UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS E COMPUTACIONAIS - ICMC

CONSTRUINDO OS REAIS $\mathbb{R}$

UMA INTRODUÇÃO AOS CORTES DE DEDEKIND

Renan Wenzel - 11169472

Pedro Magalhães Rios - prios@icmc.usp.br

22 de abril de 2022

1 Breve Introdução

O uso dos cortes de Dedekind tem como preceito a construção dos números reais a partir dos racionais, e se baseia em subconjuntos específicos que satisfazem o axioma do supremo. A forma que isso resulta nos números reais segue de um teorema (que assumiremos ser verdade aqui) que diz que o conjunto dos reais é o único corpo ordenado que satisfaz o axioma do Supremos, ou seja, mostrando que os cortes satisfazem ele, seu conjunto deve ser R também.

Sem mais delongas, vx'amos defini-los a seguir e provar algumas propriedades antes de prosseguir com a construção dos reais em seguida.

2 Definição e Resultados básicos

Definição 1 (Cortes)**.** *Um corte é um conjunto $\alpha \subset \mathbb{Q}$ tal que:*

i) $\alpha \neq \emptyset$ *e* $\alpha \neq \mathbb{Q}$;

ii) Se $p \in \alpha, q \in \mathbb{Q}$ *e* $q < p$ *, então* $q \in \alpha$;

iii) Se $p \in \alpha$*, então existe* $r \in \alpha$ *tal que* $p < r$.

Vale adicionar alguns comentários para esclarecer e entender essa definição. Em primeiro lugar, garantimos que um corte não será vazio e nem o conjunto todo, até porque iremos de alguma forma construir os reais a partir disso, então um corte não pode totalizar os racionais. A segunda propriedade garante que todo elemento racoinal à esquerda de um corte também pertencerá a ele. Por fim, a última propriedade afirma que um corte não possui um elemento maximal, visto que, dado qualquer número pertencente ao corte, é possível encontrar um maior que ele.

Antes de provarmos que há um axioma do supremo, é necessário definir uma relação de ordem entre os cortes. Utilizaremos como base as relações de pertinências entre conjuntos.

Definição 2. *Uma relação de ordem $<$ entre cortes é dada por:* $\alpha < \beta \Rightarrow \alpha \subsetneq \beta$

Verifiquemos, por fim, que essa relação é realmente uma ordem:

Prova:. *No que segue, sejam α, β, γ cortes de Dedekind*

a) Transitividade: Suponha que $\alpha < \beta, \beta < \gamma$. Explicitamente falando, isso significa que $\alpha \subsetneq \beta, \beta \subsetneq \gamma$. A partir disto, segue das propriedades de pertinência de conjuntos que:

$$\alpha \subsetneq \beta \subsetneq \gamma \Rightarrow \alpha \subsetneq \gamma.$$

Logo, por definição, $\alpha < \gamma$.

b)Tricotomia: Em primeiro lugar, suponha que $\alpha < \beta$. Então, $\alpha \subsetneq \beta$, ou seja, α está exclusivamente contido em β, do que segue que β não pode estar exclusivamente contido em α, isto é, $\beta \not< \alpha$. A prova de que se $\beta < \alpha$, então $\alpha \not< \beta$ é análoga. Por fim, caso $\alpha = \beta$, então $\alpha \subseteq \beta$ e $\beta \subseteq \alpha$, tal que a contenção não é restrita em nenhum dos casos. Destarte, apenas a igualdade pode ocorrer.

Portanto, $<$ define uma ordem entre os cortes. ■

3 O Axioma do Supremo

Nesta seção, provareos que o conjunto dos cortes munido da ordem definida satisfaz o axioma do supremo.

Referências

[1] Rudin, w.: "Principles of Mathematical Analysis", 3rd ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1976