UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS E COMPUTACIONAIS - ICMC

EXERCÍCIOS DE CÁLCULO

Renan Wenzel - 11169472

Thaís Jordão - tjordao@icmc.usp.br

9 de junho de 2022

Conteúdo

1 Números Reais, Funções e Introdução a Limites

1.1 Exercícios de Funções e Panorama Geral

1.1.1 Exercício 1

Parte 1 - Se considerarmos

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x - 1}, x \neq 1,$$

então a que classe de funções ela pertence? Note que se efetuarmos a divisão polinomial, concluiremos que

$$\frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x - 1} = x^2 + 2x + 1.$$

Isto significa que f é uma função polinomial de grau 2? Justifique e faça o passo-a-passo.

Prova:. *Considere a função*

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x - 1}, x \neq 1,$$

e $p(x) = x^3 + x^2 - x - 1, q(x) = x - 1$, *em que* $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e* $q(x)\mathbb{R}/\{1\} \to \mathbb{R}$ *são polinômios. Segue que:*

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x - 1} = \frac{p(x)}{q(x)}, x \neq 1.$$

Por definição, uma função na forma de quociente de polinômios, em que o denominador é um polinômio com o domínio tal que ele nunca é nulo, é conhecida como uma função racional.

No entanto, é melhor lidar com frações de polinômios simplificados, ou seja, é preciso encontrar o fator comum entre ambos. Observe que, em x = 1,

$$p(x) = 1^3 + 1^2 - 1 - 1 = 1 + 1 - 1 - 1 = 0$$

e

$$q(x) = 1 - 1 = 0,$$

então (x-1) é um fator comum entre ambos, isto é, ele pode ser fatorado após manipular o polinômio p(x) . Assim, note que, somando e subtraindo fatores para que possamos fatorar (x-1) de p(x), chegamos em:

$$p(x) = x^3 + x^2 - x - 1 = x^3 + (2x^2 - x^2) + (x - 2x) - 1 = (x - 1)(x^2 + 2x^2 + 1) = q(x)(x^2 + 2x^2 + 1),$$

de forma que:

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x - 1} = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{q(x)(x^2 + 2x^2 + 1)}{q(x)} = x^2 + 2x^2 + 1, x \neq 1.$$

Logo, após efetivada a divisão, obtemos que f é uma função polinomial de grau 2. ■

Parte 2 - Verifique as seguintes identidades:

a) $x^2 - a^2 = (x - a)(x + a)$

b) $x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + ax + a^2)$

c) $x^4 - a^4 = (x - a)(x^3 + ax^2 + a^2x + a^3)$

d) $x^5 - a^5 = (x - a)(x^4 + ax^3 + a^2x^2 + a^3x + a^4)$

e) $x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \ldots + a^{n-2}x + a^{n-1})$ em que $n \neq 0$ é um natural.

Prova:. *Antes da formalização da prova, um bom começo é analisar a imagem cuidadosamente. De fato, ao fazer isso, observe a repetição do termo (x - a) à direita de cada igualdade. Outro ponto notável é que, para cada n, ocorre uma expansão de* $\sum_{i=0}^{n} a^i x^{n-i-1}$ *ao lado de (x - a), em que* $n \in \mathbb{N}$. *Em outras palavras, isso está indicando fortemente a presença de uma hipótese indutiva para demonstrar o resultado.*

Com efeito, provemos o caso base do item a, ou seja, n = 2. Considere o produto (x-a)(x+a):

$$(x - a)(x + a) = x^2 + xa - ax - a^2 = x^2 + ax - ax - a^2 = x^2 - a^2.$$

Destarte, obtivemos o caso base como verdadeiro. Nessa linha de raciocínio, a hipótese indutiva afirma que, dado uma base verdadeira, o resultado será provado se, assumindo o caso n-1 como verdade, o caso n também será (pois assim, o caso 1 sendo verdadeiro implica que o 2 também é, consequentemente o 3, o 4, etc.). Suponha que o resultado vale para n - 1, isto é, para $n \neq 0$

$$x^{n-1} - a^{n-1} = (x - a)\left(\sum_{i=0}^{n-2} a^i x^{n-i-2}\right).$$

Em partícular, somando $2a^{n-1}$,*segue que:*

$$x^{n-1} + a^{n-1} = (x - a)\left(\sum_{i=0}^{n-2} a^i x^{n-i-2}\right) + 2a^{n-1}.$$

Multiplicando ambos os lados por (x-a), chegamos em:

$$(x-a)\left(\sum_{i=0}^{n-1} a^i x^{n-i-1}\right) = (x-a)(x^{n-1} + \left(\sum_{i=1}^{n-2} a^i x^{n-i-1}\right) + a^{n-1}) = (x-a)(x^{n-1} + a^{n-1} + \left(\sum_{i=1}^{n-2} a^i x^{n-i-1}\right)) =$$

$$= (x-a)(2a^{n-1} + (x-a)\left(\sum_{i=0}^{n-2} a^i x^{n-i-2}\right) + \left(\sum_{i=1}^{n-2} a^i x^{n-i-1}\right)) = (x-a)(2a^{n-1} + x^{n-1} - a^{n-1} + \left(\sum_{i=1}^{n-2} a^i x^{n-i-1}\right)) =$$

$$= 2xa^{n-1} - 2a^n + (x-a)\left(x^{n-1} - a^{n-1} + \left(\sum_{i=1}^{n-2} a^i x^{n-i-1}\right)\right) = 2xa^{n-1} - 2a^n + x^n - xa^{n-1} - a^{n-1}x + a^n + (x-a)\left(\sum_{i=1}^{n-2} a^i x^{n-i-1}\right)\Bigg) =$$

$$= xa^{n-1} - a^n + x^n - xa^{n-1} + (x - a)\sum_{i=1}^{n-2} a^i x^{n-i-1} = (x^n - a^n) + (xa^{n-1} - ax^{n-1} + (x - a)\sum_{i=1}^{n-2} a^i x^{n-i-1}).$$

Analisemos o termo $(x - a)\sum_{i=1}^{n-2} a^i x^{n-i-1}$ *antes de prosseguir. Temos:*

$$(x - a)\sum_{i=1}^{n-2} a^i x^{n-i-1} = x\sum_{i=1}^{n-2} a^i x^{n-i-1} - a\sum_{i=1}^{n-2} a^i x^{n-i-1} = \sum_{i=1}^{n-2} a^i x^{n-i} - \sum_{i=1}^{n-2} a^{i+1} x^{n-i-1} =$$

$$= ax^{n-1} + a^2x^{n-2} + \cdots + a^{n-2}x^2 - a^2x^{n-2} - \ldots - a^{n-2}x^2 - a^{n-1}x = ax^{n-1} - a^{n-1}x.$$

Juntando isso com a conta anterior, chegamos, finalmente, em:

$$(x^n - a^n) + (xa^{n-1} - ax^{n-1} + (x-a)\sum_{i=1}^{n-2} a^i x^{n-i-1}) = (x^n - a^n) + (xa^{n-1} - ax^{n-1} + ax^{n-1} - a^{n-1}x) =$$

$$= x^n - a^n + 0 = x^n - a^n.$$

Portanto,

$$(x-a)\left(\sum_{i=0}^{n-1} a^i x^{n-i-1}\right) = x^n - a^n.$$

Agora que provamos isso, utilizando n = 3, 4, 5, mostramos as identidades que faltam:

n=3:

$$x^3 - a^3 = (x-a)\sum_{i=0}^{2} a^i x^{2-i} = (x-a)(a^2 + ax + x^2).$$

n=4:

$$x^4 - a^4 = (x-a)\sum_{i=0}^{3} a^i x^{3-i} = (x-a)(a^3 + a^2x + ax^2 + x^3).$$

n=5:

$$x^5 - a^5 = (x-a)\sum_{i=0}^{4} a^i x^{4-i} = (x-a)(a^4 + a^3x + a^2x^2 + ax^3 + x^4).$$

■

1.1.2 Exercício 2

Parte 1 - Fazendo todos os detalhes e explicando todos os passos, explicite o domínio de cada umas das funções abaixo e calcule os produtos $f \cdot g, g \cdot h$ e $h \cdot i$, em que:

$$f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3, \quad g(x) = 3x^2 - x + 2, \quad h(x) = \frac{x^2-1}{x-3} \ \& \ i(x) = \frac{x^3-1}{x^2+1}$$

Solução:. *A priori, analisemos os domínios de cada uma das funções. Começando por f, levando em conta que, quando não explicitado, o domínio de uma função é o maior subconjunto de $\mathbb{R}$ em que faz sentido defini-la, temos $D_f = \mathbb{R}$, pois a função não possui pontos problemáticos (com isso, queremos dizer um ponto em que, por exemplo, teríamos $\frac{1}{0}$ ou $\sqrt{-x}, x > 0$ e $x \in \mathbb{R}$.) Analogamente, segue que o domínio de g também é $D_g = \mathbb{R}$.*

Contudo, ao lidarmos com os domínios de h e i, é necessário ter cautela, já que são definidas por frações. No caso de h, seu domínio é o conjunto dos reais tais que x - 3 não é nulo, ou seja,

$$D_h = \{x \in \mathbb{R} : x - 3 \neq 0\} = \mathbb{R}/\{3\}.$$

Em primeira vista, o caso da função i pode parecer o mesmo, ou seja, que vai ser definido como o conjunto dos reais a menos de um conjunto finito de pontos. No entanto, note que, para isso, seria preciso que $x^2 + 1 = 0, x \in \mathbb{R}$, o que nunca acontece (nos reais!). Portanto, i está definido em $D_i = \mathbb{R}$.

Ademais, a forma de realizar produtos entre funções deve ser esclarecida: O produto entre duas funções f e g, definido ponto-a-ponto, é dado por

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x).$$

Com isso em mente, vamos aos cálculos:

i.) $f \cdot g$ (produto de f com g)

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (2x^3 - 5x^2 + 3) \cdot (3x^2 - x + 2) = 2x^3(3x^2 - x + 2) - 5x^2(3x^2 - x + 2) + 3(3x^2 - x + 2) =$$
$$= 6x^5 - 2x^4 + 4x^3 - 15x^4 + 5x^3 - 10x^2 + 9x^2 - 3x + 6 = 6x^5 - 17x^4 + 9x^3 - x^2 + 6$$

ii.) $g \cdot h$ (produto de g com h)

$$(g \cdot h)(x) = g(x) \cdot h(x) = (3x^2 - x + 2) \cdot \left(\frac{x^2 - 1}{x - 3}\right) = \left(\frac{(3x^2 - x + 2)(x^2 - 1)}{x - 3}\right) =$$
$$= \left(\frac{3x^4 - 3x^2 - x^3 + x + 2x^2 - 2}{x - 3}\right) = \left(\frac{3x^4 - x^2 - x^3 + x - 2}{x - 3}\right)$$

iii.) $h \cdot i$ (produto de h com i)

$$(h \cdot i)(x) = h(x) \cdot i(x) = \left(\frac{x^2 - 1}{x - 3}\right)\left(\frac{x^3 - 1}{x^2 + 1}\right) = \left(\frac{(x^2 - 1)(x^3 - 1)}{(x - 3)(x^2 + 1)}\right)$$
$$= \left(\frac{x^5 - x^2 - x^3 + 1}{x^3 + x - 3x^2 - 3}\right)$$

■

Parte 2 - Sabendo que $\sin x$ não é uma função racional, mostre que a função $\tan x$ não pode ser uma função racional.

Prova:. *A priori, sabemos que, para uma função ser racional, ela deve ser o quociente de dois polinômios. Analogamente, se uma função não é racional, ela não pode ser escrita como o quociente de dois polinômios.*

A posteriori, suponha que $\sin x$ não é uma função racional. Defina

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

Desta forma, segue de cara que $\tan(x)$ não é uma função racional, pois um de seus componentes, no caso, $\sin(x)$, não pode ser escrito como o quociente de dois polinômios, de forma que, mesmo se $\cos(x)$ fosse racional, ainda assim seria impossível escrevê-la como o quociente desejado. Portanto, a tangente $\tan(x)$ não pode ser uma função racional. ■

1.1.3 Exercício 3

Parte 1 - Defina os conceitos de injetividade e sobrejetividade.

Solução:. *Antes de definí-los explicitamente, é importante conhecer um pouco de suas utilidades. O primeiro deles, a injetividade, lida com a questão da unicidade na imagem da função, tanto é que também é conhecido como função 1-1, enquanto a sobrejetividade lida com o "alcance" da função. Se ambos os casos ocorrem, chamamos a função de bijeção, uma classe muito importante pois ela relaciona cada elemento de cada um dos conjuntos (o domínio e o contra-domínio) unicamente, de forma que há um inverso pra função, mas isso é outro tópico.*

Destarte, definamos ambas matematicamente. Dados dois conjuntos A e B não-vazios, seja $f : A \to B$ uma função entre os dois conjuntos. Dizemos que:

a) f é uma função injetora se, para $a_1, a_2 \in A, f(a_1) = f(a_2)$ implica que $a_1 = a_2$.

b) f é uma função sobrejetora se, dado $b \in B$, existe (pelo menos) um elemento $a \in A$ tal que $f(a) = b$.

Com essas definições em mente, retomemos o primeiro parágrafo. A unicidade mencionada segue pois, para uma aplicação qualquer de A em B ser uma função, ela precisa que, dados $a_1, a_2 \in A$, caso $a_1 = a_2, f(a_1) = f(a_2)$. A injetividade diz o oposto, ou seja, se $f(a_1) = f(a_2), a_1 = a_2$. Juntando os dois, uma funç ao injetora obedece $f(a_1) = f(a_2)$ se, e somente se, $a_1 = a_2$, dados $a_1, a_2 \in A$, tal que cada elemento de um conjunto define unicamente um elemento no outro. Quanto à sobrejetividade, ela define quando uma função tem alcance máximo, pois como cada $b \in B$ pode ser escrito como a função aplicada a algum elemento de A, segue que $B \subset f(A)$, tal que, como por definição $f(A) \subset B$, temos $f(A) = B$, ou seja, a imagem da função é o contra-domínio inteiro. ■

Parte 2 - Mostre que a função $f(x) = \sin(x), x \in [0, \pi]$ não é injetora, mas para $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ela é.

Prova:. *Vamos mostrar uma contradição engraçada. Suponha que, de fato,* $f(x) = \sin(x)$ *é injetora no intervalo* $[0, \pi]$*. Em particular, temos:*

$$\sin(0) = 0 = \sin(\pi) \Rightarrow 0 = \pi.$$

Se isso fosse verdade, alguns desastres aconteceriam. Dentre eles, não existiriam círculos, pois todos eles poderiam ser vistos como pontos, já que sua área, $\pi \cdot r^2 = 0$ *para todo* r*, ou seja, também não existiria engenharia e, quem sabe, nem mesmo o universo. Isso está obviamente errado. Logo,* $\sin(x)$ *não pode ser injetora em* $[0, \pi]$.

De lado com os cataclismas e fins do mundo, considere, agora, o intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$*. Sabemos que a função seno é estritamente crescente nesse intervalo, que é o primeiro quadrante. Assim, temos, para* $x, y \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

$$\sin(x) < \sin(y), x < y \text{ ou } \sin(x) > \sin(y), x > y.$$

Assim, a única forma de $\sin(x) = \sin(y)$ *é quando* $x = y$*, que é a exata definição de uma função injetora.* ■

Parte 3 - Faça as seguintes composições: $f \circ g, g \circ f, f \circ h$ e $h \circ f$, em que:

$$f(x) = -3x + 2, \quad g(x) = 3x^2 - x + 2, \quad \text{e} \quad h(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 3}.$$

Solução:. *Antes de dar início às contas propriamente ditas, note que, ao compor* h *com* f*, ou* f *com* h*, o domínio de* f *mudará de* $D_f = \mathbb{R}$ *para* $D_f = \mathbb{R}/\{3\}$*. Feita essa observação, sigamos em frente:*

i)

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x^2 - x + 2) = -3(3x^2 - x + 2) + 2 = -9x^2 + 3x - 6 + 2 = -9x^2 + 3x - 4.$$

ii) $(g \circ f)(x)$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(-3x + 2) = 3(-3x + 2)^2 + 3x - 2 + 2 =$$
$$= 3(9x^2 - 12x + 4) + 3x = 27x^2 - 36x + 12 + 3x = 27x^2 - 33x + 12.$$

iii) $(f \circ h)(x)$

$$(f \circ h)(x) = f(h(x)) = f(\frac{x^2 - 1}{x - 3}) = -3\left(\frac{x^2 - 1}{x - 3}\right) + 2 =$$
$$= \frac{-3x^2 + 3}{x - 3} + 2 = \frac{-3x^2 + 3 + 2x - 6}{x - 3} = \frac{-3x^2 + 2x - 3}{x - 3}.$$

iv) $(h \circ f)(x)$

$$(h \circ f)(x) = h(f(x)) = h(-3x + 2) = \frac{(-3x + 2)^2 - 1}{-3x + 2 - 3} = \frac{9x^2 - 12x + 4 - 1}{-3x - 1} = -\frac{3(3x^2 - 4x + 1)}{3x + 1}$$

■

1.2 Um Panorama Geral

1.2.1 Exercício 4

Parte 1 - Quais são os dois principais problemas a que se refere o Cálculo diferencial e integral?

Solução:. *O cálculo pode ser visto como o estudo de "infinitos", então, partindo desse princípio, é possível iluminar a mente com relação à resposta para essa pergunta. Nessa linha de raciocínio, o cálculo diferencial é apresentado, normalmente, com o problema de motivação da reta tangente e do passo de uma função. Explicitamente falando, a busca do ponto único para cada reta tangente e o que acontece com a fração* $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ *quando* Δx *fica cada vez menor, ou seja, como uma mudança até a vizinhançimediata de* x *afeta sua função f(x). Em essência, ambos os problemas são os mesmos, pois lidam com a taxa de variação de* x *em níveis infinitesimais, daí que vem a parte do cálculo diferencial que estuda infinitos, mas são as coisas infinitamente pequenas.*

Tratando-se do cálculo integral, diferente da busca pela taxa de variação, ele lida com as áreas de gráficos de funções, isto é, como calcular a área de um gráfico arbitrário. Para isso, a noção de infinito como mencionada previamenta aparece em forma de aproximações cada vez mais finas por meio de retângulos que possuem tamanhos maiores ou menores para uma dada secção do gráfico. Quanto mais retângulos forem usados, ou seja, quando menor forem seus tamanhos, mas maiores forem seus números, melhor será a aproximação da área de dada função, tal que, quando alcançados infinitos retângulos, a área da figura formada pelo gráfico é exata. Essa formação de retângulos cada vez menores também pode ser compreendida como uma divisão do intervalo da reta que representa o domínio da função em partes iguais cada vez menores, tal que quanto maior o número de partes, melhor a aproximação, até que, novamente, com infinitas partes, chega-se no valor exato da área da função. ■

Parte 2 - Utilize a construção da secante ao gráfico para obter a tangente, em que $f(x) = x^5$, explicitando a reta tangente no ponto (a, f(a)) e deixando claro como obteve o coeficiente angular desta reta.

Solução:. *Antes de tudo, lembre-se que uma reta secante a um gráfico é tal que ela passa por exatos dois pontos dele. Considerando que o que liga dois pontos é uma reta, a secante pode ser interpretada como a taxa de variação da função em dois pontos* $x, x_0 \in D_f$ *dados. Em outras palavras, se S for a secante, temos*

$$S = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}.$$

Retome, agora, o exercício 4.1. A palavra "taxa de variação"também aparece lá, então, consequentemente, a secante apareceu. Vamos seguir nessa linha de raciocínio, junto com a noção de infinitesimalidade, para obter a taxa de variação imediata (Nome chique para derivada) de f no ponto x_0. *Com efeito, a variação imediata é o valor de S quando x se torna a e, para isso, utilizemos a noção de limite:*

$$\lim_{x\to a} S = \lim_{x\to a}\left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a}\right) = \lim_{x\to a}\left(\frac{x^5 - a^5}{x - a}\right) = \lim_{x\to a}\left(\sum_{n=0}^{4} a^n x^{4-n}\right) = \sum_{n=0}^{4} a^n \lim_{x\to a} x^{4-n} =$$

$$= \sum_{n=0}^{4} a^n a^{4-n} = \sum_{n=0}^{4} a^{n+4-n} = \sum_{n=0}^{4} a^4 = 5a^4.$$

Como esse valor é exato e, consequentemente uma reta passando em um ponto só, ele representa a tangente em (a, f(a)) com coeficiente angular igual a 5, pois a soma possui 5 termos, independentes do índice, a^4 *iguais (apesar de n = 4, a soma começa do 0, então são n+1 = 5 termos). Esse processo pode, de fato, ser generalizado para um monômio de grau n,* $f(x) = x^n$, *para obtermos que a tangente ao ponto* $(x_0, f(x_0))$ *é dada por* nx^{n-1}. *Essa regra de obtenção da tangente de um monômio é mais conhecida como regra do tombo em cursos iniciantes, e é uma das bases para fazer a maioria das derivações do Cálculo diferencial. Uma observação interessante, para finalizar, é o uso do exercício 1.1 parte 2 para chegar no resultado que queríamos, sendo este o caso em que n = 4 dividido por (x - a).* ■

Parte 3 - Calcule a área de $f(x) = x^3$ dividindo o intervalo $[0, 1]$ em 7 parte iguais. Qual o valor aproximado da área a que se chega? Dividindo-se o intervalo em mais partes, digamos $\lfloor \pi \rfloor \cdot 10^{36}$, espera-se que esta aproximação do valor real da área melhore ou piore?

Solução:. *A priori, dividiremos o intervalo em 7 partes iguais, ou seja, I = [0, 1] se quebra nos seguintes pedaços:*

$$I_1 = \left[0, \frac{1}{7}\right], I_2 = \left[\frac{1}{7}, \frac{2}{7}\right], I_3 = \left[\frac{2}{7}, \frac{3}{7}\right], I_4 = \left[\frac{3}{7}, \frac{4}{7}\right], I_5 = \left[\frac{4}{7}, \frac{5}{7}\right], I_6 = \left[\frac{5}{7}, \frac{6}{7}\right], I_7 = \left[\frac{6}{7}, 1\right].$$

Agora, vejamos como a função f(x) se comporta neles, ou melhor, como sua área é influenciada por deslocamentos ao longo de cada pedaço de I. O princípio por trás desse processo é aproximar área por retângulos menores que a total e depois por retângulos maiores que ela. Comecemos, então, por esses menores, ou seja, analisemos o valor de f nos pontos da esquerda dos intervalos. Em seguida, somaremos eles, dividindo pelo número de divisões, no caso, 7, e repetiremos para os pontos à direita dos intervalos. Segue que

$$L_7 = \frac{1}{7}\Bigg(f(0) + f(\frac{1}{7}) + f(\frac{2}{7}) + f(\frac{3}{7}) + f(\frac{4}{7}) + f(\frac{5}{7}) + f(\frac{6}{7})\Bigg) =$$

$$\frac{1}{7}(0 + \frac{1}{7^3}(1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3)) = \frac{1}{7^4}\Bigg(1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3\Bigg) = \frac{441}{7^4} = 0.183.$$

Repetindo o processo para os números das pontas direitas dos intervalos, temos:

$$R_7 = \frac{1}{7}\Bigg(f(\frac{1}{7}) + f(\frac{2}{7}) + f(\frac{3}{7}) + f(\frac{4}{7}) + f(\frac{5}{7}) + f(\frac{6}{7}) + f(1)\Bigg) =$$

$$\frac{1}{7}(\frac{1}{7^3}(1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3)+1) = \frac{1}{7^4}\Bigg(1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3\Bigg) + \frac{1}{7} = \frac{441}{7^4} + \frac{1}{7} = 0.183+0.142 = 0.325.$$

Assim, obtemos que a área da função, A, é tal que:

$$L_7 < A < R_7.$$

Ademais, dividindo-se o intervalo em $3 \cdot 10^{36} = \lfloor \pi \rfloor \cdot 10^{36}$ *partes iguais, note que os retângulos se tornam mais numerosos e com bases menores. Assim, a área individual de cada um deles será menor, tal que, ao somá-los, chegaremos em uma área mais aproximada, uma aproximação mais refinada do valor da área da função. Isso esconde o principal mecanismo da soma de Riemann, ou seja, da definição da Integral Definida, no sentido que, ao tomar a soma de Riemann, busca-se dividir os intervalos em um quantidade infinitamente pequena, tal que "ao chegar em infinito", a área, antes aproximada, torna-se exata. Este exemplo ilustra isso através da comparação de intervalos antes não tão pequenos (7 divisões) com intervalos minúsculos (*$\lfloor \pi \rfloor \cdot 10^{36}$ *divisões),* ■

2 Propriedades dos Limites, Limites Laterais, Limites de Determinadas Funções, Funções Contínuas e Suas Propriedades

2.1 Continuidade e Limite

2.1.1 Exercício 1

Parte 1 - Classifique como verdadeira ou falsa a seguinte afirmação e demonstre ou dê um contra-exemplo. "Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função, então

$$\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)."$$

Solução:. *Considere a seguinte função:*

$$f(x) = \begin{cases} x, & se\ x \neq 1 \\ 9, & se\ x = 1. \end{cases}$$

Seja $\epsilon > 0$ qualquer e analisemos a seguinte inequação para $|x| \neq 1$:

$$|f(x) - 1| = |x - 1|.$$

Com isso, tome $\delta = \epsilon$ e suponha que $0 < |x - 1| < \delta$, tal que x nunca será igual a 1. Com isso, segue que

$$|f(x) - 1| = |x - 1| < \delta = \epsilon \Rightarrow |f(x) - 1| < \epsilon.$$

Logo, $\lim_{x \to 1} f(x) = 1$, mas f(1) = 9, mostrando que a afirmação é falsa. ∎

Parte 2 - É possível, dada uma função $f : \mathbb{R} - \{\pi\} \to \mathbb{R}$, não definida no ponto $x = \pi$, calcular

$$\lim_{x \to \pi} f(x)?$$

Dê um exemplo e justifique.

Solução:. *Ao definir um limite no ponto p, utilizamos o fato de p ser, por hipótese, ponto de acumulação do domínio da função. Consequentemente, p não necessariamente precisa estar nesse domínio para que possamos calcular o limite de f nele. Esse é o caso mais geral do que foi pedido no exercício, então, para exemplificar, tome $f : \mathbb{R} - \{\pi\} \to \mathbb{R}$ como:*

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) & se\ x < \pi \\ \sin(-x) & se\ \pi < x \end{cases}$$

Note que a função está definida em $\mathbb{R} - \{\pi\}$. Com isso, seja $\epsilon > 0$ qualquer. Vamos calcular o limite por meio dos limites laterais, mostrando que eles são iguais quando x tende a π. Começando pelo limite lateral à esquerda, note que

$$|f(x) - 0| = |\sin(x) - 0| = |\sin(x) - 0| = |\sin(x)| < \epsilon.$$

O ϵ ali pode ser visto como um meio para encontrarmos o δ, já que é o que precisamos fazer. Deixando isso de lado, manipularemos o módulo como segue:

$$|\sin(x)| < \epsilon \Rightarrow -\epsilon < \sin(x) < \epsilon \Rightarrow \sin^{-1}(-\epsilon) < x < \sin^{-1}(\epsilon).$$

Subtraindo π dos dois lados, obtemos

$$\sin^{-1}(-\epsilon) - \pi < x - \pi < \sin^{-1}(\epsilon) - \pi.$$

Foquemos no lado à esquerda primeiro, tal que, definindo $\delta_1 = \sin^{-1}(\epsilon) + \pi$, vale que, quando $-\delta_1 < x - \pi < 0$,

$$-\delta_1 = -\sin^{-1}(\epsilon) - \pi = \sin^{-1}(-\epsilon) - \pi < x - \pi.$$

Pelo raciocínio acima, isso implica que

$$|f(x) - 0| < \epsilon,$$

ou seja,

$$\lim_{x \to \pi^-} f(x) = 0.$$

Por outro lado, quanto ao limite lateral à direita (isto é, $x > \pi$), observando a desigualdade obtida para o mesmo lado e definindo $\delta_2 = \sin^{-1}(\epsilon) - \pi$, se $0 < x - \pi < \delta_2$, temos:

$$x - \pi < \delta_2 = \sin^{-1}(\epsilon) - \pi,$$

donde segue que $|f(x) - 0| = |\sin(-x)| = |\sin(x)| < \epsilon$. Logo,

$$\lim_{x \to \pi^+} f(x) = 0.$$

Portanto, como os dois limites são iguais, segue que $\lim_{x \to \pi} f(x) = 0$, o que ilustre que é possível calcular o limite em um ponto fora do domínio da função. ■

Parte 3 - Escreva formalmente o que significa uma função ser contínua em um ponto de seu domínio.

Solução:. *A ideia por trás da continuidade é a falta de quebras no gráfico da função (em termo popular: pode ser desenhada sem tirar o lápis do papel). A deifnição matemática por trás dele procura preservar essa noção através da ideia de que, não importa quão próximos sejam dois pontos, sempre é possível fazer o gráfico da função neles igualmente próximos, ou seja, dados dois pontos da função, o erro da aproximação tende a zero quando calcula-se ela nesses dois pontos.*

Rigorosamente falando, essas ideias são formuladas no jargão $\epsilon - \delta$, enunciado a seguir: Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dita contínua no ponto $p \in D_f$ dado que, para cada $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que se $|x - p| < \delta$ (note a diferença entre essa definição e a de limite: Aqui, o ponto p em si faz parte da conta, então não é preciso que $0 < |x - p|$), vale

$$|f(x) - f(p)| < \epsilon.$$

■

Parte 4 - Aplique a definição $\epsilon - \delta$ de continuidade para garantir que f(x) = x - 2 é continua em p = 5. Repita o processo para p = 7 e, depois, para um $p \in D_f$ qualquer.

Prova:. *Em provas por $\epsilon - \delta$, o que significa "Para todo $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que se $0 < |x - p| < \delta$, então $|f(x) - f(p)| < \epsilon$? Ou melhor, por onde começar? Pelo começo, claro, então definamos nossa função f como sendo $f : D_f \to \mathbb{R}, f(x) = ax + b$*

Ao fazer essas demonstrações, nós começamos com um ϵ qualquer, isto é, escrito formalmente:

"Seja** $\epsilon > 0$.**"

Agora, como temos um ϵ, vamos considerar a desigualdade e ver o que obtemos a partir disso:

"Considere a desigualdade** $|f(x) - f(p)| = |(ax + b) - (ap - b)| = |a(x - p)| = |a||x - p| < \epsilon$.**"

A partir disso, normalmente temos que chegar em $|x - p|$, já que é isso que determina o δ. De fato, apesar de estar omitido, δ pode ser visto como uma função de ϵ, no sentido $\delta := \delta(\epsilon)$. No caso desse exemplo, chegamos em $|f(x) - f(p)| = |a||x - p| < \epsilon \Rightarrow |x - p| < \frac{\epsilon}{|a|}$, ou seja, nosso δ será $\frac{\epsilon}{|a|}$. Ao continuar com a escrita, obtém-se

" Tome** $\delta = \frac{\epsilon}{|a|}$. **Ent ao, se** $0 < |x - a| < \delta$**, temos

$$|f(x) - f(p)| = |a||x - p| < |a|\delta = |a|\frac{\epsilon}{|a|},$$

ou seja,** $|f(x) - f(p)| < \epsilon$, **provando que** $\lim x \to af(x) = f(p)$**, o que significa que f é contínua em p qualquer. "

Juntando isso tudo, temos a demonstração:

Seja $\epsilon > 0$ qualquer e f(x) = ax + b, em que $a, b \in \mathbb{R}$. Considere a desigualdade

$$|f(x) - f(p)| = |(ax + b) - (ap - b)| = |a(x - p)| = |a||x - p| < \epsilon.$$

Como já temos $|x-p|$, podemos tomar $\delta = \frac{\epsilon}{|a|}$. Desta forma, vamos conferir a definição: Suponha que $0 < |x-p| < \delta$. Então,

$$|f(x)-f(p)| = |a||x-p| < |a|\delta = |a|\frac{\epsilon}{|a|} = \epsilon.$$

Assim, para todo $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que se $0 < |x-p| < \delta$, então

$$|f(x)-f(p)| < \epsilon.$$

Em outras palavras, f é contínua em p. Assim, tomando a = 1 e b = -2, todos os casos são provados, pois mostramos que o geral 'e contínuo, concluindo o exercício. ■

2.2 DesContinuidade

2.2.1 Exercício 2

Identifique na função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{se } x < 1, \\ x+5, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

quais são os pontos de D_f, em torno do ponto p = 1 para $\epsilon = 1$ que causam descontinuidade na função ("Caem fora do intervalo aberto $(f(1)-1, f(1)+1)$"). Esta função é contínua em p = 1? Justifique.

Solução:. *Analisando a função acima no ponto 1, observa-se que ela tem valor f(1) = 6. Com isso, o intervalo desejado é equivalente a:*

$$(f(1)-1, f(1)+1) = (6-1, 6+1) = (5, 7).$$

Pelo jeito que a f foi definida, todos os pontos em $\mathfrak{D} := \{x \in D_f : x < 1\} \subset D_f$ caem fora desse intervalo, pois $f(x) = 2 \notin (5,7)$ para todo $x \in \mathfrak{D}$. Em outras palavras, os pontos de D_f que satisfazem o que foi pedido são aqueles que pertencem a $\mathfrak{D} = (-\infty, 1) \cap D_f$.

Dito isto, verifiquemos a continuidade da f em p = 1. Para mostrar que uma função não é contínua em um ponto, é precisa tomar a negação da definição de continuidade. Em outras palavras:

"Uma função f não é contínua no ponto p se existe um $\epsilon > 0$, tal que, para todo $\delta > 0$, se $0 < |x-p| < \delta$, vale $|f(x)-f(p)| \geq \epsilon$."

Tentaremos aplicar isso nesse item do exercício. Note que, para f ser contínua neste ponto, é preciso que, dado $\epsilon > 0$, ocorra:

$$-\epsilon < f(x) - 6 < \epsilon \Rightarrow -\epsilon + 6 < f(x) < \epsilon + 6.$$

Vamos olhar os casos da definição. Suponha, primeiramente, que $x \geq 1$. Nesta hipótese, segue que

$$-\epsilon + 6 < f(x) < \epsilon + 6. \Leftrightarrow -\epsilon + 6 < x + 5 < \epsilon + 6 \Rightarrow -\epsilon < x - 1 < \epsilon,$$

ou seja, podemos tomar $\delta = \epsilon$ neste caso e está tudo bem. Por outro lado, assuma que $x < 1$, tal que

$$-\epsilon + 6 < 2 < \epsilon + 6.$$

Note que, para $\epsilon = \frac{1}{2}$, se existisse um $\delta > 0$ tal que

$$|x-1| < \delta \Rightarrow |f(x)-2| < \epsilon = \frac{1}{2},$$

ocorreria uma contradição:

$$\frac{11}{2} < 2 < \frac{13}{2}.$$

De fato, tomando qualquer $0 < \epsilon \leq 4$, é possível chegar numa contradição similar, pois se existisse δ satisfazendo a condição, então teríamos

$$-\epsilon + 6 \leq 2 < 2 < \epsilon + 6.$$

Portanto, conclui-se que f não é contínua no ponto p = 1. ■

2.2.2 Exercício 3

Parte 1 - Mostre que uma função afim é contínua em qualquer ponto do seu domínio e que f(x) = -5x + 2 é contínua em qualquer ponto do seu domínio.

Prova:. *Seja $\epsilon > 0$ qualquer e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com f(x) = ax + b a função afim, em que $a, b \in \mathbb{R}$. Considere a desigualdade*

$$|f(x) - f(p)| = |(ax + b) - (ap - b)| = |a(x - p)| = |a||x - p| < \epsilon.$$

Como já temos $|x - p|$, podemos tomar $\delta = \frac{\epsilon}{|a|}$. Desta forma, vamos conferir a definição: Suponha que $0 < |x - p| < \delta$. Então,

$$|f(x) - f(p)| = |a||x - p| < |a|\delta = |a|\frac{\epsilon}{|a|} = \epsilon.$$

Assim, para todo $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que se $0 < |x - p| < \delta$, então

$$|f(x) - f(p)| < \epsilon.$$

Em outras palavras, f é contínua em p. Como p é um p qualquer, é válido para todos os pontos do domínio. Assim, tomando a = -5 e b = +2, f(x) = -5x + 2 é contínua em todos os pontos do domínio pois o caso geral também é.

■

Parte 2 - Mostre que as funções $f(x) = x^3$ é contínua em p = 1 e que $f(x) = x^4$ é contínua em p = 2. O ϵ é qualquer? Isso é um problema, uma vez que continuidade é uma análise local?

Solução:. *Comecemos pelo caso de $f(x) = x^3$. Seja $\epsilon > 0$ qualquer e considere a desigualdade*

$$-\epsilon < x^3 - 1^3 < \epsilon \Leftrightarrow -\epsilon < x^3 - 1 < \epsilon.$$

Note que, como visto anteriormente, $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$, tal que

$$|x^3 - 1| = |x - 1||x^2 + x + 1| \leq |x - 1|(|x^2| + |x| + 1).$$

Seja $\delta \leq 1$. Se $|x - 1| < \delta$, então $|x| = |x - 1 + 1| \leq |x - 1| + 1 < 1 + 1 = 2$. Assim, temos

$$|x^3 - 1| = |x - 1||x^2 + x + 1| \leq |x - 1|(|x^2| + |x| + 1) < |x - 1|(|4| + |2| + 1) = 7|x - 1|.$$

Em outras palavras, se definirmos $\delta = \min 1, \frac{\epsilon}{7}$, segue o seguinte:

*Dado $\epsilon > 0$, suponha que $\delta = \min 1, \frac{\epsilon}{7}$. Então, se $|x - 1| < \delta$, obtemos, **para qualquer** $\epsilon > 0$,*

$$|f(x) - f(1)| = |x^3 - 1| < 7|x - 1| < 7\delta \leq \epsilon \Rightarrow |f(x) - f(1)| < \epsilon.$$

Portanto, $f(x) = x^3$ é contínua em p = 1.

2.3 Limites: Mais prático

2.3.1 Exercício 4

Parte 1 - Explicite o domínio da função e exiba o passo a passo da fatoração polinomial da função

$$f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 + 4x + 3}.$$

Solução:. *Comecemos pelo domínio. Note que*

$$x^2 + 4x + 3 = 0 \iff x \in \{-1, -3\},$$

tal que o domínio de f é $D_f = \mathbb{R}/\{-1, -3\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq -1 \text{ e } x \neq -3\}$. Como o polinômio possui duas raízes, fica mais simples de fatorá-lo neste caso:

$$x^2 + 4x + 3 = (x + 1)(x + 3),$$

resta fatorar o numerador. Note que, no caso dele, -1 é uma raíz, já que $-1^3+1=-1+1=0$, *então vamos buscar fatorar (x + 1) dele. Com efeito, começamos dividindo o primeiro termo por x para reduzir seu grau a 1, multiplicar (x + 1) por x e subtrair do polinômio inicial:*

$$\frac{x^2}{x}=x \Rightarrow x^2+4x+3-x(x+1)=x^2+4x+3-x^2-x=3x+3.$$

Repetiremos isso, agora para remover o x:

$$\frac{3x}{x}=3 \Rightarrow 3x+3-3(x+1)=3x-3x+3-3=0.$$

Somamos os dois números usados para dividir, isto é, x e 3 - este passo é preciso para obter o polinômio h(x) que aparece em $(x-a)h(x)$, *neste caso sendo h(x) = x + 3 - e obtemos a fatoração:*

$$x^2+4x+3=(x+1)(x+3).$$

Agora, simplifiquemos a fração:

$$f(x)=\frac{x^3+1}{x^2+4x+3}=\frac{(x+1)(x+3)}{(x+1)(x+3)}=1.$$

Logo, após fatorar a fração, chegamos na forma fatorada de f(x)=1. ■

Parte 2 - Considere a mesma f do exercício anterior. A função g, definida tal que ela é igual a f em todos os pontos diferentes de menos 1, explicitamente

$$g(x)=\frac{x^2-x+1}{x+3}$$

é uma função igual a f ou uma simplificação de f?

Solução:. *Ela é uma simplificação de f, visto que*

$$g(x)\frac{x+1}{x+1}=\frac{x^2-x+1}{x+3}\frac{x+1}{x+1}=\frac{x^3-x^2+x+x^2-x-1}{(x+1)(x+3)}=\frac{x^3-1}{x^2+4x+3}=f(x).$$

■

Parte 3 - Qual é a técnica que pode ser aplicada quando numerador e denominador têm uma raíz em comum para calcular o limite de funções racionais em pontos onde elas não estão definidas? Por que ela funciona?

Solução:. *Quando ambos têm uma raíz comum, ela pode ser fatorada do polinômio, isto é, se q(x) for um polinômio com ra'iz a, ele pode ser escrito como o produto a diferença da variável e da raíz por outro polinômio:*

$$q(x)=(x-a)h(x), a\in\mathbb{R}.$$

Com base nisso, se o numerador e o denominador têm uma raíz comum, segue que a fração pode ser escrita como:

$$f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{(x-a)h_1(x)}{(x-a)(h_2(x))}=\frac{h_1(x)}{h_2(x)}.$$

Desta forma, pode-se reescrever a fração até que os pontos em que o denominador se torna problemático (q(x) = 0) sejam removidos. Por conta disso, calcular o limite se torna uma aplicação simples das propriedades vistas anteriormente, pois não haverá mais o problema do denominador que se anula. ■

2.3.2 Exercício 5

Parte 1 - Crie exemplos de cálculos de limite em que sejam aplicadas as técnicas da divisão, soma e produto de limites.

__Solução:.__ *Vamos analisar cada caso separadamente. Começando pela soma, considere a função* $f_1(x) = ax$ *e a função* $f_2(x) = b$*, para as quais, dado um* $p \in D_{f_1} \cap D_{f_2}, \lim_{x\to p} f_1(x) = ap$ *e* $\lim_{x\to p} f_2(x) = b$*. Nessas condições, utilizando a propriedade da soma de limites, é possível encontrar o limite da função afim* $ax + b$ *quando* x *tende a* p*:*

$$\lim_{x\to p} ax + b = \lim_{x\to p} ax + \lim_{x\to p} b = ap + b.$$

Um exemplo clássico de aplicação de produto é com as funções utiliza $f(x) = g(x) = x$ *e* $p \in D_f \cap D_g$*. Como* $\lim_{x\to p} f(x) = \lim_{x\to p} g(x) = p$*, segue que*

$$\lim_{x\to p} x^2 = \lim_{x\to p} x \lim_{x\to p} x = \lim_{x\to p} f(x) \lim_{x\to p} g(x) = p \cdot p = p^2$$

Por fim, quanto à divisão, sejam $f(x) = x^2 - 9$ *e* $g(x) = x+3$*. Então,* $\lim_{x\to p} f(x) = p^2 - 9, \lim_{x\to p} g(x) = p + 3$ *tal que*

$$\lim_{x\to p} x - 3 = \lim_{x\to p} \frac{(x-3)(x+3)}{x+3} = \lim_{x\to p} \frac{x^2-9}{x+3} = \lim_{x\to p} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{p^2-9}{p+3} = p - 3.$$

■

Parte 2 - Explicite o domínio das funções racionais abaixo:

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}, \quad g(x) = \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x - 1}, \quad h(x) = \frac{x^3 - x^2 - 21x + 45}{x^2 - 6x + 9}.$$

__Solução:.__ *Para definir o domínio de cada função racional, é preciso analisar os pontos em que o denominador "dá problema", basicamente, os pontos em que seria igual a dividir por zero, o que corresponde às raízes dos polinômios do denominador. Neste prisma, vamos analisar cada item acima e, com isso, definir o domínio:*

$$x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$
$$x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$
$$x^2 - 6x + 9 \Leftrightarrow x = 3$$

Obtendo essas raízes, é possível definir o domínio das funções tomando o conjunto dos reais menos esses números. Assim, chegamos em:

$$D_f = \mathbb{R}/\{2\}, D_g = \mathbb{R}/\{1\}, D_h = \mathbb{R}/\{3\},$$

Concluindo a busca pelos domínios das funções. ■

Parte 3 - Calcule cada um dos limites, deixando claro o passo a passo utilizado:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x - 1}, \quad \lim_{x\to 3} \frac{x^3 - x^2 - 21x + 45}{x^2 - 6x + 9}.$$

__Solução:.__ *A priori, utilizaremos o resultado de que, dada uma função racional com 0 em* $x = p$ *tanto no numerador quanto no denominador, podemos fatorar (x - p) de ambos e simplificar a fração. Observando o denominador da primeira função, é possível perceber que, de fato, 1 é um 0 dele, pois 1 - 1 = 0. Analogamente, 1 é um zero do numerador, pois* $1^3 + 1^2 - 1 - 1 = 2 - 2 = 0$*. Fatoremos do numerador o termo (x - 1):*

$$\frac{(x^3 + x^2 - x - 1)}{x - 1} = x^2 + 2x + 1.$$

Deste modo, chegamos em:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1} x^2 + 2x + 1 = 1 + 2 + 1 = 4.$$

Vejamos o outro limite agora. O primeiro passo é conferir se o ponto no qual o limite está sendo tomado é uma raíz. Com efeito:

$$3^3 - 3^2 - 21 \cdot 3 + 45 = 27 - 9 - 63 + 45 = 72 - 72 = 0$$

e

$$3^2 - 6 \cdot 3 + 9 = 9 + 9 - 18 = 0.$$

Com isso, conseguimos fatorar (x - 3) dos polinômios, de forma a obter

$$\frac{x^3 - x^2 - 21x + 45}{x - 3} = x^2 + 2x - 15$$

e

$$\frac{x^2 - 6x + 9}{x - 3} = (x - 3)^2$$

Mas, note que $3^2 + 2 \cdot 3 - 15 = 15 - 15 = 0$, *tal que podemos fatorar novamente x - 3:*

$$\frac{x^2 + 2x - 15}{x - 3} = x + 5$$

Desta forma, obtemos, juntando as três fatorações:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^3 - x^2 - 21x + 45}{x^2 - 6x + 9} = \lim_{x\to 3} \frac{(x - 3)^2(x + 5)}{(x - 3)^2} = \lim_{x\to 3} x + 5 = 8.$$

■

2.4 Pré Limites Infinitos

Antes de começar os exercícios, é útil adicionar uma nota sobre como calcular limites infinitos ou no infinito. Na definição, há diferentes formas de manipular os $\epsilon's - \delta's$, de modo que há em torno de quatro definições diferentes. No entanto, há uma forma mais simples de lembrar como definir cada coisa e, para isso, comecemos com a hipótese de que "Para cada $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$".

Com isso em mente, o que determina o sinal de cada infinito que aparece? A resposta pode ser quebrada em quatro casos - $f(x) > \epsilon, f(x) < -\epsilon, x > \delta, x < -\delta$. Desta forma, para lembrar qual tipo de infinito será, pode-se pensar que o sinal do ϵ na desigualdade determina o sinal do limite infinito, ou seja, se a igualdade for do tipo $\lim f(x) = +\infty$, o sinal do ϵ será positivo ($f(x) > \epsilon$) e negativo se $\lim f(x) = -\infty$ ($f(x) < -\epsilon$).

Analogamente, o sinal do δ na desigualdade determina o sinal do limite no infinito, isto é, se o limite for da forma

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = p,$$

então a desigualdade do delta terá a forma $x > \delta$. Similarmente, se tiver a forma

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = p,$$

a desigualdade assumirá o tipo $x < -\delta$.

2.5 Limites Infinitos

2.5.1 Exercício 6

Parte 1 - Utilizando limites já conhecidos e propriedades dos limites, ou via a definição, mostre que:

$$\text{a) } \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty, \quad \text{b) } \lim_{x \to +\infty} -x^2 = -\infty$$

Solução:. *a) Precisamos mostrar que, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $-\delta < x < 0$, então*

$$\frac{1}{x} < -\epsilon.$$

Escrevendo a desigualdade do ϵ em outras palavras, $x > -\frac{1}{\epsilon}$, de forma que pondo $\delta = \frac{1}{\epsilon}$, segue o seguinte: Se $-\delta < x < 0$,

$$-\delta = -\frac{1}{\epsilon} < x \Rightarrow \frac{1}{x} < -\epsilon,$$

de maneira que

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

b) Agora, precisamos mostrar que, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ para o qual $x > \delta$ implica em

$$-x^2 < -\epsilon.$$

Com efeito, analisando a desigualdade acima, chegamos em sua forma equivalente:

$$x^2 > \epsilon \Rightarrow x > \sqrt{\epsilon} > 0.$$

Desta forma, colocando $\delta = \sqrt{\epsilon}$, segue o seguinte: Se $x > \delta$, então:

$$-x^2 < -\delta^2 = -(\sqrt{\epsilon})^2 = -\epsilon.$$

Portanto,

$$\lim_{x \to +\infty} -x^2 = -\infty.$$

■

Parte 2 - Identifique cada igualdade abaixo como verdadeira ou falsa. Quando verdadeira, justifique e, quando falsa, explique ou mostre qual o valor real do limite.

a) $\lim_{x\to 2} \frac{1}{|x-2|} = +\infty$

b) $\lim_{x\to 5^-} \frac{2}{x-5} = +\infty$

c) $\lim_{x\to 5^+} \frac{2}{x-5} = +\infty$

d) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2-5x+3} = +\infty$

e) $\lim_{x\to \infty} \frac{2x^3-2}{x-5} = 0$

Solução:. *a) O limite é verdadeiro. De fato, considere $\epsilon > 0$ qualquer. Segue que*

$$\frac{1}{|x-2|} > \epsilon \Rightarrow |x-2| < \frac{1}{\epsilon}$$

Assim, definindo $\delta = \frac{1}{\epsilon}$, obtemos: Se $0 < |x-2| < \delta$, então:

$$\frac{1}{|x-2|} > \frac{1}{\delta} = \epsilon,$$

mostrando que

$$\lim_{x\to 2} \frac{1}{|x-2|} = +\infty$$

b)O limite é falso. De fato, segue que $\lim_{x\to 5^-} \frac{2}{x-5} = 2\lim_{x\to 5^-} \frac{1}{x-5}$. Demonstremos que $\lim_{x\to 5^-} \frac{1}{x-5} = -\infty$: Dado $\epsilon > 0$, precisamos encontrar $\delta > 0$ tal que se $-\delta < x-5 < 0$, então

$$\frac{1}{x-5} < -\epsilon.$$

Com efeito, seja $\delta = \frac{1}{\epsilon}$. Assim, se $-\delta < x-5 < 0$, temos

$$\frac{1}{x-5} < -\frac{1}{\delta} = -\epsilon.$$

Logo,

$$2\lim_{x\to 5^-} \frac{1}{x-5} = -\infty.$$

c) O limite é verdadeiro. Realmente, pois dado $\epsilon > 0$, considere a desigualdade

$$\frac{1}{x-5} > \epsilon \Rightarrow x-5 < \frac{1}{\epsilon}.$$

Assim, tomando $\delta = \frac{1}{\epsilon}$, segue que se $0 < x-5 < \delta$,

$$\frac{1}{x-5} > \frac{1}{\delta} = \epsilon,$$

tal que

$$\lim_{x\to 5^+} \frac{2}{x-5} = 2\lim_{x\to 5^-} \frac{1}{x-5} = +\infty$$

d)O limite é falso, pois, conforme x tende a zero, o termo x^2-5x se torna 0. Deste modo, a fração e, consequentemente, o limite, ficam:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2-5x+3} = \frac{1}{3}.$$

e)O limite é falso. Com efeito, conforme visto na aula do dia 08 de Maio de 2022, é possível encontrar o limite no inifinito de polinômios da seguinte forma: Dados polinômios $p_n(x), p_m(x)$ com graus n e m respectivamente, então

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{p_n(x)}{p_m(x)} = \begin{cases} +\infty, & n \geq m \\ 0, & n < m \\ \frac{p_0}{q_0}, & n = m. \end{cases}$$

Com isso, como $2x^3$, o termo líder do polinômio do numerador, tem grau maior que o termo líder do denominador, x, obtemos

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3 - 2}{x - 5} = +\infty.$$

■

2.6 Limites no Infinito

2.6.1 Exercício 7

Parte 1 - Utilizando o método de estimar o valor do limite testando números diferentes na conta, mostre que:

a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x+5} = 0,$ b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{5x} = 0,$ c) $\lim_{x\to+\infty} 3 = 3.$

Solução:. *a) tome $x_1 = 9999999995$ e $x_2 = 5$, tal que $x_1 > x_2$. Comparemos os valores de $f(x_1), f(x_2)$:*

$$\frac{1}{9999999995 + 5} = \frac{1}{10^10} < \frac{1}{10} = \frac{1}{5+5}.$$

Assim, quanto maior o valor de x, menor será f(x), tal que 0 é o candidato a limite nessa situação. Mostremos que ele é realmente o valor esperado, isto é, seja $\epsilon > 0$. Então,

$$\frac{1}{|x+5|} < \epsilon \Rightarrow |x+5| > \frac{1}{\epsilon}.$$

Tome $\delta = \frac{1}{\epsilon}$. Deste modo, se $x > \delta$, $x > 0$, tal que $|x+5| = x+5 > x > \delta$, obtemos:

$$\frac{1}{|x+5|} < \frac{1}{\delta} = \epsilon.$$

Logo,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x+5} = 0.$$

b)Tome $x_1 = 2 \cdot 10^{1203478}$ e $x_2 = 20$. Novamente, vamos comparar $f(x_1), f(x_2)$:

$$\frac{1}{5x_1} = \frac{1}{5 \cdot 2 \cdot 10^{1203478}} = \frac{1}{10^{1203479}} < \frac{1}{10^2}.$$

Novamente, isso faz com que 0 seja um palpite para o valor do limite. Com efeito, tome $\epsilon > 0$. Temos:

$$\frac{1}{5x} < \epsilon \Rightarrow x > \frac{5}{\epsilon}.$$

Desta forma, seja $\delta = \frac{5}{\epsilon}$. Então, se $x > \delta$, segue que

$$\frac{1}{5x} < 5\frac{1}{\delta} = 5\frac{\epsilon}{5} = \epsilon.$$

Destarte,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{5x} = 0.$$

c)Considere agora $x_1 = 5$ e $x_2 = 9$. Então, $f(x_1) = f(x_2) = 3$. Como a função é constante,

$$\lim_{x\to+\infty} 3 = 3.$$

■

Parte 2 - Através das propriedades dos limites, justifique:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^5} = 0,$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0, \quad n \in \mathbb{N}/\{0\}$

Prova:. *Sabemos do vídeo e das aulas que*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

A partir disso, sabe-se também que $\lim_{x\to p} f(x)g(x) = \lim_{x\to p} f(x) \lim_{x\to p} g(x)$, *tal que: a)*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \cdots 0 = 0.$$

b)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \cdots \underbrace{\cdots}_{n \text{ vezes}} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \underbrace{\cdots}_{n \text{ vezes}} 0$$

para qualquer n natural diferente de 0. ■

Parte 3 - Utilizando a técnica de pôr em evidência, calcule os limites abaixo:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3 - 3x + 2}{3x^3 + 1},$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^5 + 3x^2 - x + 7}{-5x^2 + 2x - 9}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5x^4 - 2x + 8}{x^5 + 2x^2 + 79},$ d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3 + 1}{x^7 + 2}.$

Solução:. *Vamos fatorar o termo líder do numerador e denominador de cada item e calcular os limites a)Como tanto no denominador quanto no numerador o termo líder é* x^3, *é ele que vamos fatorar:*

$$\frac{x^3 - 3x + 2}{3x^3 + 1} = \frac{x^3(1 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3})}{x^3(3 + \frac{1}{x^3})} = \frac{1 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}}{3 + \frac{1}{x^3}},$$

de maneira que chegamos em um terço ao tomar o limite porque todos os outros termos, que possuem x no denominador, irão a zero:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}}{3 + \frac{1}{x^3}} = \frac{1}{3}.$$

b)O termo líder no numerador é x^5, *enquanto que no denominador é* x^2. *Com isso, vamos à fatoração:*

$$\frac{2x^5 + 3x^2 - x + 7}{-5x^2 + 2x - 9} = \frac{x^5(2 + \frac{3}{x^3} - \frac{1}{x^4} + \frac{7}{x^5})}{x^2(-5 + \frac{2}{x} - \frac{9}{x^2})} = x^3 \frac{2 + \frac{3}{x^3} - \frac{1}{x^4} + \frac{7}{x^5}}{-5 + \frac{2}{x} - \frac{9}{x^2}}.$$

Assim como antes, os termos que possuem alguma fração de $\frac{1}{x^n}$ *se tornam 0 quando x tende a infinito. No entanto, note a existência de* x^3 *desta vez - Esse simples termo faz com que o limite seja alterado. Realmente, chegamos em:*

$$\lim_{x\to+\infty} x^3 \frac{2 + \frac{3}{x^3} - \frac{1}{x^4} + \frac{7}{x^5}}{-5 + \frac{2}{x} - \frac{9}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} x^3 \frac{2}{-5} = -1 \lim_{x\to+\infty} x^3 \frac{2}{5} = -\infty.$$

c)Desta vez, o termo líder do numerador é x^4 *e o do denominador é* x^5, *de forma que fatoramos:*

$$\frac{5x^4 - 2x + 8}{x^5 + 2x^2 + 79} = \frac{x^4(5 - \frac{2}{x^3} + \frac{8}{x^4})}{x^5(1 + \frac{2}{x^3} + \frac{79}{x^5})} = \frac{1}{x} \frac{5 - \frac{2}{x^3} + \frac{8}{x^4}}{1 + \frac{2}{x^3} + \frac{79}{x^5}}$$

. Deste modo, como no exemplo b), todos os termos com $\frac{1}{x^n}$ *se tornam 0, mas o fato de ter um* $\frac{1}{x}$ *multiplicando tudo, um termo que também tende a 0, faz com que o limite seja:*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{5x^4 - 2x + 8}{x^5 + 2x^2 + 79} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \frac{5 - \frac{2}{x^3} + \frac{8}{x^4}}{1 + \frac{2}{x^3} + \frac{79}{x^5}} = 0.$$

.

d)Por fim, o termo dominante no numerador é x^3, mas no denominador é x^7. Fatorando,

$$\frac{x^3+1}{x^7+2} = \frac{x^3(1+\frac{1}{x^3})}{x^7(1+\frac{2}{x^7})} = \frac{1}{x^4}\frac{1+\frac{1}{x^3}}{1+\frac{2}{x^7}}.$$

Assim, como há uma fração de x quando o limite for tomado, o resultado será zero, pois será 0 multiplicando outro número. Explicitamente:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+1}{x^7+2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^4}\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x^3}}{1+\frac{2}{x^7}} = 0\frac{1}{1} = 0.$$

■

2.7 Diferenças de Infinito

2.7.1 Exercício 8

Calcule, explicitando o passo-a-passo, os limites a seguir:

a) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+5}-\sqrt{x}$ *b)* $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^4+3}.$

Solução:. *a) O princípio por trás da resolução de limites dessa forma é mover a raíz para um denominador sem subtração, para que seja possível obter um limite igualando a 0. Com base nisso e com a igualdade $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$, multipliquemos a expressão dada por:*

$$(\sqrt{x+5}-\sqrt{x})\underbrace{\left(\frac{\sqrt{x+5}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x}}\right)}_{=1} = \frac{x+5-x}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x}} = \frac{5}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x}}.$$

Assim, ao calcular o limite, chegamos em:

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+5}-\sqrt{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{5}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x}} = 0.$$

b)O processo neste caso é análogo ao utilizado no item a, isto é, vamos multiplicar tudo para mudar as raízes do numerador para denominador:

$$(\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^4+3})\underbrace{\left(\frac{\sqrt{x^3+1}+\sqrt{x^4+3}}{\sqrt{x^3+1}+\sqrt{x^4+3}}\right)}_{=1} = \frac{x^3+1-x^4-3}{\sqrt{x^3+1}+\sqrt{x^4+3}} = \frac{x^3-x^4-2}{\sqrt{x^3+1}+\sqrt{x^4+3}} =$$

$$= \frac{x^4(\frac{1}{x}-1-\frac{2}{x^4})}{\sqrt{x^3+1}+\sqrt{x^4+3}}.$$

Aplicando a estratégia do termo líder de denominador versus numerador e como x^4 é maior que o x^2 do denominador, chegamos em:

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^4+3} = \lim_{x\to+\infty}x^4\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}-1-\frac{2}{x^4}}{\sqrt{x^3+1}+\sqrt{x^4+3}} = -\infty.$$

■

3 Reta Tangente, Derivada, Derivada de Algumas funções, Regra da Cadeia

3.1 Derivadas de Ordem Superior

3.1.1 Exercício 1.

Nosso objetivo é obter fórmulas gerais para a n-ésima derivada de $\cos(x)$ e $\frac{1}{x}$. Para isso, vamos levar em conta o processo realizado com relação ao seno. A natureza cíclica de ambas as funções sinaliza a ligação entre as derivadas. Com efeito,

$$\frac{d\cos(x)}{dx} = -\sin(x)$$
$$\frac{d^2\cos(x)}{dx^2} = -\frac{d}{dx}\sin(x) = -\cos(x)$$
$$\frac{d^3\cos(x)}{dx^3}\cos(x) = -\frac{d^2}{dx^2}\sin(x) = -\frac{d}{dx}\cos(x) = \sin(x)$$
$$\frac{d^4\cos(x)}{dx^4}\cos(x) = -\frac{d^3}{dx^3}\sin(x) = -\frac{d^2}{dx^2}\cos(x) = \frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x)$$

Com base nisso, é possível concluir que as derivadas de cosseno também formam um ciclo e, portanto, podemos escrever uma forma geral como:

$$\frac{d^n\cos(x)}{dx^n} = \begin{cases} \cos(x), & x \equiv 0 \text{ mod} 4 \\ -\sin(x), & x \equiv 1 \text{ mod} 4 \\ -\cos(x), & x \equiv 2 \text{ mod} 4 \\ \sin(x), & x \equiv 3 \text{ mod} 4 \end{cases}$$

4 Teorema do Valor Médio e Suas Consequências, Derivadas de Ordem Superior

5 Antiderivada, Integral, TFC, Métodos, Integrais Imprópriasss