UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS E COMPUTACIONAIS - ICMC

Notas de Aula de Análise

Renan Wenzel - 11169472

Alexandre Nolasco de Carvalho - andcarva@icmc.usp.br

15 de março de 2023

Conteúdo

1 Aula 01 - 13/03/2023

1.1 Motivação

- Relembrar sistemas básicos da matemática;
- Relembrar propriedades básicas das principais estruturas $(\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q})$.

1.2 Os Números Naturais

Os números naturais são os que utilizamos para contar objetos, e são caracterizados pelos Axiomas de Peano:

1) Todo número natural tem um único sucessor;
2) Números naturais diferentes têm sucessores diferentes;
3) Existe um único número natural, zero (0), que não é sucessor de nenhum número natural.
4) Seja $X \subseteq \mathbb{N}$ tal que $0 \in X$ e, se n pertence a X, seu sucessor n+1 também pertence a X. Então, X = $\mathbb{N}$. (Propriedade de Indução).

Definição. *Definimos a adição por:* $n + 0 = n, n \in \mathbb{N},$ *e* $n + (p + 1) = (n + p) + 1, p \in \mathbb{N}$. *Além disso, a multiplicação é dada por:* $n.0 = 0, n.(p + 1) = n.p + n, n, p \in \mathbb{N}$. *Ou seja, sabendo somar ou multiplicar um número, sabemos somar e multiplicar seu sucessor.*

Com relação ao quarto axioma, ele leva este nome porque um dos métodos de demonstração, conhecido como prova por indução. Nele, mostramos um caso base, o caso 0, e utilizamos a segunda parte para provar que, se um resultado vale para o caso n, ele vale para n+1, portanto sendo verdadeiro para todos os naturais.

Lema. *Para todo n natural, 1 + n = n + 1.*

Prova. *Note que o resultado é verdadeiro para n = 0. Suponha que o resultado seja válido para n = k e mostremos que vale também para n = k+1. Com efeito, segue pela propriedade de indução e pela definição de soma que*

$$1 + (k + 1) = (1 + k) + 1 = (k + 1) + 1.$$

Segue que o resultado vale para todo n natural. ■

A seguir, mostramos a associatividade e a comutatividade, respectivamente, das operações nos naturais.

Lema. *Para todo n, p, r naturais, (n + p) + r = n + (p + r).*

Prova. *Note que o resultado é válido trivialmente para r = 0 e r = 1. Suponha que o resultado seja válido para r = k e mostremos que vale também para r = k + 1. Com efeito, pela hipótese de indução e definição de adição,*

$$n + (p + (k + 1)) = n + ((p + k) + 1) = (n + (p + k)) + 1 = ((n + p) + k) + 1 = (n + p) + (k + 1).$$

Segue o resultado por indução. ■

Lema. *Para todo n, p naturais, n + p = p + n.*

Prova. *Observe que já mostramos o caso em que p = 1. Suponha que o resultado vale para p = k e vamos mostrar o caso p = k + 1. De fato, pela hipótese de indução e definição de adição, junto do lema de associatividade, temos*

$$n + (k + 1) = (n + k) + 1 = (k + n) + 1 = 1 + (k + n) = (1 + k) + n = (k + 1) + n.$$

Por indução, segue que isso vale para todo natural n. ■

Definição. *Definimos uma ordem em* $\mathbb{N}$ *colocando que* $m \leq n$ *se existe p natural tal que* $n = m + p$.□

A relação de ordem possui as seguintes propriedades:

i) Reflexiva: Para todo n natural, $n \leq n$;

ii) Antissimétrica: Se $m \leq n$ e $n \leq m$, então $m = n$;

iii) Transitiva: Se $m \leq n$ e $n \leq p$, então $m \leq p$;

iv) Dados m, n naturais, temos ou $m \leq n$, ou $n \leq m$;

v) Se $m \leq n$ e p é um natural, então $m + p \leq n$ e $mp \leq np$

1.3 Números Inteiros e Racionais

Usualmente, construimos os inteiros a partir dos naturais tomando os pares ordenados de números naturais com a seguinte identificação (a, b) $\sim$ (c, d) se a + d = b + c. Assim, podemos representar

$$\mathbb{N} = \{(0,0),(1,0),(2,0),(3,0),\cdots\}, \quad -\mathbb{N}^* = \{\cdots,(0,3),(0,2),(0,1)\}.$$

Tomar o sucessor será somar 1 à primeira coordenada e, para os inteiros negativos, voltar a identificar (1, n) com (0, n-1).

Os números racionais são construídos tomando o conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ e identificando os pares $(a,b)\sim(c,d)$ para os quais ad = bc. Representamos um par (a, b) neste conjunto por $\dfrac{a}{b}$. A soma e o produto em $\mathbb{Q}$ são dados, respectivamente, por:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} := \frac{ad+bc}{bd}$$
$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} := \frac{ac}{bd}.$$

Chamamos a adição a operação que a cada par $(x,y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ associa sua soma $x + y \in \mathbb{Q}$ e chamamos multiplicação a operação que a cada par $(x,y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ associa seu produto $x.y \in \mathbb{Q}$. A terna $(\mathbb{Q}, +, .)$ satisfaz as propriedades de um corpo, i.e.,

$$(A1)(x+y)+z = x+(y+z), \quad \forall x,y,z \in \mathbb{Q}$$
$$(A2)x+y = y+x, \quad \forall x,y \in \mathbb{Q}$$
$$(A3)\exists 0 \in \mathbb{Q} : x+0 = x, \quad \forall x \in \mathbb{Q}$$
$$(A4)\forall x \in \mathbb{Q}, \exists y \in \mathbb{Q}(y=-x) : x+y = 0$$
$$(M1)(xy)z = x(yz), \quad \forall x,y,z \in \mathbb{Q}$$
$$(M2)xy = yx, \quad x,y \in \mathbb{Q}$$
$$(M3)\exists 1 \in \mathbb{Q} : 1.x = x.1 = x, \quad \forall x \in \mathbb{Q}$$
$$(M4)\forall x \in \mathbb{Q}, \exists y = \frac{1}{x} \in \mathbb{Q} : x.y = 1$$
$$(D)x(y+z) = xy+xz, \quad \forall x,y,z \in \mathbb{Q}.$$

2 Aula 02 - 15/03/2023

2.1 Motivações

- Propriedades básicas dos racionais;
- Construção do corpo dos reais a partir dos racionais;
- Cortes de Dedekind.

2.2 Propriedades de $\mathbb{Q}$ e sua Ordem

Com as 9 propriedades de corpo, conseguimos obter novas regras nos racionais, como a famosa lei do cancelamento:

Proposição. *Em $\mathbb{Q}$, vale*

$$x + z = y + z \Rightarrow x = y$$

e, se $z \neq 0$,

$$xz = yz \Rightarrow x = y$$

Prova.

$$x = x + 0 = x + (z + (-z)) = (x + z) + (-z) = (y + z) + (-z) = y + (z + (-z)) = y + 0 = y$$
$$x = x.1 = x(z.\frac{1}{z}) = (xz)\frac{1}{z} = (yz)\frac{1}{z} = y(z\frac{1}{z}) = y.1 = y. \blacksquare$$

Proposição. *Os elementos neutros da adição e multiplicação são únicos. Os elementos oposto e inverso também o são.*

Proposição. *Para todo x racional, x.0 = 0.*

Proposição. *Para todo x racional, -x = (-1)x.*

A maioria desses resultados acima seguem diretamente da lei do cancelamento. Suas demonstrações ficam como exercício.

Definição. *Diremos que*

$$\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} = \begin{cases} \textit{não-negativo}, & ab \in \mathbb{N} \\ \textit{positivo}, & ab \in \mathbb{N}, a \neq 0 \end{cases}$$

e diremos que

$$\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} = \begin{cases} \textit{não-positivo}, & \frac{a}{b} \textit{ não for postivo} \\ \textit{negativo}, & \frac{a}{b} \textit{ não for não-negativo.} \end{cases} \quad \square$$

Definição. *Sejam x, y racionais. Diremos que x é menor e que y e escrevemos "$x < y$" se existir t racional positivo tal que*

$$y = x + t.$$

Neste mesmo caso, podemos dizer que y é maior que x, escrevendo "$x > y$". Em particular, temos $x > 0$ se x for positivo e $x < 0$ se x for negativo.

Ademais, se $x < y$ ou $x = y$, escrevemos "$x \leq y$" se existir racional t não-negativo tal que

$$y = x + t$$

e, se $x > y$ ou $x = y$, escrevemos "$x \geq y$" caso exista racional t não-positivo com

$$y = x + t.\square$$

A quádrupla $(\mathbb{Q}, +, ., \leq\ )$ satisfaz as propriedades de um corpo ordenado, i.e.,

$$(O1) x \leq x \forall x \in \mathbb{Q};$$
$$(O2) x \leq y \text{ e } y \leq x \Rightarrow x = y \forall x, y \in \mathbb{Q};$$
$$(O3) x \leq y, y \leq z \Rightarrow x \leq z \forall x, y, z \in \mathbb{Q};$$
$$(O4) \forall x, y \in \mathbb{Q}, x \leq y \text{ ou } y \leq x;$$
$$(OA) x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z;$$
$$(OM) x \leq y \text{ e } z \geq 0 \Rightarrow xz \leq yz.$$

Proposição. *Para quaisquer x, y, z, w no corpo ordenado dos racionais, valem*

$$
\begin{aligned}
&i.)x < y \iff x + z < y + z\\
&ii.)z > 0 \iff \frac{1}{z} > 0\\
&iii.)z > 0 \iff -z < 0\\
&iv.)z > 0 \Rightarrow x < y \iff xz < yz\\
&v.)z < 0 \Rightarrow x < y \iff xz > yz\\
&vi.)xz < yw \iff \begin{cases} 0 \leq x < y \\ 0 \leq z < w \end{cases}\\
&vii.)0 < x < y \iff 0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}\\
&viii.)x < y \ ou \ x = y \ ou \ x > y\\
&ix.)xy = 0 \iff x = 0 \ ou \ y = 0.\\
&x.)\ \left.\begin{matrix} x \leq y \\ z \leq w \end{matrix}\right\} \Rightarrow x + z \leq y + w\\
&xi.)\ \left.\begin{matrix} 0 \leq x \leq y \\ 0 \leq z \leq w \end{matrix}\right\} \Rightarrow xz \leq yw.
\end{aligned}
$$

2.3 Incompletude de $\mathbb{Q}$

Os números racionais podem ser representados por pontos em uma reta horizontal ordenada, chamada reta real. Se P for a representação de um número racional x, diremos que x é a abscissa de P. Note que nem todo ponto da reta real é racional. Para isso, considere um quadrado de lado 1 e diagonal d. Pelo Teorema de Pitágoras, $d^2 = 1^2 + 1^2 = 2$. Agora, seja P a intersecção do eixo x com a circunferência de centro em 0 e raio d. Mostremos que P é um ponto da reta com abscissa $x \notin \mathbb{Q}$.

Proposição. *Seja a um inteiro. Então, se a for ímpar, seu quadrado também será. Além disso, se a for par, seu quadrado também é par.*

Proposição. *A equação $x^2 = 2$ não admite solução racional.*

A ideia da prova é escrever um x na forma de fração e chegar na contradição de que tanto o numerador quanto o denominador serão números pares. Com isso, conclui-se que não existe racional irredutível com quadrado igual a 2, portanto não existe racional satisfazendo a equação.

Essa discussão mostra que existem vãos na "reta" dos racionais, requerindo a adoção de um novo corpo. Essa é a principal motivação por trás dos números reais, "preencher"os buracos deixados pelos racionais.

Proposição. *(Exercício.) Sejam $p_1, \cdots, p_n$ números primos distintos. Então, a equação $x^2 = p_1 p_2 \cdots p_n$ não tem solução racional.*

Vimos que os números racionais com a sua adição, multiplicação e relação de ordem é um corpo ordenado. Nos interessamos, também, pelo corpo dos reais e dos racionais $(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. De forma abstrata, um corpo é um conjunto não-vazio $\mathbb{F}$ em que estão definidas duas operações binárias

$$+ : \mathbb{F} \times \mathbb{F} \to \mathbb{F}, \quad (x, y) \mapsto x + y$$

e

$$. : \mathbb{F} \times \mathbb{F} \to \mathbb{F}, \quad (x, y) \mapsto xy$$

em que valem as oito propriedades vistas previamente para a definição das operações em $\mathbb{Q}$ Se, ainda por cima, no corpo $\mathbb{F}$ está definida uma ordem com propriedades análogas às vistas para a quádrupla $(\mathbb{Q}, +, ., \leq)$, diremos que $(\mathbb{F}, +, ., \leq)$ é um corpo ordenado.

Definição. *Diremos que um subconjunto A de um corpo $\mathbb{F}$ ordenado é limitado superiormente se existe um L neste corpo tal que $a \leq L$ para todo a de A.*

Definimos para um subconjunto limitado superiormente um número $\sup(A) \in \mathbb{F}$ como o menor limitante superior de A, i.e., se $a \leq \sup(A)$ para todo a de A e se existe $f \in \mathbb{F}$ com $f < \sup(A)$, então existe um a em A com $f < a$.

Por fim, diremos que um corpo ordenado é completo se todo subconjunto limitado superiormente possui supremo. $\square$

Nem todo subconjunto limitado superiormente de $\mathbb{Q}$ tem supremo, ou seja, $\mathbb{Q}$ não é completo.

2.4 Os Números Reais ($\mathbb{R}$)

A ideia que iremos usar para construir o conjunto dos reais é que o conjunto dos números reais preenche toda a reta real. Os Elementos de $\mathbb{R}$ serão os subconjuntos de $\mathbb{Q}$ à esquerda de um ponto da reta real e serão chamados de cortes.

Definição. *Um corte é um subconjunto $\alpha \subsetneq \mathbb{Q}$ com as seguintes propriedades:*

i) $\alpha \neq \emptyset$ e $\alpha \neq \mathbb{Q}$;

ii) Se $p \in \alpha$ e q é um racional com $q < p$, então $q \in \alpha$ (todos os racionais à esquerda de um elemento de α estão em α);

iii) Se $p \in \alpha$, existe um $r \in \alpha$ com $p < r$ (α não tem um maior elemento). $\square$

Essa ideia foi proposta inicialmente por Julius Wilhelm Richard Dedekind, um matemático alemão, em 1872, com o objetivo de encontrar uma explicação e construção elementar para os números reais.

Exemplo 1. *Se q é um racional, definimos $q^* = \{r \in \mathbb{Q} : r < q\}$.Então, q^* é um corte que chamamos de racional. Os cortes que não são desse tipo se chamam cortes irracionais.*

Exemplo 2. $\sqrt{2} = \{q \in \mathbb{Q} : q^2 < 2\} \cup \{q \in \mathbb{Q} : q < 0\}$ *é um corte irracional.*

Observe que se α é um corte, p é um ponto dele e q não é, então $p < q$. Além disso, se r pertence a α e $r < s$, então s não pertence ao corte.

Definição. *Diremos que $\alpha < \beta$, em que α e β são cortes, se $\alpha \subsetneq \beta$.*

Proposição. *Se α, β, γ são cortes,*

i) $\alpha < \beta$ e $\beta < \gamma$ implica que $\alpha < \gamma$;

ii) Exatamente uma das seguintes relações é válida: $\alpha < \beta$ ou $\alpha = \beta$ ou $\beta < \alpha$

iii) Todo subconjunto não-vazio e limitado superiormente de $\mathbb{R}$ tem supremo.