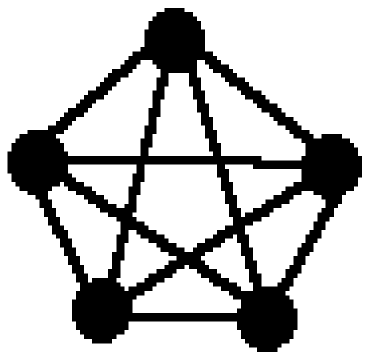
<u>Prova</u>: Considerando que cada face é delimitada <u>no mínimo</u> por 3 arestas (o menor ciclo em G tem comprimento 3) e cada aresta pertence a exatamente duas faces. Logo, $2e \geq 3f$. Agora, basta substituir essa inequação na fórmula de Euler.

Quando $2e = 3f$ significa que o grafo é <u>maximal planar</u>, ou seja, não podemos acrescentar arestas sem comprometer a planaridade do grafo e cada fase é delimitada por 3 arestas.

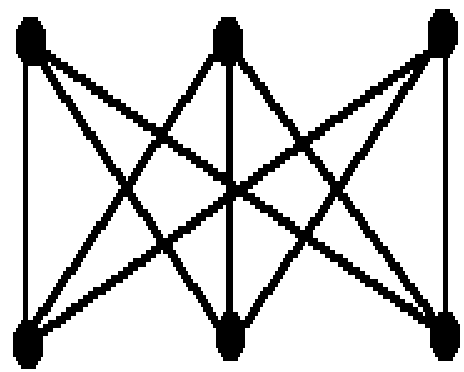
Em um grafo planar <u>bipartido</u> vale a relação $e \leq 2v - 4$, isso porque nesses grafos o menor ciclo tem comprimento 4.

Grafos não planares

- Nem todos os grafos são planares.



K_5



$K_{3,3}$

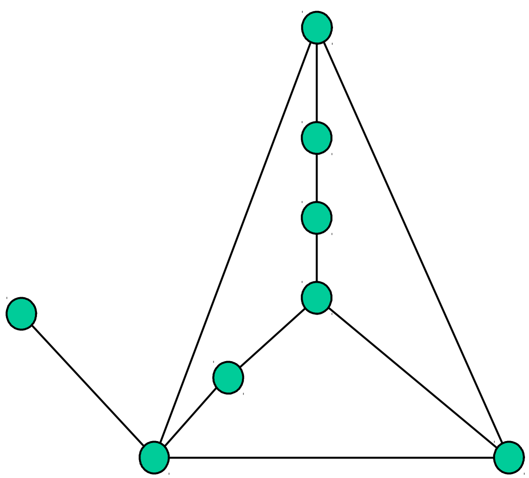
- Os grafos $\boldsymbol{K_5}$ e $\boldsymbol{K_{3,3}}$ <u>não</u> são planares.

- Observe que $\boldsymbol{K_5}$ e $\boldsymbol{K_{3,3}}$ são os grafos não planares com menor número de vértices e arestas, respectivamente.

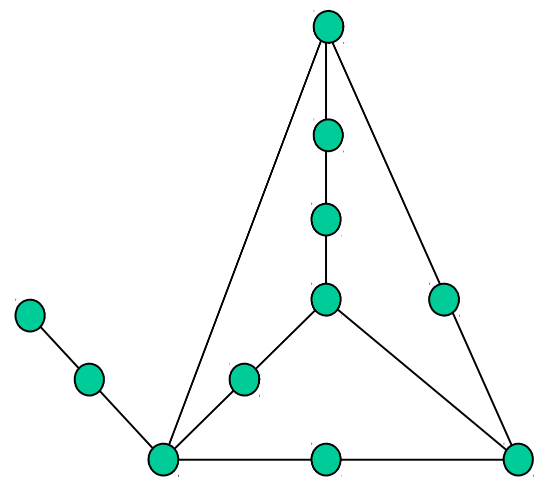
Homeomorfismo

- Uma subdivisão do grafo **G** é o grafo **G'**, que é obtido pela <u>inserção de vértices de grau 2</u> no lugar de uma aresta de **G**.

- Um grafo **G'** é dito <u>homeomorfo</u> ao grafo **G** se **G'** puder ser obtido de **G** por sucessivas operações de subdivisão.



G



G'

Planaridade

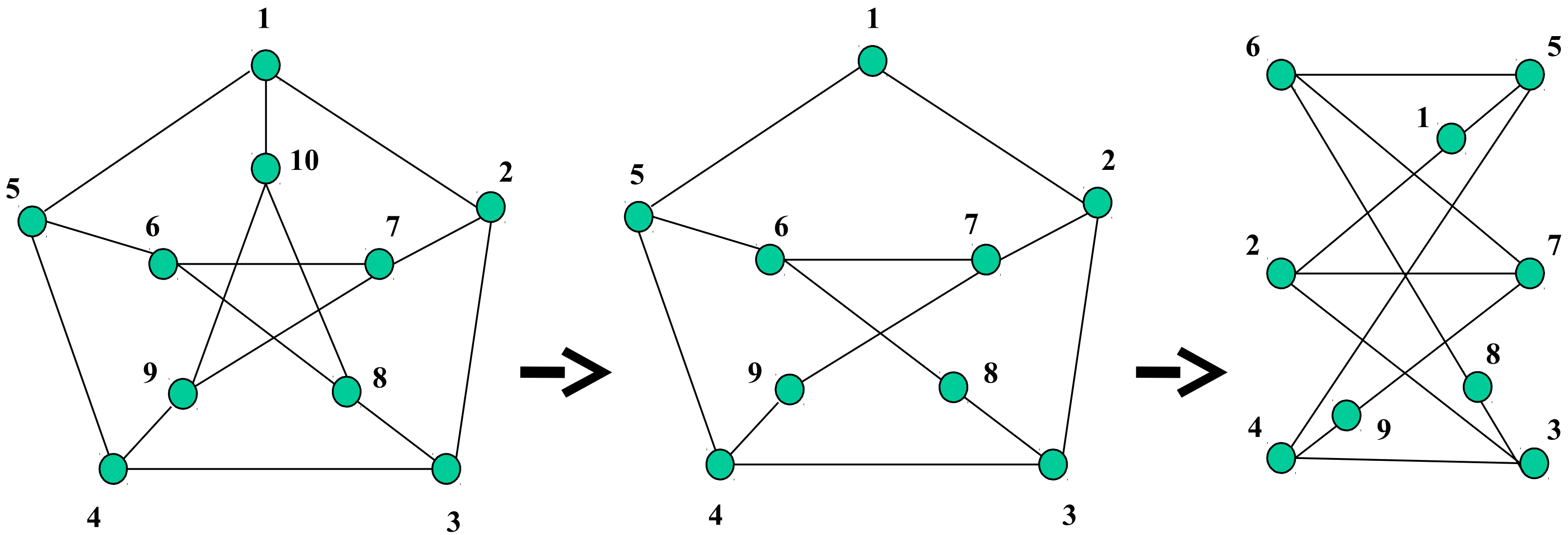
Teorema de Kuratowski (1930)

Um grafo é planar se e somente se não contém nenhum subgrafo homeomorfo a $K_{3,3}$ ou K_5 .

- A partir do Teorema de Kuratowski, surgiram diversos algoritmos de teste de planaridade lineares no tamanho do grafo, ou seja, da ordem O(V + E).

- O primeiro desses algoritmos a ser publicado foi desenvolvido por Hopcroft e Tarjan (ganhadores do Prêmio Turing em 1986).

Planaridade



- Por exemplo, o grafo de Petersen, acima, <u>não</u> é planar.
- Retirando o vértice 10, seu subgrafo é homeomorfo a $\boldsymbol{K_{3,3}}$.

Planaridade

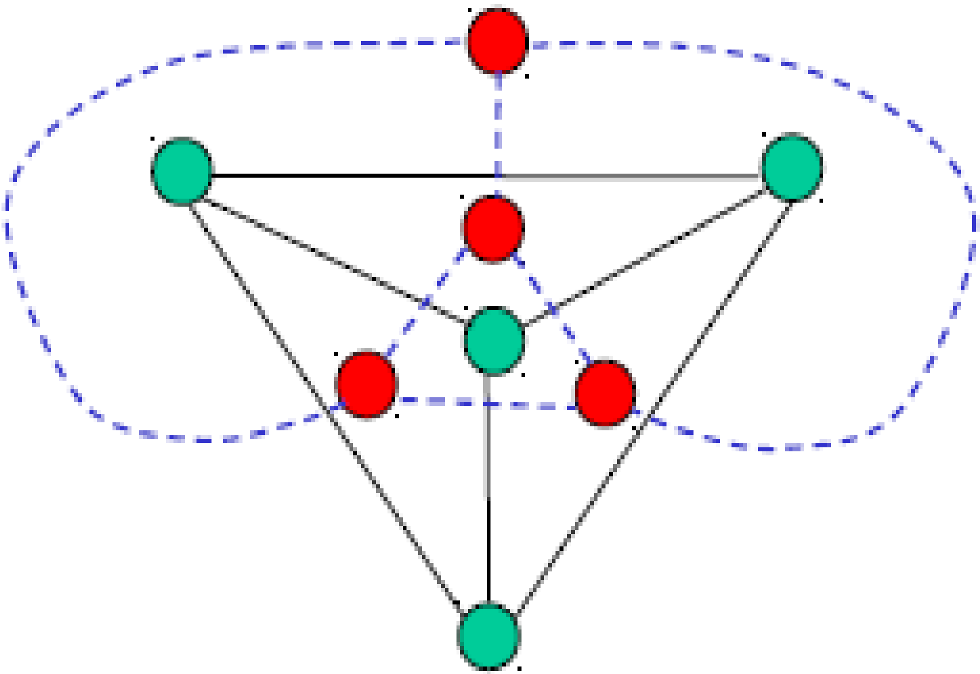
- Todo subgrafo de um grafo planar é planar.
- Todo grafo que tem um subgrafo não planar é não planar.
- Todo grafo com subgrafos $K_{3,3}$ ou K_5 é não planar.

Dualidade

- Dado um grafo planar **G**, o grafo $\mathbf{G}^{\mathbf{D}}$ chamado dual de **G**, é construído da seguinte forma:
  - A cada face de **G** associamos um vértice em $\mathbf{G}^{\mathbf{D}}$; e
  - A cada aresta de **G** (que separa duas faces) associamos uma aresta em $\mathbf{G}^{\mathbf{D}}$ ligando os vértices correspondentes às faces.
- Se um grafo é planar, então seu dual também é planar.
- O termo dual se justifica, pois $\mathbf{G}^{\mathbf{DD}} = \mathbf{G}$, desde que **G** tenha conectividade maior ou igual a 3.

Exemplo

- O dual do $\mathbf{K_4}$ é o próprio $\mathbf{K_4}$.



Exemplo

- O cubo é o dual do octaedro, e vice-versa.