UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS E COMPUTACIONAIS - ICMC

ANOTAÇÕES E RESUMOS DE ÁLGEBRA LINEAR

Renan Wenzel - 11169472

10 de outubro de 2022

Conteúdo

1 Introdução

A álgebra linear se preocupa em generalizar alguns conceitos fundamentais da matemática. Durante o ensino médio e no primeiro semestre, o estudante aprendeu sobre a estrutura dos números inteiros, reais, racionais e, talvez, sobre os complexos. Agora, vamos ver o que tem de mais profundo por trás deles, estudando, por exemplo, questões da dimensão, de operações e dos objetos que sofrem delas.

Na segunda parte do curso, o estudante costuma aprender sobre funcionais e transformações lineares, que relacionam dois espaços vetoriais (ou um corpo) e satisfazem algumas condições. Um exemplo já visto de uma transformação linear é a derivada, que serve de motivação para uma construção futura chamada Espaço Tangente.

Saber manipular e trabalhar com esses conceitos é essencial na carreira de matemático, porque muitos conceitos futuros tomam como base o que será visto aqui, em todas as áreas da matemática e, para isso, espero que essas notas sirvam como um guia para quem necessita de uma luz nesse curso.

2 Espaços Vetoriais

Para falar sobre espaços vetoriais, é preciso antes falar sobre corpos, pois espaços vetoriais são definidos com base nessas estruturas, que serão "onde os vetores irão morar". Para exemplificar, um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ terá como vetores números reais, e um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ terá como vetores números complexos. O que faremos a seguir é definir mais precisamente cada um destes conceitos, desde corpos a vetores.

2.1 Corpos e Espaços Vetoriais

Definição. *Diremos que um conjunto $\mathbb{K}$ é um corpo se ele satisfaz as seguintes propriedades:*

A1) $x + y = y + x, \forall x, y \in \mathbb{K}$

A2) $(x + y) + z = x + (y + z), \forall x, y, z \in \mathbb{K}$

A3) Existe um elemento 0 tal que $x + 0 = 0 + x = x, \forall x \in \mathbb{K}$

A4) Para todo x, existe um elemento -x tal que $x + (-x) = -x + x = 0, \forall x \in \mathbb{K}$.

M1) $x \cdot y = y \cdot x, \forall x, y \in \mathbb{K}$

M2) $(x \cdot y) \cdot z = x(y \cdot z), \forall x, y, z \in \mathbb{K}$

M3) Existe um elemento 1 tal que $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x, \forall x \in \mathbb{K}$

M4) Para todo x, existe um elemento x^{-1} *tal que* $x^{-1} \cdot x = x \cdot x^{-1} = 1, \forall x \in \mathbb{K}$

D1) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$

D2) $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$

Faremos algumas convenções com relação a essa definição. Ao invés de escrevermos x + (-x), $x \cdot y, x^{-1}$, faremos:

$$x - x := x + (-x), \quad x \cdot y := xy, \quad x^{-1} := \frac{1}{x}.$$

Exemplos básicos de corpos são o corpo dos números reais, dos números racoinais e dos números complexos. Um bom exercício para se acostumar com esses conceitos é provar que eles são realmente corpos e mostrar que os números inteiros não formam um corpo.

Agora que temos uma ideia sobre corpos, podemos definir um espaço vetorial:

Definição. *Dizemos que um conjunto V é um espaço vetorial se seus elementos, chamados vetores, satisfazem os axiomas abaixo:*

V1) $u + v = v + u,\ v, u \in V$;

V2) $u + (v + w) = (u + v) + w,\ v, u, w \in V$;

V3) Existe $0 \in V$ *tal que* $v + 0 = v,\ v \in V$;

V4) Para todo $v \in V$*, existe* $-v \in V$ *tal que* $v - v = 0$;

E1) Dado $v \in V, 1v = v$;

E2) Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{K}, (\alpha\beta)v = \alpha(\beta v), v \in V$;

DV1) $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$;

DV2) $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$.

Vamos ver um exemplo de espaço vetorial:

Exemplo: 2.1. *Considere o corpo $\mathbb{R}^2$. Vamos mostrar que $\mathbb{R}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}^2$. Esse tipo de demonstração é, em geral, sempre igual. Tome dois elementos $v, u \in \mathbb{R}$ e dois escalares $\mathbf{k_1}, \mathbf{k_2} \in \mathbb{R}^2$.*

Segue das propriedades dos números reais que existe um elemento neutro da adição, o 0 usual, um inverso aditivo (dado $x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R}$) e as propriedades usuais de soma, isto é, comutatividade e associatividade. Agora, coloque $\mathbf{k_1} = (\alpha_1, \beta_1), \mathbf{k_2} = (\alpha_2, \beta_2)$ e 1 = (1, 0). Com isto, temos:

$$1.x = (1, 0).x = (1.x, 0.x) = (x, 0) = x,$$

$$(\mathbf{k_1}\mathbf{k_2})x = ((\alpha_1\alpha_2, \beta_1\beta_2))(x, 0) = ((\alpha_1\alpha_2)x, \beta_1\beta_2 0) == (\alpha_1(\alpha_2 x), 0) = (\alpha_1, \beta_1)((\alpha_2, \beta_2)(x, 0)) = k_1(k_2 x).$$

Resta mostrar a distributiva. Note que

$$(\mathbf{k_1} + \mathbf{k_2})x = (\alpha_1 + \alpha_2, \beta_1 + \beta_2)x = (\alpha_1 x + \alpha_2 x, 0) = (\alpha_1, \beta_1)x + (\alpha_2, \beta_2)x.$$

e

$$(x + y)\mathbf{k_1} = ((x, 0) + (y, 0))(\alpha_1, \beta_1) = (x + y, 0)(\alpha_1, \beta_1) = (x\alpha_1 + y\alpha_1, 0) = x\mathbf{k_1} + y\mathbf{k_1}.$$

■

Agora que temos uma noção básica de espaços vetoriais, aprofundaremos na teoria.

2.2 Bases

Sabe como todo número real pode ser escrito como 1.x? Vamos buscar uma forma análoga para um espaço vetorial qualquer. Para isso, será introduzido o conceito da combinação linear e independência linear de vetores quaisquer.

Definição. *Dado um espaço vetorial V sobre $\mathbb{K}$, diremos que um conjunto de vetores $\mathcal{B} : v_1, \cdots, v_n$ gera V se qualquer elemento $v \in V$ puder ser escrito como:*

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i,$$

com $\alpha_i \in \mathbb{K}$ para cada i. Dado um conjunto $\mathcal{B}$, dizemos que ele é um conjunto gerador de V se todo elemento de V pode ser escrito como combinação linear finita de elementos de $\mathcal{B}$.

Há, porém, um problema com isso. Vamos ilustrar isso no exemplo a seguir:

Exemplo: 2.2 (NB)**.** *Considerando $\mathbb{C}^2$ como um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$, o conjunto $\mathcal{B} : (1, 0), (0, i), (i, 0), (0, 1)$ gera $\mathbb{C}^2$.*

De fato, visto que um elemento $(a, b) = (x + iy, z + iw)$, em que $a, b \in \mathbb{C}, x, y, z, w \in \mathbb{R}$, pode ser escrito como:

$$(a, b) = x(1, 0) + y(i, 0) + z(0, 1) + w(0, i)$$

No entanto, observe que se $(a, b) = (0, 0)$, então

$$(0, 0) = 1(1, 0) + i(i, 0) + 0(0, 1) + 0(0, i).$$

Assim, o elemento $(0, 0)$ pode ser escrito de duas formas diferentes! Sendo a outra:

$$(0, 0) = 0(1, 0) + 0(i, 0) + 0(0, 1) + 0(0, i).$$

Explicitamente, queremos representar **de maneira única** cada elemento de V. É para isso que surge a noção de independência linear e de base, isto é,

Definição. *Dado um espaço vetorial V sobre $\mathbb{K}$, diremos que um conjunto de vetores $\mathcal{B} : v_1, \cdots, v_n$ gera V se:*

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0,$$

com $\alpha_i \in \mathbb{K}$ para cada i. Caso isso não ocorra, ou seja, existe ao menos um $\alpha_i \in \mathbb{K} \neq 0$ para cada i. tal que 0 pode ser escrito como combinação linear que inclua $\alpha_i v_i$, diremos que o conjunto é linearmente dependente.

Definição. *Dado um espaço vetorial V sobre $\mathbb{K}$, diremos que um conjunto de vetores $\mathcal{B} : b_1, b_2, \cdots, b_n$ é uma base de V $\mathcal{B}$ gera V e é linearmente independente.*

Conclui-se que o conjunto apresentado no exemplo 2.2 não é uma base! (por que?). Com base nisso, você consegue encontrar uma base para o espaço vetorial do exemplo? E para o exemplo 2.1?

A seguir, seguem algumas propriedades dos conceitos vistos acima que são úteis para treinar demonstração, então recomendo que vocês tentem:

Proposição:. *a) Seja $\mathcal{B}$ um conjunto gerador de V. Então, todo subconjunto W de V que contém $\mathcal{B}$ é um conjunto gerador de V.*

b) Todo conjunto contendo o vetor nulo é linearmente dependente.

c) Todo subconjunto de um conjunto linearmente independente é linearmente independente.

Seguem abaixo alguns resultados um pouco mais complicados para serem deixados como exercício, junto de uma nova definição.

Definição. *Dizemos que um espaço vetorial V sobre $\mathbb{K}$ é finitamente gerado se possuir um conjunto gerador finito.*

Proposição:. *Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial finitamente gerado não nulo e suponha que $\{v_1, \cdots, v_m\}$ seja um conjunto gerador de V. Então todo conjunto linearmente independente de vetores em V tem no máximo m elementos.*

Prova:. *Vamos mostrar algo equivalente a isso, ou seja, se um conunto tem mais que m elementos, ele é linearmente dependente. Com efeito, considere $\mathcal{A} = \{v_1, \cdots, v_n\} \subset V, n > m$. Como $\{v_1, \cdots, v_m\}$ gera V, associamos para cada índice $u_j, j = 1, \cdots, n$ uma combinação linear da forma:*

$$u_j = \alpha_{1j}v_1 + \cdots + \alpha_{mj}v_m = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij}v_i.$$

Agora, vamos supor que o conjunto dos $u_j's$ gera 0, ou seja,

$$0 = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j u_j.$$

Reescrevendo cada u_j, temos

$$0 = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j u_j = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \underbrace{\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij}v_i}_{\substack{\text{essa soma vem da,} \\ \text{expansão dos } u_j, \\ \text{sei que pode parecer intimidador,} \\ \text{mas juro que não morde!.}}}$$

$$= \underbrace{\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}}_{\substack{\text{reorganizei a soma} \\ \text{pra ficar mais limpo visualmente}}} \lambda_j \alpha_{ij} v_i \overbrace{=}^{\text{inverte a ordem}} \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \alpha_{ij}\right) v_i$$

Agora que temos essa soma, pense em cada termo de $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \alpha_{ij}$ como um escalar (a soma de escalares é um escalar) e suponha que $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \alpha_{ij} = 0$ para analisarmos o tipo de dependência desse termo. Para cada $i = 1, 2, \cdots, m$, temos uma equação do tipo

$$\lambda_1 \alpha_{i1} + \lambda_2 \alpha_{i2} + \cdots + \lambda_n \alpha_{in} = 0,$$

o que sugere um sistema linear para cada valor de i na incógnita λ_j*:*

$$\begin{cases} \lambda_1\alpha_{11} + \lambda_2\alpha_{12} + \cdots + \lambda_n\alpha_{1n} = 0, \\ \lambda_1\alpha_{21} + \lambda_2\alpha_{22} + \cdots + \lambda_n\alpha_{2n} = 0, \\ \vdots \\ \lambda_1\alpha_{m1} + \lambda_2\alpha_{m2} + \cdots + \lambda_n\alpha_{mn} = 0, \end{cases}$$

Agora, como n é maior que m, há mais incógnitas que equações! Em outras palavras, o sistema possui ao menos uma solução não nula, ou seja, existem $\gamma_1, \cdots, \gamma_n \in \mathbb{K}$ *tais que nem todos são nulos e*

$$\sum_{j=1}^{n} \gamma_i \alpha_{ij} = 0.$$

Disto segue que existem $\gamma_i's$ *nem todos nulos tais que*

$$0 = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} \gamma_j \alpha_{ij} \right) v_i = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \lambda_j \alpha_{ij} v_i =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \lambda_j u_j.$$

Portanto, $\{u_1, \cdots, u_n\}$ *é linearmente dependente, consequentemente* $\mathcal{A}$ *é também.*

Corolário:. *Seja V um* $\mathbb{K}$*-espaço vetorial finitamente gerado não nulo. Então, duas bases quaisquer de V têm o mesmo número de elementos.*

Em vista disso, podemos definir o tamanho de um espaço vetorial unicamente de acordo com o número de elementos da base, o que chamamos de dimensão:

Definição. *Seja V um* $\mathbb{K}$*-espaço vetorial. Se V admite uma base finita, chamamos de dimensão de V o número de elementos da base. Em outras palavras, se a base tem n elementos, então*

$$\dim_{\mathbb{K}} V = n.$$

Caso não exista base finita, dizemos que V possui dimensão infinita.

Alguns resultados que eu não vou provar por um tempo seguem:

Proposição:. *Seja V um* $\mathbb{K}$*-espaço vetorial. Se V possui dimensão* $dim_{\mathbb{K}} V = n \geq 1$ *e seja* $\mathcal{B}$ *um subconjunto de V com n elementos. As seguintes afirmações são equivalentes:*

a) $\mathcal{B}$ *é uma base.*

b) $\mathcal{B}$ *é linearmente independente.*

c) $\mathcal{B}$ *é um conjunto gerador.*

Proposição:. *Seja V um* $\mathbb{K}$*-espaço vetorial e considere* $\mathcal{B} = \{v_1, \cdots, v_m\}$ *um conjunto linearmente independente em V. Se existir* $v \in V$ *que não seja combinação linear dos elementos de* $\mathcal{B}$*, então* $\{v_1, \cdots, v_m, v\}$ *é linearmente independente. (Isso permite o método de completamento de base!).*

Teorema:. *Todo espaço vetorial finitamente gerado não nulo possui uma base.*

Proposição:. *Seja V um* $\mathbb{K}$*-espaço vetorial de dimensão* $n \geq 1$ *e seja* $\mathcal{B} \subseteq V$*. As seguintes afirmações são equivalentes:*

a) $\mathcal{B}$ *é uma base de V.*

b) Cada elemento de V se escreve unicamente como combinação linear de elementos de $\mathcal{B}$*.*

Como consequeência dessa última proposição, podemos introduzir a nocção de coordenada. Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão $n \geq 1$ e seja $\mathcal{B} = \{v_1, \cdots, v_n\}$ uma base. Vamos fixar a ordem dos elementos de $\mathcal{B}$, formando o que chamamos de base ordenada de V, e agora aplicamos a proposição acima.

Dado $v \in V$, existem únicos $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tais que $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$. Por conta dessa unicidade, é comum determinarmos v puramente pelos coeficientes, e escrevemos

$$[v] = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)_{\mathcal{B}}$$

e dizemos que $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ são as coordenadas de v com relação à base $\mathcal{B}$.

2.3 Subespaços Vetoriais e Somas de Espaços

Tal como um conjunto possui um subconjunto, sob quais condições um espaço vetorial possui outro espaço vetorial "dentro de si"? Esta noção, conhecida como subespaço vetorial, inclui conceitos como $\mathbb{R}^2$ ser basicamente "duas retas $\mathbb{R}$", sobre todo número racional ser também um número real e sobre todo número real ser um número complexo.

Com base nessa motivação, damos continuidade para formalizar esses conceitos.

Definição. *Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e W um subconjunto* ***do conjunto V****. Diremos que W é um subespaço vetorial de V se:*

SS1) $0 \in W$

SS2) Se $w_1, w_2 \in W$*, então* $w_1 + w_2 \in W$

SS3) Dados $w_1 \in W, k \in \mathbb{K}$*, então* $kw_1 \in W$.

Vamos checar que W com essas condições é realmente um espaço vetorial:

Sejam $w_1, w_2, w_3 \in W$ e $k_1, k_2 \in \mathbb{K}$. Como $0 \in W$, segue da propriedade 2.3 que $w_1 + 0 = w_1 \in W$, satisfazendo a propriedade 2.1 de espaço vetorial. Além disso, sendo em particular $w_1, w_2, w_3 \in V$ (pois $W \subseteq V$), eles satisfazem 2.1, 2.1 e 2.1. Juntando isso com a propriedade 2.3, segue que $w_1 + w_2 = w_2 + w_1, w_1 + (w_2 + w_3) = (w_1 + w_2) + w_3$ e existe $-w_1 \in W$ tal que $w_1 - w_1 = 0$ e todas essas operações estão em W por conta de 2.3.

Agora, vamos verificar as operações com escalares. Como 1 é um escalar, segue da propriedade 2.1 que $1w_1 = w_1$ e, por conta de 2.3, $1.w_1 \in W$. Além disso, de 2.1 e 2.3. é válido em W que $(k_1 k_2)w_1 = k_1(k_2 w_1) \in W$. Logo, W satisfaz as operações dos escalares.

Por fim, a checagem da distributiva é como feito acima, usando as operações de V como espaço vetorial e 2.3, 2.3.

Portanto, W é um espaço vetorial dentro de V! Um exercício bom para treinar a ideia é tentar provar que $\mathbb{Q}$ é subespaço de $\mathbb{R}$.

Se tivermos dois espaços vetoriais V_1, V_2, uma construção importante é a soma deles como espaços. Assim, obtemos um espaço $V_1 + V_2$ sobre $\mathbb{K}$ cujos elementos são da forma $v_1 + v_2, v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$. (Fica de exercício conferir provar que é de fato um espaço vetorial). Um tipo específico de soma de espaços importante é aquele em que cada elemento pode ser escrito de maneira única como soma de elementos de cada um, formando o que se chama Soma Direta:

Definição. *Dados dois espaços vetoriais V_1, V_2 tais que $V_1 \cap V_2 = \{0\}$, escrevemos*

$$V_1 \oplus V_2$$

para denotar a soma desses espaços, e chamamos ela de Soma Direta.

Exemplo: 2.3. *Considere a reta real $\mathbb{R}$ e o conjunto dos números imaginários $\mathbb{I}$. Note que o único número que é tanto um real quanto um imaginário é o 0, pois $0.i = 0$. Em outras palavras, $\mathbb{R} \cap \mathbb{I} = \{0\}$.*

Agora, é possível definir um espaço vetorial que seja a soma direta de ambos e que cada elemento terá a forma $a + b, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{I}$. No entanto, como $b \in \mathbb{I}, b = ix, x \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1}$. Logo, temos um elemento da forma

$a + ix \in \mathbb{R} \oplus \mathbb{I}$. *Isso te lembra alguma coisa? Caso não, note que esse númer obtido é um número complexo, ou seja, a soma direta de* $\mathbb{R}$ *com* $\mathbb{I}$ *é:*

$$\mathbb{R} \oplus \mathbb{I} := \mathbb{C}.$$

Observação: *o conjunto dos imaginários* $\mathbb{I}$ *é o dos números que possuem a forma* $\mathbb{I} = \{ix : x \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1}\}$.

Proposição:. *Sejam* V *um espaço vetorial e* W_1, W_2 *dois subespaços vetoriais de* V*, ambos de dimensão finita. Então,*

$$\dim_{\mathbb{K}}(W_1 + W_2) = \dim_{\mathbb{K}} W_1 + \dim_{\mathbb{K}} W_2 + \dim_{\mathbb{K}}(W_1 \cap W_2).$$

Prova:. *Essa demonstração serve como um grande exemplo de manipulação de bases, isto é, completamento e remoção de elementos da base. Vamos supor, a priori, que a intersecção dos dois espaços é não-trivial, ou seja,* $W_1 \cap W_2 \neq \{0\}$ *e seja* $\mathcal{B} = \{w_1, \cdots, w_n\}$ *uma base de* $W_1 \cap W_2$*. Como* $W_1 \cap W_2$ *é subespaço tanto de* W_1 *quanto de* W_2*, é possível estender a base até ambos.*

Considere $\mathcal{B}' = \{w_1, \ldots, w_n, v_1, \cdots, v_r\}, \mathcal{B}`` = \{w_1, \cdots, w_n, u_1, \cdots, u_s\}$ *bases de* W_1 *e de* W_2 *respectivamente. A construção dessas duas bases tem como base "aumentar o tamanho de* $\mathcal{B}$ *adicionando novos elementos". O objetivo disso é mostrar que o conjunto* $\mathcal{C} = \{w_1, \cdots, w_n, v_1, \cdots, v_r, u_1, \cdots, u_s\}$ *é uma base de* $W_1 + W_2$.

Há muitos índices aqui, então recapitulando: começamos com uma base com n *elementos da interseção* $W_1 \cap W_2$*, representando a dimensão de* $W_1 \cap W_2$*,* $\dim_{\mathbb{K}}(W_1 \cap W_2) = n$*. A partir disso, adicionamos novos* r *elementos, representando a dimensão de* W_1*,* $\dim_{\mathbb{K}}(w_1) = n + r$ *e outros* s *elementos, representado a dimensão de* W_2*,* $\dim_{\mathbb{K}}(W_2) = n + s$*. O resultado que queremos provar se resume a encontrar uma base de* $W_1 + W_2$ *que possua*

$$\dim_{\mathbb{K}}(W_1) + \dim_{\mathbb{K}}(W_2) - \dim_{\mathbb{K}}(W_1 \cap W_2) = n + r + n + s - n = n + r + s$$

elementos, e por isso o nosso objetivo é aquele!

Dando continuidade, começamos mostrando que $\mathcal{C}$ *gera* $W_1 + W_2$*. Seja* $v \in W_1 + W_2$*, ou seja,* $v = w_1 + w_2, w_1 \in W_1, w_2 \in W_2$*. Usando as bases de cada respectivo espaço e da interseção, temos*

$$w_1 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i w_i + \sum_{j=1}^{r} \gamma_j v_j$$

e

$$w_2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i + \sum_{l=1}^{s} \beta_l u_l.$$

Assim, v *pode ser escrito como*

$$\begin{aligned} v = w_1 + w_2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i w_i + \sum_{j=1}^{r} \gamma_j v_j + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i + \sum_{l=1}^{s} \beta_l u_l = \\ = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i w_i + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i \right) + \sum_{j=1}^{r} \gamma_j v_j + \sum_{l=1}^{s} \beta_l u_l \\ = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i + \alpha_i) w_i + \sum_{j=1}^{r} \gamma_j v_j + \sum_{l=1}^{s} \beta_l u_l. \end{aligned}$$

Portanto, como a soma $\lambda_i + \alpha_i$ *é também um escalar,* v *é combinação linear de elementos de* $\mathcal{C}$ *e, por termos escolhido* v *sendo qualquer,* $\mathcal{C}$ *gera* $W_1 + W_2$.

O próximo e último passo é mostrar que $\mathcal{C}$ *é linearmente independente. Considere a soma*

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i + \sum_{j=1}^{r} \gamma_j v_j + \sum_{l=1}^{s} \beta_l u_l = 0, \tag{2.3}$$

em que $\alpha_i, \beta_j, \gamma_l \in \mathbb{K}$. *Assim, reescrevendo a equação, obtemos:*

$$\sum_{l=1}^{s} \beta_l u_l = \sum_{i=1}^{n} (-\alpha_i) w_i + \sum_{j=1}^{r} (-\gamma_j) v_j, \in W_1 \cap W_2$$

sendo, ao mesmo tempo, combinação linear de elementos de $\mathcal{B}'$ *e de elementos de* $\mathcal{B}$". *Logo, existem* $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ *tais que*

$$\sum_{l=1}^{s} \beta_l u_l = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i,$$

isto é,

$$\sum_{l=1}^{s} \beta_l u_l + \sum_{i=1}^{n} (-\lambda_i) u_i = 0.$$

Como $\{u_1, \cdots, u_s, w_1, \cdots, w_n\}$ *é linearmente independente, temos* $\beta_l = 0$ *para todo* $l = 1, \cdots, s$ *e* $\lambda_i = 0$, *para todo* $i = 1, \cdots, n$. *Em particular, a equação 2.3 se reduz a*

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i + \sum_{j=1}^{r} \gamma_j v_j = 0.$$

Sendo $\{w_1, \cdots, w_n, v_1, \cdots, v_r\}$ *é linearmente independente, teremos* $\alpha_i = 0$ *para todo* $i = 1, \cdots, n$ *e* $\gamma_j = 0$ *para todo* $j = 1, \cdots, r$. *Portanto,* $\{w_1, \cdots, w_n, v_1, \cdots, v_r, u_1, \cdots, u_s\}$ *é linearmente independente e uma base de* $W_1 + W_2$.

No caso em que $W_1 \cap W_2 = \{0\}$, *sejam* $\mathcal{B}_\infty, \mathcal{B}_\in$ *bases respectivas de* W_1, W_2. *Por um processo análogo ao que foi feito, mostra-se que* $\mathcal{B}_\infty \cup \mathcal{B}_\in$ *é uma base de* $W_1 + W_2$. *Portanto, a demonstração está completa.*

Finalizamos esta parte com duas proposições de exercícios, já que é uma aplicação do que foi visto até agora:

Proposição:. *Sejam* V *um* $\mathbb{K}$*-espaço vetorial e* W_1, W_2 *dois subespaços de* V. *Então,* $V = W_1 \oplus W_2$ *se e só se cada elemento* $v \in V$ *se escreve de maneira única como uma soma* $x_1 + x_2$, *com* $x_1 \in W_1, x_2 \in W_2$.

Proposição:. *Sejam* V *um* $\mathbb{K}$*-espaço vetorial finitamente gerado não nulo e* W_1 *um subespaço de* V. *Então, existe um subespaço* W_2 *de* V *tal que* $V = W_1 \oplus W_2$.

3 Transformações Lineares

Quando tratamos de conjuntos, qual é a forma usual de relacionar dois conjuntos A e B? Neste ponto, já sabemos que a resposta para isso são as funções - "Mapas" que relacionam um elemento de A a um elemento de B. Mas, às vezes, não basta apenas relacioná-los de forma qualquer, no caso, buscamos propriedades bonitas para as funções, e disso surgem os conceitos de injetividade, sobrejetividade e bijeções.

Queremos fazer a mesma coisa com espaços vetoriais, mas prestando atenção em um detalhe extra: Precisamos preservar a estrutura de espaço. Em outras palavras, que condições queremos na função $T : U \to V$ entre os espaços U e V que respeite a estrutura deles, e é para isso que surge a ideia de Transformação Linear.

3.1 Definições

Definição. *Dados dois $\mathbb{K}-$espaços U e V, uma função $T : U \to V$ é uma transformação (ou aplicação) linear se*

TL1) $T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2), \quad \forall u_1, u_2 \in U$

TL2) $T(\lambda u) = \lambda T(u), \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, u \in U.$

Em particular, $T(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i T(u_i)$.

Exemplo: 3.1 (Inj)**.** *Seja $U \leq V$ um subespaço de V e considere a aplicação de inclusão $i : U \hookrightarrow V$ dada por i(u) = u, $u \in U$. Tome $u, u' \in U$ e $k \in \mathbb{K}$. Temos:*

$$i(u + u') = u + u' = i(u) + i(u')$$

e

$$i(ku) = ku = ki(u).$$

Portanto, i é uma aplicação linear. Não apenas isso, observe que, se $u \neq u'$, então

$$i(u) = u \neq u' = i(u'),$$

em outras palavras, i é injetora! ■

Definição. *Sejam U, V dois $\mathbb{K}$-espaços vetoriais e $T : U \to V$ uma transformação linear. Diremos que:*

i) T é monomorfismo se T for injetora;

ii) T é epimorfismo se T for sobrejetora;

iii) T é isomorfismo se T for bijetora.

Proposição:. *Suponha que U, V, W são $\mathbb{K}$-espaços vetoriais e que $T : U \to V$, $S : V \to W$ são transformações lineares. Então, $S \circ T : U \to W$ é uma transformação linear.*

Prova:. *Primeiramente, sejam $u_1, u_2, u \in U$ vetores e $k \in \mathbb{K}$ um escalar. Vamos provar as propriedades de transformação linear de $S \circ T$, começando pela soma. Por S e T serem transformações lineares, temos:*

$$S \circ T(u_1 + u_2) = S(T(u_1 + u_2)) = S(T(u_1) + T(u_2)) = S(T(u_1)) + S(T(u_2)) = S \circ T(u_1) + S \circ T(u_2).$$

Resta provar a propriedade de "passar o escalar pra fora"e, novamente, utilizando o fato de S e T serem transformações lineares, obtemos o seguinte:

$$S \circ T(ku) = S(T(ku)) = S(kT(u)) = kS(T(u)) = k(S \circ T)(u).$$

Portanto, $S \circ T$ é uma transformação linear. ■

Denotamos o espaço de todas as transformações lineares entre dois espaços U e V por $Lin_{\mathbb{K}}(U,V)$. Em outras palavras, o conjunto é dado por

$$Lin_{\mathbb{K}}(U,V) := \{T : U \to V : T \text{ é transformação linear.}\}.$$

Para transformar isso em um espaço propriamente dito, vamos definir as operações nele:

- $(T_1 + T_2)u := T_1 u + T_2 u$
- $(kT)u := kTu.$

O elemento neutro aqui é a transformação $0 : u \mapsto 0$ (0(u) = 0 para todo $u \in U$), basta verificar que (T+0)u = Tu para todo u de U.

Uma coisa importante que acontece é com relação às bases de um espaço vetorial sob uma transformação linear - elas são preservadas. Especificamente,

Proposição:. *Sejam U e V* $\mathbb{K}-$*espaços vetoriais e considere bases* $b_1, \cdots, b_n$ *de U e* $v_1, \cdots, v_n$ *de V. Então, existe uma aplicação linear* $A : U \to V$ *única e que satisfaz* $Ab_j = v_j$ *para todo* $j = 1, \cdots, n$.

Prova:. *Sabe-se que todo elemento* $u \in U$ *satisfaz a igualdade*

$$u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i, \lambda_i \in \mathbb{K}.$$

A partir disso, aplicando-se A, obtemos

$$Au = A\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i A b_i, \lambda_i \in \mathbb{K}\right).$$

Com isso, vamos definir a aplicação desejada por $Au := \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$. *Assim, segue que* $Ab_i = v_i$ *e segue a unicidade, pois temos:*

$$0 = Au - Au = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i A b_i - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (Ab_i - v_i).$$

Resta checarmos que essa A é de fato uma transformação linear. Para isso, tome outro elemento $u' = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i' b_i$. *Vamos primeiro calcular A em u e, em seguida, em u', para assim compararmos a soma dos dois elementos. Com efeito,*

$$Au = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \quad Au' = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i' v_i$$

de maneira que

$$A(u + u') = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i + \lambda_i') v_i = \sum_{i} \lambda_i v_i + \sum_{i}^{n} \lambda_i' v_i = Au + Au'.$$

Assim, resta provar apenas que A comuta com escalares. Nesta linha de raciocínio, dado um escalar $k \in \mathbb{K}$, *percebemos que*

$$A(ku) = \sum_{i=1}^{n} k \lambda_i v_i = k \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = kAu.$$

Portanto, A é uma aplicação linear única que satisfaz a propriedade desejada. ■

Corolário:. *Se duas aplicações lineares coincidem em uma base linear, elas são iguais.*

Prova:. *Sejam* A_1, A_2 *duas aplicações lineares coincidindo em uma base linear. Em outras palavras, dado um elemento da base* $b \in \mathcal{B}$, *vale que* $A_1 b = A_2 b$. *Assim, dado um elemento u de V, sabemos que*

$$u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i,$$

em que $\lambda_i \mathbb{K}$ são escalares e $b_i \in \mathcal{B}$. Agora, nessas condições,

$$A_1 u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_1 b_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_2 b_i = A_2 u.$$

Portanto, as duas aplicações coincidem em todos os elementos, ou seja, são iguais. ■

Definição. *Seja $A : U \to V$ uma aplicação entre $\mathbb{K}$-espaços vetoriais. Chamamos $A^{-1}0 = \{u \in U : Au = 0\}$ de núcleo (ou kernel) de A.*

Uma pergunta que surge é - já que aplicações lineares preservam as operações dos espaços vetoriais, será que elas preservam outras estruturas, como os subespaços? A resposta, afinal, é sim!

Proposição:. *Seja $A : U \to V$ uma aplicação entre $\mathbb{K}-$espaços vetoriais e sejam $U' \leq U'$ e $V' \leq V$ subespaços. Então, a imagem AU' e a imagem inversa $A^{-1}V'$ são subespaços, $AU' \leq V$ e $A^{-1}V' \leq U$. Em particular, o núcleo de A é um subespaço de U.*

Prova:. *Nas hipóteses da proposição, tome dois elementos $v_1, v_2 \in AU'$ e $k \in \mathbb{K}$. Primeiramente, note que 0 = 0.Au = A(u.0) = A0, ou seja, $0 \in AU'$. Além disso,*

$$v_1 + v_2 = Au_1 + Au_2 = A(u_1 + u_2)$$

e, como U' é um subespaço, $u_1 + u_2 \in U'$. Assim, $v_1 + v_2 \in AU'$. Além disso,

$$kv_1 = kAu_1 = A(ku_1)$$

novamente, como U' é um subespaço, $ku_1 \in U'$ e $kv_1 \in AU'$, mostrando que é um subespaço. Para $A^{-1}V'$, o processo é análogo. Para o núcleo, é claro que $0 \in A0$, mas agora considere $w_1, w_2 \in A0$. Então,

$$A(w_1 + w_2) = A(w_1) + A(w_2) = 0 + 0 = 0,$$

tal que $w_1 + w_2 \in A0$. Ademais, fornecido um escalar $k \in \mathbb{K}$,

$$A(kw_1) = kAw_1 = k0 = 0,$$

que também partence a A0. Portanto, A0 é um subespaço vetorial. ■

Uma vantajem de definirmos o núcleo de uma aplicação linear é que ele nos fornece um critério para a aplicação ser injetora:

Proposição:. *Seja $A : U \to V$ uma aplicação entre $\mathbb{K}-$espaços vetoriais. Então, A é um monomorfismo se, e só se, o núcleo de A é nulo.*

Prova:. *Por um lado, suponha que A é um monomorfismo (injetora). Então, dado $u \in U$, $Au =$ 0 implica que u = 0, isto é, $A0 = \{0\}$, provando o que queríamos.*

Por outro lado, suponha que o núcleo de A é nulo. Suponha que $u_1, u_2 \in U$ são tais que $Au_1 = Au_2$, de forma que

$$0 = Au_1 - Au_2 = A(u_1 - u_2).$$

Em outras palavras, $u_1 - u_2 \in A0$. Como o núcleo é nulo, $u_1 - u_2 = 0$. Portanto, $u_1 = u_2$, e A é injetora.

Proposição:. *Seja $A : U \to V$ uma aplicação entre $\mathbb{K}$-espaços vetoriais com U finitamente gerado e seja W um subespaço complementar ao núcleo $N := A^{-1}0$ de A, isto é, $U = N \oplus W$. Então, $A|W : W \to AU$ é um isomorfismo.*

Prova:. *Considere um elemento $u \in U$ e seu respectivo $Au \in AU$. Tome também um representante $v \in N$. Nessas condições, observe que u pode ser escrito como u = w + v, para algum w de W, de modo que*

$$Au = A(w + v) = Aw + Av = Aw + 0 = Aw.$$

Em outras palavras, $A|_W : W \to AU$ é sobrejetora, pois todo elemento de AU pode ser escrito como um esta aplicação agindo em um elemento de w. Além disso, considere o núcleo $N|_W := \{w \in W : Aw = 0\}$. Então, se $w \in N|_W$, temos Aw = 0, ou seja, w ∈ N. Como $U = N \oplus W, N \cap W = \{0\}$ e, como $w \in N \cap W, w = 0$. Logo, $N|_W = \{0\}$, donde segue que $A|_W$ é injetora. Portanto, $A|_W$ é um isomorfismo. ■

Com este resultado em mãos, obtivemos uma caracterização importante: A imagem da Aplicação agindo sobre um espaço vetorial U independe dos elementos do núcleo, podendo ser vista como o resultado da ação dela a uma restrição de seu domínio. Outra consequência imediata de $U = N \oplus W$ é que $\dim_{\mathbb{K}} A^{-1}0 + \dim_{\mathbb{K}} AU = \dim_{\mathbb{K}}$.

Definição. *A dimensão da imagem de A é chamada posto de A, e será denotada por* $rkA := \dim_{\mathbb{K}} AU$*.*

3.2 Aplicações Lineares e Matrizes

O próximo passo na jornada das aplicações lineares é uma ligação essencial entre elas e as matrizes. Como será visto, toda matriz pode ser vista como uma aplicação linear e vice-versa. Essa relação é, de fato, muito mais intrínseca do que aparenta ser, não dependendo nem mesmo da base do espaço (por isso, diz -se que é uma tradução "natural" entre os dois conceitos). Vamos ver como construir isso.

Sejam U e V $\mathbb{K}$-espaços vetoriais, seja $\beta : b_1, b_2, \cdots, b_n$ uma base linear de U e seja $\gamma : c_1, c_2, \cdots, c_m$ uma base linear de V. Tomemos uma aplicação linear qualquer $A : U \to V$. Então, para todo $j = 1, 2, \cdots, n$, vale que $Ab_j = \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}c_i$ para únicos $a_{ij} \in \mathbb{K}$. Essa identificação é responsável por dar para cada elemento b_j da base β uma imagem escrita em termos da base γ com coordenada $(a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{mj})$. Associamos à aplicação linear A a $(m \times n)$-matriz $[A]_\gamma^\beta := [a_{ij}]$ (leia da seguinte forma: A representa a transfomação dos elementos da base β à sua respectiva combinação linear em γ.) com coeficientes em $\mathbb{K}$. Com este processo, associamos a cada transformação linear uma matriz correspondente; agora, faremos a recíproca disso.

Considere $[a_{ij}]$ uma $(m \times n)$-matriz qualquer com coeficientes em $\mathbb{K}$. Vimos que existe uma única aplicação linear $A : U \to V$ tal que $Ab_j = \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}c_i$ para todo $j = 1, 2, \cdots, n$. Com isso, quando bases são dadas em ambos os espaços, temos um dicionário entre as aplicações de $Lin_{\mathbb{K}}(U, V)$ e as $(m \times n)$-matrizes escalares. Para todo $j = 1, \cdots, n$, temos $Ab_j = \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}c_i$ e $A'b_j = \sum\limits_{i=1}^{m} a'_{ij}c_i$, em que $a_{ij}, a'_{ij} \in \mathbb{K}$. Então,

$$(A + A')b_j = Ab_j + A'b_j = \sum_{i=1}^{m}(a_{ij} + a'_{ij})c_i, \quad \& \quad (kA)b_j = kAb_j = \sum_{i=1}^{m}(ka_{ij})c_i.$$

Em outras palavras, $[A]_\gamma^\beta = [a_{ij}], [A']_\gamma^\beta, [A + A']_\gamma^\beta = [a_{ij} + a'_{ij}]$, e $[kA]_\gamma^\beta = k[A]_\gamma^\beta$. Além disso, escrevendo $[u]_\beta = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix}$, então

$$Au = \sum_{j=1}^{n} k_j Ab_j = \sum_{j=1}^{n} k_j \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}c_i \right) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}k_j \right) c_i,$$

de modo que, notando como $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}k_j$ é o i-ésimo coeficiente da coluna da matriz produto $[a_{ij}] \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix}$, então $[Au]_\gamma = [A]_\gamma^\beta [u]_\beta$ para todos $u \in U, A \in Lin_{\mathbb{K}}(U, V)$. Traduzindo isso para um português legível, acabamos de mostrar que a ação de uma transformação linear num elemento qualquer $u \in U$ é descrita pelo produto dos coeficientes dessa transformação com a matriz dos coeficientes de u! Essa questão levanta um inquérito importante - o que acontece com a composição de duas transformações? Se considerarmos agora uma base $\delta : d_1, d_2, \cdots, d_l$ uma base linear de W, chamando a outra matriz de $[B]_\delta^\gamma = [b_{si}]$, são dadas pelas igualdades $Ab_j = \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}c_i$ para todo $j = 1, \cdots, n$ e $Bc_i = \sum\limits_{s=1}^{l} b_{si}d_s$ para todo $i = 1, \cdots, m$, então

$$(B \circ A)b_j = B(Ab_j) = B(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}c_i) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}Bc_i = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \left(\sum_{s=1}^{l} b_{si}d_s \right) = \sum_{s=1}^{l} \left(\sum_{i=1}^{m} b_{si}a_{ij} \right) d_s.$$

Assim, o sj-ésimo coeficiente da matriz $[B \circ A]_\delta^\beta$ é igual a $\sum_{i=1}^{m} b_{si} a_{ij}$. Note que este coeficiente é o mesmo que o produto de duas matrizes, sendo elas $[B \circ A]_\delta^\beta = [B]_\delta^\beta \cdot [A]_\gamma^\beta$. Concluímos disso que a composta de aplicações lineares é o produto das matrizes de cada uma!

Com tudo isso, obtemos um exemplo particularmente importante de matriz, a chamada mudança de base:

Definição. *Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e sejam β, γ duas bases lineares de V. A matriz $M_\gamma^\beta := [1_V]_\gamma^\beta$ é chamada matriz de mudança de base β para γ.*

3.3 Funcionais Lineares e Espaço Dual

Um tipo particular de aplicações lineares são os funcionais lineares, definidos a seguir

Definição. *Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial. Um funcional linear é um mapeamento $f : V \to \mathbb{K}$ que satisfaz, para $u, v \in V, k \in \mathbb{K}$, as seguintes propriedades*

$$f[u+v] = f[u] + f[v] f[ku] = kf[u].$$

Essencialmente, a diferença entre funcionais lineares e aplicações lineares é que, quando falando de aplicações lineares, damos entrada de vetores para receber outros vetores no outro espaço, e no caso dos funcionais, damos entrada de vetores para a função e obtemos escalares na imagem. Em particular, o conjunto dos funcionais lineares de um espaço vetorial V forma um espaço sobre $\mathbb{K}$, o chamado espaço dual V^*.

Exemplo: 3.2. *Considere $V = \mathbb{K}^n$. Podemos exibir um funcional linear*

$$f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K},$$

$f(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, \alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{K}$. Há um outro funcional $\pi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ nesse espaço dado por $\pi(x_1, \cdots, x_n) = x_i$, a chamada i-ésima projeção de $\mathbb{K}^n$ em $\mathbb{K}$. ■

Um exemplo particularmente interessante já é um velho amigo conhecido do cálculo diferencial e integral

Exemplo: 3.3. *Considere o espaço das funções contínuas de um intervalo $[a, b]$ em $\mathbb{C}, \mathcal{C}([a, b], \mathbb{C})$. Definimos um funcional linear $I : \mathcal{C}([a, b], \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ dado por*

$$I(x) = \int_a^b x(t) dt.$$

Em geral, note que integrais e derivadas podem ser vistas como aplicações lineares devido às suas propriedades de soma e multiplicação por escalar, enquanto a integral definida é um funcional, pois ela devolve um valor numérico como resultado.

Nosso próximo passo é construir uma base para o espaço dual tendo como referência a base do espaço vetorial. Seja $\beta : b_1, b_2, \cdots, b_n$ uma base de V. Para todo $j = 1, 2, \cdots, n$, podemos encontrar um único funcional linear $b_j^* : V \to \mathbb{K}$ dado por $b_j^* b_j = 1, b_j^* b_i = 0$ para $i \neq j$. Com isso, $\beta^* : b_1^*, b_2^*, \cdots, b_n^*$ forma uma base para V^*, chamada base dual. A independência linear não é complicada de ser mostrada, então vamos mostrar que esse candidato a base gera o espaço. Com efeito, seja $f \in V^*$. Temos

$$\left(\sum_{j=1}^{n} f b_j b_j^* \right) = \sum_{j=1}^{n} (f b_j)(b_j^* b_i) = f b_i (\text{ todas as outras parcelas são } 0).$$

Logo, todo funcional pode ser escrito como uma combinação linear de elementos de β^* de maneira única, tornando β^* uma base. Em suma, construímos manualmente uma base para o espaço dual V^* usando a base de V. Esta nomenclatura, *dual*, se origina do fato de que podemos escrever elementos de um espaço com base nos elementos do outro, num processo formalizado no seguinte Teorema

Teorema:. *Seja V um $\mathbb{K}$-espaço de dimensão finita com base $\beta : b_1, b_2, \cdots, b_n$. Então, existe uma única base $\beta^* : b_1^*, b_2^*, \cdots, b_n^*$ tal que $b_j^* b_i = 0, i \neq j, \& b_j^* b_j = 1$. Além disto, para cada $v \in V$, temos*

$$v = \sum_{i=1}^{n} b_i^*(v) b_i$$

e, para cada $f \in V*$,

$$f = \sum_{i=1}^{n} f(b_i) b_i^*$$

Emerge uma questão - é possível fazer o caminho oposto? Dada uma base de V^*, conseguimos construir um espaço dual a este, resultando em uma base β de V? A resposta disso leva ao surgimento de um espaço chamado bidual, definido a seguir

Definição. *Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial. Chamamos o espaço $(V^*)^*$ de espaço bidual a V e usamos a notação V^{**}.*

Temos uma aplicação natural $I_V : V \to V^{**}$ agindo em $v \in V, f \in V*$ que é dada por $(I_V v)f := f[v] \in \mathbb{K}$, ou seja, entendemos qualquer $v \in V$ como um funcional linear sobre V^*, enviando $f \in V^*$ para $f[v] \in \mathbb{K}$. Vamos conferir que o representante $I_V v$ é linear:

$$(I_V v)(f_1 + f_2) = (f_1 + f_2)[v] = f_1[v] + f_2[v] = (I_V v)(f_1) + (I_V v)(f_2), \quad (I_V v)(kf_1) = (kf_1)[v] = k(I_V v)(f_1)$$

para $f_1, f_2 \in V*, k \in \mathbb{K}, v \in V$. Precisamos agora mostrar que a aplicação I_V é linear. Para isso, tome $v_1, v_2 \in V, f \in V^*, k \in \mathbb{K}$. Assim,

$$(I_V(v_1 + v_2))f = f[v_1 + v_2] = f[v_1] + f[v_2] = (I_V v_1)f + (I_V v_2)f, \quad (I_V(kv_1))f = f[kv_1] = kf[v_1] = k(I_V v_1)f.$$

Portanto, esta aplicação é linear entre os espaços. No entanto, qual é o sentido de fazermos essa construção? A resposta é que ela provém um isomorfismo entre V^{**} e V, ou seja, o espaço bidual é igual ao espaço original!! (Não será provado, acredito que saia do escopo das notas, essa última construção é mais a título de curiosidade.)

4 Polinômios Característicos

aa