UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS E COMPUTACIONAIS - ICMC

# O Problema da Sala Reprovada

Uma Releitura do Problema dos 100 Prisioneiros


**Renan Wenzel - 11169472**

**Pedro Rios - prios@icmc.usp.br**


21 de julho de 2022

# Conteúdo

# 1 Introdução ao Problema

## 1.1 Enunciando a Problemática

Imagine que uma turma de Fundamentos de Matemática de 30 alunos está com média 0. Todos da sala encontram-se desolados, achando que serão reprovados sem chance alguma de sucesso. Vendo esta situação, o professor, em toda sua complacência, resolvo propor a seguinte salvação aos desesperados alunos:

> "*Organizei nas 30 carteiras dessa sala números. Embaixo delas, há um bilhete com um número aleatório que não se repete. Para cada número, há um aluno, e cada um de vocês possui exatamente 15 chances de encontrar o número correspondente. Se todos encontrarem os números respectivos dentro dessas tentativas, aumentarei a nota de todos para 10, mas, caso contrário, a nota permanecerá 0 sem oportunidade de uma prova substitutiva.*"

Os alunos aceitaram o desafio e começaram a trabalhar no problema. Fica a pergunta para o leitor: Qual é a melhor estratégia que eles podem usar?

## 1.2 Abordagem Inicial

A primeira ideia que eles tiveram foi a de todos checarem carteira por carteira aleatoriamente; Afinal, essa é a primeira ideia que viria à mente de praticamente qualquer um. São 15 chances para 30 carteiras, ou seja, cada aluno tem $1/2 = 50\%$ de chance de encontrar seu número, totalizando

$$\frac{15}{30} = \left(\frac{1}{2}\right)^{30} \approx$$

$$\approx 0,000,000,000,9 = 9.10^{-10}.$$

Pra comparação, as chances de ganhar na Mega-Sena são de aproximadamente $0,000,000,02 = 2^{-8}$, uma ordem 100 vezes maior que as chances dos alunos ganharem. Em conclusão, eles precisam encontrar outra estratégia, e a combinatória entra para calcularmos as chances deles ganharem com uma estratégia melhor.

# 2 Uma Solução Aceitável ao Problema

## 2.1 O Algorítmo para Resolver

O princípio por trás da solução ótima é criar um laço com os números das carteiras tal que em algum momento antes do fim, o número do aluno irá aparecer para ele. Isso pode ser escrito num algoritmo da seguinte forma:
**O estudante abre a carteira com o seu próprio número;**
**Se o número for o dele, parar;**
**Se não, o estudante segue até a carteira que tem o número que ele encontrou.**
Com os ciclos organizados desta maneira, é garantido que o aluno esteja num cíclo que contenha seu número, afinal o ciclo só termina quando o mesmo for encontrado. A questão restante é se esse número pode ser encontrado em menos de 15 tentativas, ou seja, o maior ciclo feito desta forma tem que ter tamanho de no máximo 15 para que os alunos consigam o 10.

## 2.2 Um Exemplo do Aluno Enumerado 13

**Exemplo de Sucesso** Considere um aluno específico que deve encontrar o número 13. Ele anda até a carteira 13 e encontra o número 10 escrito, fazendo com que ele ande até a carteira 10. Olhando embaixo dela, ele acha o número 5, ou seja, ele deve andar até a quinta carteira e conferir o número abaixo dela, marcado 29. Ao chegar na vigésima nona mesa, ele finalmente encontra o seu número, 13. Uhul, o aluno 13 conseguiu passar!

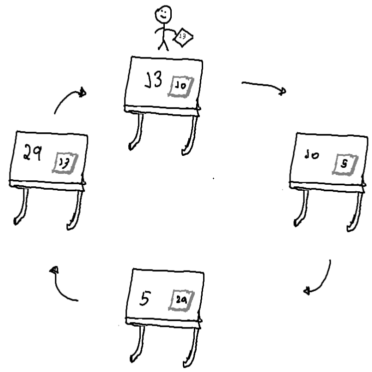


Figura 1: Número 13 Ganha

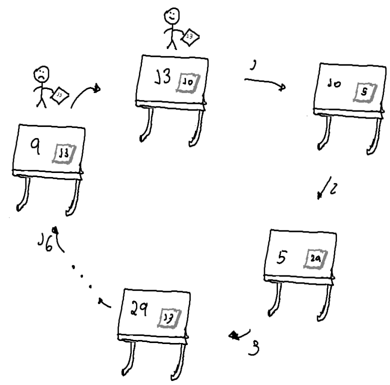


Figura 2: Número 13 Perde

**Exemplo de Falha** Dessa vez, considere o mesmo aluno com número 13. Ele anda até a carteira 13 e encontra o número 10 escrito, fazendo com que ele ande até a carteira 10. Olhando embaixo dela, ele acha o número 5, ou seja, ele deve andar até a quinta carteira e conferir o número abaixo dela, marcado 29. Ao chegar na vigésima nona mesa, ele acha o número 5, e fica repetindo isso até esgotar as 15 tentativas. Para fins de tragédia, na décima sexta tentativa, em que ele está na mesa de número 9, ele finalmente encontra seu número. Porém, como tomou 16 chances até ele achar, o número 13 não ganhou, e todos da sala permaneceram com 0. : (.

## 2.3 Calculando as Chances de Sucesso

Considere uma permutação de 1 a 30. Se um dos ciclos tiver tamanho maior que 15, então os outros todos devem ter tamanhos menores do que 15 para manter consistência nessa permutação.

Em outras palavras, seja d o tamanho deste cíclo, ou seja, $d > 15$. O conceito de escolha nos permite calcular quantas formas um aluno pode cair neste cíclo, que será dada por $\binom{30}{d}$ e, sendo todas as possíveis permutações do ciclo únicas, ou seja, removendo as permutações simétricas, existem $(d-1)!$ formas de organizar os números do ciclo de falha no jogo. Ademais, para os outros ciclos, seus números estarão organizados de $(30-(d-1)-1) = (30-d)!$ formas diferentes, já que estamos excluindo as permutações anteriores.

Logo, para um ciclo de tamanho $l > 15$, existem

$$(d-1)!(30-d)!\binom{30}{d} = \frac{30!(30-d)!(d-1)!}{d!(30-d)!} = \frac{30!(30-d)!(d-1)!}{d(d-1)!(30-d)!} = \frac{30!}{d}$$

formas de escrever seus números.

Com esta informação, vamos encontrar a chance de fracasso no jogo, ou seja, iremos somar todas as chances de falha e dividir cada uma pelo número total de permutações, isto é,

$$\frac{30!}{30!16} + \frac{30!}{30!16} + \cdots + \frac{30!}{30!29} + \frac{30!}{30!30} = \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{30} \approx 0,677.$$

Por fim, como todo bom estudante de probabilidade, se sabemos a chance de fracasso, basta subtrair ela de um para encontrar as chances de sucesso, que acabam sendo

$$P(\text{sucesso}) = 1 - 0,677 = 0,323 \approx 32\%.$$

## 2.4 Considerações finais

Os alunos, após compreenderem essa estratégia, decidem implementá-la, efetivamente aumentando as chances de sucesso de $9.10^{-10}$ para $3,2.10^{-1}$, o que resulta em um aumento de

$$\frac{3,2.10^{-1}}{9.10^{-10}} \approx 0,35.10^{9} = 3,5.10^{8}$$

vezes (consideravelmente maior!).

**ESSE TRABALHO FOI BASEADO NO “PROBLEMA DOS 100 PRISIONEIROS". SE QUISER SABER MAIS, SEGUEM ABAIXO ALGUMAS FONTES.**

# Referências


[1] MULLER, D. **The Riddle That Seems Impossible Even If You Know The Answer**. Youtube, 30 de Junho de 2022. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=iSNsgj1OCLA. Acesso em: 18 de Julho de 2022.

[2] STANLEY, R.P. *Algebraic Combinatorics: Walks, Trees, Tableaux, and More*. Springer. Acesso em: 18 de Julho de 2022.