

EXERCÍCIOS DE CÁLCULO

Renan Wenzel

13 de dezembro de 2022

Campos e Potenciais

0.1 Exercício 12

Dada a função $\vec{F}(x, y) = (e^x y^3 + y, 3e^x y^2 + x)$, buscamos uma função f tal que $\vec{\nabla} f = \vec{F}$. Assim, basta integrar a primeira entrada com relação a x e a segunda com relação a y :

$$f(x, y) = (e^x y^3 + yx, e^x y^3 + yx)$$

Por outro lado, se $\vec{F}(x, y, z) = (12x^2, \cos(y) \cos(z), 1 - \sin(y) \sin(z))$, será preciso integrar f nas 3 coordenadas. Com efeito, obtemos

$$f(x, y, z) = (4x^3, \sin(y) \cos(z), z + \sin(y) \cos(z)).$$

■

0.2 Exercício 13

Primeiramente, sem utilizar o TFIL, a resolução se torna uma aplicação mecânica do que foi visto ao longo do curso, ou seja, basta calcular

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} dr &= \int_1^e F(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_1^e (2t^2 \ln t, \frac{t^4}{t} + t^2, 2t \cdot t) \cdot (2t, 1, 1) dt \\ &= \int_1^e 4t^3 \ln t + t^3 + t^2 + 2t^2 dt = \int_1^e t^3 (4 \ln t^2 + 1) + 3t^2 dt \\ &= 4 \int_1^e t^3 \ln t dt + \int_1^e t^3 dt + 3 \int_1^e t^2 dt = \left(t^4 \ln t - \frac{t^4}{4} + \frac{t^4}{4} + t^3 \right) \Big|_1^e \\ &= (t^4 \ln t + t^3) \Big|_1^e = e^4 + e^3 - 1 \end{aligned}$$

O segundo método, ou seja, utilizando o TFIL, é mais interessante. Buscaremos uma função f tal que $\vec{\nabla} f = \vec{F}$