



UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS E  
COMPUTACIONAIS - ICMC

**Notas de Física**

**Renan Wenzel - 11169472**

**Patrícia Christina Marques Castilho - [patricia.castilho@ifsc.usp.br](mailto:patricia.castilho@ifsc.usp.br)**

18 de maio de 2023

---

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Aula 00 - 23/03/2023</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Aula 01 - 27/03/2023</b>	<b>4</b>
2.1	Movimentos 1D . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Aula 02 - 29/03/2023</b>	<b>7</b>
3.1	Motivações . . . . .	7
3.2	Aceleração . . . . .	7
3.3	Movimento Retilíneo Uniformemente Variado. . . . .	7
<b>4</b>	<b>Aula 03 - 30/03/2023</b>	<b>10</b>
4.1	Motivações . . . . .	10
4.2	Exercício 29 - Tipler . . . . .	10
4.3	Exercício 44 - Tipler . . . . .	11
4.4	Exercício 58 - Tipler . . . . .	11
4.5	Exercício 67 - Tipler . . . . .	11
4.6	Exercício 72 - Tipler . . . . .	11
4.7	Exemplo - Aula 06 Vanderlei . . . . .	12
<b>5</b>	<b>Aula 04 - 10/04/2023</b>	<b>14</b>
5.1	Motivações . . . . .	14
5.2	Vetores . . . . .	14
5.3	Movimento Uniforme Bidimensional . . . . .	16
<b>6</b>	<b>Aula 05 - 12/04/2023</b>	<b>17</b>
6.1	O que esperar? . . . . .	17
6.2	Lançamento de Projéteis . . . . .	17
6.3	Movimento Uniformemente Variado em Duas Dimensões . . . . .	18
<b>7</b>	<b>Aula 06 - 13/04/2023</b>	<b>19</b>
7.1	Motivações . . . . .	19
7.2	Movimento Relativo . . . . .	19
<b>8</b>	<b>Aula 7 - 17/03/2023</b>	<b>21</b>
8.1	Motivações . . . . .	21
8.2	Movimento Circular . . . . .	21
8.3	Acelerações no Movimento Circular. . . . .	22
8.4	Movimento Circular Uniforme . . . . .	23
<b>9</b>	<b>Aula 8 - 19/04/2023</b>	<b>25</b>
9.1	Motivações . . . . .	25
9.2	Exemplo de MCU - 67 Típicos . . . . .	25
9.3	Dinâmica e Leis de Newton . . . . .	25
9.3.1	O que esperar . . . . .	25
9.3.2	Leis de Newton . . . . .	26
9.3.3	Exemplo 4.2 - Tipler . . . . .	27
<b>10</b>	<b>Aula 10 - 24/04/2023</b>	<b>28</b>
10.1	O que esperar? . . . . .	28
10.2	Motivação . . . . .	28
10.3	Tipos de Força . . . . .	29
10.3.1	As Quatro Forças Fundamentais de Forma Breve . . . . .	29
10.3.2	Força Peso . . . . .	30
10.3.3	Força Normal . . . . .	30

---

<b>11 Aula 11 - 25/04/2023</b>	<b>33</b>
11.1 O que esperar? . . . . .	33
11.2 Força de Tensão . . . . .	33
<b>12 Aula 12 - 27/04/2023</b>	<b>35</b>
12.1 O que esperar? . . . . .	35
12.2 Força de Mola . . . . .	35
12.3 Força de Tração . . . . .	35
<b>13 Aula 13 - 03/05/2023</b>	<b>36</b>
13.1 O que Esperar? . . . . .	36
13.2 Cinemática . . . . .	36
13.2.1 Movimento Unidimensional . . . . .	36
13.2.2 Movimento Bidimensional . . . . .	36
13.2.3 Trajetória de Projéteis . . . . .	36
13.2.4 Movimento Circular . . . . .	37
13.3 Revisão de Dinâmica . . . . .	37
13.3.1 Leis de Newton . . . . .	37
13.3.2 Tipos de Força . . . . .	37
13.4 Exemplos . . . . .	37
<b>14 Aula 14 - 08/05/2023</b>	<b>39</b>
14.1 O que esperar? . . . . .	39
14.2 Força de Atrito. . . . .	39
14.2.1 Força de Atrito Estático . . . . .	39
14.2.2 Força de Atrito Cinético . . . . .	39
<b>15 Aula 15 - 10/05/2023</b>	<b>43</b>
15.1 O que esperar? . . . . .	43
15.2 Força de Arrasto . . . . .	43
15.3 Movimentos Curvos . . . . .	44
<b>16 Aula 17 - 15/05/2023</b>	<b>45</b>
16.1 O que esperar? . . . . .	45
16.2 Trabalho e Energia Cinética . . . . .	45
16.3 Movimento Tridimensional. . . . .	46
<b>17 Aula 18 - 17/05/2023</b>	<b>49</b>
17.1 O que esperar? . . . . .	49
17.2 Trabalho da Força Peso . . . . .	49
<b>18 Aula 19 - 18/05/2023</b>	<b>50</b>
18.1 O que esperar? . . . . .	50
18.2 Trabalho e Energia Cinética - Parte II . . . . .	50

---

## 1 Aula 00 - 23/03/2023

(Revisão Unidades de Medidas)

## 2 Aula 01 - 27/03/2023

- Revisar propriedades de derivadas;
- Aplicar derivadas em movimento 1D.

### 2.1 Movimentos 1D

Dada uma partícula com posição descrita por  $x = x(t)$ , em que  $t$  é a variável de tempo, denotamos seu deslocamento por  $\Delta x = x_2 - x_1 = x(t_2) - x(t_1)$ . Analogamente, o intervalo de tempo é definido por  $\Delta t = t_2 - t_1$ . Com essas ferramentas, já podemos definir a velocidade média de um objeto em uma dimensão como  $\vec{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ . Observe que, quanto menor o intervalo de tempo, mais momentâneo se torna essa definição, de modo que a velocidade instantânea pode ser encontrada como

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \vec{v}(t).$$

Regras de derivadas:

$$f(t) = c \Rightarrow \frac{df}{dt} = 0 \text{ Derivada de uma constante é sempre nula;}$$

$$f(t) = x^n \Rightarrow \frac{df}{dt} = nx^{n-1} \text{ Regra do tombo;}$$

$$f(t) = A \sin(t) \Rightarrow \frac{df}{dt} = A \cos(t);$$

$$f(t) = B \cos(t) \Rightarrow \frac{df}{dt} = -B \sin(t);$$

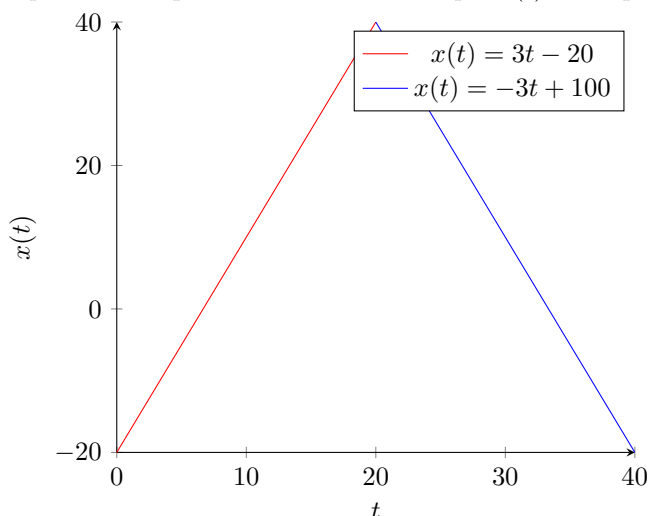
$$f(t) = Ce^t \Rightarrow \frac{df}{dt} = Ce^t.$$

#### Exemplo 1.

$$i) f(t) = 3t^4 + t^2 \Rightarrow \frac{df}{dt} = 12t^3 + 2t$$

$$ii) f(t) = 5 \sin(t) + 3(t^2 + 1) = 5 \sin(t) + 3t^2 + 3 \Rightarrow \frac{df}{dt} = 5 \cos(t) + 6t$$

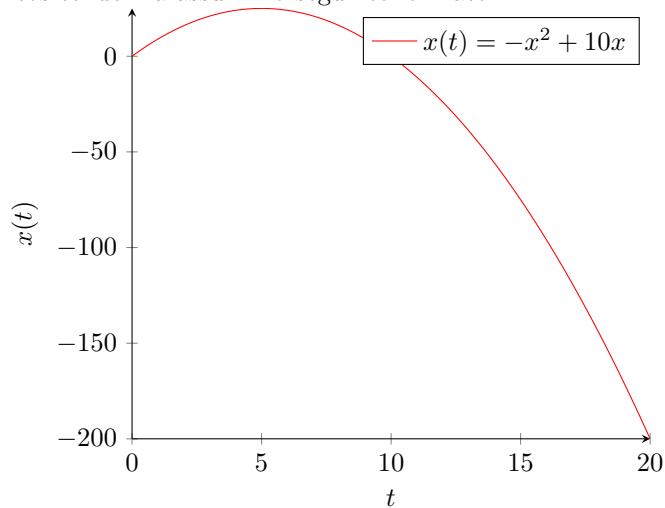
A partir deste ponto, tome  $t$  como tempo,  $x(t)$  como posição e  $v(t)$  a velocidade instantânea.



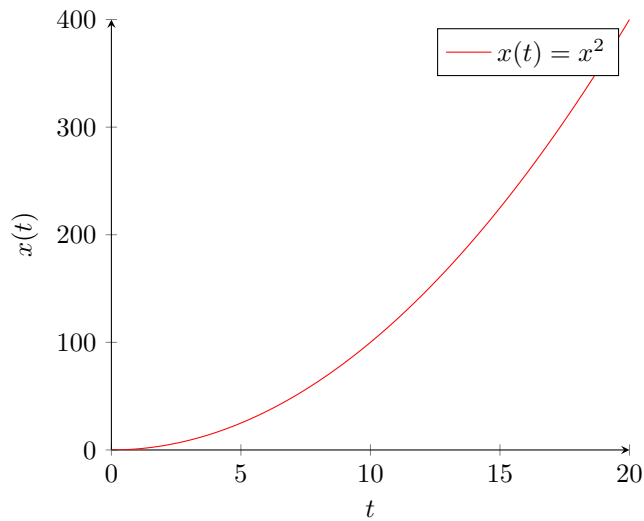
---

Esse movimento em que a velocidade é descrita por uma linha reta é conhecido como movimento retilíneo uniforme, pois a velocidade  $v(t)$  muda de forma linear, i.e.,  $\frac{dx}{dt} = c$ , em que  $c$  é uma constante.

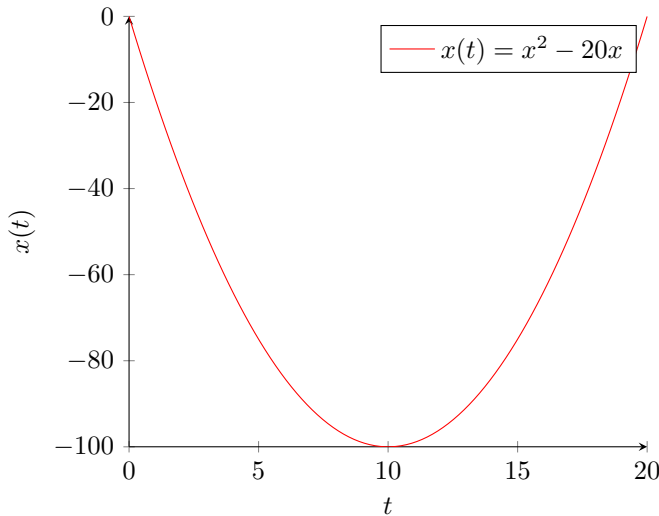
Por outro lado, há outro tipo de movimento, o movimento retilíneo uniformemente variado, em que a velocidade não é constante. A ação responsável por mudar a velocidade é conhecida como aceleração, e os gráficos tendem a assumir o seguinte formato



Ou, caso a velocidade cresça com o tempo,



Há ainda o caso em que a velocidade cresce por um tempo e diminui depois, com gráficos como o que segue



Nestes casos, para calcular o deslocamento da partícula, precisamos somar muito mais intervalos de tempo. Para isso, observe que cada instante, a posição da partícula pode ser encontrada multiplicando-se o intervalo de tempo pela velocidade instantânea, i.e.,  $\Delta x'_i = v'_i \Delta t'_i$ . Quebrando os intervalos desta forma, o deslocamento de um ponto a outro é denotado por

$$\Delta x_{1,2} = x(t_2) - x(t_1) \approx \sum_{k=1}^N \Delta x'_i = \sum_{k=1}^N v'_i \Delta t'_i$$

Assim como para a velocidade instantânea, quanto menor tomarmos o intervalo de tempo, mais preciso é o valor encontrado para  $\Delta x_{1,2}$ , o que indica uma boa oportunidade para o uso do limite novamente. Com isso, definimos

$$x(t_2) - x(t_1) = \lim_{\Delta t' \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N v(t'_i) \Delta t'_i = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$$

Este último símbolo, chamado integral, descreve a área “embaixo” da curva da função  $f(t)$  dentro do intervalo  $[t_1, t_2]$ . Supondo que  $c$  e  $k$  são constantes quaisquer, seguem abaixo algumas das regras de integração:

$$i) f(t) = ct^n \Rightarrow \frac{df}{dt} = nct^{n-1} \Rightarrow F(t) = \frac{ct^{n+1}}{n+1} \text{ (Primitiva de } f)$$

$$ii) \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt = F(t_2) - F(t_1) = \frac{c}{n+1} t_2^{n+1} - \frac{c}{n+1} t_1^{n+1} \text{ (Integral definida de } f)$$

$$iii) \int f(t) dt = \frac{c}{n+1} t^{n+1} + k \text{ (Integral indefinida de } f)$$

Para conferir se a integral está correta, é preciso derivar a função  $F$  e, se obter como resultado a função  $f$ , significa que está correto. Com este conhecimento em mente, segue que

$$x(t) = \int v_0 dt = v_0 t + x_0$$

Algumas outras regras importantes:

$$iv) \frac{d \sin(t)}{dt} = \cos(t) \Rightarrow \int \cos(t) dt = \sin(t) + c$$

$$v) \frac{d \cos(t)}{dt} = -\sin(t) \Rightarrow \int \sin(t) dt = -\cos(t) + c$$

$$vi) \frac{de^t}{dt} = e^t \Rightarrow \int e^t dt = e^t + c$$

Ou seja, em certo sentido, a integral e a derivada são dois lados da mesma moeda, assim como multiplicação e divisão ou adição e subtração.

---

## 3 Aula 02 - 29/03/2023

### 3.1 Motivações

- Estudar a aceleração;
- Entender o Movimento Retilíneo Uniformemente Variado.

### 3.2 Aceleração

Definimos previamente a velocidade média como sendo a variação de tempo dividindo o deslocamento, sendo, portanto, uma quantidade representando a taxa de variação da posição em um intervalo de tempo. De forma análoga, definimos a aceleração como a taxa de variação da velocidade em um intervalo de tempo, ou seja,

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}.$$

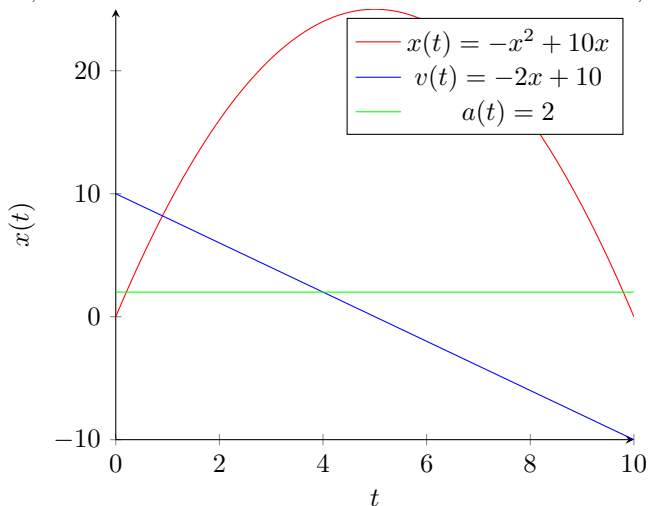
Ainda mais, se ela for positiva, a velocidade aumenta. Caso contrário, ela diminui. Ainda repetindo o processo feito para o caso da velocidade, podemos encontrar uma aceleração instantânea como

$$a(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} \right] = \frac{dv(t)}{dt}$$

Observe também que

$$a(t) = \frac{d}{dt} \left( \frac{dx(t)}{dt} \right) = \frac{d^2x}{dt^2}.$$

Utilizando a análise dimensional, é possível encontrar a dimensão da aceleração como  $[a] = \frac{[v]}{[t]} = \frac{\frac{[L]}{[t]}}{[t]} = \frac{[L]}{[t]^2}$ . Assim, se o sistema de medida for o Sistema Internacional,  $[a] = \frac{m}{s^2}$ .



### 3.3 Movimento Retilíneo Uniformemente Variado.

Sabendo que  $a = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$ , podemos fazer o caminho oposto para encontrar uma fórmula para a posição sabendo a aceleração. De fato, dado um intervalo de tempo  $[t_0, t]$ ,

$$v(t) = \int_{t_0}^t a(t) dt = at \Big|_{t_0}^t = at - at_0$$

Sabemos, também, que  $v(t) - v(t_0) = \Delta v$ , tal que

$$v(t) = v(t_0) + a(t - t_0) = v_0 + a(t - t_0)$$

Além disso, vimos que

$$\Delta x = x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^t v(t) dt.$$

Juntando tudo, segue a fórmula dita:

$$\begin{aligned} x(t) - x(t_0) &= \overbrace{\int_{t_0}^t [v_0 + a(t - t_0)] dt}^{\int f(t)+g(t)dt=\int f(t)dt+\int g(t)dt} = \overbrace{\int_{t_0}^t v_0 dt}^{\int cdt=ct} + \overbrace{\int_{t_0}^t at dt}^{\int t^n dt=\frac{t^{n+1}}{n+1}} - \int_{t_0}^t at_0 dt \\ &\Rightarrow x(t) - x(t_0) = v_0 t \Big|_{t_0}^t + a \frac{t^2}{2} \Big|_{t_0}^t - at_0 t \Big|_{t_0}^t \\ &= v_0(t - t_0) + a \frac{(t^2 - t_0^2)}{2} - at_0(t - t_0) \\ &= v_0(t - t_0) + a \frac{t^2 - t_0^2}{2} - at_0 t + at_0^2 = v_0 t - v_0 t_0 + \frac{a}{2}(t^2 - 2t_0 t + 2t_0^2) \\ &= v_0(t - t_0) + \frac{a}{2}(t - t_0)^2 \\ &\Rightarrow x(t) = x(t_0) + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2. \end{aligned}$$

Com isso, no caso em que  $t_0 = 0$ , segue que

$$\boxed{x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}}$$

Uma coisa notável é que todas essas fórmulas estão dependentes de tempo. No entanto, será que é possível se livrar dessa variável e relacionar, por exemplo, velocidade e posição? A resposta é sim! E vamos mostrar como a seguir, na equação conhecida como Equação de Torricelli. Com efeito,

$$\begin{aligned} (I) \quad (t - t_0) &= \frac{v(t) - v_0}{a} = \frac{v - v_0}{a} \\ (II) \quad x(t) &= x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2 \\ (I \text{ com } II) \quad x &= x_0 + v_0 \frac{v - v_0}{a} + \frac{1}{2}a \frac{v - v_0}{a} \\ &\Rightarrow x = x_0 + \frac{1}{a} \left\{ v_0 v - v_0^2 + \frac{1}{2}(v^2 - 2vv_0 + v_0^2) \right\} \\ &= x_0 + \frac{1}{a} \left\{ -v_0^2 + \frac{v^2}{2} + \frac{v_0^2}{2} \right\} \\ &\Rightarrow x - x_0 = \frac{1}{2a} [v^2 - v_0^2] \iff [v^2 - v_0^2] = 2a(x - x_0). \end{aligned}$$

Portanto, chegamos na Equação de Torricelli

$$\boxed{v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)}$$

Para reforçar o que foi visto até agora, vejamos um exemplo.

**Exemplo 2.** Suponha que um carro freia uniformemente, passando de 60km/h para 30km/h em 5 segundos. Qual é a distância que o carro percorrerá até parar? Em quanto tempo?

**Solução:** Sabemos que  $x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$ ,  $v(t) = v_0 + a(t - t_0)$ , e  $v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$ . Além disso, como é até o carro parar, a velocidade final é 0km/h, a variação de tempo até o momento em que a velocidade atinge 30km/h ( $=8.333\text{m/s}$ ) é dada como  $\Delta t = 5 - 0 = 5\text{s}$ , sendo a velocidade inicial 60km/h ( $=16.666\text{m/s}$ ). Pela equação dois,

$$a = \frac{v(t_1) - v_0}{t_1 - t_0} = \frac{8.33 - 16.66}{5} = -1.66 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$



---

Agora, para obter a distância, sendo  $v_2 = 0\text{km/h}$  o valor da aceleração no tempo em que o carro para (o segundo percurso), utilizamos Torricelli para obter o deslocamento no pedaço final do percurso

$$v_2^2 = v_1^2 + 2a(x_2 - x_1) \Rightarrow 0 = 8.33^2 + 2(-1.66)\Delta x_2$$

Assim, isolando o  $\Delta x_2$ ,

$$\Delta x_2 = \frac{8.33^2}{3.32} = \text{Professora vai passar na próxima aula.}$$

Ademais, para encontrar todo o caminho que o carro andou, temos

$$0 = v_0^2 + 2a(x_2 - x_0) = 16.66^2 + 2(-1.66)\Delta x \Rightarrow \Delta x = \frac{16.66^2}{3.32}$$

Finalmente, o instante de tempo pode ser encontrado fazendo

$$v_2(t) = v_1 + a(t_2 - t_0) \Rightarrow 0 = 8.33 - 1.66\Delta t_2 \Rightarrow \Delta t_2 = 5\text{s.} \blacksquare$$

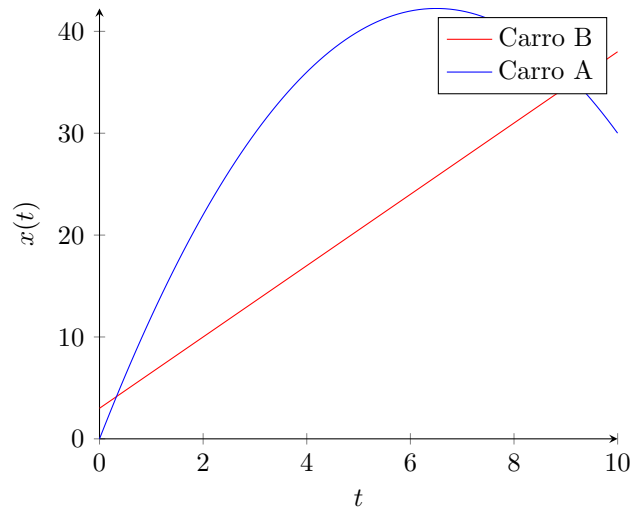
## 4 Aula 03 - 30/03/2023

### 4.1 Motivações

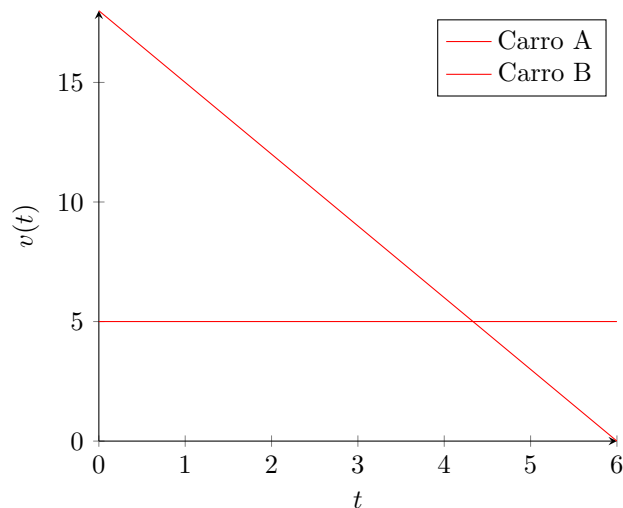
- Resolução de Exercícios.

### 4.2 Exercício 29 - Tipler

“Considere a trajetória de dois carros, o Carro A e o Carro B. (a) Existe algum instante para o qual os carros estão lado-a-lado? (b) Eles viajam sempre no mesmo sentido? (c) Eles viajam com a mesma velocidade em algum instante  $t$ ? (d) Para que  $t$  os carros estão mais distantes entre si? (e) Esboce os gráficos de  $v \times t$ ”



Os carros se encontram lado-a-lado quando os gráficos se cruzam, ou seja, em  $t = 1$  s e  $t = 9$  s (Tipler mais acurado que meu gráfico.). É notável que eles não estão sempre no mesmo sentido, visto que, a partir de 6 s, o gráfico do carro B passa a mudar o sentido. Em aproximadamente 5 s, ambos estão com a mesma velocidade, ou seja, estão com a mesma velocidade, e a distância entre eles está maior exatamente no ponto em que as velocidades estão iguais. Finalmente, seguem os gráficos:



---

### 4.3 Exercício 44 - Tipler

“Um carro viaja em linha reta com  $\vec{v} = 80\text{km/h}$  durante  $\Delta t_1 = 2.5\text{h}$ . Depois,  $\vec{v}_2 = 40\text{km/h}$ ,  $\Delta t_2 = 1.5\text{h}$ . Qual é o deslocamento total? E qual é a velocidade  $\vec{v}$  total?”

$$(a) \quad \Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 = \vec{v}_1 \Delta t_1 + \vec{v}_2 \Delta t_2 \Rightarrow \Delta x = 260\text{km}.$$

$$(b) \quad \vec{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{260}{4} = 65\text{km/h}.$$

### 4.4 Exercício 58 - Tipler

“Um carro acelera de  $48.3\text{km/h}$  para  $80.5\text{km/h}$  em  $3.70\text{s}$ . Qual a aceleração média?”

Primeiramente, precisamos converter as unidades para medidas iguais. Com isso, note que  $\vec{v}_1 = 48.3\text{km/h} = 13.52\text{m/s}$ ,  $\vec{v}_2 = 80.5\text{km/h} = 22.54\text{m/s}$ . Assim, chegamos em

$$\vec{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t} \approx 2.4\text{m/s}.$$

### 4.5 Exercício 67 - Tipler

“Um corpo está em uma posição inicial  $x_1$  com velocidade inicial  $\vec{v}_1$ . Passado um tempo, ele se encontra na posição  $x_2$  com velocidade  $\vec{v}_2$ . Qual é a aceleração deste corpo?”

Utilizaremos Torricelli. sabemos que

$$(1) : \quad x_1 = 6\text{m}, \vec{v}_1 = 10\text{m/s}$$

$$(2) : \quad x_2 = 10\text{m}, \vec{v}_2 = 15\text{m/s}.$$

Deste modo,  $v^2 = v_0^2 + 2a\Delta x \Rightarrow v_2^2 = v_1^2 + 2a(x_2 - x_1) \Rightarrow a \approx 16\text{m/s}^2$

### 4.6 Exercício 72 - Tipler

“Um parafuso se desprende de um elevador subindo a  $v_0 = 6\text{m/s}$ . O parafuso atinge o fundo do poço em  $3\text{s}$ .

(a) Qual era a altura do elevador? (b) Qual é a velocidade do parafuso no chão? Tome  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ ”

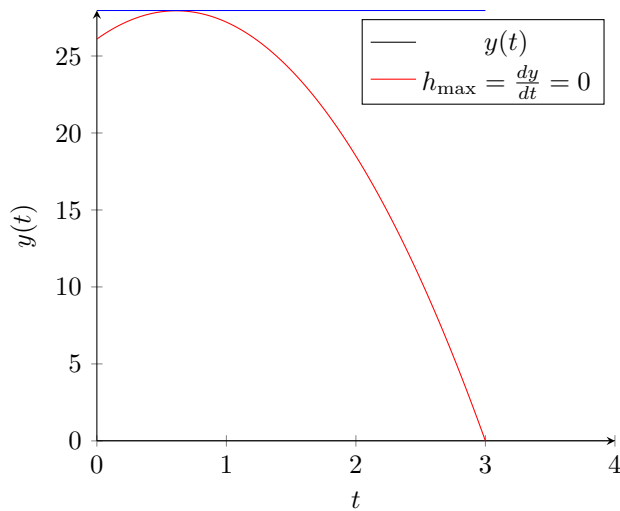
Sabemos que  $t_0 = 0\text{s}$ ,  $y(t_0) = h$ ,  $v(t_0) = v_0$ . Com isso, podemos descrever  $y(t) = h + v_0 t + \frac{1}{2}gt^2$ . Vamos responder, agora, o item a, isto é, qual é o valor da altura  $h$ ? Segue que, em  $t = 3\text{s}$ ,  $y(t) = 0$ . Utilizando a fórmula,

$$h = -v_0 t + \frac{1}{2}gt^2 = -6 \cdot 3 + \frac{1}{2}9.8 \cdot 3^2 = 26.1\text{m}$$

Com relação ao item (b), vimos que  $v(t) = v_0 + at$ . Deste modo,

$$v(3\text{s}) = 6 - 9.8 \cdot 3 = -23.4\text{m/s}$$

Indo um pouco além do que foi pedido, analisemos o movimento do parafuso. É possível concluir que o parafuso atingirá a altura máxima no instante em que  $t^* = \frac{v_0}{g} = 0.6\text{s}$ , visto que este momento ocorre quando  $v(t) = v_0 - gt = 0$ . Com isso, conclui-se que a altura máxima é  $y(t^*) = h + v_0 t^* - \frac{1}{2}gt^{*2} \approx 27.5\text{m}$ . No gráfico,



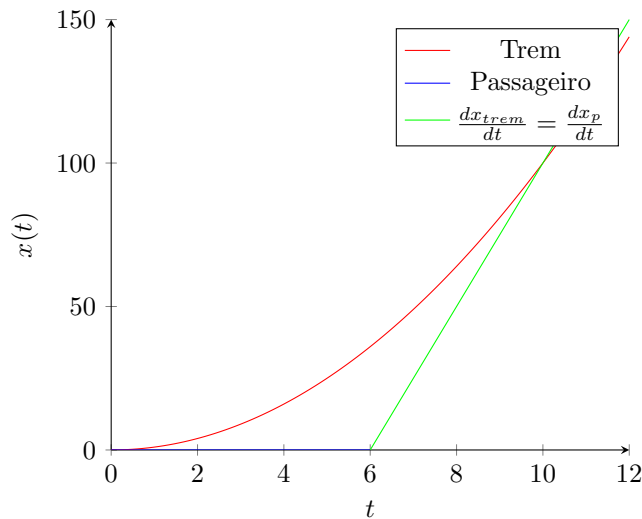
#### 4.7 Exemplo - Aula 06 Vanderlei

“Suponha que há um trem parado no instante  $t=0$  com aceleração  $a$ . Passados 6s, um passageiro chega ao local e observa o trem na posição  $x_{trem_1}$ . Este passageiro sai correndo com velocidade  $v_0$  para tentar alcançar o trem. Qual é a velocidade mínima que o passageiro precisa atingir para alcançá-lo?”

Com relação ao trem, suas condições iniciais são  $t_0 = 0, x_{trem} = 0, v_{trem} = 0$ , tal que  $x_{trem}(t) = \frac{1}{2}at^2$ . Por outro lado, quanto ao passageiro, quando  $t = 6s, x_p = 0$ , de modo que  $x_p(t) = x_{p_0} + v_0t$ . Como temos a informação da posição do passageiro aos 6s,

$$x_p(6) = x_{p_0} + v_0 \cdot 6 = 0 \Rightarrow x_{p_0} = -6v_0 \Rightarrow x_p(t) = v_0(t - 6).$$

No momento em que o passageiro alcança o trem, eles possuem posições iguais, isto é,  $x_p(t) = x_{trem}(t)$ . Graficamente,



Ou seja, buscamos  $t^*$  tal que  $x_p(t^*) = x_{trem}(t^*), v_p(t^*) = v_{trem}(t^*)$ . Com efeito,

$$v_0(t^* - 6) = \frac{at^{*2}}{2} \Rightarrow v_0 = at^* \Rightarrow t^* = \frac{v_0}{a}$$

$$v_0 = \frac{a \left(\frac{v_0}{a}\right)^2}{2 \frac{v_0}{a} - 6} \Rightarrow \frac{v_0^2}{2a} = 6v_0 \Rightarrow v_0 = 12a.$$

---

Outra forma de resolver é utilizando o fato de que quando  $\frac{dv}{dt} = 0$ , a função está num mínimo. Ou seja, basta encontrar o valor mínimo de  $v_0$  que satisfaça o que buscamos. Temos

$$v_0(t-6) = \frac{at^2}{2} \Rightarrow v_0(t) = \frac{at^2}{2} \frac{1}{(t-6)}.$$

Agora, derivando essa equação para  $v_0$ ,

$$\frac{dv_0}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{at^2}{2} \frac{1}{t-6} \right) = \frac{d}{dt} (f(t)g(t)),$$

em que  $f(t) = \frac{at^2}{2}$ ,  $g(t) = (t-6)^{-1}$ . Fazemos isso porque há uma regra para derivar o produto de funções, a Regra do Produto

$$\boxed{\frac{df(t)g(t)}{dt} = g(t)\frac{df(t)}{dt} + f(t)\frac{dg(t)}{dt}}$$

Derivando individualmente  $f$  e  $g$ ,

$$\frac{df(t)}{dt} = at, \quad \frac{dg(t)}{dt} = -(t-6)^{-2} = -\frac{1}{(t-6)^2}.$$

Agora, vamos juntar tudo para obter a derivada de  $v_0$ :

$$\begin{aligned} \frac{dv_0}{dt} &= \frac{df(t)}{dt}g(t) + \frac{dg(t)}{dt}f(t) = \frac{at}{t-6} - \frac{1}{2(t-6)^2}at^2 \\ &= at \left( \frac{1}{t-6} - \frac{t}{2(t-6)^2} \right) = 0 \\ &\Rightarrow \frac{1}{t-6} = \frac{t}{2(t-6)} \Rightarrow 1 = \frac{t}{2(t-6)} \\ &\Rightarrow 2(t-6) = t \Rightarrow 2t - t = 12 \Rightarrow t = 12s. \end{aligned}$$

---

## 5 Aula 04 - 10/04/2023

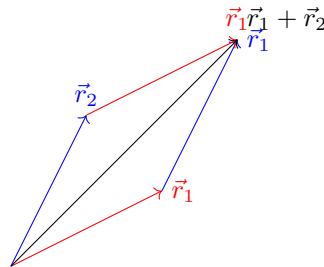
### 5.1 Motivações

- Iniciar os estudos de movimentos em um plano todo (duas dimensões);
- Revisar vetores e sua manipulação.

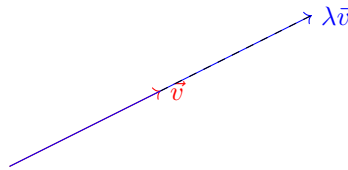
### 5.2 Vetores

Começamos com um estudo das propriedades de vetores. Dados vetores  $\vec{r}_1, \vec{r}_2$  e um número real  $\lambda$ , definimos:

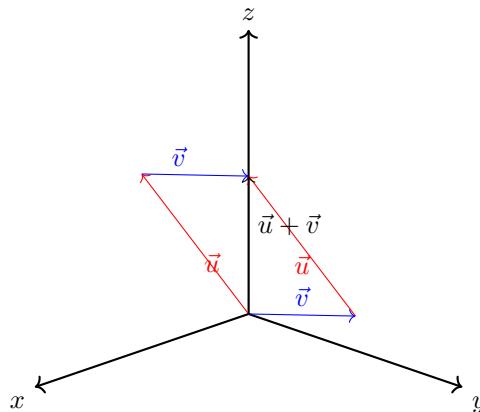
- i) A soma dos vetores:



- ii) A multiplicação por escalar:  $\lambda(r_1 + r_2)$  (Essencialmente, o resultado é aumentar ou diminuir o tamanho da seta.)



A título de curiosidade, a soma de vetores em três dimensões seria desta forma:



Porém, não basta utilizar apenas representações gráficas para vetores. Desta forma, é comum definirmos um sistema de coordenadas cartesiano para suas componentes. Assim, um vetor  $\vec{u}$  pode ser decomposto em uma coordenada x e outra coordenada y:

$$\vec{u} = u_x \hat{i} + u_y \hat{j} (+ u_z \hat{k})$$

chamamos os valores  $u_x, u_y, u_z$  de projeções, sendo a última um objeto presente apenas no caso de três coordenadas. Com isso, definimos o módulo do vetor, ou seja, seu tamanho, pela fórmula

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2},$$

e, de brinde, ganhamos fórmulas para as projeções em cada coordenada:

$$\begin{aligned}u_x &= |u| \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{u_x}{|\vec{u}|} \\u_y &= |u| \sin \theta \Rightarrow \sin \theta = \frac{u_y}{|\vec{u}|} \\\tan \theta &= \frac{u_y}{u_x}.\end{aligned}$$

É importante, também, darmos uma forma de obter um vetor de módulo 1, i.e., um vetor unitário, visto que ele pode nos fornecer a informação do valor do ângulo  $\theta$ , a direção, etc. Ele é obtido reduzindo um vetor  $u$  pelo seu módulo,

$$\hat{u} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}.$$

Uma utilidade imediata da definição em coordenadas é que agora temos um modo de tratar a soma de vetores algebricamente

$$\begin{aligned}\text{Soma: } \vec{u} + \vec{v} &= (u_x \hat{i} + u_y \hat{j}) + (v_x \hat{i} + v_y \hat{j}) = (u_x + v_x) \hat{i} + (u_y + v_y) \hat{j} \\\text{Multiplicação por Escalar: } \lambda \vec{u} &= \lambda(u_x \hat{i} + u_y \hat{j}) = \lambda u_x \hat{i} + \lambda u_y \hat{j} \\\theta &= \text{ctg} \left( \frac{\lambda u_y}{\lambda u_x} \right) = \text{ctg} \left( \frac{u_y}{u_x} \right).\end{aligned}$$

Agora podemos ir à aplicação física dessa discussão, o deslocamento de uma partícula no plano. Nesta configuração, normalmente terá-se uma partícula com posição  $\vec{x}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} \quad (+z(t)\hat{k})$ . Para realizar o estudo desses casos, vamos decompor o movimento dela em cada eixo, ou seja, quebramos o movimento no plano em dois movimentos independentes, um em cada eixo  $x$  ou  $y$ . Nestas condições, o deslocamento de uma partícula de uma posição 1 até uma posição 2 será

$$\vec{x}_2 - \vec{x}_1 = (x_2 \hat{i} + y_2 \hat{j}) - (x_1 \hat{i} + y_1 \hat{j}) = (x_2 - x_1) \hat{i} + (y_2 - y_1) \hat{j}.$$

Com isso, podemos escrever que o deslocamento  $\Delta \vec{r}$  é

$$\Delta \vec{r} = \Delta x \hat{i} + \Delta y \hat{j}.$$

Ainda mais, se conhecemos o valor do ângulo entre as posições 1 e 2 e o módulo dos vetores representando-as,

$$|\Delta r|^2 = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 \cos \theta.$$

Tendo o básico do deslocamento, podemos repetir o raciocínio prévio para trabalhar com aceleração e velocidade. De fato,

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}, \quad \vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}_m}{\Delta t}$$

e os valores instantâneos serão dados por

$$\begin{aligned}\vec{v}(t) &= \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt} \hat{i} + \frac{dy(t)}{dt} \hat{j} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} \\\vec{a}(t) &= \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{dv_x(t)}{dt} \hat{i} + \frac{dv_y(t)}{dt} \hat{j} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j}.\end{aligned}$$

Além disso, o módulo e orientação desses valores serão dados por

$$\begin{aligned}|\vec{v}| &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2}, \quad \theta_v = \text{ctg} \left( \frac{v_y}{v_x} \right) \\|\vec{a}| &= \sqrt{a_x^2 + a_y^2}, \quad \theta_a = \text{ctg} \left( \frac{a_y}{a_x} \right).\end{aligned}$$

Note que a aceleração não aponta na direção da velocidade em si, mas sim na direção da **variação** da velocidade.

---

### 5.3 Movimento Uniforme Bidimensional

Considere uma partícula com posição  $\vec{r}(t)$  e uma orientação, tal que forma um ângulo  $\theta$  com o plano. Como estaremos considerando o movimento do tipo uniforme, a aceleração é nula e a velocidade  $\vec{v}(t) = v_0$  é constante, tendo módulo  $v_0$  e orientação  $\theta$ . Em outras palavras, as componentes desse vetor serão, também, constantes, isto é,

$$\text{constantes} \begin{cases} v_x(t) = v_{x_0} \\ v_y(t) = v_{y_0}. \end{cases}$$

Desta forma, a decomposição da velocidade em coordenadas é tal que

$$\text{Eixo x: } v_x(t) = v_{x_0} \Rightarrow x(t) = x_0 + v_{x_0}(t - t_0), \quad x_0 = x(t_0)$$

$$\text{Eixo y: } v_y(t) = v_{y_0} \Rightarrow y(t) = y_0 + v_{y_0}(t - t_0), \quad y_0 = y(t_0).$$

Logo, a posição da partícula no plano será dada por

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} = (x_0 + v_{x_0}(t - t_0))\hat{i} + (y_0 + v_{y_0}(t - t_0))\hat{j}.$$

Note que, quando falamos de trajetória de uma partícula ou objeto, buscamos uma relação entre as componentes  $x(t)$  e  $y(t)$  que independe do tempo, isto é, a relação temporal é dada de forma implícita. Uma forma de fazer isso é a através da tangente, pois

$$\frac{y(t) - y_0}{x(t) - x_0} = \frac{v_{y_0}(t - t_0)}{v_{x_0}(t - t_0)} = \frac{v_{y_0}}{v_{x_0}} = \tan \theta_0.$$

Com isso,

$$y(t) - y_0 = \tan \theta_0 (x(t) - x_0) \Rightarrow y = \tan(\theta_0)x - \tan(\theta_0)x_0 + y_0,$$

ou seja,  $y$  tem a forma de uma equação da reta com inclinação constante e igual a  $\tan \theta_0$ .



---

## 6 Aula 05 - 12/04/2023

### 6.1 O que esperar?

- Lançamento de Projéteis;
- Alcance e altura máximos.

### 6.2 Lançamento de Projéteis

Para descrevermos a trajetória de um objeto lançado, utilizamos a equação

$$y = v_0 \sin(\theta) \frac{x}{v_0 \cos(\theta)} - \frac{1}{2} g \left[ \frac{x}{v_0 \cos(\theta)} \right]^2 = \tan(\theta)x - \frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2 \cos^2(\theta)} x^2.$$

Desta equação, podemos deduzir algumas informações sobre o movimento de tal objeto. Por exemplo, qual é a altura máxima que um objeto atingirá? E onde ele estará neste instante? Quanto tempo levará para atingir este ponto máximo de altura? Vamos responder cada uma dessas situações. Para a terceira, note que, ao chegar no ponto máximo,  $v_y = 0$ . Assim,

$$0 = v_0 \sin(\theta) - gt_m \Rightarrow t_m = \frac{v_0 \sin(\theta)}{g}.$$

Sabendo o tempo, podemos encontrar o valor dela com reação ao eixo y:

$$y_m = v_0 \sin(\theta) \left[ \frac{v_0 \sin(\theta)}{g} \right] - \frac{1}{2} g \left[ \frac{v_0 \sin(\theta)}{g} \right]^2 \Rightarrow$$

$$y_m = \frac{v_0^2 \sin^2(\theta)}{2g}$$

Tendo estas duas informações, somos capazes de encontrar a informação restante - qual o valor da posição no eixo x.

$$x_m = v_0 \cos(\theta) \frac{v_0 \sin(\theta)}{g} \Rightarrow x_m = \frac{v_0^2}{g} \cos(\theta) \sin(\theta)$$

Ao lançar um objeto, não apenas terá uma altura máxima, mas alguma hora ele atingirá o chão ou um obstáculo (espero). Esse valor é conhecido como alcance e descreve, como indica o nome, o alcance que o arremesso terá. Com um processo similar ao da altura máxima, podemos encontrar valores para o tempo que ele leva até atingir este alcance e a posição. A ideia por trás deste raciocínio é pegar o caso em que o objeto atinge o chão, pois, assim, teremos  $y=0$ . Com isso,

$$0 = v_0 \sin(\theta)t - \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t_a(v_0 \sin(\theta) - \frac{1}{2}gt)$$

Para esta equação mais à direita zerar, duas coisas podem ocorrer - Ou  $t_a = 0$ , ou  $v_0 \sin(\theta) - \frac{1}{2}gt_a = 0$ . Portanto,

$$t_a = \frac{2v_0 \sin(\theta)}{g}$$

E quanto à posição? Agora que encontramos o valor do tempo, é possível resolver este problema sem muitas complicações, pois

$$x_a = v_0 \cos(\theta) \frac{2v_0 \sin(\theta)}{g} \Rightarrow x_a = \frac{2v_0^2}{g} \cos(\theta) \sin(\theta) = 2x_m.$$

Isso responde uma parte das nossas questões com relação ao deslocamento no espaço. No entanto, além disso, como o ângulo que lançamos o objeto altera o alcance?

Dada uma função qualquer  $f(t)$ , no ponto  $p'$  tal que  $f(t')$  tenha seu valor máximo, podemos utilizar a derivada, especificamente o momento em que a derivada é nula. Neste raciocínio, o ângulo máximo pode ser encontrado através de

$$\left. \frac{dx_a}{d\theta_0} \right|_{\theta_0=\theta_{ao}} = 0.$$

Logo, utilizando  $x_a(\theta_0) = \frac{2v_0^2}{g} \cos(\theta_0) \sin(\theta_0)$  juntamente da regra do produto,

$$\begin{aligned} \frac{dx_a}{d\theta_0} &= -\frac{2v_0^2}{g} \sin(\theta_0) \cdot \sin(\theta_0) + \frac{2v_0^2}{g} \cos(\theta_0) \cos(\theta_0) \\ &= \left[ \frac{2v_0^2}{g} (-\sin^2(\theta_0) + \cos^2(\theta_0)) \right] \Big|_{\theta_0=\theta_{am}} = 0 \quad \Rightarrow \sin^2(\theta_{am}) = \pm \cos^2(\theta_{am}) \Rightarrow \boxed{\theta = 45^\circ} \end{aligned}$$

Tendo as informações de deslocamento, conseguimos, por fim, encontrar a velocidade com que atingirá o solo. Temos  $t_A = \frac{2v_0 \sin(\theta_0)}{g}$ , tal que

$$\begin{aligned} v_x(t_a) &= v_{x_0} = v_0 \cos(\theta_0) \\ v_y(t_a) &= v_0 \sin(\theta_0) - gt_a = v_0 \sin(\theta) - \frac{g2v_0 \sin(\theta_0)}{g} \\ &\Rightarrow v_y(t_a) = -v_0 \sin(\theta) = -v_{y_0} \Rightarrow \vec{v}(t_a) = v_0 \cos(\theta_0)\hat{i} - v_0 \sin(\theta_0)\hat{j} \\ |\vec{v}(t_a)| &= \sqrt{v_0^2 [\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)]} = v_0. \end{aligned}$$

### 6.3 Movimento Uniformemente Variado em Duas Dimensões

---

## 7 Aula 06 - 13/04/2023

### 7.1 Motivações

- Revisar movimento relativo;

### 7.2 Movimento Relativo

Fixada uma origem O, a soma dos vetores representando os corpos A e B

$$\vec{r}_{AO} + \vec{r}_{BA} = \vec{r}_{BO}$$

nos fornece a direção relativa do corpo B com relação a A. Se A e B estão se movendo, ou seja, os vetores deles possuem dependência no tempo ( $\vec{r}_{AO} = \vec{r}_{AO}(t)$ ,  $\vec{r}_{BO} = \vec{r}_{BO}(t)$ ), então

$$\vec{r}_{BA}(t) = \vec{r}_{BO}(t) + \vec{r}_{AO}(t),$$

ou seja, a posição relativa de B com relação a A também dependerá do tempo. Além de posição relativa, podemos definir outros conceitos, tais como a velocidade relativa:

$$\vec{v}_{BA}(t) = \frac{d\vec{r}_{BA}(t)}{dt} = \frac{d\vec{r}_{BO}}{dt} + \frac{d\vec{r}_{AO}}{dt} \Rightarrow \vec{v}_{BA}(t) = \vec{v}_{BO}(t) + \vec{v}_{AO}(t)$$

e aceleração relativa de modo análogo, i.e.,  $\vec{a}_{BA}(t) = \vec{a}_{BO}(t) + \vec{a}_{AO}(t)$ . Vejamos alguns exemplos

**Exemplo 3.** Considere um sistema em que um carrinho viaja com velocidade  $\vec{v}_r$  e tem um passageiro  $\vec{v}_p$  com ele. Ambos se movem para a direita. Neste caso, há o sistema referencial de inércia da pessoa dentro do trem. Buscamos descobrir a velocidade da pessoa com relação ao trem. De fato, segue que

$$\vec{v}_p = \vec{v}_{PT} + \vec{v}_T.$$

**Exemplo 4.** Considere um sistema análogo ao anterior, mas, embaixo, há uma plataforma se movendo para a esquerda com velocidade igual à do trem. Neste caso, há o sistema referencial de inércia da pessoa dentro do trem. Buscamos descobrir a velocidade da pessoa com relação à plataforma. Obtemos

$$\vec{v}_{PT} = \vec{v}_{PT}^x \hat{i} + \vec{v}_{PT}^y \hat{j}. \Rightarrow \vec{v}_p = (\vec{v}_{PT}^x + \vec{v}_T^x) \hat{i} + \vec{v}_p^y \hat{j}$$

**Exemplo 5.** (Exemplo 32 do Tipler): Considere um sistema de avião e vento, no qual o módulo da velocidade do avião é de 200km/h e, o da velocidade do vento, é 90km/h. O vento é dado por um vetor apontando para a direita, enquanto o avião é um vetor apontando para cima. Pergunta-se: (a) Qual é a orientação que o avião deve voar? (Ambos estão sendo vistos do solo.) (b) Qual é o módulo da velocidade do avião visto do solo? (a) Segue que

$$\vec{v}_{AO} = \vec{v}_A - \vec{v}_v \Rightarrow \sin \theta = \frac{|\vec{v}_v|}{|\vec{v}_{av}|} = \frac{90}{200} = \frac{9}{20} \approx 27 \text{ deg}$$

(b) Sabemos, por pitágora, que

$$|\vec{v}_{AT}|^2 = |\vec{v}_v|^2 + |\vec{v}_a|^2 \Rightarrow |\vec{v}_a| = \sqrt{|\vec{v}_{av}|^2 - |\vec{v}_v|^2} = \sqrt{51900} \approx 178 \text{ km/h}$$

Com relação a este último exemplo, por que a velocidade  $\vec{v}_a$  tem valor 178km/h e não 200 - 90 = 110km/h? A resposta está na decomposição de  $\vec{v}_{av}$ , pois

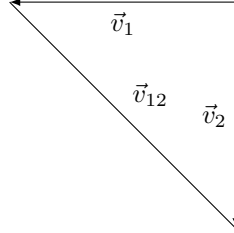
$$\begin{aligned} v_{av}^x &= |\vec{v}_{av}| \sin \theta = -200 \cdot 0.454 \approx -90 \text{ km/h} \\ v_{av}^y &= |\vec{v}_{av}| \cos \theta = 200 \cdot 0.891 \approx 178 \text{ km/h.} \end{aligned}$$

**Exemplo 6.** Suponha que, num instante  $t_0$ , dois trens estão andando em direção a uma plataforma. O trem um chegou nela, vindo do Norte, enquanto o trem dois, vindo pelo Leste, ainda se move, ambos com velocidade

$$|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| = 60 \text{ km/h.}$$

Passados dois minutos, o trem 2 alcança a plataforma e continua andando na direção Oeste com velocidade  $\vec{v}_2$  e o trem 1 continuou sua viagem ao Sul com velocidade  $\vec{v}_1$ . Pedese: (a) Determine o vetor  $\vec{v}_{21}$  da velocidade relativa dos trens. (b) Encontre, para este vetor do item (a), seu módulo (c) Quando a distância entre os vetores é mínima?

Faremos o diagrama de velocidades. Nele,  $|v_1| = |v_2|$ .



Além disso, pelo desenho,

$$\sin \theta = \frac{|\vec{v}_2|}{|\vec{v}_{21}|}, \quad \cos \theta = \frac{|\vec{v}_1|}{|\vec{v}_{21}|} = \frac{|\vec{v}_2|}{|\vec{v}_{21}|} = \sin \theta.$$

A igualdade entre seno e cosseno ocorre quando o ângulo vale 45 graus, ou seja,  $\theta = 45^\circ$ . Assim,

$$\vec{v}_{21} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = -|\vec{v}_2|\hat{i} - (-|\vec{v}_1|\hat{j}) \Rightarrow \vec{v}_{21} = -|\vec{v}_2|\hat{i} + |\vec{v}_1|\hat{j}.$$

Logo,

$$|\vec{v}_{21}| = \sqrt{|\vec{v}_1|^2 + |\vec{v}_2|^2} \approx 85 \text{ km/h}$$

Para resolver, agora, o item b, a comecemos pela posição relativa 2 nos instantes  $t=0$ ,  $t=2\text{min}$  e  $t=4\text{min}$ . Quanto ao trem 2, as informações que temos indicam que ele se move no eixo  $x$  ( $y_2(t) = 0$ ), em  $t=2\text{min}$ , ele está na origem ( $x_2(2\text{min}) = 0$ ) e, deste modo,

$$\vec{r}_2(t) = x_2(t)\hat{i} + y_2(t)\hat{j} = x_2(t)\hat{i} \Rightarrow x_2(t) = x_{2O} + |\vec{v}_2|t$$

Utilizando o valor que sabemos, i.e.,  $x(2\text{min})$ , segue que, convertendo 2 minutos para horas ( $2\text{min} \approx 0.03\text{h}$ ),

$$x(0.03) = 0 = x_{2O} - 60 \cdot 0.03 \Rightarrow x_{2O} = 60 \cdot 0.03 = 2 \text{ km}.$$

Agora, sobre o trem 1, sabe-se que ele se move no eixo  $y$ , ou seja,  $x_1(t) = 0$ , tal que

$$y_1(t) = -|\vec{v}_1|t = -60t$$

Com essas informações, encontramos os valores

$$\begin{aligned} t = 0\text{min} : \quad & x_1(0) = 0, y_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 2\text{km}, y_2(0) = 0\text{km} \\ t = 2\text{min} : \quad & x_1(2) = 0, y_1(2) = -2\text{km}, \quad x_2(2) = 0\text{km}, y_2(2) = 0\text{km} \\ t = 4\text{min} : \quad & x_1(4) = 0, y_1(4) = -4\text{km}, \quad x_2(4) = -2, y_2(4) = 0\text{km}. \end{aligned}$$

Desta forma,

$$\vec{r}_{21}(t) = \vec{r}_2(t) - \vec{r}_1(t) \Rightarrow \vec{r}_{21}(t) = x_2(t)\hat{i} - y_1(t)\hat{j}.$$

Finalmente, para o item c, calculamos a distância como

$$L_{21}(t) = \sqrt{x_1^2 + (-y_1)^2} = \sqrt{(x_{2O} - |\vec{v}_2|t)^2 + (|\vec{v}_1|t)^2} = \sqrt{7200t^2 - 240t + 4}.$$

Para encontrar a distância **mínima**, é preciso derivar esta fórmula, igualar a 0 e resolver para tempo. Coloque  $l = 7200t^2 - 240t + 4$ , tal que

$$\frac{dl}{dt} = 2 \cdot 7200t - 240 + 0 = 0$$

Resolvendo isso, encontramos o tempo em que a distância é mínima, valendo  $t^* \approx 0.017\text{h} \approx 1\text{min}$ , tal que a distância mínima é

$$L_{21}(t^*) \approx 1.4.$$

---

## 8 Aula 7 - 17/03/2023

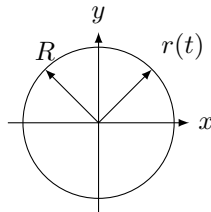
### 8.1 Motivações

- Começar a estudar o movimento circular;

### 8.2 Movimento Circular

Quando temos uma partícula fazendo movimento circular em um círculo de raio  $R$  num eixo  $x, y$ , diremos que ela, sua posição em qualquer instante será dada por um vetor  $\vec{r}(t)$ , sendo sua trajetória limitada a este círculo. Assim, obtemos o sistema  $R = |\vec{r}(t)|$ , sendo  $\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j}$  e

$$\begin{cases} x(t) = R \cos \theta(t) \\ y(t) = R \sin \theta(t). \end{cases}$$



Utilizando o sistema e o desenho, obtemos

$$\vec{r}(t) = R \cos \theta(t) \hat{i} + R \sin \theta(t) \hat{j},$$

donde segue o valor do módulo do vetor  $\vec{r}(t)$ :

$$\begin{aligned} |\vec{r}(t)|^2 &= x^2(t) + y^2(t) = (R \cos \theta(t))^2 + (R \sin \theta(t))^2 \\ &= R^2 (\cos^2 \theta(t) + \sin^2 \theta(t)) \\ &= R^2 \Rightarrow |\vec{r}(t)| = R. \end{aligned}$$

Concluimos, assim, que todo o movimento da partícula é dado em termos do ângulo  $\theta(t)$ . Além disso, o deslocamento da partícula é feita em arcos de círculo  $s(t) = R\theta(t)$ . Chamamos esta posição de “posição escalar do corpo sobre o círculo”. No entanto, no movimento circular, há outra posição, chamada “posição angular do corpo”, que é dada por  $\theta(t) = \frac{s(t)}{R}$ .

Utilizando estes dois, podemos encontrar uma equação para  $\vec{r}(t)$ :

$$\vec{r}(t) = R \cos \theta(t) \hat{i} + R \sin \theta(t) \hat{j} = R \underbrace{[\cos \theta(t) \hat{i} + \sin \theta(t) \hat{j}]}_{\hat{r}(t)} = R \hat{r}(t),$$

em que  $\hat{r}(t)$  é um versor na direção de  $\vec{r}(t)$ , isto é, um vetor com módulo um. De fato, vamos verificar isto:

$$|\hat{r}(t)| = \sqrt{\cos^2(\theta(t)) + \sin^2(\theta(t))} = 1$$

A seguir, vamos estudar como este versor  $\hat{r}(t)$  varia, ou seja, vamos derivar este vetor com respeito ao tempo. Para isso, introduziremos outra regra de derivação, a “Regra da Cadeia”. Dada uma função  $f(t) = u(v(t))$ , ou seja, uma função definida como uma função composta, sua derivação é feita de dentro pra fora: Derivamos  $v(t)$  com respeito a  $t$ , depois derivamos  $u$  com relação a  $v$  e multiplicamos, ou seja,

$$\boxed{\frac{df}{dt} = \frac{du}{dv} \frac{dv}{dt}}.$$

Assim, no caso do versor  $\hat{r}(t)$ ,

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{r}(t)}{dt} &= \frac{d}{dt}[\cos \theta(t)\hat{i} + \sin \theta(t)\hat{j}] \\ &= \frac{d}{dt}[\cos \theta(t)]\hat{i} + \frac{d}{dt}[\sin \theta(t)]\hat{j} \\ &= \frac{d \cos \theta(t)}{d\theta} \frac{d\theta(t)}{dt} \hat{i} + \frac{d \sin \theta(t)}{d\theta} \frac{d\theta(t)}{dt} \hat{j} \\ &= -\sin \theta(t) \frac{d\theta(t)}{dt} \hat{i} + \cos \theta(t) \frac{d\theta(t)}{dt} \hat{j}.\end{aligned}$$

Como  $\theta(t)$  é a posição angular, chamamos a sua derivada com respeito a tempo de velocidade angular

$$\boxed{\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt}.$$

De brinde, conseguimos definir a velocidade escalar da partícula como

$$\begin{aligned}\frac{ds(t)}{dt} &= \frac{dR\theta(t)}{dt} = R \frac{d\theta(t)}{dt} = R\omega(t). \\ \Rightarrow \boxed{v(t) = R\omega(t)}.\end{aligned}$$

Vamos estudar a dimensão dessa quantidade. Temos

$$[\omega] = \frac{[\theta]}{[t]} = \frac{1}{T} \quad (\text{Exemplo: rad/s (radianos por segundo.)})$$

como unidades de velocidade angular e

$$[v] = [R][\omega] = LT^{-1} \quad (\text{Exemplo: m/s (metros por segundo)})$$

como dimensão da velocidade escalar. Com relação ao versor definido, sua derivada é

$$\frac{d\hat{r}(t)}{dt} = \omega(t) \underbrace{[-\sin \theta(t)\hat{i} + \cos \theta(t)\hat{j}]}_{\hat{\theta}(t)},$$

em que  $\hat{\theta}(t)$  é um versor apontando na direção do ângulo. Com isso, definimos a velocidade vetorial por

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = R \frac{d\hat{r}(t)}{dt} \Rightarrow \vec{v}(t) = R\omega(t)\hat{\theta}(t).$$

Algo interessante de notar é que a velocidade escalar consiste do módulo da velocidade vetorial, i.e.,  $v(t) = |\vec{v}(t)|$ . Também podemos representar a velocidade por meio das componentes em cada eixo:

$$\vec{v}(t) = \underbrace{-R\omega(t) \sin \theta(t)}_{v_x(t)} \hat{i} + \underbrace{R\omega(t) \cos \theta(t)}_{v_y(t)} \hat{j}.$$

### 8.3 Acelerações no Movimento Circular.

Agora que estamos mais familiarizados com a velocidade e posição angular, podemos estudar a aceleração no movimento circular. Assim como antes, começamos definindo a aceleração angular:

$$\alpha(t) = \frac{d\omega(t)}{dt} = \frac{d^2\theta(t)}{dt^2},$$

que possui dimensão  $[\alpha] = \frac{[\omega]}{[t]} = \frac{T^{-1}}{T} = T^{-2}$ , sendo um exemplo a unidade  $rad/s^2$ , i.e., radiano por segundo quadrado. Analogamente, definimos a aceleração vetorial por

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}[R\omega(t)\hat{\theta}(t)].$$

Pela regra do produto,

$$\vec{a}(t) = R\left[\frac{d\omega(t)}{dt}\hat{\theta}(t) + \omega(t)\frac{d\hat{\theta}(t)}{dt}\right].$$

Analisando termo a termo, a primeira derivada acontece no módulo da velocidade, i.e.,  $R\frac{d\omega(t)}{dt}$ , ou seja, representa a variação no módulo da velocidade. Por outro lado, o segundo termo representa a variação da direção da velocidade. Como já encontramos alguns desses termos antes, segue que

$$\vec{a}(t) = R[\alpha(t)\hat{\theta}(t) + v(t)\frac{d\hat{\theta}(t)}{dt}].$$

Mas o que é este termo  $\frac{d\hat{\theta}}{dt}$ ? Olhando pra ele com cuidado, vemos que

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{\theta}}{dt} &= \frac{d}{dt}[-\sin\theta(t)\hat{i} + \cos\theta(t)\hat{j}] \\ &= -\frac{d}{dt}[\sin\theta(t)]\hat{i} + \frac{d}{dt}[\cos\theta(t)]\hat{j} \\ &= -\cos\theta(t)\frac{d\theta(t)}{dt}\hat{i} - \sin\theta(t)\frac{d\theta(t)}{dt}\hat{j} \\ &\Rightarrow \frac{d\hat{\theta}(t)}{dt} = \omega(t)[- \cos\theta(t)\hat{i} - \sin\theta(t)\hat{j}] = \omega(t)(-\hat{r}(t)).\end{aligned}$$

Portanto,

$$\vec{a}(t) = R[\alpha(t)\hat{\theta}(t) + \omega^2(t)(-\hat{r}(t))] = \underbrace{R\alpha(t)\hat{\theta}(t)}_{\text{aceleração tangencial } \vec{a}_t(t)} - \underbrace{R\omega^2(t)\hat{r}(t)}_{\text{aceleração centrípeta } \vec{a}_{cp}(t)}$$

Obtivemos disso tudo duas acelerações novas e que precisam ser mais compreendidas. Vamos começar pela tangencial.

Com relação ao módulo da aceleração tangencial, note que  $|\vec{a}_t(t)| = R\alpha(t) = \frac{dv(t)}{dt}$ . Agora, quanto à aceleração centrípeta, seu módulo é dado por  $|\vec{a}_{cp}(t)| = R\omega^2(t) \Rightarrow |\vec{a}_{cp}(t)| = \frac{v^2}{R}$ .

## 8.4 Movimento Circular Uniforme

Resumindo o que temos até o momento em forma de tabela, segue que

	Variáveis angulares	Variáveis escalares
<b>Posição</b>	$\theta(t)$	$s(t) = R\theta(t)$
<b>Velocidade</b>	$\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt}$	$v(t) = \frac{ds(t)}{dt} = R\omega(t)$
<b>Aceleração</b>	$\alpha(t) = \frac{d\omega(t)}{dt} = \frac{d^2\theta(t)}{dt^2}$	$ \vec{a}(t)  = \frac{dv(t)}{dt} = R\alpha(t), \quad  \vec{a}_{cp}  = \frac{v^2}{R}$

Tabela 1: Resumo movimento circular.

No movimento circular uniforme, estudamos arcos iguais em tempos iguais, ou seja,

$$\Delta s_1 = \Delta s_2, \quad \Delta t_1 = \Delta t_2,$$

tal que  $\Delta\theta_1 = \Delta\theta_2$ . Além disos,  $\omega(t) \equiv \omega$  constante. Assim,

$$|\vec{v}(t)| = v(t) = R\omega(t) \equiv v, \text{ constante} \Rightarrow a_t = R\alpha(t) = 0.$$

Com isso, as posições são descritas por

$$\begin{aligned}\omega(t) &= \omega \Rightarrow \theta(t) = \theta_0 + \omega(t - t_0) \\ v(t) &= v \Rightarrow s(t) = s_0 + v(t - t_0)\end{aligned}$$

---

Neste caso, o movimento é periódico, ou seja, ele volta a ter as mesmas propriedades após um período  $T$ . Em forma matemática, isso quer dizer que

$$\begin{cases} \vec{r}(t + T) = \vec{r}(t) \\ \vec{v}(t + T) = \vec{v}(t). \end{cases}$$

Tendo isso em mente, definimos também a frequência como o número de ocorrências. Ele vale o inverso do período  $T$ , i.e.,  $f = \frac{1}{T}$ .



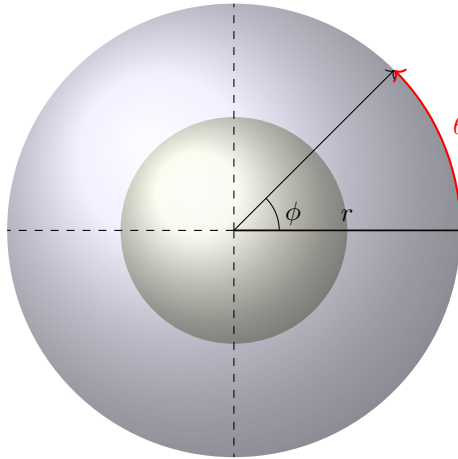
## 9 Aula 8 - 19/04/2023

### 9.1 Motivações

- Começar os estudos de dinâmica

### 9.2 Exemplo de MCU - 67 Típicos

Suponha que a Terra tem velocidade angular  $\omega$  constante, velocidade e aceleração angulares  $\vec{v}_\theta(t), \vec{a}_\theta(t)$  e velocidade e aceleração escalares  $\vec{v}_e(t), \vec{a}_e(t)$ .



No equador,  $R_E = R_T, \omega_E = \omega$ , tal que

$$\begin{cases} v_E = \omega R_T = \omega R_E \\ a_{Ecp} = \frac{v_E^2}{R_E} = \frac{(\omega R_T)^2}{R_T} = \omega^2 R_T. \end{cases}$$

Na latitude  $\theta$ ,  $R_\theta = R_T \cos \theta, \omega_\theta = \omega$ , de modo que

$$\begin{cases} v_\theta = \omega R_T \cos \theta \\ a_{\theta cp} = \omega^2 R_T \cos \theta \end{cases}$$

Para a Terra dar uma volta em torno de si de novo, ela demora aproximadamente 24h. Assim,  $T = 24h$  é o período da Terra, donde concluímos que a frequência será  $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{86400} s^{-1}$ . Como  $\omega = 2\pi f$ , segue que

$$\omega = \frac{2\pi}{86400} = 7.27 \cdot 10^{-5} rad/s.$$

Pede-se: a) Quais são os valores de  $v_e, a_e$ ? b e d) Quais são as orientações das acelerações? c) Quanto valem  $v_\theta, a_\theta$ ?

a.) Vemos que  $v_E = 463.1 m/s, a_E = 0.0337 m/s^2, g = 9.8 m/s^2$ . Em particular,  $a_E = 0.0034g$ .

b. e d.) O diagrama de v indica que o vetor aceleração aponta na vertical pra esquerda e levemente pra cima.

c.) Temos  $v_\theta = 379.4 m/s, a_\theta = 0.0276 m/s^2$ .

### 9.3 Dinâmica e Leis de Newton

#### 9.3.1 O que esperar

Quando estudamos os movimentos anteriores, estávamos vendo cinemática, a descrição matemática do movimento. No entanto, nunca nos questionamos o que causa o movimento. Como ele surge, o que influencia-o, etc. Essa pergunta é respondida pela dinâmica, q formulação matemática que explicita as causas do movimento. Ela nos fornece uma relação entre as interações, chamadas forças, que o corpo sofre e o seu movimento. A primeira formulação da dinâmica foi feita por Isaac Newton, sendo suas Leis nosso Ponto de partida.

### 9.3.2 Leis de Newton

A primeira Lei de Newton, também chamada de Lei da Inércia, afirma que

“Um corpo em repouso, ou em movimento retilíneo uniforme, permanecerá em seu estado de movimento a não ser que uma força externa atue sobre ele. ”

Observe que velocidade constante significa que tanto seu módulo será constante quanto a direção o movimento precisa ser em linha reta. Uma consequência dessa Lei é que não tem distinção entre um corpo em repouso e um corpo se movendo com velocidade constante. Com isso, um sistema de referencial inercial será definido como um eixo de coordenadas que está em repouso ou se movendo com velocidade constante.

A segunda Lei de Newton surge para explicar como aparecem as forças dentro do contexto da dinâmica, dizendo que

“A força resultante atuando em um corpo é igual à massa dele multiplicada pela aceleração”

Matematicamente, isto significa que

$$\vec{F}_r = m \cdot \vec{a} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}$$

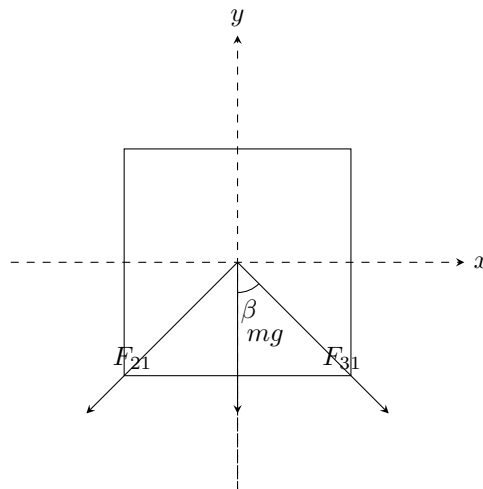
O termo novo  $m$  é chamado de massa inercial, sendo interpretada como a grandeza física que expressa a resistência do corpo ao movimento. Quanto maior for a massa, maior vai ser a resistência a se mover. De fato, se temos dois blocos de massas  $m_1 > m_2$ , então

$$\vec{a}_1 = \frac{\vec{F}}{m_1}, \quad \vec{a}_2 = \frac{\vec{F}}{m_2} \Rightarrow a_1 < a_2.$$

A dimensão dessa grandeza é  $[m] = M$ . No Sistema Internacional, a unidade de massa é o quilograma.

Note que a força é uma grandeza vetorial que soma-se, ou seja, se há várias forças agindo sobre um corpo, a resultante será a soma delas. Se temos forças  $\vec{F}_{21}, \vec{F}_{31}$  agindo sobre um corpo, então a resultante será  $\vec{F}_R = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{31}$ . Além disso, suas coordenadas serão

$$\begin{aligned} x : F_{res}^x &= -F_{21} \sin \alpha + F_{31} \sin \beta \\ y : F_{res}^y &= -F_{21} \cos \alpha - F_{31} \cos \beta. \end{aligned}$$



A unidade da força é dada por  $[F] = [ma] = MLT^{-2}$ . No SI, sua unidade é  $1kgms^{-2} = 1N$  o Newton. Um corpo será dito em equilíbrio quando a força resultante agindo sobre ele é nula, pois, neste caso,

$$\vec{F}_{res} = \sum_n \vec{F}_n = 0 \Rightarrow F_{res} = ma = 0 \Rightarrow a = 0.$$

A terceira e última Lei de Newton é conhecida como Lei da Ação e Reação. Segue seu enunciado

---

“Se um corpo faz uma força em outro, então este segundo também realizará uma força no primeiro, sendo esta de mesmo módulo, mas com direção oposta. ”

Em outras palavras, se um corpo 2 age sobre um corpo 1 com força  $\vec{F}_{21}$ , então o corpo 1 fará uma força sobre o corpo 2  $\vec{F}_{12}$  tal que  $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$ ,  $|\vec{F}_{21}| = |\vec{F}_{12}|$ .

### 9.3.3 Exemplo 4.2 - Tipler

Os dados que temos é que há uma pessoa que se moveu 2.25m em 3s e cuja massa é 68kg. Pede-se para encontrar o módulo da força agindo sobre ela. Segue que

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \Rightarrow \Delta x = x(3) - x(0) = \frac{1}{2} a 3^2 = \frac{9}{2} a = 2.25m$$

Isolando a equação, encontra-se que  $a = 0.5m/s^2$ . Com isso, como  $|\vec{F}| = |m\vec{a}| = 68 \cdot 0.5 = 34N$ . ■

---

## 10 Aula 10 - 24/04/2023

### 10.1 O que esperar?

- Continuação de Dinâmica;
- Tipos de forças.

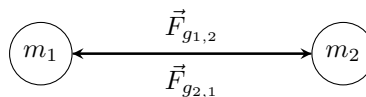
### 10.2 Motivação

Neste resumo, discutiremos diferentes tipos de forças em física, suas fórmulas e algumas propriedades. Elas serão abordadas ao longo das próximas aulas, não apenas nesta primeira. **Nota ao Leitor: as fórmulas aqui apresentadas são apenas para o módulo das forças, mas esta palavra foi omitida para não ficar muito repetitivo. As forças são estudadas vetorialmente, não esqueça-se disto.**

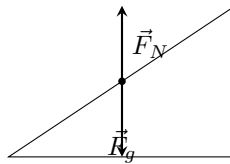
A força gravitacional é a atração entre dois objetos devido à sua massa. A fórmula da força gravitacional é:

$$F_g = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (1)$$

onde  $F_g$  é a força gravitacional,  $G$  é a constante gravitacional,  $m_1$  e  $m_2$  são as massas dos dois objetos e  $r$  é a distância entre seus centros de massa.



A força normal é a força que um objeto exerce perpendicularmente à sua superfície de contato com outro objeto. Esta força é responsável por impedir que os objetos atravessem uns aos outros. A força normal tem módulo igual à componente do peso do objeto perpendicular à superfície.



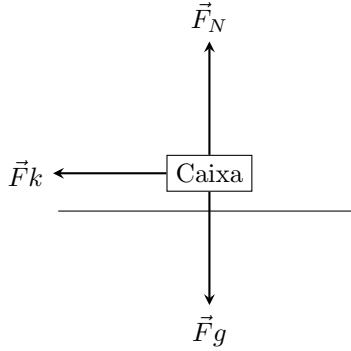
A força de atrito é a força que age oposta ao movimento relativo entre duas superfícies em contato. Existem dois tipos de força de atrito: estático e cinético. A força de atrito estático age entre duas superfícies em repouso relativo e é responsável por impedir que objetos comecem a se mover. A força de atrito estático pode variar de zero até o valor máximo dado por:

$$F_{s_{max}} = \mu_s F_N \quad (2)$$

onde  $F_{s_{max}}$  é a força de atrito estático máxima,  $\mu_s$  é o coeficiente de atrito estático e  $F_N$  é a força normal. A força de atrito cinético age entre duas superfícies em movimento relativo e é responsável por reduzir a velocidade dos objetos. A força de atrito cinético é dada por:

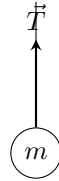
$$F_k = \mu_k F_N \quad (3)$$

onde  $F_k$  é a força de atrito cinético,  $\mu_k$  é o coeficiente de atrito cinético e  $F_N$  é a força normal.



Estas duas últimas forças, ou seja, forças normal e atrito, encaixam-se na classe de forças de contato.

A força tensional é a força que atua ao longo de um cabo, corda ou fio quando esticado por forças opostas aplicadas em suas extremidades. A força tensional é transmitida ao longo do comprimento do cabo, corda ou fio.



A força elástica é a força de restituição que atua quando um objeto é deformado, como uma mola esticada ou comprimida. A força elástica segue a Lei de Hooke:

$$F_e = -k\Delta x \quad (4)$$

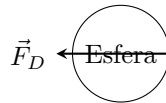
onde  $F_e$  é a força elástica,  $k$  é a constante elástica e  $\Delta x$  é o deslocamento da posição de equilíbrio da mola.



A força de arrasto é a força de resistência que um objeto experimenta ao se mover através de um fluido (líquido ou gás). A força de arrasto é proporcional ao quadrado da velocidade do objeto em relação ao fluido e é dada por:

$$F_D = \frac{1}{2}\rho v^2 C_D A \quad (5)$$

onde  $F_D$  é a força de arrasto,  $\rho$  é a densidade do fluido,  $v$  é a velocidade do objeto,  $C_D$  é o coeficiente de arrasto e  $A$  é a área da seção transversal do objeto.



## 10.3 Tipos de Força

### 10.3.1 As Quatro Forças Fundamentais de Forma Breve

O primeiro tipo de força que veremos é a Interação gravitacional. Ela ocorre na forma da interação de corpos massivos, sendo representada pela força peso. Além disso, ela é uma força atrativa e de longo alcance. Em particular, o módulo da força gravitacional é

$$|\vec{F}_{21}| = |\vec{F}_{12}| = \frac{Gm_1m_2}{r^2}.$$

---

Aqui,  $G$  é a constante de gravitacional, cujo valor é  $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ Nkg}^{-2}\text{m}^2$ .

A segunda forma de interação é a eletromagnética, estando presente no contexto de partículas carregadas. Ela será atrativa dado que as duas cargas  $q_1, q_2$  possuam sinais opostos ( $q_1 \cdot q_2 < 0$ ) e repulsivas caso possuam sinais iguais ( $q_1 \cdot q_2 > 0$ ). Seu módulo é dado por

$$|\vec{F}_{12}| = |\vec{F}_{21}| = k \frac{q_1 q_2}{r^2}.$$

Outra força que existe é a interação forte, que age em curto alcance, aproximadamente do tamanho do núcleo atômico. Ela é responsável por manter os prótons e neutron no núcleo.

A última força fundamental é a interação fraca, sendo uma que ocorre em curtíssimo alcance e presente em alguns decaimento radioativos.

Em dinâmica, estudaremos principalmente interações gravitacionais na forma da Força Peso e interações eletromagnéticas, que se manifestarão nas formas da força normal, força de tração, força de atrito, entre outras.

### 10.3.2 Força Peso

A força peso é descrita como a atração de um corpo por um objeto celeste quando o corpo está em sua superfície. Como vimos previamente, ela é dada, na Terra, por

$$F_g = \frac{GMm}{R_T^2} = mg.$$

Isso ajuda-nos a descobrir, em particular, como obter o valor da aceleração na superfície. Considerando a massa de humanos como desprezível em comparação à da Terra, obtemos

$$g = \frac{GM_T}{R_T^2} \approx 9.81 \text{ m/s}^2.$$

A força peso que iremos considerar é definida como  $\vec{P} = m\vec{g}$ . Consideremos um exemplo.

**Exemplo 7.** Considere uma pessoa pulando. A Terra exerce uma força atrativa nela de volta para a superfície, a força Peso, tal que a força resultante nela é dada por

$$\vec{F}_r = \vec{P} = m\vec{g} - m\vec{a}.$$

Caso a pessoa esteja na superfície, ela estará em equilíbrio, ou seja,  $\vec{F}_r = 0$ . Com isso, segue que

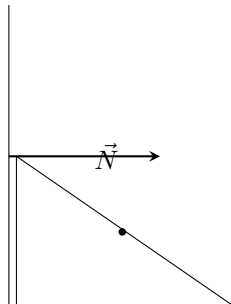
$$\vec{F}_r = \vec{P} + \vec{N} = 0.$$

Essa força oposta à Peso, que denotamos por  $N$ , será estudada a seguir.

### 10.3.3 Força Normal

A força normal é a resultante do contato dos corpos, com direção perpendicular às superfícies de contato. Ela não possui uma fórmula exata, pois é uma interação muito complexa relacionada a moléculas e forças eletromagnéticas.

**Exemplo 8.** Considere uma escada encostada a uma parede. Então, haverá uma força normal conseguinte do contato entre a escada e a parede perpendicular à parede.



**Exemplo 9.** Considere um bloco no elevador. Qual é a força normal? Na situação (a), considere-o [o elevador] parado. Na situação (b), ele possui velocidade constante. No caso (c), o elevador está acelerando para cima. Finalmente, no item (d), o elevador acelera para baixo.

Estando ele parado, a aceleração e a velocidade são nulos. Com isso, sabe-se o valor da resultante:

$$\vec{F}_r = m\vec{a} = \vec{0}.$$

Observando a esquemática do problema, nota-se que nada ocorre no eixo  $x$ , além de que  $\vec{a}_x = F_r^x = 0$ . No entanto, com relação ao eixo  $y$ , observamos que, apesar de  $\vec{a}_y = F_r^y = 0$ , existem forças atuando sobre o bloco. Assim,

$$0 = F_r^y = -P + N = -mg + N = 0 \Rightarrow N = mg = P.$$

Quanto à situação (b), note que, novamente, a força resultante será 0, pois a velocidade é constante. analisando as forças em  $y$ , assim, obtemos o mesmo resultado que no item (a):

$$0 = F_r^y = -P + N \Rightarrow N = P = mg.$$

No item (c), como o elevador está acelerado, existe uma aceleração para o bloquinho, tal que

$$\vec{F}_r = m \cdot \vec{a} \neq 0.$$

No eixo  $y$ , as duas forças continuam as mesmas, ou seja,

$$F_r^y = -P + N = m \cdot a \neq 0.$$

Assim, a força normal será dada por

$$N = m(a + g).$$

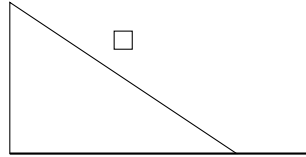
Por fim, no caso (d), novamente, há uma aceleração, então a resultante é não-nula. No entanto, como a aceleração é para baixo,

$$\vec{F}_r = m \cdot (-\vec{a}) \neq 0.$$

Com isso,

$$F_r^y = -P + N = m \cdot (-a) \Rightarrow N = m(g - a).$$

**Exemplo 10.** Considere o um plano inclinado e um bloco deslizando nele. Qual é a aceleração  $\vec{a}$ ?



Temos  $\vec{N} = |\vec{N}|\hat{j}$ ,  $|\vec{P}| = mg$ . Lembre-se que

$$\begin{cases} P'_x = |\vec{P}| \sin \theta \\ P'_y = |\vec{P}| \cos \theta \end{cases}$$

Com isso, as componentes de força são

$$\begin{aligned} x') \Rightarrow F_r^{x'} &= P_{x'} = |\vec{P}| \sin \theta = ma_{x'} \\ y') \Rightarrow F_r^{y'} &= -P_{y'} + N = -|\vec{P}| \cos \theta + N = 0. \end{aligned}$$

Desta última equação, tiramos que a força normal é  $N = |\vec{P}| \cos \theta = mg \cos \theta$ . Além disso, da primeira equação, temos

$$a'_x = \frac{mg \sin \theta}{m} = g \sin \theta.$$

Portanto,  $\vec{a} = a_{x'}\hat{i} = g \sin \theta \hat{i}$ .

---

**Exemplo 11.** Exemplo 4.7 do Tipler: Temos  $v_y \leq 2.5\text{m/s}$  e uma altura de  $1\text{m}$ . Pergunta-se: Qual é o maior ângulo possível?

Após deslocar-se em  $\Delta x$ , o pacote tem  $v_{x'}$  dado por

$$v_{x'}^2 = v_{0_{x'}}^2 + 2a_{x'}\Delta x' = 2a_{x'}\Delta x' \Rightarrow v_{x'}^2 = \frac{2g \sin \theta h}{\sin \theta} = 2gh.$$

Logo,  $v_{x'} = \sqrt{2gh}$ . Assim,

$$\begin{cases} v_x = v_{x'} \cos \theta \\ v_y = v_{x'} \sin \theta \leq 2.50\text{m/s}. \end{cases}$$

Disso segue que

$$\sqrt{2gh} \sin \theta \leq 2.5\text{m/s} \Rightarrow \sqrt{2gh} \sin \theta_{\max} = 2.5\text{m/s}$$

Portanto,  $\theta_{\max} = 34.4^\circ$ .



---

## 11 Aula 11 - 25/04/2023

### 11.1 O que esperar?

- Força de Tensão;
- Roldanas e Polias.

### 11.2 Força de Tensão

A força de tensão é a força sofrida por cordas e roldanas. Assume-se que a corda é inextensível e possui massa desprezível. Um exemplo em que ela aparece bastante é quando há roldanas/polias, ou seja, mecanismos que mudam a direção da força. Vejamos exemplos

**Exemplo 12.** Suponha que há um bloco suspenso ao teto por uma corda com massa  $m$  e em equilíbrio. Qual é a força de tração?

Como o bloco está em repouso, sabemos que a resultante vale 0. Note que as forças que agem sobre o bloco são a tração da corda e a força peso. Logo,

$$0 = \vec{F}_r = T - P \Rightarrow T = P = mg.$$

**Exemplo 13.** Agora, imagine que há um bloco suspenso por duas cordas próximo à quinta de um teto. As duas cordas encontram-se num ponto  $p$  em que há um nó. A primeira delas sai horizontalmente da parede, fazendo um ângulo reto com a mesma. A segunda surge pelo teto com um ângulo  $\theta$ . Qual é a força de tração que age sobre a corda que sai do ponto de nó delas e prende-se ao bloco? E nas cordas 1 e 2?

Quanto ao primeiro item, note que o bloco está em equilíbrio, logo a força resultante em  $p$  e no bloco deve ser 0. Assim,

$$T_3 - P = 0 \Rightarrow T_3 = m \cdot g.$$

Para o segundo, decompõe-se a tração nas suas componentes  $x$  e  $y$ :

$$\text{Em } x: T_1 \cos(\theta) - T_2 = 0$$

$$\text{Em } y: T_1 \sin(\theta) - T_3 = 0.$$

Pela segunda equação, utilizando o valor para  $T_3$  previamente encontrado, segue que

$$T_1 \sin(\theta) - T_3 \Rightarrow T_1 = \frac{mg}{\sin(\theta)}.$$

Logo, combinando isso com a primeira equação,

$$T_2 = T_1 \cos(\theta) - \frac{mg}{\sin(\theta)} \cos(\theta) = \frac{mg}{\tan(\theta)}.$$

Portanto, usando  $\alpha = 90^\circ - \theta$ , segue que

$$\begin{cases} T_1 = \frac{mg}{\sin(\theta)} \Rightarrow 1.29mg \\ T_2 = \frac{mg}{\tan(\theta)} \Rightarrow 0.83mg \\ T_3 = mg. \end{cases}$$

O próximo exemplo ilustra as situações de polias num de seus contextos mais comuns - Máquina de Atwood.

**Exemplo 14.** A máquina de Atwood consiste em uma polia presa ao teto com um bloco em cada ponta. O primeiro bloco tem massa  $m_1$  e o segundo tem  $m_2$ . A corda exerce uma tração  $T$  e os blocos têm pesos  $P_1, P_2$ .

Se  $m_1 > m_2$ , segue que  $m_1$  desce e  $m_2$  sobe. Também é possível relacionar cada quantidade. Se o deslocamento, a velocidade e a aceleração do primeiro bloco são  $\Delta d_1, v_1, a_1$  e, do segundo bloco,  $\Delta d_2, v_2, a_2$ , essas quantias vinculam-se da seguinte forma:

$$\begin{aligned} |\Delta d_1| &= |\Delta d_2| \\ |v_1| &= |v_2| \\ |a_1| &= |a_2|. \end{aligned}$$

As forças atuando no bloco 1 são a tração para cima, a peso  $P_1$  para baixo e a aceleração como consequência da diferença de massas entre os blocos, a qual aponta para baixo também. Por outro lado, no bloco 2, as forças são a tração para cima, a peso  $P_2$  para baixo e, como consequência da diferença de massas, a aceleração que surge, dessa vez apontando para cima, já que este sobe. Em outras palavras, as seguintes equações descrevem o movimento no eixo  $y$ :

$$1: T - P_1 = -m_1 a$$

$$2: T - P_2 = m_2 a.$$

As equações que descrevem o bloco subindo podem ser encontradas notando que  $-P_1 + P_2 = -m_1 a - m_2 a \iff -m_1 g + m_2 g = -(m_1 + m_2)a \iff g(m_1 - m_2) = (m_1 + m_2)a$ . Disto, concluímos que

$$a = \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)}, \quad g > 0, m_1 > m_2.$$

Além disso,

$$T = \frac{2m_1 m_2}{(m_1 + m_2)} g$$

**Exemplo 15.** O próximo exemplo que veremos é o de blocos numa mesa: Há dois blocos presos por uma corda que passa por uma polia. O primeiro bloco encontra-se na parte superior da mesa, possuindo massa  $m_1$ . O segundo bloco está suspenso, sendo sua massa  $m_2$ . Nesse contexto, o bloco 2 puxa o bloco 1, que desloca-se  $\Delta x_1$  unidades com aceleração em sua direção  $a_1$ , resultando no próprio movimento de  $\Delta y_2$  com uma aceleração de  $a_2$  para baixo.

Para lidar com esse sistema, observe as forças que atuam em cada bloco - No bloco 1, a gravidade resulta na força peso  $P_1$  para baixo e, pela Terceira Lei, há a consequência da normal  $N_1$ . Além delas, há a tração  $T$  da corda. Com relação ao bloco 2, não há força de contato, então ele é governado pelo par ação reação da Tração  $T$  e da força peso  $P_2$ .

Agora, analisando os vínculos dos valores, observa-se que  $|\Delta x_1| = |\Delta y_2|$  e  $|a_1| = |a_2| = a$ . Podemos dar continuidade e estudar as equações. Começando pelo bloco 1,

$$\text{Eixo } x: F_r = T = m_1 \cdot a$$

$$\text{Eixo } y: N_1 - P_1 = 0 (\text{Sem movimento.})$$

Estudando, então, o bloco 2, o único movimento sendo no eixo  $y$ :

$$F_r = T - P_2 = -m_2 a$$

$$\Rightarrow m_1 a - P_2 = -m_2 a$$

$$\Rightarrow m_1 a - m_2 g = -m_2 a$$

$$\Rightarrow (m_1 + m_2) a = m_2 g$$

$$\Rightarrow a = \frac{m_2}{m_1 + m_2} g.$$

---

## 12 Aula 12 - 27/04/2023

### 12.1 O que esperar?

- Força de Tensão;
- Força de mola/Força Elástica.

### 12.2 Força de Mola

Sendo  $x_0$  a posição da equação da mola, ao aplicarmos uma força na mola e deformamos, a reação é uma força chamada restauradora, pois ela é responsável por recuperar o estado de equilíbrio da mola. Sua fórmula é

$$\vec{F} = -k\Delta\vec{x},$$

em que  $k$  é a constante elástica da mola. Podemos elaborar nessa fórmula um pouco mais utilizando a segunda lei de Newton, pois  $F = -kx = ma = m\frac{dv}{dt}$ . Assim,  $-kx = m\frac{d^2x}{dt^2}$ , de onde encontramos uma fórmula para a posição em função de tempo

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x = -\omega^2x \Rightarrow x(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = A \sin \omega t$$

Se derivarmos essa função, a velocidade do movimento será

$$\frac{d}{dt} \sin \omega t = \frac{d \sin u}{du} \frac{du}{dt} = \cos u \omega = \omega \cos \omega t$$

e a aceleração

$$\frac{d}{dt} \cos u \omega = \frac{d}{du} \cos u \omega \frac{du}{dt} = -\omega^2 \sin \omega t.$$

Vejamos um exemplo

**Exemplo 16.** Considere um objeto em repouso preso a uma mola com posição de equilíbrio  $x_0$ . Ocorre um deslocamento da mola em  $\Delta y$ , aplicando uma força  $\vec{F}_{el}$  ao bloquinho. Qual é a força normal?

Note que todas as forças estão atuando no eixo  $y$ . Como o corpo está parado, a resultante no eixo  $y$  é nula, tal que  $F_r^y = |F_{el}| + N - P$ . Com isso,  $N = P - |F_d| = mg - k|\Delta y|$ .

### 12.3 Força de Tração

**Exemplo 17.** Considere um elevador manual segurado por uma roldana com uma pessoa dentro dela. Essa pessoa está puxando a corda, exercendo uma força  $\vec{F}$  para baixo. O sistema pessoa-elevador tem uma massa de  $m = 95\text{kg}$ . Utilize  $g = 9.81\text{m/s}^2$ .

a) Qual é o módulo de  $\vec{F}$  para subir com velocidade constante?

b) Qual é a força resultante para uma aceleração  $a_y = 1.3\text{m/s}^2$ ?

(a) Observe que, ao puxar a corda, a reação gerada à força do puxão é a força de tração. Além disso, a resultante no ponto em que a pessoa puxa a corda é igual à tração. Assim, como há a tração no elevador também,

$$\vec{F}_R^y = -P + T + T = -P + 2T$$

Como é pedido que o elevador suba com velocidade constante,  $\vec{F}_R^y = 0$ , donde segue que

$$T = \frac{P}{2} = \frac{95 \cdot 9.8}{2} = 466\text{N}.$$

(b) Como encontramos a forma da resultante no último item, temos

$$\vec{F}_R^y = -P + 2T = ma_y \Rightarrow T = F = \frac{ma_y + P}{2}.$$

Assim,  $F = \frac{m}{2}(a_y + g) = 528\text{N}$ .

---

**Exemplo 18.** Dado um bloco e multiplas polias, sendo o bloco com um peso de 2670N. Suponha que o sistema está em equilíbrio.

- a) Quanto vale a tração no sistema da primeira roldana?
- b) Agora, quanto vale a tração considerando também a segunda roldana no sistema como separada?
- c) Suponha que a polia passa por uma nova polia ligada ao teto antes de chegar ao bloco. Qual é a tração nesse caso?
- (a) Como a polia redireciona a direção da tração uma vez,  $F_r^y = 2T - P = 0$ , segue que  $T = \frac{P}{2} = 1385N$ .
- (b) Apesar de ter adicionado uma nova polia, ainda assim, como só há dois pontos de sustentação,  $F_r^y = 2T - P \Rightarrow T = \frac{P}{2}$ .
- (c) Diferente do item (b), como ela passa por mais uma polia, há um novo ponto de sustentação além do segundo, sendo eles o teto, a polia presa ao teto e a polia preso ao bloco. Logo,  $F_r^y = 3T - P = 0$ , ou seja,  $T = \frac{P}{3} = 890N$ .

## 13 Aula 13 - 03/05/2023

### 13.1 O que Esperar?

- Revisão Pré-Prova

### 13.2 Cinemática

#### 13.2.1 Movimento Unidimensional

As equações do movimento unidimensional são

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) \Rightarrow \vec{v}(t) &= \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \Rightarrow \vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} \\ \vec{v}(t) - \vec{v}(t_0) &= \int_{t_0}^t \vec{a}(t) dt \Rightarrow \vec{r}(t) - \vec{r}(t_0) = \int_{t_0}^t \vec{v}(t) dt\end{aligned}$$

#### 13.2.2 Movimento Bidimensional

Em duas dimensões ou mais,

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k} \text{ ( O mesmo para } \vec{v}(t) \text{ e } \vec{a}(t) \text{ )}.$$

Neste caso, decompomos o movimento em cada eixo e tratamos como movimento unidimensional. No caso do movimento bidimensional uniforme, as velocidades em ambos os eixos são constantes, tal que

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_x t - t = \frac{x - x_0}{v_x} \\ y(t) = y_0 + v_y t. \end{cases}$$

A trajetória será  $y = y_0 + \frac{v_y}{v_x}(x - x_0)$ .

#### 13.2.3 Trajetória de Projéteis

Vimos também sobre o movimento de projéteis. Nele, a velocidade no eixo x é constante; No eixo y,  $v_y(t) = v_y^0 + at$ ,  $a \neq 0$ . Assim,  $x(t) = x_0 + v_x^0 t$  e  $y(t) = y_0 + v_y^0 t$ . Além disso, a trajetória é dada por

$$y = \tan \theta x - \frac{gx^2}{2|v_0|^2 \cos^2(\theta)}$$

Utilizando esses dados, a altura máxima de um objeto em trajetória de projétil,  $(x_m, y_m)$ , ocorre quando  $v_y(t_m) = 0$ , tal que  $t_m = \frac{|\vec{v}_0| \sin(\theta)}{g}$ ,  $y_m = \frac{1}{2} \frac{|v_0|^2 \sin^2(\theta)}{g}$ . Finalmente, vimos o alcance de um objeto em lançamento, o qual é dado pelo ponto cartesiano  $(x_r, 0)$ :

$$x_r = \frac{v_0^2}{g} \sin \theta \cos \theta, \quad t_m = \frac{2|\vec{v}_0| \sin(\theta)}{g} = 2t_m$$

### 13.2.4 Movimento Circular

Além desses tipos de movimentos, aprendemos sobre o movimento circular, resumizado na tabela

	Vetoriais	Variáveis angulares	Variáveis escalares
Posição	$\vec{r}(t)$	$\theta(t)$	$s(t) = R\theta(t)$
Velocidade	$\vec{v}(t)$	$\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt}$	$v(t) = \frac{ds(t)}{dt} = R\omega(t)$
Aceleração	$\vec{a}(t)$	$\alpha(t) = \frac{d\omega(t)}{dt} = \frac{d^2\theta(t)}{dt^2}$	$ \vec{a}(t)  = \frac{dv(t)}{dt} = R\alpha(t), \quad  \vec{a}_{cp}  = \frac{v^2}{R}$

Tabela 2: Resumo movimento circular.

## 13.3 Revisão de Dinâmica

A dinâmica é a relação entre o movimento e as interações/forças.

### 13.3.1 Leis de Newton

A primeira Lei de Newton é a seguinte:

“Um corpo em repouso ou em Movimento Uniforme mantém o seu estado a não ser que haja uma força.”

A segunda relaciona massa e aceleração para descrever a interação:

$$\vec{F}_r = m\vec{a}.$$

A terceira e última é a chamada lei da ação e reação

“Para toda força que é aplicada, ocorrerá uma força de reação com mesma intensidade, mas direção oposta”

### 13.3.2 Tipos de Força

Em seguida, vimos os tipos de força, sendo elas

- 1) Força Peso:  $\vec{P} = m\vec{g}$ .
- 2) Força Normal: Aparece em corpos que estão em contato, responsável por impedir objetos de entrarem um no outro. Caso o contato suma, a normal também desaparece, ou seja, se perde o contato,  $\vec{N} = 0$ .
- 3) Força de Tração ( $\vec{T}$ ): Atua no contexto de cordas, polias, etc.
- 4) Força Elástica: Força restaurativa quando uma mola é distorcida.  $\vec{F} = -k\vec{x}$ .

## 13.4 Exemplos

**Exemplo 19.** Considere um forno esquentado até 200 graus. Num pedaço deste forno, há um pequeno buraco. Além disso, há algo dentro do forno. Através desse buraco, há um feixe de partículas saindo com velocidade  $\vec{v}_0$ . Na direção pela qual elas estão saindo, há um gradiente de campo magnético  $B'$  com uma força de origem magnética agindo nele, dada por  $\vec{F} \approx \mu_B \vec{B}'$ , em que  $\mu_B$  é uma constante chamada magneton de Bohr com valor  $\mu_B = 9.27 \cdot 10^{-24} \text{ J/T}$ . Quando a partícula passa pelo campo após percorrer a distância  $D$ , a força fará com que ela mude sua trajetória e comece a mover-se para baixo. No fim do sistema, tem uma máquina que registrará a posição em que a partícula irá parar, ou seja, um desvio  $\Delta y$  de onde ela originalmente teria parado caso continuasse a seguir reto. Temos  $|v_0| = 400 \text{ m/s}$ ,  $D = 10 \text{ m}$ ,  $\Delta y = 19 \text{ cm}$ ,  $B' = 2.5 \text{ T/m}$ . Qual é o átomo?

Vamos separar em eixos. No eixo  $x$ ,

$$v_x = v_0^x = |\vec{v}_0|, \quad x(t) = |\vec{v}_0|t.$$

---

Disto segue que  $t = \frac{D}{|\vec{v}_0|} = 0.025s$ .

No eixo  $y$ ,

$$y(t) = \frac{1}{2}at^2.$$

Podemos encontrar a aceleração notando que  $F = ma = \mu_B B'$ , ou seja,  $\vec{a} = \frac{\mu_B B'}{m}$ . Assim,

$$y(t) = \frac{1}{2} \frac{\mu_B B'}{m} t^2.$$

No instante final,

$$\Delta y = \frac{1}{2} \frac{\mu_B B'}{m} t_f^2 \Rightarrow m = \frac{1}{2} \frac{\mu_B B'}{\Delta y} t_f^2.$$

Podemos resolver essa conta com os dados do enunciado:

$$m = \frac{1}{2} \frac{9.27 \cdot 10^{-24} \cdot 2.5}{0.19} (0.025)^2 = 3.81 \cdot 10^{-26} kg.$$

Pela tabela periódica, utilizando a unidade de massa atômica como  $1.66 \cdot 10^{-27} kg$ , temos

$$m = m^* \cdot u,$$

sendo  $m^*$  o número de massa atômica. Assim,

$$m^* = \frac{m}{u} \approx 22.9 \approx 2 \cdot 11.$$

Portanto, os átomos saindo pelo fogão são de sódio.

**Exemplo 20.** Seuponha que tem um jogador de futebol a uma distância  $d$  do gol. Ele chuta a bola, a qual faz um ângulo  $\theta$  com o eixo horizontal. O gol possui uma altura  $h$ . Qual é a menor e a maior velocidade para fazer o gol? Dados  $d = 9m$ ,  $h = 2.4m$ ,  $\theta = 30^\circ$ ,  $g = 9.8m/s^2$ .

Para entrar no gol, a bola deve percorrer toda a  $d$  e ficar no chão, ou acertar um lugar menor que  $h$ . Em outras palavras, temos uma restrição com relação à trajetória (Sempre que houver uma restrição de trajetória, utilize a equação da trajetória.). Segue que

$$y = \tan(\theta)x - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2(\theta)}.$$

Em  $x = d$ ,  $0 \leq y \leq h$ , tal que

$$0 \leq \tan(\theta)d - \frac{gd^2}{2v_0^2 \cos^2(\theta)} \leq h.$$

Vamos quebrar o problema em duas partes. Na primeira,

$$\begin{aligned} \frac{gd^2}{2v_0^2 \cos^2 \theta} &\leq \tan(\theta)d \Rightarrow gd^2 \leq \tan(\theta)d \cdot 2v_0^2 \cos^2(\theta) \\ \Rightarrow \frac{gd^2}{\tan(\theta)d \cdot 2 \cos^2(\theta)} &\leq v_0^2 \Rightarrow \frac{gd}{2 \sin \theta \cos \theta} \leq v_0^2 \\ \Rightarrow v_0 &\geq 10.09m/s. \end{aligned}$$

Para a parte 2,

$$\begin{aligned} \tan(\theta)d - \frac{gd^2}{2v_0^2 \cos^2(\theta)} &\leq h \Rightarrow \tan(\theta)d - h \leq \frac{gd^2}{2v_0^2 \cos^2(\theta)} \\ \Rightarrow v_0^2(\tan(\theta)d - h) &\leq \frac{gd^2}{2 \cos^2(\theta)} \Rightarrow v_0^2 \leq \frac{gd^2}{2 \cos^2(\theta)(\tan(\theta)d - h)} \\ v_0 &\leq 13.76m/s. \end{aligned}$$

Portanto,  $10.09m/s \leq v_0 \leq 13.76m/s$ .

---

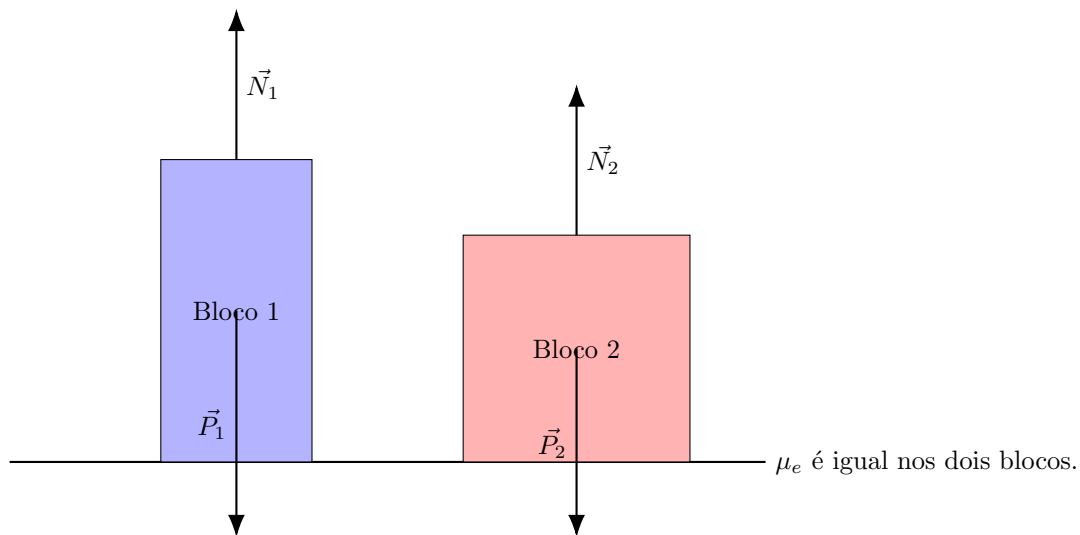
## 14 Aula 14 - 08/05/2023

### 14.1 O que esperar?

- Força de Atrito;
- Diferença entre atrito estático e dinâmico.

### 14.2 Força de Atrito.

A força de atrito ocorre como uma forma de resistência ao movimento, é uma interação que precisa ser superada para que ocorra o movimento de dado objeto. Uma de suas características é que ela será sempre tangencial à superfície de contato. Por experiência na vida real, é mais fácil mover um objeto que está em movimento do que um parado, o que sugere dois tipos diferentes de forças de atrito. De fato, ela pode ser categorizada em “Força de Atrito Estático” e “Força de Atrito Cinético”.



#### 14.2.1 Força de Atrito Estático

Esta forma de atrito surge em objetos que têm resistência ao começo do movimento. Numericamente, segue que

$$F_e = \mu_e |\vec{N}|,$$

em que  $\mu_e < 1$  é um coeficiente chamado “coeficiente de atrito estático”, um valor que altera com base na natureza dos materiais de contato. Note que a força de atrito independe da área de contato! Além disso, o coeficiente é um valor puramente numérico. Observemos essas situações mais a fundo.

Considere um bloco em contato com uma superfície tal que há uma força  $\vec{F}$  agindo sobre ele. Além disso, suponha que essa força tem um valor em módulo menor que a força de atrito estático  $\vec{F}_e$ . Vamos analisar as forças:

$$\begin{aligned} y : \quad & -P + n = 0 \Rightarrow N = P \\ x : \quad & F - F_{at} = 0 \Rightarrow F_{at} = F. \end{aligned}$$

Quando  $|\vec{F}| < F_e$ , o bloco mantém-se ausente de movimento, mas, quando  $|\vec{F}| > F_e$ , o bloco anda!

#### 14.2.2 Força de Atrito Cinético

Essa versão da força surge para objetos que já estão em movimento, mas continuam em contato com uma superfície. Neste caso, novamente, a descrição dessa interação é dada por um coeficiente adimensional, dessa

vez conhecido como “coeficiente de atrito cinético”,  $\mu_c < 1$ . A força será dada por

$$F_{at}^c = \mu_c |\vec{N}|.$$

O fenômeno previamente mencionado de haver uma facilidade maior para mover algo que já estava em movimento é explicado observando que  $\mu_c < \mu_e$ !

**Exemplo 21.** Considere um bloco em um plano inclinado que tenha ângulo  $\theta$  com a superfície. Qual é o ângulo máximo para que não haja movimento?

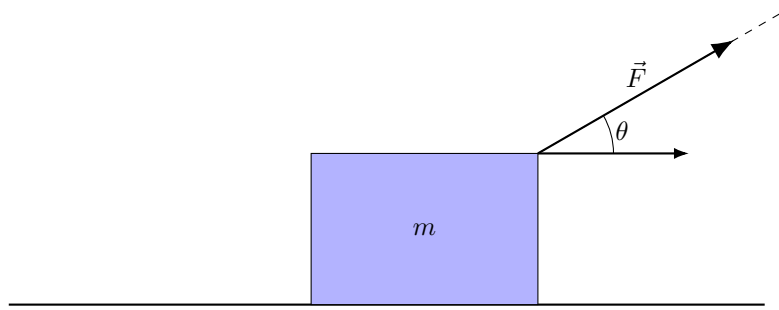
Começamos decompondo as forças do bloco:

$$\begin{aligned} y : -P_y + N &= 0 \Rightarrow -P \cos(\theta) = N \\ x : P_x - F_{at} &= 0 \Rightarrow F_{at} = P \sin(\theta) = F_e \end{aligned}$$

Para resolver o problema, podemos escrever  $F_e = P \sin(\theta_{max})$ , visto que o movimento ocorrerá apenas se a força em  $x$  for maior que o atrito estático. Com isso,

$$\begin{aligned} \mu_e N &= P \sin(\theta_{max}) \Rightarrow \mu_e P \cos(\theta_{max}) = P \sin(\theta_{max}) \\ \Rightarrow \tan(\theta_{max}) &= \mu_e. \end{aligned}$$

**Exemplo 22.** Considere um piso escorregadio e um trenó em cima dele com massa  $m$ . Ele é puxado com força  $\vec{F}$  por uma pessoa utilizando uma corda, a qual faz um ângulo horizontal  $\theta$ . Para qual valor de  $\vec{F}$  o trenó começa a andar?



Novamente decompondo o problema em suas forças componentes, temos

$$\begin{aligned} y : -P + N + F_y &= 0 \Rightarrow N = P - F_y = P - F \sin(\theta) \\ x : -F_{at} + F_x &= 0 \Rightarrow F_x = F_{at} \text{ (Até que } F_{at} = \mu_e |\vec{N}| \text{)}. \end{aligned}$$

Para que o movimento aconteça, é preciso que  $F_x > F_{at}^e = F_e$ , ou seja,

$$F \cos(\theta) > \mu_e (P - F \sin(\theta)) \Rightarrow F > \frac{\mu_e P}{\cos(\theta) + \mu_e \sin(\theta)}.$$

Agora podemos calcular, dados os valores  $m=50\text{kg}$ ,  $\mu_e = 0.20$ ,  $\mu_c = 0.15$ ,  $\theta = 40^\circ$ , podemos encontrar  $|\vec{F}_{at}|$  e a aceleração do trenó nos casos

a)  $|\vec{F}| = 100\text{N}$ ;

b)  $|\vec{F}| = 140\text{N}$

Antes de mais nada, observe que, com a fórmula que encontramos, para que haja movimento é preciso que

$$F_c > \frac{0.20 \cdot 50 \cdot 9.8}{0.766 + 0.20 \cdot 0.693} \cong 109\text{N}$$



a)  $|\vec{F}| = 100N < F_c$ , ou seja, o bloco está parado! Assim, sua aceleração será 0 e o valor da força de atrito será

$$-F_{at} + F_x = 0 \Rightarrow F_{at} = 100 \cos(\theta) = 77N.$$

b)  $|\vec{F}| = 140N > F_c$ , tal que o bloco, neste caso, anda. Com isso, ele terá aceleração não-nula e força de atrito com valor

$$F_{at} = F_{at}^c = \mu_c |\vec{N}| = \mu_c (|P - F_y|) = \mu_c (|P - F \sin(\theta)|) = 0.15(50 \cdot 9.8 - 140 \sin(40^\circ)) = 60N.$$

Em particular, note o valor da força de atrito inferior ao do item (a). Para encontrarmos a aceleração, segue que, no eixo  $x$ ,

$$x: -F_{at}^c + F_x = ma \neq 0 \Rightarrow a = -\frac{F_{at}^c + F_x}{m} = \frac{-60 + 140 \cos(40^\circ)}{50} = 0.94m/s^2.$$

**Exemplo 23.** Considere um sistema de caixas dentro de um trem em movimento, sua velocidade inicial sendo  $v_0$ . Passado um tempo, o trem passa a desacelerar constantemente com aceleração  $a$ . Qual é a menor distância para parar o trem sem mover as caixas? Tome  $\mu_e = 0.25$ ,  $v_0 = 48km/h$ .

Para as caixas continuarem paradas, é preciso que a força  $F$  atuando numa caixa satisfaça  $F \leq F_{at}^c = \mu_e N$ . Quebrando a situação em eixos  $x$  e  $y$ ,

$$y: N = P$$

$$x: F_{at} = F.$$

Utilizando essas informações, obtemos que a condição torna-se  $F \leq \mu_e mg$ . Elaborando mais, segue que

$$ma \leq \mu_e mg \Rightarrow a \leq \mu_e g.$$

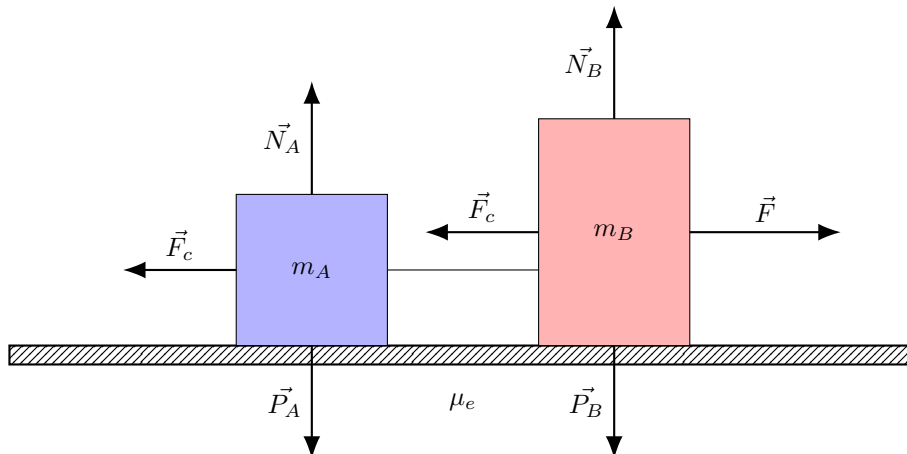
Através da Equação de Torricelli,

$$v_f^2 = v_0^2 + 2a\Delta x \Rightarrow 0 = v_0^2 - 2|\vec{A}|\Delta x \Rightarrow \Delta x = \frac{v_0^2}{2|\vec{A}|}.$$

Portanto,

$$\Delta x^{(min)} = \frac{v_0^2}{2\mu_e g} = 36m.$$

**Exemplo 24.** Considere um chão com coeficiente de atrito estático  $\mu_e$ . Nele, há dois blocos,  $A$  e  $B$ , cujas massas são  $m_A, m_B$ . Eles estão presos por uma corda e sendo puxados por outra corda com força  $\vec{F}$ . Qual é a força cinética  $F_c$  para entrar em movimento?



---

*Analisaremos as forças para cada um dos blocos, decompondo-as em coordenadas.*

**Bloco A:**

$$y : N_A = P_A$$

$$x : T - F_{at}^A = 0 \Rightarrow F_{at}^A = T \Rightarrow T_e = F_{at}^a = \mu_e m_A g$$

**Bloco B:**

$$y : N_B = P_B$$

$$x : F - T - F_{at}^B = 0 \Rightarrow F_c = T_c + F_{at}^{e(B)} = \mu_e m_A g + \mu_e m_B g.$$

*Portanto,*

$$F_c = \mu_e g(m_A + m_B).$$

*Em particular, note como seria possível tratar os dois blocos como um só com massa  $m_A + m_B$ !*

---

## 15 Aula 15 - 10/05/2023

### 15.1 O que esperar?

- Força de Arrasto;
- Resistência do Ar.

### 15.2 Força de Arrasto

Imagina um objeto se movendo por um fluido. Para o objeto mover-se, ele deve deslocar-se o fluido também. O que influencia na dificuldade para fazer isso? Por experiências cotidianas, sabemos que a forma do objeto afetará nisso. Além disso, a rapidez com que o objeto anda também é um fator que influencia, junto com o próprio tipo de fluido. Assim, a forma de arraste é oposta ao movimento! Podemos defini-la com melhor precisão agora:

$$|\vec{F}_a| \propto v^n.$$

Para baixas velocidades,  $n = 1$ , enquanto que, para altas velocidades, normalmente  $n = 2$ . Uma das mais conhecidas formas de força de arrasto é a resistência do ar:

$$|\vec{F}_a| = b|\vec{v}|^2.$$

Temos

$$P - F_a = ma_y \Rightarrow a_y = \frac{mg - bv^2}{m}.$$

Observe que, por conta da diferença de forças na fórmula da aceleração, pode chegar um momento em que ela passa a valer zero. Ao chegar neste momento, diremos que o objeto atingiu sua velocidade terminal. Definimos ela como

$$v_T = \sqrt{\frac{mg}{b}}$$

Mas o que é essa constante  $b$  que está aparecendo? Explicitamente, ela vale

$$b = \frac{1}{2}C_a\rho_f A,$$

em que  $C_a$  é o coeficiente de arrasto,  $\rho_f$  é a densidade do fluido e  $A$  é a seção de área transversal do objeto. Disso, conseguimos tirar algumas conclusões. Por exemplo, quanto mais denso o fluido ou quanto maior o objeto, mais ele terá resistência ao movimento e menor será sua velocidade terminal.

**Exemplo 25.** Considere uma gotinha de chuva perfeitamente esférica. Consideremos seu raio como aproximadamente 1 milímetro. Sua massa será dada por  $m_{gota} = \rho_{\text{água}}V_{gota}$ , e vale aproximadamente  $4 \cdot 10^{-6} \text{ kg}$ . Assuma o coeficiente de arrasto como 1 e a densidade do ar como  $\rho_{ar} = 1.27 \text{ kg/m}^3$  e a área de seção transversal da gota valendo  $A_{gota} = \pi r^2 \approx 3 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$ .

Com esses dados, segue que

$$b = \frac{1}{2}C_a\rho_{ar}A_{gota} \approx 1.9 \cdot 10^{-6} \Rightarrow v_T = \sqrt{\frac{mg}{b}} \approx 4 \text{ m/s}.$$

**Exemplo 26.** Exemplo 58 Tipler. Considere uma pessoa caindo com um paraquedas. Sabe-se que sua massa é de  $64 \text{ kg}$  e que a velocidade terminal vale  $v_T = 180 \text{ km/h}$ . Qual é  $|\vec{F}_a|$ ? Quanto vale  $b$ ?

Com efeito,

$$F_R^y = 0 = P - F_a \Rightarrow F_a = P = mg = 628 \text{ N}.$$

Quanto ao item  $b$ , temos

$$|\vec{F}_a| = b|\vec{v}| \Rightarrow b = \frac{|\vec{F}_a|}{|\vec{v}_T|^2} \Rightarrow b = \frac{628}{50^2} = 0.251 \frac{\text{kg}}{\text{m}}.$$

---

O próximo exemplo é o de uma outra força de arrasto.

**Exemplo 27.** Suponha um barco na água. Como evolui a velocidade dele com o tempo?

Como ele está se movendo no fluido água, a força responsável por movê-lo para a frente resulta no surgimento de uma força resposta, justamente a de arrasto. Pela segunda lei de Newton,

$$F_R = F_a = -bv = m \cdot a = m \frac{dv}{dt}.$$

Assim,

$$-bdt = m \frac{dv}{v} \Rightarrow \int_0^t -\frac{b}{m} dt = \int_{v_0}^{v(t)} \frac{dv}{v} \Rightarrow -\frac{b}{m} \int_0^t dt = \ln(v) \Big|_{v_0}^{v(t)} = \ln(v(t)) - \ln v_0 = \ln \frac{v(t)}{v_0}$$

(Nota: A integral  $\int \frac{1}{x} dx = \ln(x)$  é definida assim.)

Faremos as contas a seguir:

$$\begin{aligned} -\frac{b}{m} t \Big|_0^t &= \ln\left(\frac{v(t)}{v_0}\right) \\ -\frac{b}{m} t &= \ln\left(\frac{v(t)}{v_0}\right) \\ e^{-\frac{b}{m} t} &= \frac{v(t)}{v_0} \\ v(t) &= v_0 e^{-\frac{b}{m} t} \end{aligned}$$

Dados os valores  $v_f = 44\text{km/h}$ ,  $v_0 = 97\text{km/h}$ ,  $m = 900\text{kg}$ ,  $b = 68$ , por exemplo, o tempo para o barco parar será

$$t_f = -\frac{m}{b} \ln\left(\frac{v(t_f)}{v_0}\right) = \frac{900}{68} \ln\left(\frac{12}{2t}\right).$$

### 15.3 Movimentos Curvos

Quando um objeto realiza um movimento de curva, ele tem uma tendência a ter uma rota restrita. Essa tendência pode ser descrita por uma força “imaginária” que surge da restrição da trajetória do objeto, conhecida como força centrípeta, a qual foi estudada previamente, sendo ela descrita como

$$\vec{F}_{cp} = m\vec{a}_{cp}.$$

A direção da variação da velocidade em dois pontos do movimento curvo é paralelo à aceleração centrípeta mencionada.

**Exemplo 28.** Considere uma bolinha que gira e está presa por duas cordas a uma haste. As forças atuando sobre ela incluem a Peso  $P$ , a tensão da corda 1  $T_1$  e a tensão da corda 2  $T_2$ . Como a bolinha realiza um movimento circular, há uma aceleração resultante que aponta para o centro do raio que a bolinha faz, a chamada aceleração centrípeta. Sendo o comprimento das cordas  $L$  e  $L$ , o ângulo da bolinha com a horizontal da haste  $\theta$ , descreva sua dinâmica.

Vamos descrever essa situação para cada eixo. Com efeito, segue que

**Eixo x:**

$$\begin{aligned} -T_1 \cos(\theta) - T_2 \cos(\theta) &= F_R^x = m(-a_{cp}) \\ \Rightarrow (T_1 + T_2) \cos(\theta) &= m \frac{v^2}{R} = mR\omega^2. \end{aligned}$$

**Eixo y:**

$$\begin{aligned} -P + T_1 \sin(\theta) - T_2 \sin(\theta) &= F_R^y = 0 \\ \Rightarrow T_2 &= T_1 - \frac{mg}{\sin(\theta)} = 9.5N. \end{aligned}$$

Além disso,

$$\omega^2 = \frac{(T_1 + T_2)}{mR} \cos(\theta) \approx 20 \Rightarrow \omega \approx 4.5\text{rad/s}.$$

## 16 Aula 17 - 15/05/2023

### 16.1 O que esperar?

- Continuação de Energia Cinética e Trabalho;
- Exemplo de trabalho com molas;
- Movimento tridimensional.

### 16.2 Trabalho e Energia Cinética

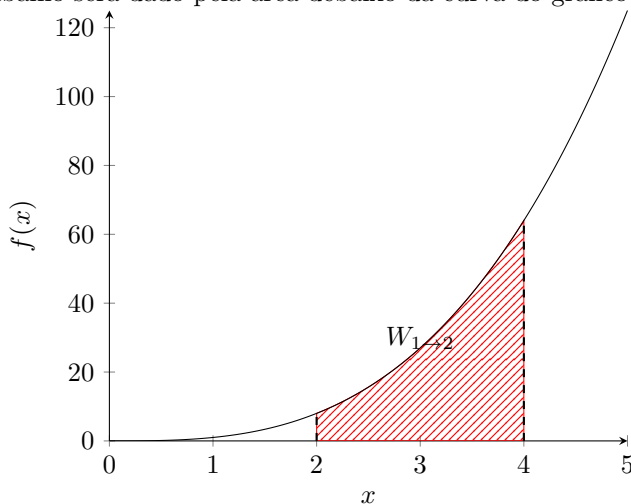
Na aula passada, vimos o Teorema da Energia Cinética, escrito como

$$W_{1 \rightarrow 2} = \int_{x_1}^{x_2} F dx = \Delta E_{\text{cin}}$$

e que afirma que o trabalho realizado por uma interação é calculado segundo a variação da energia cinética. Caso a força seja constante, note que

$$W_{1 \rightarrow 2} = \int_{x_1}^{x_2} F dx = F \int_{x_1}^{x_2} dx = F \Delta x.$$

Por outro lado, se  $F$  for uma força variável, como a integral representa a área abaixo da curva da função, o Trabalho será dado pela área debaixo da curva do gráfico de  $F(x)$

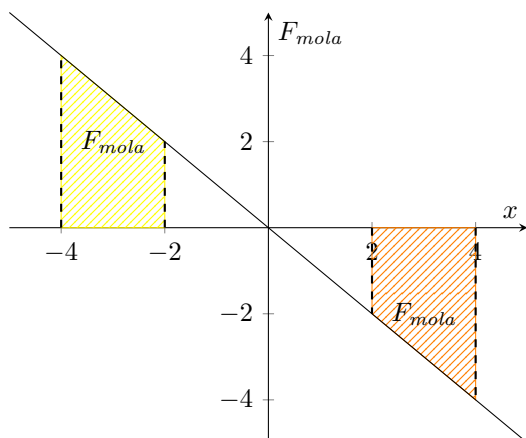


**Exemplo 29.** Considere um bloquinho preso a uma parede por uma mola. A posição de equilíbrio desta mola é  $x_0 = 0$  e a força resultante é, também, 0. Qual é o trabalho da força restauradora quando puxamos o bloco até uma posição  $x_1$  para ela voltar até um ponto  $x_2$ ?

Temos

$$W_{1 \rightarrow 2} = \int_{x_1}^{x_2} F_{\text{mola}} dx = \int_{x_1}^{x_2} -kx dx = k \int_{x_1}^{x_2} x dx = -k \frac{x^2}{2} \Big|_{x_1}^{x_2} = -\frac{k}{2}(x_2^2 - x_1^2).$$

Em particular, se  $|x_1| > |x_2|$ , a deformação da mola irá aumentar e o trabalho será negativo. Por outro lado, se  $|x_1| < |x_2|$ , o trabalho é positivo.



Neste gráfico, a parte amarela demonstra um momento em que o trabalho é positivo, tal que há uma compressão da mola. A parte laranja, por outro lado, representa um trabalho negativo e, assim, uma distensão da mola.

### 16.3 Movimento Tridimensional.

O objetivo desta seção é estudar os conceitos de trabalho, energia cinética, etc. Num contexto de eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ . Aqui, vamos utilizar deslocamentos infinitesimais ao longo de um caminho  $C$ , denotado  $\vec{dr}$ , mais rigorosamente dado por

$$\vec{dr} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}.$$

Em três dimensões, a força será dada por

$$\vec{F} = F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k}.$$

Vejamos como o trabalho funciona neste caso:

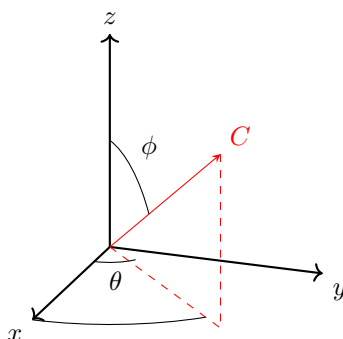
$$W_{1 \rightarrow 2} = \int_{r_1}^{r_2} \underbrace{\vec{F} \cdot \vec{dr}}_{\text{produto escalar}}$$

$$\begin{cases} \vec{F} \cdot \vec{dr} = F_x dx + F_y dy + F_z dz \\ \vec{F} \cdot \vec{dr} = |\vec{F}| |\vec{dr}| \cos(\theta) \end{cases}$$

Então,

$$W_{1 \rightarrow 2} = \int_{r_1}^{r_2} (F_x dx + F_y dy + F_z dz) = \int_{r_1}^{r_2} |\vec{F}| \cos(\theta) |\vec{dr}|.$$

Este tipo de integral é conhecido como integral de linha, pois ela é restrita ao caminho  $C$



**Exemplo 30.** Um exemplo simples é o de uma partícula que move-se apenas no eixo  $z$ , ou seja,  $x = y = 0$ . Neste caso, o deslocamento será  $\vec{dr} = dz\hat{k}$ . Suponha, também, que a força é constante e que  $\theta$  seja constante.

Então, o trabalho realizado por esta força será

$$W_{1 \rightarrow 2} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{z_1}^{z_2} |\vec{F}| \cos(\theta) |dz| = |\vec{F}| \cos(\theta) \Delta z.$$

Quando fazemos o produto escalar, essencialmente estamos fazendo a projeção de um vetor no outro. Por isso que há o termo cosseno, estamos projetando a força  $F$  no eixo desejado.

Além disso, note que, sempre que a força e  $d\vec{r}$  forem perpendiculares, o trabalho será 0, pois o cosseno será nulo! Em particular, com relação ao eixo  $y$  sem movimento, então  $\vec{P}, \vec{N}$  são perpendiculares a  $\vec{v}, d\vec{r}$ , tal que o trabalho vale 0. No eixo  $x$ ,  $F_r = F_x = |\vec{F}| \cos(\theta) = ma$ , de modo que  $F_x$  é paralelo a  $\vec{v}, d\vec{r}$ . Assim,

$$W_{1 \rightarrow 2} = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx = \int_{x_1}^{x_2} |\vec{F}| \cos(\theta) dx.$$

No quesito da energia cinética, o trabalho resultante num caminho  $C$  será

$$W_{R_{1 \rightarrow 2}} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_R \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r}.$$

Note o uso da segunda lei de newton para decompor a resultante em  $m \frac{d\vec{v}}{dt}$ . Agora, “multiplicando” a parte de dentro da integral por  $\frac{dt}{dt}$ ,

$$W_{1 \rightarrow 2} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \int_{\vec{v}_1}^{\vec{v}_2} m d\vec{v} \cdot \vec{v}(t).$$

Logo,

$$W_{1 \rightarrow 2} = \int_{\vec{v}_1}^{\vec{v}_2} m d\vec{v} \cdot \vec{v} = \int_{\vec{v}_1}^{\vec{v}_2} m \vec{v} d\vec{v}.$$

No entanto, observe que

$$\begin{cases} \vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k} \\ d\vec{v} = dv_x \hat{i} + dv_y \hat{j} + dv_z \hat{k}. \end{cases}$$

Reescrevendo o trabalho utilizando isso, obtemos

$$\begin{aligned} W_{1 \rightarrow 2} &= \int_{\vec{v}_1}^{\vec{v}_2} m \left[ v_x dv_x + v_y dv_y + v_z dv_z \right] \\ &= \int_{\vec{v}_1}^{\vec{v}_2} m v_x dv_x + \int_{\vec{v}_1}^{\vec{v}_2} m v_y dv_y + \int_{\vec{v}_1}^{\vec{v}_2} m v_z dv_z \\ &= m \left[ \int_{\vec{v}_1}^{\vec{v}_2} v_x dv_x + v_y dv_y + v_z dv_z \right] \\ &= m \left[ \frac{v_x^2}{2} \Big|_{v_1}^{v_2} + \frac{v_y^2}{2} \Big|_{v_1}^{v_2} + \frac{v_z^2}{2} \Big|_{v_1}^{v_2} \right] \\ &= \frac{m}{2} \left[ (v_{x_2}^2 + v_{y_2}^2 + v_{z_2}^2) - (v_{x_1}^2 + v_{y_1}^2 + v_{z_1}^2) \right] \\ &= \frac{m}{2} |\vec{v}_2|^2 - \frac{m}{2} |\vec{v}_1|^2 = \Delta E_{cin} \end{aligned}$$

Em outras palavras,

“O trabalho realizado pela força resultante em um corpo é igual à variação da sua energia cinética”.

**Exemplo 31.** Vamos ver um exemplo de integral de linha. Considere uma bolinha caindo de um ponto  $I$  até outro ponto  $II$ . Primeiro, ela começa caindo até o chão e depois empurrada até o ponto. Na segunda opção de caminho, ela cai em linha diagonal até o ponto. No terceiro, ela é lançada de forma parabólica. Estudemos o trabalho em cada caso.

Para o primeiro, decomponha o caminho todo em  $C_I = c_1 + c_2$ , sendo  $c_1$  a queda até o chão e  $c_2$  a empurrada até o ponto. Temos

$$W_{1 \rightarrow 2}^{C_I} = \int_{c_1} \vec{F} d\vec{r} + \int_{c_2} \vec{F} d\vec{r} = \int_{c_1} \vec{F} dy \hat{j} + \int_{c_2} \vec{F} dx \hat{i}$$

Calculando, segue que

$$\begin{aligned} W_{1 \rightarrow 2} &= \int_{c_1} -mg \hat{j} \cdot dy \hat{j} + \int_{c_2} -mg \hat{j} \cdot dx \hat{i} \\ &= \int_{c_1} -mg dy + 0 = -mg y \Big|_{c_1(1)}^{c_2(2)} = -mg(0 - h) = mgh. \end{aligned}$$

Para o segundo, precisamos descrever a trajetória do caminho  $C_{II}$ . Com isso, podemos definir  $y(x) = a + bx$ , já que é uma diagonal. Sabemos que

$$y(0) = h \quad \text{e} \quad y(d) = 0.$$

Com isso, segue que  $a = h$  e  $h + bd = 0$ , tal que  $b = -\frac{h}{d}$ . Utilizando estes dados, reescrevemos  $y$  como  $y(x) = h - \frac{h}{d}x$ . Assim,

$$W_{1 \rightarrow 2}^{C_{II}} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Note também que  $dy = -\frac{h}{d}dx$ . Destarte,

$$\begin{aligned} W_{1 \rightarrow 2}^{C_{II}} &= \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} -mg \hat{j} \cdot (dx \hat{i} - \frac{h}{d} dx \hat{j}) \\ &= \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} -mg \hat{j} dx \hat{i} + mg \hat{j} \frac{h}{d} dx \hat{j} \\ &= \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} mg \frac{h}{d} dx = mg \frac{h}{d} x \Big|_{x_1}^{x_2} = mg \frac{h}{d} (d - 0) = mgh. \end{aligned}$$



---

## 17 Aula 18 - 17/05/2023

### 17.1 O que esperar?

- Forças Conservativas;

### 17.2 Trabalho da Força Peso

De forma geral, qual é o trabalho da força peso? Temos

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}, \quad \vec{dr} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}.$$

Considerando pontos  $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$  inicial e  $\vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$  final, o trabalho da força peso será

$$W_P^C = \int_C \vec{P} \cdot \vec{dr} = \int_C (-mg\vec{k}) \cdot (dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}) = - \int_C mg dz = -mg\Delta z.$$

Em outras palavras, a força peso não depende do caminho!

Esse raciocínio acima é um exemplo de um tipo de força conhecida como “Força Conservativa”, aquelas para as quais o trabalho realizado entre dois pontos não depende do caminho e apenas das posições deles. Outro conceito importante é o de caminho fechado, que consiste na classe de caminhos nos quais o ponto inicial e final coincidem (Por exemplo, um círculo fechado). A importância destes dois conceitos está em sua união, pois eles permitem deduzir que a força conservativa em um caminho fechado sempre realizará um trabalho nulo. Matematicamente,

$$W_P^C = \oint_C \vec{F} \cdot \vec{dr} = 0$$

Exemplos de forças conservativas incluem a força gravitacional, a força elástica, uma força constante, entre outras. Em uma dimensão,  $F = F(x)$  é conservativa.

**Exemplo 32.** *Exemplo 7.1 do Tipler - Integral em um caminho fechado.*

a) Calcule o trabalho realizado por  $\vec{F} = Ax\hat{i}$ .

Existem quatro possíveis caminhos. O primeiro, definiremos por  $\vec{r}_1 = x\hat{i} + 0\hat{j}$ ,  $dr_1 = dx\hat{i}$ . Para o segundo, consideraremos  $\vec{r}_2 = x_m\hat{i} + y\hat{j}$ ,  $dr_2 = dy\hat{j}$ . No terceiro, faremos  $\vec{r}_3 = x\hat{i} + y_m\hat{j}$ . Finalmente, para o quarto, tomaremos  $\vec{r}_4 = 0\hat{i} + y\hat{j}$ ,  $dr_4 = dy\hat{j}$ . Assim,

$$\begin{aligned} W_C &= \oint_C \vec{F} \cdot \vec{dr} = \int_{c_1} Ax\hat{i} \cdot dx\hat{i} + \int_{c_2} Ax\hat{i} \cdot dy\hat{j} + \int_{c_3} Ax\hat{i} \cdot dx\hat{i} + \int_{c_4} Ax\hat{i} \cdot dy\hat{j} \\ &= A \frac{x^2}{2} \Big|_0^{x_m} + \frac{Ax^2}{2} \Big|_{x_m}^0 \\ &= \frac{Ax_m^2}{2} - 0 + 0 - \frac{Ax_m^2}{2} = 0. \end{aligned}$$

v) Faça o mesmo para  $\vec{F} = Bxy\hat{i}$ .

Com o mesmo raciocínio de antes,

$$W_C = \int_{c_1} Bxy\hat{i} \cdot dx\hat{i} + \int_{c_3} Bxy\hat{i} \cdot dx\hat{i} = \frac{Byx^2}{2} \Big|_{c_1} + \frac{byx^2}{2} \Big|_{c_3}.$$

Assim, concluímos que, como  $c_1 := (0, 0) \rightarrow (x_m, 0)$  e  $c_3 = (x_m, y_m) \rightarrow (0, y_m)$ ,

$$W_C = \frac{-By_mx_m^2}{2} \neq 0,$$

ou seja, a força não é conservativa!!

**Exemplo 33.** Seja  $\vec{F} = (\frac{F_0}{r}(y\hat{i} - x\hat{j}))$ . a) Qual é o valor de  $|\vec{F}|$ ? b) Mostre que a direção de  $F$  é perpendicular à  $\vec{r}$ . c) Quanto vale  $W_F$  ao longo de um círculo?

A priori, note que

$$\begin{aligned} |\vec{F}| &= [F_x^2 + F_y^2]^{\frac{1}{2}} = \left[ \left( \frac{F_0}{x} \right)^2 y^2 + \left( \frac{-F_0}{r} x \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{F_0}{r} (y^2 + x^2)^{\frac{1}{2}} = F_0. \end{aligned}$$

Em outras palavras,  $F$  tem módulo constante.

Por outro lado, considere o produto escalar entre  $\vec{F}$  e  $\vec{r}$ :

$$\vec{F} \cdot \vec{r} = |\vec{F}| |\vec{r}| \cos(\theta).$$

Temos que mostrar que  $\theta = 90^\circ$ , pois ser perpendicular significa que o produto interno anula-se. Segue que

$$\vec{F} \cdot \vec{r} = F_x x + F_y y = \left( \frac{F_0}{r} \right) yx - \left( \frac{F_0}{r} \right) xy = 0.$$

Portanto,  $\cos(\theta) = 0 \Rightarrow \theta = 90^\circ$ .

Por fim, colocamos  $\vec{r}(t) = R \cos(\theta(t))\hat{i} + R \sin(\theta(t))\hat{j}$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  para descrever um caminho circular no plano  $xy$  num caminho que depende de apenas uma variável  $\theta(t)$ . Com isso,

$$d\vec{r} = R(-\sin(\theta))d\theta\hat{i} + R\cos(\theta)d\theta\hat{j}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} W_C &= \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_C \left[ \left( \frac{F_0}{r} \right) (y\hat{i} - x\hat{j}) \right] \cdot [-R\sin(\theta)d\theta\hat{i} + R\cos(\theta)d\theta\hat{j}] \\ &= \int_0^{2\pi} \left( \frac{F_0}{R} \right) y (-R\sin(\theta)d\theta) + \left( \frac{F_0}{R} \right) (-x) R\cos(\theta)d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} - \left( \frac{F_0}{R} \right) R^2 \sin^2(\theta)d\theta + \left( \frac{F_0}{R} \right) (-R^2 \cos^2(\theta)d\theta) \\ &= -F_0 R \int_0^{2\pi} (\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta))d\theta = -F_0 R \theta \Big|_0^{2\pi} = -F_0 2\pi R. \end{aligned}$$

## 18 Aula 19 - 18/05/2023

### 18.1 O que esperar?

- Outras forças na perspectiva de trabalho;
- Energia Potencial;

### 18.2 Trabalho e Energia Cinética - Parte II

Vimos o trabalho de algumas forças explicitamente, como a força gravitacional, e estudamos também o tipo de força conhecida como conservativa. Analisaremos a situação de algumas outras a seguir.

Para começar, qual é o trabalho da força atrito? Lembrando que existem dois tipos, é notável que, como a força de atrito estático está relacionada com a ausência de movimento, i.e., um objeto estático, o trabalho dela será nulo. Com relação ao atrito cinético, no entanto, a questão deve ser elaborada.

Suponha que um bloco realiza duas trajetórias - primeiro de  $x_1$  até  $x_2$  e em segundo de  $x_2$  até  $x_1$  - tal que a trajetória total é a “soma das duas trajetórias.” Assim,

$$W_{F_{at}}^{TT} = W_{F_{at}}^{T_1} + W_{F_{at}}^{T_2} = \int_{x_1}^{x_2} (-F_{at}) \cdot dx + \int_{x_2}^{x_1} F_{at} \cdot dx$$

---

Como  $|F_{at}^c| = \mu_c N = \mu_c mg$ , concluímos que

$$\begin{aligned} W_{Fat}^{TT} &= - \int_{x_1}^{x_2} \mu_c mg dx + \int_{x_2}^{x_1} \mu_c mg dx \\ &= -\mu_c mg(x_2 - x_1) + \mu_c mg(x_1 - x_2) = -2\mu_c mg \Delta x \neq 0. \end{aligned}$$

Portanto, a força de atrito não é conservativa, ou seja, ela é dissipativa.

Voltando às forças conservativas, podemos representá-la como a variação de uma quantidade. Essa quantidade será chamada de Energia Potencial, e escrevemos

$$W_{1 \rightarrow 2}^C = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\Delta U = -(U(\vec{r}_2) - U(\vec{r}_1)).$$

Formalmente, iremos definir a energia potencial como

$$U(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

sendo  $\vec{r}_0$  o ponto no espaço para o qual a energia potencial é nula ( $U(\vec{r}_0) = 0$ ).

**Exemplo 34.** Vamos considerar um objeto caindo livremente de uma altura  $h$ . Encontraremos sua energia potencial. Nesta situação, defina  $\vec{r}_0 = (0, 0)$ , tal que  $U(0, 0) = 0$ . Assim,

$$U(P) = - \int_0^h \vec{P} \cdot dy \hat{j} = \int_0^h (-mg) dy = mgh.$$

Vejamos o que ocorre se mudarmos o ponto inicial para metade do caminho -  $\vec{r}_0 = \frac{h}{2}$ . Neste caso,

$$U(P) = - \int_{\frac{h}{2}}^h (-mg) dy = mgy \Big|_{\frac{h}{2}}^h = mg \frac{h}{2}.$$

No entanto, apesar do resultado diferente, ao calcularmos a variação da energia potencial, sempre chegaremos ao mesmo resultado -  $\Delta U = mgh$ .

**Exemplo 35.** Agora, suponha um sistema massa-mola, com ponto  $x_0 = 0$ ,  $U(x_0) = 0$  e  $F = 0$ . Então, como a força da mola é  $-kx$ , a energia potencial será

$$U(x) = - \int_0^x F_{mola} dx' = - \int_0^x (-kx') dx' = \frac{kx^2}{2}$$

Observe que, pelo Teorema da Energia Cinética,

$$W_{1 \rightarrow 2}^C = -\Delta U = \Delta E_{cin}.$$

Manipulando esta equação, obtemos

$$\Delta E_{cin} + \Delta U = 0 \Rightarrow (E_{cin}^{x_2} + U^{x_2}) - (E_{cin}^{x_1} + U^{x_1}) = 0$$

Definimos os termos da forma  $(E_{cin}^{x_2} + U^{x_2})$  como a Energia Mecânica do sistema. Mais precisamente,

$$E_T = E_{cin} + U_R$$

Em particular, observe que  $\Delta E_T = 0$ , ou seja, a energia mecânica é conservada no sistema. A quantidade  $U_R$  é análoga à forma que escrevemos a força resultante, no sentido de que ela é a soma de todas as energias potenciais. Vamos ver agora como aplicar a conservação de energia

---

**Exemplo 36.** Considere uma bolinha que começa com  $v_0 = 0\text{m/s}$  e atinge o chão com velocidade  $v_2$ . Buscamos o valor dessa velocidade 2. Temos

$$\Delta E = E_2 - E_1 = 0.$$

Sabemos que

$$E_1 = E_{cin} + U_1 = 0 + mgh = mgh$$

e

$$E_2 = E_{cin} + U_2 = \frac{1}{2}mv_2^2.$$

Logo,

$$E_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 - mgh = 0 \Rightarrow v_2^2 = 2gh \Rightarrow v_2 = \sqrt{2gh}.$$