

Complex Analysis

Renan Wenzel

11 de janeiro de 2023

Conteúdo

1	Aula 01 - 03/01/2023	3
1.1	Motivações	3
1.2	Definições Básicas	3
1.2.1	Unicidade	3
1.2.2	Subcorpo	3
1.2.3	Estrutura Algébrica Independe de F	4
1.2.4	Existência	4
1.3	Representação Polar de \mathbb{C}	4
1.4	A Esfera de Riemann	5
1.5	Topologia de \mathbb{C}	5
2	Aula 02 - 05/01/2023	7
2.1	Motivações	7
2.2	Fim de Conexos	7
2.3	Sequências e Completude	8
2.4	Compactos	9
2.5	Continuidade	9
2.6	Convergência Uniforme	10
3	Aula 03 - 06/01/2023	10
3.1	Motivações	10
3.2	Séries de Potências	11
3.3	Funções Analíticas	12
3.4	Ramos de Funções Inversas	14
4	Aula 04 - 09/01/2023	14
4.1	Motivações	14
4.2	Equações de Cauchy-Riemann	15
4.3	Funções Harmônicas	15
4.4	Transformações Conformes	16
5	Aula 05 - 10/01/2023	16
5.1	Motivações	16
5.2	Transformações de Möbius	17

1 Aula 01 - 03/01/2023

1.1 Motivações

- Definir o corpos dos complexos
- Definir a topologia no corpo dos complexos
- Esfera de Riemann

1.2 Definições Básicas

Definição. Um corpo F é um conjunto não vazio em que definem-se duas operações $+$: $F \times F \rightarrow F$, \cdot : $F \times F \rightarrow F$ satisfazendo:

i) $w + z = z + w$

ii) $w + (z + u) = (w + z) + u$

iii) Existe 0 em F tal que $w + 0 = w$

iv) Para cada $w \in F$, existe $-w \in F$ tal que $w + (-w) = 0$

v) $w \cdot z = z \cdot w$

vi) $w \cdot (z \cdot u) = (w \cdot z) \cdot u$

vii) Existe $e \in F$ tal que $w \cdot e = w$

viii) Para cada $w \in F - \{0\}$, existe $w^{-1} \in F$ tal que $w \cdot w^{-1} = e$

ix) $(w + z) \cdot u = w \cdot u + z \cdot u$,

em que w, z, u pertencem a F .

Considere F um corpo contendo \mathbb{R} e tal que

$$x^2 + 1 = 0$$

tenha solução. Seja i esta solução. Segue que $-i$ é solução dela também, $-1 \cdot z = z$ e $0 \cdot z = 0$ para z em F . Definimos

$$\mathbb{C} := \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$$

de maneira que os elementos de \mathbb{C} são unicamente determinados, \mathbb{C} é subcorpo de F e a estrutura algébrica de \mathbb{C} não depende de F . Além disso, este corpo existe.

Com efeito,

1.2.1 Unicidade

Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tais que

$$a + bi = c + di.$$

Assim, $a - c = i(d - b) \Rightarrow (a - c)^2 = (d - b)^2$, donde segue a unicidade $a = c$ e $d = b$

1.2.2 Subcorpo

Exercício.

1.2.3 Estrutura Algébrica Independe de F

Seja F outro corpo contendo \mathbb{R} em que $x^2 + 1 = 0$ possui solução. Considere $\mathbb{C}' = \mathbb{R} + j\mathbb{R}$, em que j é a solução da equação em F'. Definimos $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}'$ por

$$T(a + bi) = a + bj$$

e, neste caso, $T(z + w) = T(z) + T(w)$, $T(zw) = T(z)T(w)$ para todos $z, w \in \mathbb{C}$. (Exercício.)

1.2.4 Existência

Seja $F = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ munido das operações $+: F \times F \rightarrow F$, $\cdot: F \times F \rightarrow F$ dadas por

$$\begin{aligned} +((a, b), (c, d)) &= (a + c, b + d) \\ \cdot((a, b), (c, d)) &= (ac - bd, ad + bc). \end{aligned}$$

Note que $(0, 1)^2 = (-1, 0)$. Assim, $(F, +, \cdot)$ é um corpo contendo \mathbb{R} . (Exercício.)

Algumas propriedades(Exercícios):

- a) $Re(z) \leq |z|$ e $Im(z) \leq |z|$
- b) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$ e $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$
- c) $\overline{\frac{1}{z}} = \frac{1}{\overline{z}}$
- d) $|z| = |\overline{z}|$ e $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$
- e) $z + \overline{z} = 2Re(z)$, $z - \overline{z} = 2iIm(z)$ e $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$

1.3 Representação Polar de \mathbb{C}

Dado $z \in \mathbb{C}$, temos

$$z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta), \quad \theta = \arg z.$$

Neste caso, temos, para z não-nulo,

$$z^{-1} = |z|^{-1}(\cos -\theta + i \sin -\theta) = |z|^{-1}(\cos \theta - i \sin \theta)$$

Para $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, temos

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2))$$

com $\theta_1 = \arg z_1, \theta_2 = \arg z_2$. Mais geralmente,

$$\prod_{k=1}^n z_k = \prod_{k=1}^n |z_k|(\cos(\sum_{k=1}^n \theta_k) + i \sin(\sum_{k=1}^n \theta_k)),$$

com $\theta_k = \arg z_k$. Em particular,

$$z^n = |z|^n(\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Buscando w tal que $w^n = z$ para dado z não-nulo,

$$w = |z|^{\frac{1}{n}}(\cos(\frac{\theta + 2k\pi}{n}) + i \sin(\frac{\theta + 2k\pi}{n})), \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

1.4 A Esfera de Riemann

Considere $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ a esfera

$$\mathbb{S}^2 := \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}.$$

Chame $N = \{0, 0, 1\}$ de polo norte. Fazemos uma associação entre $\mathbb{S}^2 - \{N\}$ e o plano $z=0$ de \mathbb{R}^3 , chamada de projeção estereográfica. Nessa associação, o ponto $z (= x + iy) \in \mathbb{C}$ é associado a $(x, y, 0)$, e definimos uma reta por N e z como $r: N + t(x, y, -1), t \in \mathbb{R}$. Assim,

$$r \cap \mathbb{S}^2 \Rightarrow S_z = \left(\frac{2x}{|z|^2 + 1}, \frac{2y}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right) \in \mathbb{S}^2$$

Reciprocamente, o ponto (x, y, z) de \mathbb{S}^2 pode ser associado ao considerar a reta $r: N + t(x, y, s-1)$, em que s é um número real. Com isso, a intersecção $r \cap \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\} \Rightarrow t = \frac{1}{1-s}$ mostra que $z = \left(\frac{x}{1-s}, \frac{y}{1-s}, 0 \right)$ corresponde ao ponto z de \mathbb{C} .

Associando N ao infinito, obtemos o plano estendido $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, chamado de Esfera de Riemann. Se $\phi: \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{S}^2$ é dada por $\phi(\infty) = N$ e, para $z \neq \infty$,

$$\phi(z) = \left(\frac{z + \bar{z}}{|z|^2 + 1}, \frac{z - \bar{z}}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right),$$

então dados $z, w \in \mathbb{C}_\infty$, definimos a métrica

$$d(z, w) = \begin{cases} \|\phi(z) - \phi(w)\|, & z, w \neq \infty \\ 0, & z = w = \infty \\ \infty, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Exemplo 1.1. Se $z, w \neq \infty$, então

$$d(z, w) = d(\phi(z), \phi(w)) = \frac{2|z - w|}{[(1 + |z|^2)(1 + |w|^2)]^{\frac{1}{2}}}$$

e, se $z \neq \infty$,

$$d(z, \infty) = \|\phi(z) - N\| = \frac{2}{(1 + |z|^2)^{\frac{1}{2}}}$$

1.5 Topologia de \mathbb{C}

Definição. Sejam X um conjunto e $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que d é uma métrica se

- i) $d(x, y) \geq 0, d(x, y) = 0 \iff x = y$
- ii) $d(x, y) = d(y, x)$
- iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$,

em que x, y, z pertencem a X . Neste caso, chamamos a terna (X, d) de espaço métrico.

Considere (X, d) um espaço métrico. Dado x em X e $r > 0$,

$$B(x, r) := \{y \in X : d(x, y) < r\}$$

é a bola aberta, seu fecho é

$$B_c(x, r) := \{y \in X : d(x, y) \leq r\}$$

e a bola fechada é a união deles, ou seja,

$$\overline{B(x, r)} := \{y \in X : d(x, y) \leq r\}$$

Exemplo 1.2. Considere X não-nulo e $d(x, y) = \delta_{x,y}$. (X, d) é métrico e

$$B\left(x, \frac{1}{2}\right) = \{x\} = \overline{B\left(x, \frac{1}{2}\right)} = B\left(x, \frac{1}{333}\right), x \in X$$

$$B(x, 2) = X = B(x, 1001), x \in X$$

Utilizando bolas, definimos que um conjunto $A \subset X$ é aberto se para todo x em A , existe $r > 0$ tal que $B(x, r)$ está contido em A . Por outro lado, um conjunto é fechado se seu complementar é aberto. A união infinita de abertos é aberta e, pelas Leis de DeMorgan, a intersecção infinita de fechados é fechada. Além disso, intersecções finitas de abertos é aberta e união finita de fechados é fechado.

Definimos, também, o interior de A como $A^\circ := \cup_B \{B \subset A : B \text{ aberto}\}$, o fecho de A como $\overline{A} = \cap_F \{A \subseteq F : F \text{ fechado}\}$ e o bordo de A como $\partial A = \overline{A} \cap \overline{A}^c$. Diremos que A é denso quando $\overline{A} = X$.

Proposição. Seja (X, d) um espaço métrico e A um subconjunto. Então,

- i) A é aberto se, e só se, $A = A^\circ$
- ii) A é fechado se, e só se, $A = \overline{A}$
- iii) Se x pertence a A° , então existe $\epsilon > 0$ tal que $B(x, \epsilon) \subseteq A$.
- iv) Se x pertence a \overline{A} , então para todo $\epsilon > 0$ tal que $B(x, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$.

Um espaço métrico (X, d) é conexo se os únicos subconjuntos abertos e fechados de X são X e vazio. Caso contrário, X é dito ser desconexo, ou seja, existem abertos disjuntos não-vazios cuja união dá o espaço todo. Um exercício é mostrar que um conjunto é conexo se, e só se, ele é um intervalo.

Dados z, w em \mathbb{C} , o segmento $[z, w]$ é o conjunto

$$[z, w] := \{tw + (1-t)z : t \in [0, 1]\}$$

Além disso, dados z_1, \dots, z_n , a poligonal com esses vértices é

$$[z_1, \dots, z_n] = \bigcup_{k=1}^{n-1} [z_k, z_{k+1}]$$

Proposição. Seja G um subconjunto de \mathbb{C} aberto. Então, G é conexo se, e só se para todo z, w em G , existe uma poligonal $[z, z_1, \dots, z_n, w] \subseteq G$.

Prova. \Leftarrow) Assumindo que G satisfaz a propriedade da poligonal, suponha também que G não é conexo. Assim, podemos escrever $G = B \cup C$ com $B \cap C = \emptyset$ e B, C não-vazios. Pela propriedade de G , existe $[b, z_1, \dots, z_n, c] \subseteq G$. Neste caso, existe k tal que $z_k \in B$ e $z_{k+1} \in C$. Agora, considere os conjuntos

$$B' = \{t \in [0, 1] : tz_k + (1-t)z_{k+1} \in B\}$$

$$C' = \{t \in [0, 1] : tz_k + (1-t)z_{k+1} \in C\}$$

e note que $B' \neq \emptyset$ pois $z_k \in B$ e $1 \in B'$. Analogamente, C' é não-vazio. No entanto, isso é um absurdo, pois $[0, 1]$ seria conexo e $B' \cup C'$ seria uma cisão não trivial

\Rightarrow) Suponha, agora, que G é conexo e seja z um elemento dele. Defina

$$C = \{w \in G : \text{Existe } [z, z_1, \dots, z_n, w] \subseteq G\}$$

Observe que C é não-vazio, z pertence a G e $[z]$ é subconjunto de G . Mostremos que C é aberto e fechado (pois implicará em $C = G$). Com efeito, se $w \in C \subseteq G$, existe $r > 0$ tal que $B(w, r)$ está contido em G , pois G é aberto. Assim, para todo $s \in B(w, r)$, temos $[s, w] \subseteq B(w, r)$ e, com isso, existe uma poligonal ligando s a z com $s \in C$, mostrando que C é aberto.

Mostrar que o complementar de C é aberto é análogo. Com efeito, se $C^c = \emptyset$, o resultado está provado. Por outro lado, se $C^c \neq \emptyset$, seja $w \in C^c = G - C$. Logo, existe $r > 0$ tal que $B(w, r) \subseteq G$. Afirmamos que $B(w, r) \subseteq G - C$. Caso contrário, existe s em $B(w, r)$ contido, também, em C . Neste caso, existe uma poligonal ligando s a z e s a w , uma contradição, pois isso conectaria w a z , mesmo com w no complementar de z . Portanto, o complementar é aberto e C é aberto e fechado. ■

2 Aula 02 - 05/01/2023

2.1 Motivações

- Sequências e suas convergências;
- Teorema de Cantor para espaços completos;
- Compacidade e Heine-Borel;
- Continuidade e convergência de funções.

2.2 Fim de Conexos

Teorema. *Seja $G \subseteq \mathbb{C}$ um aberto e conexo, então existe uma poligonal ligando qualquer z, w em G cujos segmentos sejam paralelos ao eixo real ou imaginário.*

Definição. *Um subconjunto de um espaço métrico (M, d) é uma componente conexa se é um conexo maximal*

Exemplo 2.1. *Coloque $A = \{1, 2, 3\} \cdot \{1\}$ é componente conexa de A , mas $\{1, 2\}$ não é.*

Teorema. *Seja (M, d) um espaço métrico. Então,*

- 1) *Para x em M , existe C_x uma componente conexa de M com x em C_x ;*
- 2) *As componentes são disjuntas.*

Prova. 1)

Seja x em M e tomemos

$$C_x = \bigcup_{D \subseteq M} \{D : D \text{ conexos com } x \in D\}$$

Mostremos que C_x é conexo, pois a maximalidade segue da definição dada a ele. Note que $C_x \neq \emptyset$, visto que qualquer conjunto unitário é conexo. Seja $A \subseteq C_x$ aberto, fechado e não-nulo. Existe $D_x \in C_x$ tal que $D_x \cap A \neq \emptyset$, o que implica que $D_x \subseteq A$.

Finalmente, considere $D \in C_x$, de modo que $D_x \cup D$ é conexo e $(D_x \cup D) \cap A \neq \emptyset$ o que garante que $D \subseteq A$. Assim, $A = C_x$. ■.

Exercícios. 1) *Prove a segunda afirmação do teorema;*

- 2) *Se D é conexo e $D \subseteq A \subseteq \overline{D}$, então A é conexo.*

Teorema. *Seja G um subconjunto aberto de \mathbb{C} . As componentes conexas são abertas e há no máximo uma quantidade enumerável delas.*

Prova. *Seja D uma componente conexa de G . Tome $x \in D$, tal que existe $r > 0$ com $B(x, r) \subseteq G$, já que G é aberto. Suponha que $B(x, r) \not\subseteq D$. Neste caso, $B(x, r) \cup D$ seria um conexo contendo D propriamente. Logo, $B(x, r) \subseteq D$ e D é aberto.*

Para a segunda afirmação, considere

$$\Omega = \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}(\overline{\Omega} = \mathbb{C})$$

Para cada componente conexa C de G , como G é aberto, existe $z \in \Omega \cap C$, o que é suficiente para garantir a enumerabilidade das componentes de G . ■.

2.3 Sequências e Completude

Definição. Seja (M, d) um espaço métrico. Uma sequência $\{x_n\}$ de M é convergente se existe x em M tal que para todo $\epsilon > 0$, existe n_0 natural tal que

$$d(x_n, x) < \epsilon, \quad n \geq n_0.$$

Escrevemos, neste caso, $x_n \rightarrow x$. Dizemos que uma sequência é de Cauchy se para todo $\epsilon > 0$, existe n_0 natural satisfazendo

$$d(x_n, x_m) < \epsilon, \quad n, m \geq n_0.$$

Exercícios. i) Se $\{x_n\}$ é convergente, então $\{x_n\}$ é de Cauchy, mas a recíproca é só válida quando a sequência possui uma subsequência convergente.

ii) Se $\{x_n\}$ é de Cauchy, então x_n é limitada.

iii) $F \subseteq M$ é fechado se e só se toda x_n de F com $x_n \rightarrow x$ é tal que x pertence a F .

Dizemos que um espaço métrico é completo se toda sequência de Cauchy for convergente.

Exercícios. i) Mostre que \mathbb{R}, \mathbb{C} são espaços métricos completos;

ii) Se (M, d) é um espaço métrico e $S \subseteq M$, mostre que se (S, d) for completo, ele é fechado em M . Mostre e recíproca no caso em que (M, d) é completo.

O resultado a seguir é conhecido como Teorema de Cantor.

Teorema. Um espaço métrico é completo se e só se toda cadeia descendente de fechado $\{F_n\}$ satisfazendo

$$\text{diam} F_n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

é tal que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$ é unitário. Aqui, $\text{diam} A := \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$.

Prova. Suponha que M é um espaço métrico completo. Se $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$, então ele é unitário. De fato, se $x, y \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$,

$$d(x, y) \leq \text{diam} F_n (\text{diam} F_{n+1} \leq \text{diam} F_n),$$

mas $\text{diam} F_n \rightarrow 0$ e $d(x, y) = 0$, de modo que $x = y$.

Agora, seja $x_n \in F_n, n \in \mathbb{N}$ e observe que

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \text{diam} F_n,$$

pois $F_{n+1} \subseteq F_n$. Isto garante que $\{x_n\}$ é de Cauchy e, como M é completo, existe x com $x_n \rightarrow x$. Neste caso, $x \in F_n$ para todo n e $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n = \{x\}$.

Reciprocamente, seja $\{a_n\}$ de Cauchy em M . Construimos

$$F_n = \overline{\{a_k : k \geq n\}}$$

que são fechados satisfazendo $F_{n+1} \subseteq F_n$. Assim, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n = \{x\}$ para algum x de M . Como

$$d(x, a_n) \leq \text{diam} F_n \rightarrow 0,$$

temos, portanto, $a_n \rightarrow x$. ■

Um exercício que fica é mostrar que se $\{a_n\}$ é de Cauchy, então $\text{diam} F_n \rightarrow 0$

2.4 Compactos

Definição. Seja (M, d) um espaço métrico. Um subconjunto $S \subseteq M$ é compacto se para toda coleção \mathcal{A} de abertos de M cobrindo S existe $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ tal que

$$S \subseteq \bigcup_{k=1}^n A_k$$

Dado um espaço métrico (M, d) , M é dito sequencialmente completo se todas as sequências de M possuem subseqüência convergente. Também diremos que ele é totalmente limitado se para todo $\epsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}, x_1, \dots, x_n \in M$ com

$$M = \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \epsilon).$$

Um conjunto A é dito limitado se seu diâmetro é finito.

Exercícios. i) Se A é totalmente limitado, então A é limitado, mas a recíproca não é necessariamente verdade.

ii) Se A é compacto, então A é limitado, mas a recíproca não é necessariamente verdade.

Proposição. Seja (M, d) um espaço métrico e K um subconjunto de M . Então, K é compacto se e só se toda família de fechados com PIF tem interseção não-vazia.

A PIF é a Propriedade da Interseção Finita, que afirma que dados conjuntos $F_1, \dots, F_n \Rightarrow \bigcap_{k=1}^n F_k \neq \emptyset$

Teorema. Seja (M, d) um espaço métrico. As seguintes afirmações são equivalentes:

- i) M é compacto;
- ii) Para todo conjunto infinito S de M , existe x em S tal que para todo $\epsilon > 0, B(x, \epsilon) \cap S - \{x\} \neq \emptyset$;
- iii) M é sequencialmente compacto;
- iv) M é completo e totalmente limitado.

Teorema. Um conjunto K de \mathbb{R}^n é compacto se e só se ele é fechado e limitado.

Segue um esboço da prova.

Prova. Se K é compacto, ele é completo (logo, fechado) e totalmente limitado (logo, limitado). Por outro lado, se K é fechado e limitado, então K é completo porque \mathbb{R}^n é completo. Além disso, pela propriedade Arquimediana da reta, para todo $\epsilon > 0$, existem $x_1, \dots, x_n \in K$ com

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \epsilon)$$

2.5 Continuidade

Definição. Sejam $(X, d), (Y, d')$ espaços métricos. $f : X \rightarrow Y$ é contínua em x de X se para todo $\epsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que

$$d(x, y) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \epsilon$$

f é dita contínua se isso ocorre para todos os pontos de M .

Exercícios. Mostre que equivalem à definição de contínua:

- i) $f^{-1}(B(x, \epsilon))$ contém uma bola aberta centrada em x , para todo $\epsilon > 0$;
- ii) $x_n \rightarrow x$ implica $f(x_n) \rightarrow f(x)$

iii) $F^{-1}(A)$ é aberta em X para todo aberto A com $x \in A$

Proposição. Sejam $f, g : X \rightarrow \mathbb{C}$ funções contínuas. Então,

- 1) $\alpha f + \beta g$ é contínua, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$;
- 2) fg é contínua;
- 3) Se $x \neq 0$, então f/g é contínua em x ;
- 4) Se $h : Y \rightarrow X$ é contínua, então $f \circ h : Y \rightarrow \mathbb{C}$ é contínua.

Definição. Uma função $f : (X, d) \rightarrow (Y, d')$ é uniformemente contínua se para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$d(x, y) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \epsilon.$$

Uma função $f : (X, d) \rightarrow (Y, d')$ é Lipschitz se existe $c > 0$ tal que

$$d'(f(x), f(y)) \leq cd(x, y)$$

Teorema. Seja $f : (X, d) \rightarrow (Y, d')$ uma função. Então,

- i) Se X é compacto, então $f(X)$ é compacto;
- ii) Se X é conexo, então $f(X)$ é conexo. Adicionalmente, se $Y = \mathbb{R}$, então $f(X)$ é um intervalo.

Corolário. Se $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, então para todo $K \subseteq X$ compacto, existem $x_m, x_M \in K$ tais que

$$f(x_m) = \inf_{x \in K} \{f(x)\}, \quad f(x_M) = \sup_{x \in K} \{f(x)\}$$

Corolário. Nas mesmas condições, mas f uma função complexa, temos

$$|f(x_m)| = \inf_{x \in K} \{|f(x)|\}, \quad |f(x_M)| = \sup_{x \in K} \{|f(x)|\}$$

Teorema. Seja $f : X \rightarrow Y$ contínua. Se X é compacto, então f é uniformemente contínua.

2.6 Convergência Uniforme

Definição. Uma sequência de funções $\{f_n\}$ de X em Y converge pontualmente para $f : X \rightarrow Y$ se

$$f_n(x) \rightarrow f(x), \quad n \rightarrow \infty, \forall x \in X$$

$\{f_n\}$ converge uniformemente para f se para todo $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sup_{x \in X} \{d'(f_n(x), f(x))\} < \epsilon, n \geq n_0$$

Teorema. Se $\{f_n\}$ é uma sequência de funções contínuas e $f_n \rightarrow f$ uniformemente, então f é contínua.

Teorema. Seja $u_n : X \rightarrow \mathbb{C}$ uma sequência de funções satisfazendo

$$|u_n(x)| \leq c_n, n \in \mathbb{N}.$$

Se $\sum_{n=0}^{\infty} c_n < \infty$, então $\sum_{k=1}^n u_k \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ uniformemente.

3 Aula 03 - 06/01/2023

3.1 Motivações

- i) Introdução às séries de potência e raio de convergência;
- ii) Funções analíticas e diferenciáveis em \mathbb{C} ;
- iii) Definição da exponencial complexa;
- iv) Ramos de funções inversas.

3.2 Séries de Potências

Definição. Considere $\{a_n\}$ uma sequência em \mathbb{C} . A série de potência em $\{a_n\}$, denotada por $\sum_{n=0}^{\infty}$, é dita convergente se para todo $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|\sum_{n=0}^k a_n| < \epsilon$, $k \geq n_0$, para algum $a \in \mathbb{C}$. Denotamos isso por

$$a = \sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty,$$

A série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente se $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$.

Exercícios. Mostre que se uma soma converge absolutamente, ela também converge normalmente.

Definição. Uma série de potências é uma série da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n, \quad z \in \mathbb{C},$$

em que $\{a_n\}$ é uma sequência de \mathbb{C} e a é um número complexo.

Exemplo 3.1. No caso da série geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, $z \in \mathbb{C}$, considere a soma parcial $s_n = \sum_{k=0}^n z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$, $z \neq 1$.

Se $|z| < 1$, então $z^{n+1} \rightarrow 0$ e $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$, $|z| < 1$. Caso $|z| \geq 1$, a série geométrica diverge.

Denotamos por $\limsup_{n \rightarrow \infty} \{b_n\}$ a expressão $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} \{b_k\}$.

Teorema. Considere a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} (z - a)^n$ e $\frac{1}{R} := \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Então,

- 1) A série converge absolutamente em $B(a, R)$
- 2) A série diverge se $|z - a| > R$
- 3) A série converge uniformemente em $B(a, r)$ para $0 < r < R$.

Prova. Sem perda de generalidade, suponha $a = 0$. 1.) Seja $z \in B(0, R)$. Existe $|z| < r < R$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n|^{\frac{1}{n}} < \frac{1}{r}$, $n \geq n_0$. Daí, temos

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} |a_k| |z|^k \leq \sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{|z|^k}{r^k} < \infty.$$

Como essa fração é menor que um, o resultado está provado.

- 2.) Seja $|z| > R$ e r tal que $|z| > r > R$. Existe $\{a_{n_k}\}_k$ tal que $|a_{n_k}|^{\frac{1}{n_k}} > \frac{1}{r}$, $k = 0, 1, \dots$. Assim, temos

$$|a_{n_k}| |z|^{n_k} > \left(\frac{|z|}{r}\right)^{n_k} \rightarrow \infty$$

Conforme k tende a infinito.

- 3.) Seja $0 < r < R$ e $r < \rho < R$. Se z pertence a uma bola $B(0, r)$, então

$$|a_n| |z|^n < \left(\frac{r}{\rho}\right)^n, \quad n \geq n_0, n_0 \in \mathbb{N}.$$

Como consequência do teste M de Weierstrass, já que $\frac{r}{\rho}$ é um número, segue o resultado. ■

Exercícios. Mostre que o R do teorema acima é único.

Exemplo 3.2. Considere a série que define a exponencial de z :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, R = \infty. \quad e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, z \in \mathbb{C}.$$

Esta série é convergente pelo teste da razão. Com efeito,

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(n+1)!}{n!} \right) = \infty.$$

Com isso, a série converge para todos os valores possíveis, pois seu raio de convergência é infinito.

Proposição. Nas notações da proposição anterior, se $R < \infty$, então

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

3.3 Funções Analíticas

Definição. Seja G um aberto de \mathbb{C} e $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ uma função. Dizemos que ela é diferenciável em $z \in G$ se

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{w \rightarrow z} \frac{f(z) - f(w)}{z - w}$$

existe. Neste caso, o denotamos por $f'(z)$. Diremos que f é diferenciável se $f'(z)$ existe para todo z de G .

Definição. Se $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ é diferenciável e $f' : G \rightarrow \mathbb{C} (z \mapsto f'(z))$ é contínua, então dizemos que f é continuamente diferenciável.

Analogamente, se $f' : G \rightarrow \mathbb{C}$ é diferenciável e $f'' : G \rightarrow \mathbb{C} (f'' = (f')')$ é contínua, então f é duas vezes continuamente diferenciável. Nesta linha, diremos que uma função é analítica se ela é continuamente diferenciável em G .

Proposição. Seja G um aberto de \mathbb{C} . Então,

- i) Se $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ é diferenciável em $a \in G$, então f é contínua em a ;
- ii) Se f e g são analíticas em G , então $f+g$ e $f \cdot g$ são analíticas em G . Se $G' = G - \{0\}$, então f/g é analítica em G' . Valem as regras clássicas de derivação.
- iii) Sejam f e g analíticos em G_f, G_g , respectivamente, com $f(G_f) \subseteq G_g$. Então, $g \circ f$ é analítica em G_f e

$$(g \circ f)'(z) = g'(f(z))f'(z), \quad z \in G.$$

Prova. Exercício. ■

Proposição. Seja $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ com raio de convergência R . Então, f é infinitamente diferenciável em $B(a, R)$. Além disso, a derivada de ordem k é

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n \frac{n!}{(n-k)!} (z-a)^{n-k}, k \in \mathbb{N}$$

com mesmo raio de convergência de f .

Prova. A última afirmação fica como exercício.

Consideremos

$$s_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k(z-a)^k, \quad R_n(z) = f(z) - s_n(z),$$
$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n(z-a)^{n-1}, \quad z \in B(a, R), n \in \mathbb{N}.$$

Seja $\delta > 0$ tal que $B(z, \delta) \subseteq B(a, r)$ com $|z| < r < R$. Assim, para w em $B(z, \delta)$

$$\frac{f(z) - f(w)}{z - w} - g(z) = \frac{s_n(z) - s_n(w)}{z - w} + \frac{R_n(z) - R_n(w)}{z - w} - g(z) = \left[\frac{s_n(z) - s_n(w)}{z - w} - s'_n(z) \right] + \left[\frac{R_n(z) - R_n(w)}{z - w} \right] - (g(z) - s'_n(z)).$$

Note que

$$\left| \frac{R_n(z) - R_n(w)}{z - w} \right| = \left| \frac{1}{z - w} \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \frac{[(z-a)^k - (w-a)^k]}{(z-a) - (w-a)} \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \left((z-a)^{k-1} + \dots + (w-a)^{k-1} \right) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| k r^{k-1} \rightarrow 0,$$

pois $g(r) < \infty$, em que n tende a infinito. Como as duas expressões em chaves tendem a 0 quando w tende a z , concluímos que

$$\lim_{z \rightarrow w} \frac{f(z) - f(w)}{z - w} = g(z)$$

e a afirmação segue. ■

Corolário. Nas notações e condições da proposição anterior, f é analítica em $B(a, R)$ e

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, n \in \mathbb{N}$$

Prova. Exercício.

Proposição. Seja G aberto e conexo. Se $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ é tal que $f'(z) = 0, z \in G$, então f é constante.

Prova. Seja $z_0 \in G$ e considere $C = f^{-1}(\{f(z_0)\})$, tal que C é não-vazio e fechado. Mostremos que C é, também, aberto. Seja z um elemento de C e $r > 0$ tal que $B(z, r) \subseteq G$. Para todo $w \in B(z, w)$, definimos $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ por $g(t) = f(tz + (1-t)w)$. Neste caso,

$$g'(t) = f'(tz + (1-t)w)(z - w) = 0.$$

Como g é real, segue que ela é constante. Com isso, note que $f(w) = g(0) = g(1) = f(z) = f(z_0)$, tal que $w \in C$. ■

Exemplo 3.3. $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, R = \infty$

Coloque $g(z) = e^z e^{z-w}, w \in \mathbb{C}$ fixo. Temos $g'(z) = (e^z)' e^{z-w} + e^z (e^{z-w})' = 0$. Assim, g é constante e, como $g(0) = e^w$, concluímos que $e^z = e^w e^{z-w}$ para todo $z, w \in \mathbb{C}$.

Exercícios. Prove que, para $z, w \in \mathbb{C}$:

- 1) $e^{z+w} = e^z e^w$;
- 2) $e^z e^{-z} = 1$;
- 3) $e^{\bar{z}} = \overline{(e^z)}$;
- 4) $|e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)}$.

Exemplo 3.4. Defina, para z complexo,

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Exercícios. Dado z complexo, mostre que

- i) $(\sin(z))' = \cos(z), \quad (\cos(z))' = -\sin(z)$;
- ii) $\cos(z) = \frac{1}{2} \left(e^{iz} + e^{-iz} \right), \quad \sin(z) = \frac{1}{2} \left(e^{iz} - e^{-iz} \right)$;
- iii) $\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1$;
- iv) $e^{iz} = \cos(z) + i \sin(z)$.

3.4 Ramos de Funções Inversas

Seja $z \in \mathbb{C}$. Buscamos $w \in \mathbb{C}$ tal que $e^w = z, z \neq 0$. Logo, w deve satisfazer $|e^w| = e^{Re(w)} = |z| \Rightarrow Re(w) = \ln |z|$. Se $w = x + iy$, então

$$e^w = e^x e^{iy} = e^x (\cos(y) + i \sin(y)) = z = |z| (\cos(\theta) + i \sin(\theta))$$

com $\theta = \arg z$. Assim, $y = \theta + 2k\pi$ para algum k . Portanto, $w = \ln |z| + i(\arg z + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$.

Definição. Seja G um aberto conexo de \mathbb{C} e $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ contínua. Diremos que f é um ramo de logaritmo em G se $e^{f(z)} = z, z \in G$.

Proposição. Se G é um aberto conexo e f, g são ramos de logaritmos em G , então $f(z) = g(z) + 2k\pi i$ para algum $k \in \mathbb{Z}$.

Prova. Seja z em G . Mostraremos que

$$\frac{f(z) - g(z)}{2\pi i} \in \mathbb{Z}.$$

Observe que $e^{f(z)-g(z)} = \frac{e^{f(z)}}{e^{g(z)}} = \frac{z}{z} = 1$. Daí, $f(z) = g(z) + 2k\pi i$ para algum inteiro k , pois

$$f(z) - g(z) = \ln |1| + i(\arg 1 + 2k\pi)$$

Definimos $h : G \rightarrow \mathbb{C}$ por

$$h(w) = \frac{f(w) - g(w)}{2\pi i}, \quad w \in G.$$

De forma análoga ao anterior, concluímos $Im(h) \subseteq \mathbb{Z}$ deve ser conexo, pois h é contínua. Assim, h é constante, pois os únicos conexos de \mathbb{Z} são o vazio e conjuntos unitários, provando o resultado. ■

Proposição. Sejam G, Ω abertos e $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ e $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ contínuas com $f(G) \subseteq \Omega$ e satisfazendo $f(g(z)) = z, z \in G$. Se g é diferenciável em z e $g'(f(z)) \neq 0$, então

$$f'(z) = \frac{1}{g'(f(z))}.$$

Caso g seja analítica, f também o é.

Prova. Exercício.

Considere G um aberto conexo. Chamamos a função $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$f(z) = \ln |z| + i\theta, \quad \theta = \arg(z) \in (-\pi, \pi)$$

de ramo principal do logaritmo.

4 Aula 04 - 09/01/2023

4.1 Motivações

- Equações de Cauchy-Riemann;
- Funções Harmônicas e suas Relações com as Analíticas.
- Funções Conformes e Transformações de Möbius

4.2 Equações de Cauchy-Riemann

Definição. Uma região G do plano complexo é um aberto conexo dele.

Considere uma função $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ analítica sobre a região G e defina

$$u(x, y) = \operatorname{Re}(f(z)), \quad v(x, y) = \operatorname{Im}(f(z)), \quad z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}$$

Assim, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y), z = x + iy \in \mathbb{C}$. Observe que

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{ih \rightarrow 0} \frac{f(z+ih) - f(z)}{ih} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{u(x+h, y) - u(x, y)}{h} + i \frac{v(x+h, y) - v(x, y)}{h} \right) \\ &= \frac{du}{dx}(x, y) + i \frac{dv}{dx}(x, y), \quad z = x + iy \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{ih \rightarrow 0} \left(\frac{u(x, y+h) - u(x, y)}{ih} + i \left(\frac{v(x, y+h) - v(x, y)}{ih} \right) \right) \\ &= \frac{1}{i} \frac{du}{dy}(x, y) + \frac{dv}{dy}(x, y) = \frac{dv}{dy}(x, y) - i \frac{du}{dy}(x, y). \end{aligned} \quad (2)$$

A partir de (1) e (2), derivamos as equações de Cauchy-Riemann:

$$\boxed{\frac{du}{dx} = \frac{dv}{dy} \quad \text{e} \quad \frac{dv}{dx} = -\frac{du}{dy}}$$

4.3 Funções Harmônicas

Além disso, se u e v possuem derivadas de segunda ordem, temos

$$\frac{d}{dy} \left(\frac{du}{dx} \right) = \frac{d^2 v}{dy^2}, \quad \frac{d}{dy} \left(\frac{dv}{dx} \right) = -\frac{d^2 u}{dy^2}$$

de onde segue que

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} = 0$$

e, de forma análoga, u é harmônica. Nesta lógica, diremos que f é harmônica se $\Delta f = \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{d^2 f}{dy^2} = 0$.

Seja $u : G \rightarrow \mathbb{R}$ harmônica, a busca por $v : G \rightarrow \mathbb{R}$ harmônica satisfazendo Cauchy-Riemann é um questão. Um exercício é mostrar que a existência de v depende de G e que, em geral, não encontra-se v harmônica satisfazendo Cauchy-Riemann. (Por exemplo, $G = \mathbb{C} - \{0\}$, $u(x, y) = \ln(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$)

Teorema. Sejam $u, v : G \rightarrow \mathbb{R}$ harmônicas de classe C^1 . Então, $f = u + iv$ é analítica se e só se u e v satisfazem Cauchy-Riemann.

Prova. Exercício.

Dada $u : G \rightarrow \mathbb{R}$ harmônica, uma função $v : G \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f = u + iv$ seja analítica é dita ser a função harmônica conjugada de u .

Exercícios.

- 1) Seja $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ um ramo e n um natural. Então, $z^n = e^{nf(z)}, z \in G$.
- 2) Mostre que $\operatorname{Re}(z^{\frac{1}{2}}) > 0$;
- 3) tome $G = \mathbb{C} - \{z : z \leq 0\}$. Ache todos as funções analíticas tais que $z = (f(z))^n$.
- 4) Seja $f : G \rightarrow \mathbb{C}$, G conexo e f analítica. Se, para todo z de G , $f(z)$ é real, então f é constante.

Teorema. Considere $G = \mathbb{C}$ ou $G = B(0, r), r > 0$. Se $u : G \rightarrow \mathbb{R}$, então u admite harmônico conjugado.

Prova. Buscamos $v : G \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo Cauchy-Riemann. Coloque

$$v(x, y) = \int_0^y \frac{du}{dx}(x, t) dt + \phi(x)$$

em que $\phi(x) = - \int_0^x \frac{du}{dy}(t, 0) dt$.

Portanto,

$$f = u(x, y) + i \left(\int_0^y \frac{du}{dx}(x, t) dt - \int_0^x \frac{du}{dy}(t, 0) dt \right). \quad \blacksquare$$

4.4 Transformações Conformes

Exercícios. Mostre que e^z leva retas ortogonais em curvas ortogonais.

Definição. Uma γ é uma curva numa região G se $\gamma : [a, b] \rightarrow G$ é contínua.

Sejam γ_1, γ_2 curvas em G tais que $\gamma_1'(t_1) \neq 0, \gamma_2'(t_2) \neq 0, \gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2) = z_0 \in G$. O ângulo entre γ_1 e γ_2 em z_0 é dado por

$$\arg(\gamma_1'(t_1)) - \arg(\gamma_2'(t_2)).$$

Observe que se γ é uma curva em G e $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ é analítica, $\sigma = f \circ \gamma$ é uma curva em \mathbb{C} . Assumimos $\gamma \in C^1$. Neste caso, $[a, b] = \text{Dom}(\gamma)$, ou seja, temos

$$\gamma'(t) = f'(\gamma(t))\gamma'(t), \quad t \in [a, b],$$

donde segue que

$$\arg(\gamma'(t)) = \arg(f'(\gamma(t))) + \arg(\gamma'(t))$$

Teorema. Seja $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ analítica. Então, f preserva ângulos para todo z em G tal que $f'(z) \neq 0$.

Prova. Seja $z_0 \in G$ tal que $f'(z_0) \neq 0$. Considere curvas γ_1, γ_2 tais que $\gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2) = z_0$. Se θ é ângulo entre γ_1 e γ_2 em z_0 , então

$$\theta = \arg(\gamma_1'(t_1)) - \arg(\gamma_2'(t_2))$$

Agora, note que o ângulo entre $\sigma_1 = f \circ \gamma_1$ e $\sigma_2 = f \circ \gamma_2$ em $f(z_0)$ é

$$\arg \sigma_1'(t_1) - \arg \sigma_2'(t_2) = \theta.$$

Portanto, f preserva ângulos. \blacksquare .

Seja $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ que preserva ângulo e

$$\lim_{w \rightarrow z} \frac{|f(z) - f(w)|}{|z - w|}$$

existe. Então, f é dita aplicação conforme. Por exemplo, $f(z) = e^z$ é injetora em qualquer faixa horizontal de largura menor que 2π .

Corolário. $e^G = \mathbb{C} - \{z : z \leq 0\}$.

Se G é uma faixa aberta de comprimento 2π , o ramo de \log faz o caminho inverso. Adicionalmente, $\frac{1}{z}$ é a sua derivada.

5 Aula 05 - 10/01/2023

5.1 Motivações

- Transformações de Möbius elementares;
- aaaaaaaa

5.2 Transformações de Möbius

Definição. Uma fração linear é $\frac{az+b}{cz+d}$, $z \in \mathbb{C}$, $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ fixos.

Definição. Uma fração linear tal que $ad - bc \neq 0$ define uma transformação

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad z \in \mathbb{C},$$

chamada transformação de Möbius.

Consideraremos a transformação como sendo $T : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_{infty}$ da seguinte maneira:

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad z \neq -\frac{d}{c}$$
$$T(-\frac{d}{c}) = \infty \quad \text{e} \quad T(\infty) = \frac{a}{c}.$$

Neste caso, $T^{-1}(z) = \frac{dz-b}{-cz+a}$, $z \in \mathbb{C}_\infty$. Note, também, que os coeficientes de uma Transformação de Möbius são unicamente determinados, pois

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{(\lambda a)z + (\lambda b)}{(\lambda c)z + (\lambda d)}, \quad \lambda \neq 0.$$

Denotaremos por TM a coleção de transformações de Möbius.

Exemplo 5.1. As TM 's elementares, dado $a \in \mathbb{C}$, são

- Translação: $T(z) = z + a$, $z \in \mathbb{C}_\infty$,
- Rotação: $R(z) = e^{i\theta}z$, $\theta \in \mathbb{R}$,
- Inversão: $I(z) = \frac{1}{z}$,
- Homotetia: $H(z) = az$.

Proposição. Toda TM é composição de TM 's elementares.

Prova. Seja $T \in TM$ dada por $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$.

Caso 1) Se $c = 0$, então $T(z) = \frac{az}{d} + \frac{b}{d}$. Neste caso, $H(z) = \frac{a}{d}z$ e $S(z) = z + \frac{b}{d}$, tal que $T(z) = S \circ H(z)$

Caso 2) Se $c \neq 0$, então tome

$$T_1(z) = z + \frac{d}{c}, I(z) = \frac{1}{z}, H(z) = \frac{(bc-ad)z}{c^2}, \text{ e } T_2(z) = z + \frac{a}{c}.$$

Com isso, temos

$$t_2 \circ H \circ I \circ T_1 = t. \quad \blacksquare$$

Exercícios. 1) Mostre que (TM, \circ) é um grupo.

2) Se $T \in TM$ é tal que $T(z_i) = z_i$, $i = 1, 2, 3$, $z_i \neq z_j$, $i \neq j$, então $T = Id_{\mathbb{C}_\infty}$.

Proposição. Sejam $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}_\infty$, distintos. Existe uma única $T \in TM$ tal que

$$T(z_1) = 1, T(z_2) = 0, T(z_3) = \infty.$$

Prova. Unicidade:

Se existem $T, S \in TM$ satisfazendo a hipótese, então $S^{-1}(T(z_i)) = z_i$, $i = 1, 2, 3$. Logo, $S^{-1} \circ T = Id_{\mathbb{C}_\infty}$ e $S = T$.

Existência: Defina $T : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ por

$$T(z) = \begin{cases} \frac{z-z_2}{z_1-z_2}, & z_i \in \mathbb{C}, i = 1, 2, 3; \\ \frac{z-z_2}{z_1-z_3}, & z_1 = \infty; \\ \frac{z_1-z_3}{z-z_3}, & z_2 = \infty; \\ \frac{z-z_3}{z_1-z_2}, & z_3 = \infty. \end{cases},$$

tal que $T \in TM$ satisfazendo a hipótese. \blacksquare

Corolário. Dados $z_1, z_2, z_3, w_1, w_2, w_3$ distintos em \mathbb{C}_∞ , existe uma única $T \in TM$ tal que

$$T(z_i) = w_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Prova. Exercício. ■

Observe que se $z_i \in \mathbb{C}_\infty, i = 1, 2, 3$, distintos e $T \in TM$ é tal que a proposição seja satisfeita, denotaremos $T(z)$ por $T(z) := [z, z_1, z_2, z_3]$.

Exemplo 5.2. Se $[z, 1, 0, \infty] = z, z \in \mathbb{C}_\infty, z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}_\infty$ distintos, então

$$\begin{aligned} [z_1, z_1, z_2, z_3] &= 1; \\ [z_2, z_1, z_2, z_3] &= 0; \\ [z_3, z_1, z_2, z_3] &= \infty. \end{aligned}$$

Proposição. Sejam $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}_\infty$ distintos e $S \in TM$. Então,

$$[z, z_1, z_2, z_3] = [S(z), S(z_1), S(z_2), S(z_3)], \quad z \in \mathbb{C}_\infty.$$

Prova. Seja $T(z) = [z, z_1, z_2, z_3]$ e tome $M = T \circ S^{-1}$. Note que

$$\begin{aligned} M(S(z_1)) &= 1, \\ M(S(z_2)) &= 0, \\ M(S(z_3)) &= \infty. \end{aligned}$$

Assim,

$$M(z) = [S(z), S(z_1), S(z_2), S(z_3)]$$

e $T(z) = M(S(z)) = [S(z), S(z_1), S(z_2), S(z_3)]$. ■

Proposição. Sejam $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}_\infty$ distintos. Então, $[z_1, z_2, z_3, z_4] \in \mathbb{R}$ se e só se $z_i \in C$ para algum círculo.

Prova. \Rightarrow Se $z_i \in C, i = 1, 2, 3, 4$, então $z_1 \in D$, em que D é o único círculo determinado por z_2, z_3, z_4 .

Exercícios. Mostre que $[z_1, z_2, z_3, z_4] \in \mathbb{R}$

\Leftarrow Definimos $S(z) = [z, z_2, z_3, z_4], z \in \mathbb{C}_\infty$. Mostraremos que $S^{-1}(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$ e $S^{-1}(\mathbb{R}_\infty)$ é um círculo.
Caso 1: Seja $w \in S^{-1}(\mathbb{R})$ e sejam a, b, c, d números complexos tais que

$$S(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

como $S(w)$ pertence a \mathbb{R} , temos $S(w) = \overline{S(w)}$, donde segue que

$$\frac{aw + b}{cw + d} = \frac{\bar{a}\bar{w} + \bar{b}}{\bar{c}\bar{w} + \bar{d}},$$

o que implica em $(cw + d)(\bar{a}\bar{w} + \bar{b}) = (aw + b)(\bar{c}\bar{w} + \bar{d})$. Logo,

$$(c\bar{a} - a\bar{c})|w|^2 + (c\bar{b} - a\bar{d})w + (d\bar{a} - b\bar{c})\bar{w} + (d\bar{b} - b\bar{d}) = 2i\text{Im}(\bar{a}c) + 2i(\text{Im}(w(bc - ad)) + 2i\text{Im}(\bar{d}b)) = 0. \quad (3)$$

Caso 1.1: $\text{Im}(\bar{a}c) = 0$, seja $\alpha = bc - ad$. Segue de 3 que

$$2i(\text{Im}(w\alpha) + \text{Im}(\bar{d}b)) = 0.$$

Logo, $\text{Im}(\alpha w + \beta) = 0, \beta = \text{Im}(\bar{d}b)$. Assim, $\alpha w + \beta \in \mathbb{R}$, em que $r : \frac{-\beta z t}{\alpha}, t \in \mathbb{R}$.

Caso 1.2: $\rho = \text{Im}(\bar{a}c) \neq 0$. Seja $\gamma = c\bar{b} - a\bar{d}$. Então, dividindo 3 por $2i\rho$, temos

$$\begin{aligned} |w|^2 + \text{Im}(w \frac{\gamma}{\rho}) + \text{Im}(\frac{\bar{d}b}{\rho}) &= 0 \\ \left(|w + \frac{\gamma}{\rho}|^2 + |\frac{\gamma}{\rho}|^2 \right) &= -\text{Im}(\frac{\bar{d}b}{\rho}) \\ |w - (-\frac{\gamma}{\rho})|^2 &= -\text{Im}(\frac{\bar{d}b}{\rho}) + |\frac{\gamma}{\rho}|^2 > 0 \quad (\text{Exercício}). \end{aligned}$$