UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS E COMPUTACIONAIS - ICMC

EXERCÍCIOS DE CÁLCULO

Renan Wenzel - 11169472

Thaís Jordão - tjordao@icmc.usp.br

27 de abril de 2022

Conteúdo

1 Números Reais, Funções e Introdução a Limites

1.1 Exercícios de Funções e Panorama Geral

1.1.1 Exercício 1

Parte 1 - Se considerarmos

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x - 1}, x \neq 1,$$

então a que classe de funções ela pertence? Note que se efetuarmos a divisão polinomial, concluiremos que

$$\frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x - 1} = x^2 + 2x + 1.$$

Isto significa que f é uma função polinomial de grau 2? Justifique e faça o passo-a-passo.

Prova:. *Considere a função*

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x - 1}, x \neq 1,$$

e $p(x) = x^3 + x^2 - x - 1, q(x) = x - 1$, *em que* $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e* $q(x)\mathbb{R}/\{1\} \to \mathbb{R}$ *são polinômios. Segue que:*

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x - 1} = \frac{p(x)}{q(x)}, x \neq 1.$$

Por definição, uma função na forma de quociente de polinômios, em que o denominador é um polinômio com o domínio tal que ele nunca é nulo, é conhecida como uma função racional.

No entanto, é melhor lidar com frações de polinômios simplificados, ou seja, é preciso encontrar o fator comum entre ambos. Observe que, em x = 1,

$$p(x) = 1^3 + 1^2 - 1 - 1 = 1 + 1 - 1 - 1 = 0$$

e

$$q(x) = 1 - 1 = 0,$$

então (x-1) é um fator comum entre ambos, isto é, ele pode ser fatorado após manipular o polinômio p(x) . Assim, note que, somando e subtraindo fatores para que possamos fatorar (x-1) de p(x), chegamos em:

$$p(x) = x^3 + x^2 - x - 1 = x^3 + (2x^2 - x^2) + (x - 2x) - 1 = (x - 1)(x^2 + 2x^2 + 1) = q(x)(x^2 + 2x^2 + 1),$$

de forma que:

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x - 1} = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{q(x)(x^2 + 2x^2 + 1)}{q(x)} = x^2 + 2x^2 + 1, x \neq 1.$$

Logo, após efetivada a divisão, obtemos que f é uma função polinomial de grau 2. ■

Parte 2 - Verifique as seguintes identidades:

a) $x^2 - a^2 = (x - a)(x + a)$

b) $x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + ax + a^2)$

c) $x^4 - a^4 = (x - a)(x^3 + ax^2 + a^2x + a^3)$

d) $x^5 - a^5 = (x - a)(x^4 + ax^3 + a^2x^2 + a^3x + a^4)$

e) $x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \ldots + a^{n-2}x + a^{n-1})$ em que $n \neq 0$ é um natural.

Prova:. *Antes da formalização da prova, um bom começo é analisar a imagem cuidadosamente. De fato, ao fazer isso, observe a repetição do termo (x - a) à direita de cada igualdade. Outro ponto notável é que, para cada n, ocorre uma expansão de* $\sum_{i=0}^{n} a^i x^{n-i-1}$ *ao lado de (x - a), em que* $n \in \mathbb{N}$. *Em outras palavras, isso está indicando fortemente a presença de uma hipótese indutiva para demonstrar o resultado.*

Com efeito, provemos o caso base do item a, ou seja, n = 2. Considere o produto (x-a)(x+a):

$$(x - a)(x + a) = x^2 + xa - ax - a^2 = x^2 + ax - ax - a^2 = x^2 - a^2.$$

Destarte, obtivemos o caso base como verdadeiro. Nessa linha de raciocínio, a hipótese indutiva afirma que, dado uma base verdadeira, o resultado será provado se, assumindo o caso n-1 como verdade, o caso n também será (pois assim, o caso 1 sendo verdadeiro implica que o 2 também é, consequentemente o 3, o 4, etc.). Suponha que o resultado vale para n - 1, isto é, para $n \neq 0$

$$x^{n-1} - a^{n-1} = (x - a)\left(\sum_{i=0}^{n-2} a^i x^{n-i-1}\right).$$

Em partícular, somando $2a^{n-1}$*,segue que:*

$$x^{n-1} + a^{n-1} = (x - a)\left(\sum_{i=0}^{n-2} a^i x^{n-i-1}\right) + 2a^{n-1}.$$

Então, temos

$$\sum_{i=0}^{n-1} a^i x^{n-1} = x^{n-1} + \left(\sum_{i=1}^{n-2} a^i x^{n-i-1}\right) + a^{n-1}.$$

Multiplicando ambos os lados por (x-a), chegamos em:

$$(x-a)\left(\sum_{i=0}^{n-1} a^i x^{n-i-1}\right) = (x-a)(x^{n-1} + \left(\sum_{i=1}^{n-2} a^i x^{n-i-1}\right) + a^{n-1}) = (x-a)(x^{n-1} + a^{n-1} + \left(\sum_{i=1}^{n-2} a^i x^{n-i-1}\right)) =$$

$$= (x-a)(2a^{n-1} + (x-a)\left(\sum_{i=0}^{n-2} a^i x^{n-i-1}\right) + \left(\sum_{i=1}^{n-2} a^i x^{n-i-1}\right)) = (x-a)(2a^{n-1} + x^{n-1} - a^{n-1} + \left(\sum_{i=1}^{n-2} a^i x^{n-i-1}\right)) =$$

$$= 2xa^{n-1} - 2a^n + (x-a)\left(x^{n-1} - a^{n-1} + \left(\sum_{i=1}^{n-2} a^i x^{n-i-1}\right)\right) = 2xa^{n-1} - 2a^n + x^n - xa^{n-1} - a^{n-1}x + a^n + (x-a)\left(\sum_{i=1}^{n-2} a^i x^{n-i-1}\right)\Bigg) =$$

$$= xa^{n-1} - a^n + x^n - xa^{n-1} + (x - a)\sum_{i=1}^{n-2} a^i x^{n-i-1} = (x^n - a^n) + (xa^{n-1} - ax^{n-1} + (x - a)\sum_{i=1}^{n-2} a^i x^{n-i-1}).$$

Analisemos o termo $(x - a)\sum_{i=1}^{n-2} a^i x^{n-i-1}$ *antes de prosseguir. Temos:*

$$(x - a)\sum_{i=1}^{n-2} a^i x^{n-i-1} = x\sum_{i=1}^{n-2} a^i x^{n-i-1} - a\sum_{i=1}^{n-2} a^i x^{n-i-1} = \sum_{i=1}^{n-2} a^i x^{n-i} - \sum_{i=1}^{n-2} a^{i+1} x^{n-i-1} =$$

$$= ax^{n-1} + a^2x^{n-2} + \cdots + a^{n-2}x^2 - a^2x^{n-2} - ... - a^{n-2}x^2 - a^{n-1}x = ax^{n-1} - a^{n-1}x.$$

Juntando isso com a conta anterior, chegamos, finalmente, em:

$$(x^n - a^n) + (xa^{n-1} - ax^{n-1} + (x-a)\sum_{i=1}^{n-2} a^i x^{n-i-1}) = (x^n - a^n) + (xa^{n-1} - ax^{n-1} + ax^{n-1} - a^{n-1}x) =$$

$$= x^n - a^n + 0 = x^n - a^n.$$

Portanto,

$$(x-a)\left(\sum_{i=0}^{n-1} a^i x^{n-i-1}\right) = x^n - a^n.$$

Agora que provamos isso, utilizando n = 3, 4, 5, mostramos as identidades que faltam:

n=3:

$$x^3 - a^3 = (x-a)\sum_{i=0}^{2} a^i x^{2-i} = (x-a)(a^2 + ax + x^2).$$

n=4:

$$x^4 - a^4 = (x-a)\sum_{i=0}^{3} a^i x^{3-i} = (x-a)(a^3 + a^2x + ax^2 + x^3).$$

n=5:

$$x^5 - a^5 = (x-a)\sum_{i=0}^{4} a^i x^{4-i} = (x-a)(a^4 + a^3x + a^2x^2 + ax^3 + x^4).$$

■

1.1.2 Exercício 2

Parte 1 - Fazendo todos os detalhes e explicando todos os passos, explicite o domínio de cada umas das funções abaixo e calcule os produtos $f \cdot g, g \cdot h$ e $h \cdot i$, em que:

$$f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3, \quad g(x) = 3x^2 - x + 2, \quad h(x) = \frac{x^2-1}{x-3} \;\;\&\;\; i(x) = \frac{x^3-1}{x^2+1}$$

Solução:. *A priori, analisemos os domínios de cada uma das funções. Começando por f, levando em conta que, quando não explicitado, o domínio de uma função é o maior subconjunto de $\mathbb{R}$ em que faz sentido defini-la, temos $D_f = \mathbb{R}$, pois a função não possui pontos problemáticos (com isso, queremos dizer um ponto em que, por exemplo, teríamos $\frac{1}{0}$ ou $\sqrt{-x}, x > 0$ e $x \in \mathbb{R}$.) Analogamente, segue que o domínio de g também é* $D_g = \mathbb{R}$.

Contudo, ao lidarmos com os domínios de h e i, é necessário ter cautela, já que são definidas por frações. No caso de h, seu domínio é o conjunto dos reais tais que x - 3 não é nulo, ou seja,

$$D_h = \{x \in \mathbb{R} : x - 3 \neq 0\} = \mathbb{R}/\{3\}.$$

Em primeira vista, o caso da função i pode parecer o mesmo, ou seja, que vai ser definido como o conjunto dos reais a menos de um conjunto finito de pontos. No entanto, note que, para isso, seria preciso que $x^2 + 1 = 0, x \in \mathbb{R}$, *o que nunca acontece (nos reais!). Portanto, i está definido em* $D_i = \mathbb{R}$.

Ademais, a forma de realizar produtos entre funções deve ser esclarecida: O produto entre duas funções f e g, definido ponto-a-ponto, é dado por

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x).$$

Com isso em mente, vamos aos cálculos:

i.) $f \cdot g$ (produto de f com g)

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (2x^3 - 5x^2 + 3) \cdot (3x^2 - x + 2) = 2x^3(3x^2 - x + 2) - 5x^2(3x^2 - x + 2) + 3(3x^2 - x + 2) =$$
$$= 6x^5 - 2x^4 + 4x^3 - 15x^4 + 5x^3 - 10x^2 + 9x^2 - 3x + 6 = 6x^5 - 17x^4 + 9x^3 - x^2 + 6$$

ii.) $g \cdot h$ (produto de g com h)

$$(g \cdot h)(x) = g(x) \cdot h(x) = (3x^2 - x + 2) \cdot \left(\frac{x^2 - 1}{x - 3}\right) = \left(\frac{(3x^2 - x + 2)(x^2 - 1)}{x - 3}\right) =$$
$$= \left(\frac{3x^4 - 3x^2 - x^3 + x + 2x^2 - 2}{x - 3}\right) = \left(\frac{3x^4 - x^2 - x^3 + x - 2}{x - 3}\right)$$

iii.) $h \cdot i$ (produto de h com i)

$$(h \cdot i)(x) = h(x) \cdot i(x) = \left(\frac{x^2 - 1}{x - 3}\right)\left(\frac{x^3 - 1}{x^2 + 1}\right) = \left(\frac{(x^2 - 1)(x^3 - 1)}{(x - 3)(x^2 + 1)}\right)$$
$$= \left(\frac{x^5 - x^2 - x^3 + 1}{x^3 + x - 3x^2 - 3}\right)$$

■

Parte 2 - Sabendo que $\sin x$ não é uma função racional, mostre que a função $\tan x$ não pode ser uma função racional.

Prova:. *A priori, sabemos que, para uma função ser racional, ela deve ser o quociente de dois polinômios. Analogamente, se uma função não é racional, ela não pode ser escrita como o quociente de dois polinômios.*

A posteriori, suponha que $\sin x$ não é uma função racional. Defina

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

Desta forma, segue de cara que $\tan(x)$ não é uma função racional, pois um de seus componentes, no caso, $\sin(x)$, não pode ser escrito como o quociente de dois polinômios, de forma que, mesmo se $\cos(x)$ fosse racional, ainda assim seria impossível escrevê-la como o quociente desejado. Portanto, a tangente $\tan(x)$ não pode ser uma função racional. ■

1.1.3 Exercício 3

Parte 1 - Defina os conceitos de injetividade e sobrejetividade.

Solução:. *Antes de definí-los explicitamente, é importante conhecer um pouco de suas utilidades. O primeiro deles, a injetividade, lida com a questão da unicidade na imagem da função, tanto é que também é conhecido como função 1-1, enquanto a sobrejetividade lida com o "alcance" da função. Se ambos os casos ocorrem, chamamos a função de bijeção, uma classe muito importante pois ela relaciona cada elemento de cada um dos conjuntos (o domínio e o contra-domínio) unicamente, de forma que há um inverso pra função, mas isso é outro tópico.*

Destarte, definamos ambas matematicamente. Dados dois conjuntos A e B não-vazios, seja $f : A \to B$ uma função entre os dois conjuntos. Dizemos que:

a) f é uma função injetora se, para $a_1, a_2 \in A, f(a_1) = f(a_2)$ implica que $a_1 = a_2$.

b) f é uma função sobrejetora se, dado $b \in B$, existe (pelo menos) um elemento $a \in A$ tal que $f(a) = b$.

Com essas definições em mente, retomemos o primeiro parágrafo. A unicidade mencionada segue pois, para uma aplicação qualquer de A em B ser uma função, ela precisa que, dados $a_1, a_2 \in A$, caso $a_1 = a_2, f(a_1) = f(a_2)$. A injetividade diz o oposto, ou seja, se $f(a_1) = f(a_2), a_1 = a_2$. Juntando os dois, uma funç ao injetora obedece $f(a_1) = f(a_2)$ se, e somente se, $a_1 = a_2$, dados $a_1, a_2 \in A$, tal que cada elemento de um conjunto define unicamente um elemento no outro. Quanto à sobrejetividade, ela define quando uma função tem alcance máximo, pois como cada $b \in B$ pode ser escrito como a função aplicada a algum elemento de A, segue que $B \subset f(A)$, tal que, como por definição $f(A) \subset B$, temos $f(A) = B$, ou seja, a imagem da função é o contra-domínio inteiro. ■

Parte 2 - Mostre que a função $f(x) = \sin(x), x \in [0, \pi]$ não é injetora, mas para $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ela é.

Prova:. *Vamos mostrar uma contradição engraçada. Suponha que, de fato,* $f(x) = \sin(x)$ *é injetora no intervalo* $[0, \pi]$. *Em particular, temos:*

$$\sin(0) = 0 = \sin(\pi) \Rightarrow 0 = \pi.$$

Se isso fosse verdade, alguns desastres aconteceriam. Dentre eles, não existiriam círculos, pois todos eles poderiam ser vistos como pontos, já que sua área, $\pi \cdot r^2 = 0$ *para todo* r*, ou seja, também não existiria engenharia e, quem sabe, nem mesmo o universo. Isso está obviamente errado. Logo,* $\sin(x)$ *não pode ser injetora em* $[0, \pi]$.

De lado com os cataclismas e fins do mundo, considere, agora, o intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$. *Sabemos que a função seno é estritamente crescente nesse intervalo, que é o primeiro quadrante. Assim, temos, para* $x, y \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

$$\sin(x) < \sin(y), x < y \text{ ou } \sin(x) > \sin(y), x > y.$$

Assim, a única forma de $\sin(x) = \sin(y)$ *é quando* $x = y$*, que é a exata definição de uma função injetora.* ■

Parte 3 - Faça as seguintes composições: $f \circ g, g \circ f, f \circ h$ e $h \circ f$, em que:

$$f(x) = -3x + 2, \quad g(x) = 3x^2 - x + 2, \quad \text{e} \quad h(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 3}.$$

Solução:. *Antes de dar início às contas propriamente ditas, note que, ao compor* h *com* f*, ou* f *com* h*, o domínio de* f *mudará de* $D_f = \mathbb{R}$ *para* $D_f = \mathbb{R}/\{3\}$. *Feita essa observação, sigamos em frente:*

i)

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x^2 - x + 2) = -3(3x^2 - x + 2) + 2 = -9x^2 + 3x - 6 + 2 = -9x^2 + 3x - 4.$$

ii) $(g \circ f)(x)$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(-3x + 2) = 3(-3x + 2)^2 + 3x - 2 + 2 =$$
$$= 3(9x^2 - 12x + 4) + 3x = 27x^2 - 36x + 12 + 3x = 27x^2 - 33x + 12.$$

iii) $(f \circ h)(x)$

$$(f \circ h)(x) = f(h(x)) = f(\frac{x^2 - 1}{x - 3}) = -3\left(\frac{x^2 - 1}{x - 3}\right) + 2 =$$
$$= \frac{-3x^2 + 3}{x - 3} + 2 = \frac{-3x^2 + 3 + 2x - 6}{x - 3} = \frac{-3x^2 + 2x - 3}{x - 3}.$$

iv) $(h \circ f)(x)$

$$(h \circ f)(x) = h(f(x)) = h(-3x + 2) = \frac{(-3x + 2)^2 - 1}{-3x + 2 - 3} = \frac{9x^2 - 12x + 4 - 1}{-3x - 1} = -\frac{3(3x^2 - 4x + 1)}{3x + 1}$$

■

1.2 Um Panorama Geral

1.2.1 Exercício 4

Parte 1 - Quais são os dois principais problemas a que se refere o Cálculo diferencial e integral?

Solução:. *O cálculo pode ser visto como o estudo de "infinitos", então, partindo desse princípio, é possível iluminar a mente com relação à resposta para essa pergunta. Nessa linha de raciocínio, o cálculo diferencial é apresentado, normalmente, com o problema de motivação da reta tangente e do passo de uma função. Explicitamente falando, a busca do ponto único para cada reta tangente e o que acontece com a fração* $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ *quando* Δx *fica cada vez menor, ou seja, como uma mudança até a vizinhançimediata de* x *afeta sua função f(x). Em essência, ambos os problemas são os mesmos, pois lidam com a taxa de variação de* x *em níveis infinitesimais, daí que vem a parte do cálculo diferencial que estuda infinitos, mas são as coisas infinitamente pequenas.*

Tratando-se do cálculo integral, diferente da busca pela taxa de variação, ele lida com as áreas de gráficos de funções, isto é, como calcular a área de um gráfico arbitrário. Para isso, a noção de infinito como mencionada previamenta aparece em forma de aproximações cada vez mais finas por meio de retângulos que possuem tamanhos maiores ou menores para uma dada secção do gráfico. Quanto mais retângulos forem usados, ou seja, quando menor forem seus tamanhos, mas maiores forem seus números, melhor será a aproximação da área de dada função, tal que, quando alcançados infinitos retângulos, a área da figura formada pelo gráfico é exata. Essa formação de retângulos cada vez menores também pode ser compreendida como uma divisão do intervalo da reta que representa o domínio da função em partes iguais cada vez menores, tal que quanto maior o número de partes, melhor a aproximação, até que, novamente, com infinitas partes, chega-se no valor exato da área da função. ■

Parte 2 - Utilize a construção da secante ao gráfico para obter a tangente, em que $f(x) = x^5$, explicitando a reta tangente no ponto (a, f(a)) e deixando claro como obteve o coeficiente angular desta reta.

Solução:. *Antes de tudo, lembre-se que uma reta secante a um gráfico é tal que ela passa por exatos dois pontos dele. Considerando que o que liga dois pontos é uma reta, a secante pode ser interpretada como a taxa de variação da função em dois pontos* $x, x_0 \in D_f$ *dados. Em outras palavras, se* S *for a secante, temos*

$$S = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}.$$

Retome, agora, o exercício 4.1. A palavra "taxa de variação"também aparece lá, então, consequentemente, a secante apareceu. Vamos seguir nessa linha de raciocínio, junto com a noção de infinitesimalidade, para obter a taxa de variação imediata (Nome chique para derivada) de f no ponto x_0*. Com efeito, a variação imediata é o valor de* S *quando* x *se torna a e, para isso, utilizemos a noção de limite:*

$$\lim_{x\to a} S = \lim_{x\to a}\left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a}\right) = \lim_{x\to a}\left(\frac{x^5 - a^5}{x - a}\right) = \lim_{x\to a}\left(\sum_{n=0}^{4} a^n x^{4-n}\right) = \sum_{n=0}^{4} a^n \lim_{x\to a} x^{4-n} =$$

$$= \sum_{n=0}^{4} a^n a^{4-n} = \sum_{n=0}^{4} a^{n+4-n} = \sum_{n=0}^{4} a^4 = 5a^4.$$

Como esse valor é exato e, consequentemente uma reta passando em um ponto só, ele representa a tangente em (a, f(a)) com coeficiente angular igual a 5, pois a soma possui 5 termos, independentes do índice, a^4 *iguais (apesar de n = 4, a soma começa do 0, então são n+1 = 5 termos). Esse processo pode, de fato, ser generalizado para um monômio de grau n,* $f(x) = x^n$*, para obtermos que a tangente ao ponto* $(x_0, f(x_0))$ *é dada por* nx^{n-1}*. Essa regra de obtenção da tangente de um monômio é mais conhecida como regra do tombo em cursos iniciantes, e é uma das bases para fazer a maioria das derivações do Cálculo diferencial. Uma observação interessante, para finalizar, é o uso do exercício 1.1 parte 2 para chegar no resultado que queríamos, sendo este o caso em que n = 4 dividido por (x - a).* ■

Parte 3 - Calcule a área de $f(x) = x^3$ dividindo o intervalo $[0, 1]$ em 7 parte iguais. Qual o valor aproximado da área a que se chega? Dividindo-se o intervalo em mais partes, digamos $\lfloor \pi \rfloor \cdot 10^{36}$, espera-se que esta aproximação do valor real da área melhore ou piore?

Solução:. *A priori, dividiremos o intervalo em 7 partes iguais, ou seja, I = [0, 1] se quebra nos seguintes pedaços:*

$$I_1 = \left[0, \frac{1}{7}\right], I_2 = \left[\frac{1}{7}, \frac{2}{7}\right], I_3 = \left[\frac{2}{7}, \frac{3}{7}\right], I_4 = \left[\frac{3}{7}, \frac{4}{7}\right], I_5 = \left[\frac{4}{7}, \frac{5}{7}\right], I_6 = \left[\frac{5}{7}, \frac{6}{7}\right], I_7 = \left[\frac{6}{7}, 1\right].$$

Agora, vejamos como a função f(x) se comporta neles, ou melhor, como sua área é influenciada por deslocamentos ao longo de cada pedaço de I. O princípio por trás desse processo é aproximar área por retângulos menores que a total e depois por retângulos maiores que ela. Comecemos, então, por esses menores, ou seja, analisemos o valor de f nos pontos da esquerda dos intervalos. Em seguida, somaremos eles, dividindo pelo número de divisões, no caso, 7, e repetiremos para os pontos à direita dos intervalos. Segue que

$$L_7 = \frac{1}{7}\left(f(0) + f(\frac{1}{7}) + f(\frac{2}{7}) + f(\frac{3}{7}) + f(\frac{4}{7}) + f(\frac{5}{7}) + f(\frac{6}{7})\right) =$$

$$\frac{1}{7}(0 + \frac{1}{7^3}(1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3)) = \frac{1}{7^4}\left(1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3\right) = \frac{441}{7^4} = 0.183.$$

Repetindo o processo para os números das pontas direitas dos intervalos, temos:

$$R_7 = \frac{1}{7}\left(f(\frac{1}{7}) + f(\frac{2}{7}) + f(\frac{3}{7}) + f(\frac{4}{7}) + f(\frac{5}{7}) + f(\frac{6}{7}) + f(1)\right) =$$

$$\frac{1}{7}(\frac{1}{7^3}(1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3)+1) = \frac{1}{7^4}\left(1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3\right)+\frac{1}{7} = \frac{441}{7^4}+\frac{1}{7} = 0.183+0.142 = 0.325.$$

Assim, obtemos que a área da função, A, é tal que:

$$L_7 < A < R_7.$$

Ademais, dividindo-se o intervalo em $3 \cdot 10^{36} = \lfloor \pi \rfloor \cdot 10^{36}$ *partes iguais, note que os retângulos se tornam mais numerosos e com bases menores. Assim, a área individual de cada um deles será menor, tal que, ao somá-los, chegaremos em uma área mais aproximada, uma aproximação mais refinada do valor da área da função. Isso esconde o principal mecanismo da soma de Riemann, ou seja, da definição da Integral Definida, no sentido que, ao tomar a soma de Riemann, busca-se dividir os intervalos em um quantidade infinitamente pequena, tal que "ao chegar em infinito", a área, antes aproximada, torna-se exata. Este exemplo ilustra isso através da comparação de intervalos antes não tão pequenos (7 divisões) com intervalos minúsculos (*$\lfloor \pi \rfloor \cdot 10^{36}$ *divisões),* ■

2 Propriedades dos Limites, Limites Laterais, Limites de Determinadas Funções, Funções Contínuas e Suas Propriedades

2.1 Continuidade e Limite

2.1.1 Exercício 1

Parte 1 - Classifique como verdadeira ou falsa a seguinte afirmação e demonstre ou dê um contra-exemplo. “Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função, então

$$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1).\text{”}$$

Solução:. *Considere a seguinte função:*

$$f(x) = \begin{cases} x, & se\ x \neq 1 \\ 9, & se\ x = 1. \end{cases}$$

Seja $\epsilon > 0$ qualquer e analisemos a seguinte inequação para $|x| \neq 1$:

$$|f(x) - 1| = |x - 1|.$$

Com isso, tome $\delta = \epsilon$ e suponha que $0 < |x - 1| < \delta$, tal que x nunca será igual a 1. Com isso, segue que

$$|f(x) - 1| = |x - 1| < \delta = \epsilon \Rightarrow |f(x) - 1| < \epsilon.$$

Logo, $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$, mas f(1) = 9, mostrando que a afirmação é falsa. ■

Parte 2 - É possível, dada uma função $f : \mathbb{R} - \{\pi\} \to \mathbb{R}$, não definida no ponto $x = \pi$, calcular

$$\lim_{x\to \pi} f(x)?$$

Dê um exemplo e justifique.

Solução:. *Ao definir um limite no ponto p, utilizamos o fato de p ser, por hipótese, ponto de acumulação do domínio da função. Consequentemente, p não necessariamente precisa estar nesse domínio para que possamos calcular o limite de f nele. Esse é o caso mais geral do que foi pedido no exercício, então, para exemplificar, tome $f : \mathbb{R} - \{\pi\} \to \mathbb{R}$ como:*

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) & se\ x < \pi \\ \sin(-x) & se\ \pi < x \end{cases}$$

Note que a função está definida em $\mathbb{R} - \{\pi\}$. Com isso, seja $\epsilon > 0$ qualquer. Vamos calcular o limite por meio dos limites laterais, mostrando que eles são iguais quando x tende a π. Começando pelo limite lateral à esquerda, note que

$$|f(x) - 0| = |\sin(x) - 0| = |\sin(x) - 0| = |\sin(x)| < \epsilon.$$

O ϵ ali pode ser visto como um meio para encontrarmos o δ, já que é o que precisamos fazer. Deixando isso de lado, manipularemos o módulo como segue:

$$|\sin(x)| < \epsilon \Rightarrow -\epsilon < \sin(x) < \epsilon \Rightarrow \arcsin(-\epsilon) < x < \arcsin(\epsilon).$$

Subtraindo π dos dois lados, obtemos

$$\arcsin(-\epsilon) - \pi < x - \pi < \arcsin(\epsilon) - \pi.$$

Foquemos no lado à esquerda primeiro, tal que, definindo $\delta_1 = \arcsin(\epsilon) + \pi$, vale que, quando $-\delta_1 < x - \pi < 0$,

$$-\delta_1 = -\arcsin(\epsilon) - \pi = \arcsin(-\epsilon) - \pi < x - \pi.$$

Pelo raciocínio acima, isso implica que
$$|f(x) - 0| < \epsilon,$$
ou seja,
$$\lim_{x \to \pi^-} f(x) = 0.$$
Por outro lado, quanto ao limite lateral à direita (isto é, $x > \pi$), observando a desigualdade obtida para o mesmo lado e definindo $\delta_2 = \arcsin(\epsilon) - \pi$, se $0 < x - \pi < \delta_2$, temos:
$$x - \pi < \delta_2 = \arcsin(\epsilon) - \pi,$$
donde segue que $|f(x) - 0| = |\sin(-x)| = |\sin(x)| < \epsilon$. Logo,
$$\lim_{x \to \pi^+} f(x) = 0.$$
Portanto, como os dois limites são iguais, segue que $\lim_{x\to\pi} f(x) = 0$, o que ilustre que é possível calcular o limite em um ponto fora do domínio da função. ■

Parte 3 - Escreva formalmente o que significa uma função ser contínua em um ponto de seu domínio.

Solução:. *A ideia por trás da continuidade é a falta de quebras no gráfico da função (em termo popular: pode ser desenhada sem tirar o lápis do papel). A deifnição matemática por trás dele procura preservar essa noção através da ideia de que, não importa quão próximos sejam dois pontos, sempre é possível fazer o gráfico da função neles igualmente próximos, ou seja, dados dois pontos da função, o erro da aproximação tende a zero quando calcula-se ela nesses dois pontos.*

Rigorosamente falando, essas ideias são formuladas no jargão $\epsilon - \delta$, enunciado a seguir: Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dita contínua no ponto $p \in D_f$ dado que, para cada $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que se $|x - p| < \delta$ (note a diferença entre essa definição e a de limite: Aqui, o ponto p em si faz parte da conta, então não é preciso que $0 < |x - p|$), vale
$$|f(x) - f(p)| < \epsilon.$$
■

Parte 4 - Aplique a definição $\epsilon - \delta$ de continuidade para garantir que f(x) = x - 2 é continua em p = 5. Repita o processo para p = 7 e, depois, para um $p \in D_f$ qualquer.

Prova:. *Em provas por $\epsilon - \delta$, o que significa "Para todo $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que se $0 < |x - p| < \delta$, então $|f(x) - f(p)| < \epsilon$? Ou melhor, por onde começar? Pelo começo, claro, então definamos nossa função f como sendo $f : D_f \to \mathbb{R}, f(x) = ax + b$*

Ao fazer essas demonstrações, nós começamos com um ϵ qualquer, isto é, escrito formalmente:

"Seja** $\epsilon > 0$.**"

Agora, como temos um ϵ, vamos considerar a desigualdade e ver o que obtemos a partir disso:

"Considere a desigualdade** $|f(x) - f(p)| = |(ax + b) - (ap - b)| = |a(x - p)| = |a||x - p| < \epsilon$.**"

A partir disso, normalmente temos que chegar em $|x - p|$, já que é isso que determina o δ. De fato, apesar de estar omitido, δ pode ser visto como uma função de ϵ, no sentido $\delta := \delta(\epsilon)$. No caso desse exemplo, chegamos em $|f(x) - f(p)| = |a||x - p| < \epsilon \Rightarrow |x - p| < \frac{\epsilon}{|a|}$, ou seja, nosso δ será $\frac{\epsilon}{|a|}$. Ao continuar com a escrita, obtém-se

" Tome** $\delta = \frac{\epsilon}{|a|}$. **Ent ao, se** $0 < |x - a| < \delta$**, temos
$$|f(x) - f(p)| = |a||x - p| < |a|\delta = |a|\frac{\epsilon}{|a|},$$
ou seja,** $|f(x) - f(p)| < \epsilon$, **provando que** $\lim x \to af(x) = f(p)$**, o que significa que f é contínua em p qualquer. "

Juntando isso tudo, temos a demonstração:

Seja $\epsilon > 0$ qualquer e f(x) = ax + b, em que $a, b \in \mathbb{R}$. Considere a desigualdade
$$|f(x) - f(p)| = |(ax + b) - (ap - b)| = |a(x - p)| = |a||x - p| < \epsilon.$$

Como já temos $|x-p|$, podemos tomar $\delta = \frac{\epsilon}{|a|}$. Desta forma, vamos conferir a definição: Suponha que $0 < |x-p| < \delta$. Então,

$$|f(x) - f(p)| = |a||x-p| < |a|\delta = |a|\frac{\epsilon}{|a|} = \epsilon.$$

Assim, para todo $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que se $0 < |x-p| < \delta$, então

$$|f(x) - f(p)| < \epsilon.$$

Em outras palavras, f é contínua em p. Assim, tomando a = 1 e b = -2, todos os casos são provados, pois mostramos que o geral 'e contínuo, concluindo o exercício. ■

2.2 DesContinuidade

2.2.1 Exercício 2

Identifique na função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{se } x < 1, \\ x+5, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

quais são os pontos de D_f, em torno do ponto p = 1 para $\epsilon = 1$ que causam descontinuidade na função ("Caem fora do intervalo aberto $(f(1) - 1, f(1) + 1)$"). Esta função é contínua em p = 1? Justifique.

2.2.2 Exercício 3

Parte 1 - Mostre que uma função afim é contínua em qualquer ponto do seu domínio e que f(x) = -5x + 2 é contínua em qualquer ponto do seu domínio.

Prova:. *Seja $\epsilon > 0$ qualquer e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com f(x) = ax + b a função afim, em que $a, b \in \mathbb{R}$. Considere a desigualdade*

$$|f(x) - f(p)| = |(ax + b) - (ap - b)| = |a(x-p)| = |a||x-p| < \epsilon.$$

Como já temos $|x-p|$, podemos tomar $\delta = \frac{\epsilon}{|a|}$. Desta forma, vamos conferir a definição: Suponha que $0 < |x-p| < \delta$. Então,

$$|f(x) - f(p)| = |a||x-p| < |a|\delta = |a|\frac{\epsilon}{|a|} = \epsilon.$$

Assim, para todo $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que se $0 < |x-p| < \delta$, então

$$|f(x) - f(p)| < \epsilon.$$

Em outras palavras, f é contínua em p. Como p é um p qualquer, é válido para todos os pontos do domínio. Assim, tomando a = -5 e b = +2, f(x) = -5x + 2 é contínua em todos os pontos do domínio pois o caso geral também é.

■

Parte 2 - Mostre que as funções $f(x) = x^3$ é contínua em p = 1 e que $f(x) = x^4$ é contínua em p = 2. O ϵ é qualquer? Isso é um problema, uma vez que continuidade é uma análise local?

2.3 Limites: Mais prático

2.3.1 Exercício 4

Parte 1 - Explicite o domínio da função e exiba o passo a passo da fatoração polinomial da função

$$f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 + 4x + 3}.$$

Parte 2 - Considere a mesma f do exercício anterior. A função g, definida tal que ela é igual a f em todos os pontos diferentes de menos 1, explicitamente

$$g(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x + 3}$$

é uma função igual a f ou uma simplificação de f?

Parte 3 - Qual é a técnica que pode ser aplicada quando numerador e denominador têm uma raíz em comum para calcular o limite de funções racionais em pontos onde elas não estão definidas? Por que ela funciona?

2.3.2 Exercício 5

Parte 1 - Crie exemplos de cálculos de limite em que sejam aplicadas as técnicas da divisão, soma e produto de limites.

Parte 2 - Explicite o domínio das funções racionais abaixo:

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}, \quad g(x) = \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x - 1}, \quad h(x) = \frac{x^3 - x^2 - 21x + 45}{x^2 - 6x + 9}.$$

Parte 3 - Calcule cada um dos limites, deixando claro o passo a passo utilizado:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x - 1}, \quad \lim_{x \to 3} \frac{x^3 - x^2 - 21x + 45}{x^2 - 6x + 9}.$$

3 Reta Tangente, Derivada, Derivada de Algumas funções, Regra da Cadeia

4 Teorema do Valor Médio e Suas Consequências, Derivadas de Ordem Superior

5 Antiderivada, Integral, Teorema Fundamental do Cálculo, Métodos, Integrais Impróprias