



UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS E  
COMPUTACIONAIS - ICMC

**Notas de Física**

**Renan Wenzel - 11169472**

**Patrícia Christina Marques Castilho - [patricia.castilho@ifsc.usp.br](mailto:patricia.castilho@ifsc.usp.br)**

19 de abril de 2023

---

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Aula 00 - 23/03/2023</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Aula 01 - 27/03/2023</b>	<b>3</b>
2.1	Movimentos 1D . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Aula 02 - 29/03/2023</b>	<b>6</b>
3.1	Motivações . . . . .	6
3.2	Aceleração . . . . .	6
3.3	Movimento Retilíneo Uniformemente Variado. . . . .	6
<b>4</b>	<b>Aula 03 - 30/03/2023</b>	<b>9</b>
4.1	Motivações . . . . .	9
4.2	Exercício 29 - Tipler . . . . .	9
4.3	Exercício 44 - Tipler . . . . .	10
4.4	Exercício 58 - Tipler . . . . .	10
4.5	Exercício 67 - Tipler . . . . .	10
4.6	Exercício 72 - Tipler . . . . .	10
4.7	Exemplo - Aula 06 Vanderlei . . . . .	11
<b>5</b>	<b>Aula 04 - 10/04/2023</b>	<b>13</b>
5.1	Motivações . . . . .	13
5.2	Vetores . . . . .	13
5.3	Movimento Uniforme Bidimensional . . . . .	15
<b>6</b>	<b>Aula 06 - 13/04/2023</b>	<b>16</b>
6.1	Motivações . . . . .	16
6.2	Movimento Relativo . . . . .	16
<b>7</b>	<b>Aula 7 - 17/03/2023</b>	<b>18</b>
7.1	Motivações . . . . .	18
7.2	Movimento Circular . . . . .	18
7.3	Acelerações no Movimento Circular. . . . .	19
7.4	Movimento Circular Uniforme . . . . .	20
<b>8</b>	<b>Aula 8 - 19/04/2023</b>	<b>22</b>
8.1	Motivações . . . . .	22
8.2	Exemplo de MCU - 67 Típos . . . . .	22
8.3	Dinâmica e Leis de Newton . . . . .	22
8.3.1	O que esperar . . . . .	22
8.3.2	Leis de Newton . . . . .	23
8.3.3	Exemplo 4.2 - Tipler . . . . .	24

---

## 1 Aula 00 - 23/03/2023

(Revisão Unidades de Medidas)

## 2 Aula 01 - 27/03/2023

- Revisar propriedades de derivadas;
- Aplicar derivadas em movimento 1D.

### 2.1 Movimentos 1D

Dada uma partícula com posição descrita por  $x = x(t)$ , em que  $t$  é a variável de tempo, denotamos seu deslocamento por  $\Delta x = x_2 - x_1 = x(t_2) - x(t_1)$ . Analogamente, o intervalo de tempo é definido por  $\Delta t = t_2 - t_1$ . Com essas ferramentas, já podemos definir a velocidade média de um objeto em uma dimensão como  $\vec{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ . Observe que, quanto menor o intervalo de tempo, mais momentâneo se torna essa definição, de modo que a velocidade instantânea pode ser encontrada como

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \vec{v}(t).$$

Regras de derivadas:

$$f(t) = c \Rightarrow \frac{df}{dt} = 0 \text{ Derivada de uma constante é sempre nula;}$$

$$f(t) = x^n \Rightarrow \frac{df}{dt} = nx^{n-1} \text{ Regra do tombo;}$$

$$f(t) = A \sin(t) \Rightarrow \frac{df}{dt} = A \cos(t);$$

$$f(t) = B \cos(t) \Rightarrow \frac{df}{dt} = -B \sin(t);$$

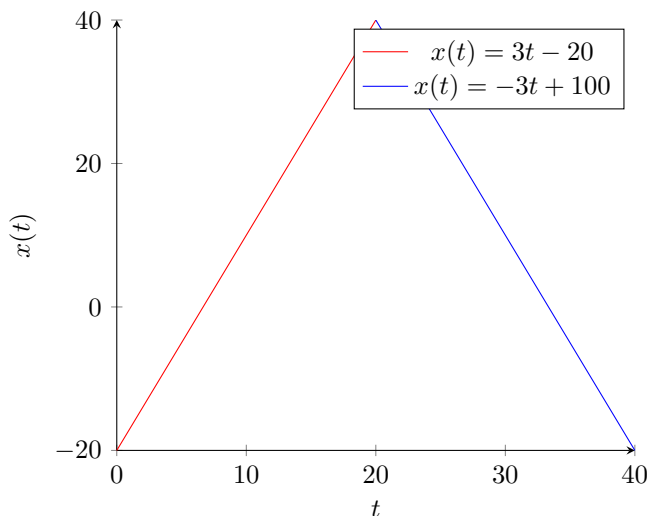
$$f(t) = Ce^t \Rightarrow \frac{df}{dt} = Ce^t.$$

#### Exemplo 1.

$$i) f(t) = 3t^4 + t^2 \Rightarrow \frac{df}{dt} = 12t^3 + 2t$$

$$ii) f(t) = 5 \sin(t) + 3(t^2 + 1) = 5 \sin(t) + 3t^2 + 3 \Rightarrow \frac{df}{dt} = 5 \cos(t) + 6t$$

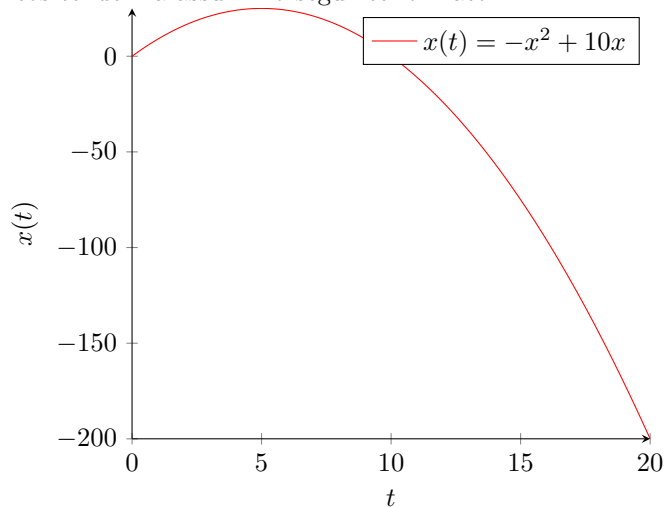
A partir deste ponto, tome  $t$  como tempo,  $x(t)$  como posição e  $v(t)$  a velocidade instantânea.



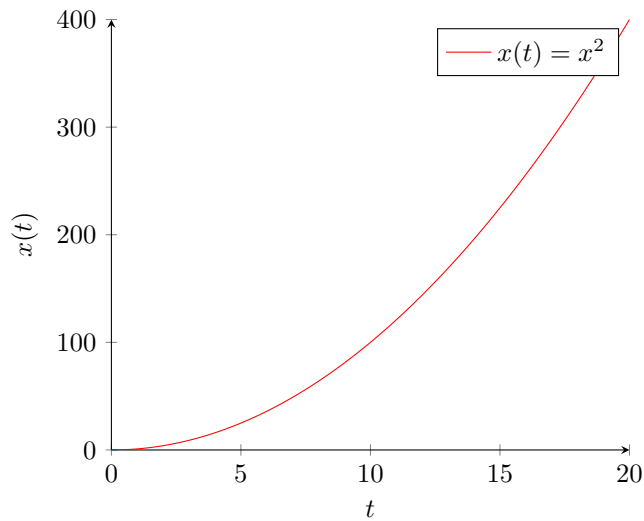
---

Esse movimento em que a velocidade é descrita por uma linha reta é conhecido como movimento retilíneo uniforme, pois a velocidade  $v(t)$  muda de forma linear, i.e.,  $\frac{dx}{dt} = c$ , em que  $c$  é uma constante.

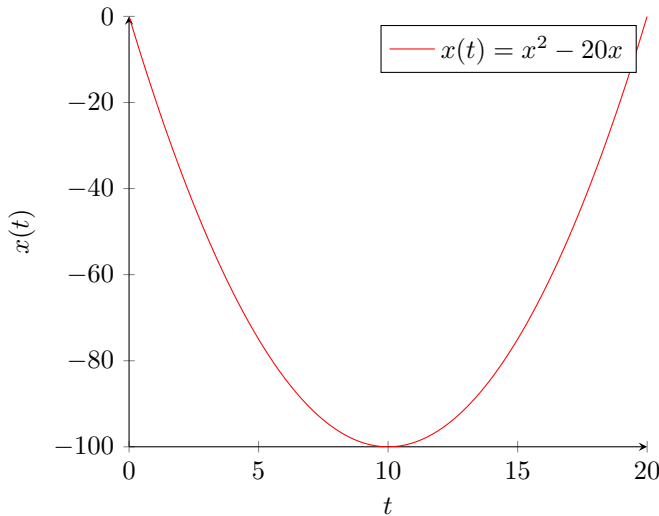
Por outro lado, há outro tipo de movimento, o movimento retilíneo uniformemente variado, em que a velocidade não é constante. A ação responsável por mudar a velocidade é conhecida como aceleração, e os gráficos tendem a assumir o seguinte formato



Ou, caso a velocidade cresça com o tempo,



Há ainda o caso em que a velocidade cresce por um tempo e diminui depois, com gráficos como o que segue



Nestes casos, para calcular o deslocamento da partícula, precisamos somar muito mais intervalos de tempo. Para isso, observe que cada instante, a posição da partícula pode ser encontrada multiplicando-se o intervalo de tempo pela velocidade instantânea, i.e.,  $\Delta x'_i = v'_i \Delta t'_i$ . Quebrando os intervalos desta forma, o deslocamento de um ponto a outro é denotado por

$$\Delta x_{1,2} = x(t_2) - x(t_1) \approx \sum_{k=1}^N \Delta x'_i = \sum_{k=1}^N v'_i \Delta t'_i$$

Assim como para a velocidade instantânea, quanto menor tomarmos o intervalo de tempo, mais preciso é o valor encontrado para  $\Delta x_{1,2}$ , o que indica uma boa oportunidade para o uso do limite novamente. Com isso, definimos

$$x(t_2) - x(t_1) = \lim_{\Delta t' \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N v(t'_i) \Delta t'_i = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$$

Este último símbolo, chamado integral, descreve a área “embaixo” da curva da função  $f(t)$  dentro do intervalo  $[t_1, t_2]$ . Supondo que  $c$  e  $k$  são constantes quaisquer, seguem abaixo algumas das regras de integração:

$$i) f(t) = ct^n \Rightarrow \frac{df}{dt} = nct^{n-1} \Rightarrow F(t) = \frac{ct^{n+1}}{n+1} \text{ (Primitiva de } f)$$

$$ii) \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt = F(t_2) - F(t_1) = \frac{c}{n+1} t_2^{n+1} - \frac{c}{n+1} t_1^{n+1} \text{ (Integral definida de } f)$$

$$iii) \int f(t) dt = \frac{c}{n+1} t^{n+1} + k \text{ (Integral indefinida de } f)$$

Para conferir se a integral está correta, é preciso derivar a função  $F$  e, se obter como resultado a função  $f$ , significa que está correto. Com este conhecimento em mente, segue que

$$x(t) = \int v_0 dt = v_0 t + x_0$$

Algumas outras regras importantes:

$$iv) \frac{d \sin(t)}{dt} = \cos(t) \Rightarrow \int \cos(t) dt = \sin(t) + c$$

$$v) \frac{d \cos(t)}{dt} = -\sin(t) \Rightarrow \int \sin(t) dt = -\cos(t) + c$$

$$vi) \frac{de^t}{dt} = e^t \Rightarrow \int e^t dt = e^t + c$$

Ou seja, em certo sentido, a integral e a derivada são dois lados da mesma moeda, assim como multiplicação e divisão ou adição e subtração.

---

## 3 Aula 02 - 29/03/2023

### 3.1 Motivações

- Estudar a aceleração;
- Entender o Movimento Retilíneo Uniformemente Variado.

### 3.2 Aceleração

Definimos previamente a velocidade média como sendo a variação de tempo dividindo o deslocamento, sendo, portanto, uma quantidade representando a taxa de variação da posição em um intervalo de tempo. De forma análoga, definimos a aceleração como a taxa de variação da velocidade em um intervalo de tempo, ou seja,

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}.$$

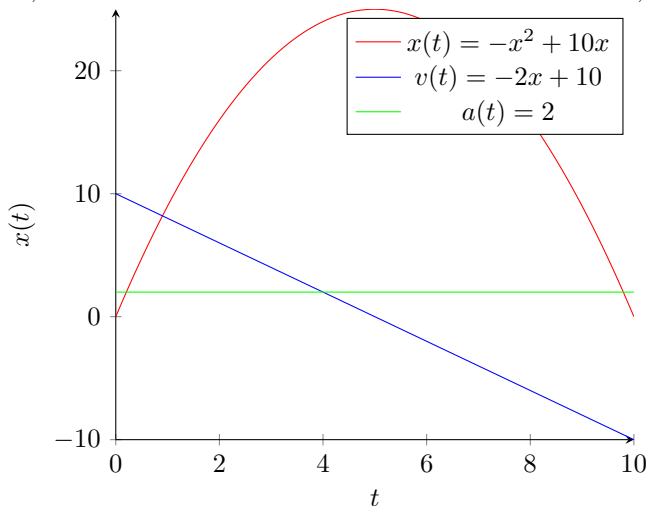
Ainda mais, se ela for positiva, a velocidade aumenta. Caso contrário, ela diminui. Ainda repetindo o processo feito para o caso da velocidade, podemos encontrar uma aceleração instantânea como

$$a(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} \right] = \frac{dv(t)}{dt}$$

Observe também que

$$a(t) = \frac{d}{dt} \left( \frac{dx(t)}{dt} \right) = \frac{d^2x}{dt^2}.$$

Utilizando a análise dimensional, é possível encontrar a dimensão da aceleração como  $[a] = \frac{[v]}{[t]} = \frac{\frac{[L]}{[t]}}{[t]} = \frac{[L]}{[t]^2}$ . Assim, se o sistema de medida for o Sistema Internacional,  $[a] = \frac{m}{s^2}$ .



### 3.3 Movimento Retilíneo Uniformemente Variado.

Sabendo que  $a = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$ , podemos fazer o caminho oposto para encontrar uma fórmula para a posição sabendo a aceleração. De fato, dado um intervalo de tempo  $[t_0, t]$ ,

$$v(t) = \int_{t_0}^t a(t) dt = at \Big|_{t_0}^t = at - at_0$$

Sabemos, também, que  $v(t) - v(t_0) = \Delta v$ , tal que

$$v(t) = v(t_0) + a(t - t_0) = v_0 + a(t - t_0)$$

Além disso, vimos que

$$\Delta x = x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^t v(t) dt.$$

Juntando tudo, segue a fórmula dita:

$$\begin{aligned} x(t) - x(t_0) &= \overbrace{\int_{t_0}^t [v_0 + a(t - t_0)] dt}^{\int f(t)+g(t)dt=\int f(t)dt+\int g(t)dt} = \overbrace{\int_{t_0}^t v_0 dt}^{\int cdt=ct} + \overbrace{\int_{t_0}^t at dt}^{\int t^n dt=\frac{t^{n+1}}{n+1}} - \int_{t_0}^t at_0 dt \\ &\Rightarrow x(t) - x(t_0) = v_0 t \Big|_{t_0}^t + a \frac{t^2}{2} \Big|_{t_0}^t - at_0 t \Big|_{t_0}^t \\ &= v_0(t - t_0) + a \frac{(t^2 - t_0^2)}{2} - at_0(t - t_0) \\ &= v_0(t - t_0) + a \frac{t^2 - t_0^2}{2} - at_0 t + at_0^2 = v_0 t - v_0 t_0 + \frac{a}{2}(t^2 - 2t_0 t + 2t_0^2) \\ &= v_0(t - t_0) + \frac{a}{2}(t - t_0)^2 \\ &\Rightarrow x(t) = x(t_0) + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2. \end{aligned}$$

Com isso, no caso em que  $t_0 = 0$ , segue que

$$\boxed{x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}}$$

Uma coisa notável é que todas essas fórmulas estão dependentes de tempo. No entanto, será que é possível se livrar dessa variável e relacionar, por exemplo, velocidade e posição? A resposta é sim! E vamos mostrar como a seguir, na equação conhecida como Equação de Torricelli. Com efeito,

$$\begin{aligned} (I) \quad (t - t_0) &= \frac{v(t) - v_0}{a} = \frac{v - v_0}{a} \\ (II) \quad x(t) &= x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2 \\ (I \text{ com } II) \quad x &= x_0 + v_0 \frac{v - v_0}{a} + \frac{1}{2}a \frac{v - v_0}{a} \\ &\Rightarrow x = x_0 + \frac{1}{a} \left\{ v_0 v - v_0^2 + \frac{1}{2}(v^2 - 2vv_0 + v_0^2) \right\} \\ &= x_0 + \frac{1}{a} \left\{ -v_0^2 + \frac{v^2}{2} + \frac{v_0^2}{2} \right\} \\ &\Rightarrow x - x_0 = \frac{1}{2a} [v^2 - v_0^2] \iff [v^2 - v_0^2] = 2a(x - x_0). \end{aligned}$$

Portanto, chegamos na Equação de Torricelli

$$\boxed{v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)}$$

Para reforçar o que foi visto até agora, vejamos um exemplo.

**Exemplo 2.** Suponha que um carro freia uniformemente, passando de 60km/h para 30km/h em 5 segundos. Qual é a distância que o carro percorrerá até parar? Em quanto tempo?

**Solução:** Sabemos que  $x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$ ,  $v(t) = v_0 + a(t - t_0)$ , e  $v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$ . Além disso, como é até o carro parar, a velocidade final é 0km/h, a variação de tempo até o momento em que a velocidade atinge 30km/h ( $=8.333\text{m/s}$ ) é dada como  $\Delta t = 5 - 0 = 5\text{s}$ , sendo a velocidade inicial 60km/h ( $=16.666\text{m/s}$ ). Pela equação dois,

$$a = \frac{v(t_1) - v_0}{t_1 - t_0} = \frac{8.33 - 16.66}{5} = -1.66 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

---

Agora, para obter a distância, sendo  $v_2 = 0\text{km/h}$  o valor da aceleração no tempo em que o carro para (o segundo percurso), utilizamos Torricelli para obter o deslocamento no pedaço final do percurso

$$v_2^2 = v_1^2 + 2a(x_2 - x_1) \Rightarrow 0 = 8.33^2 + 2(-1.66)\Delta x_2$$

Assim, isolando o  $\Delta x_2$ ,

$$\Delta x_2 = \frac{8.33^2}{3.32} = \text{Professora vai passar na próxima aula.}$$

Ademais, para encontrar todo o caminho que o carro andou, temos

$$0 = v_0^2 + 2a(x_2 - x_0) = 16.66^2 + 2(-1.66)\Delta x \Rightarrow \Delta x = \frac{16.66^2}{3.32}$$

Finalmente, o instante de tempo pode ser encontrado fazendo

$$v_2(t) = v_1 + a(t_2 - t_0) \Rightarrow 0 = 8.33 - 1.66\Delta t_2 \Rightarrow \Delta t_2 = 5\text{s.} \blacksquare$$



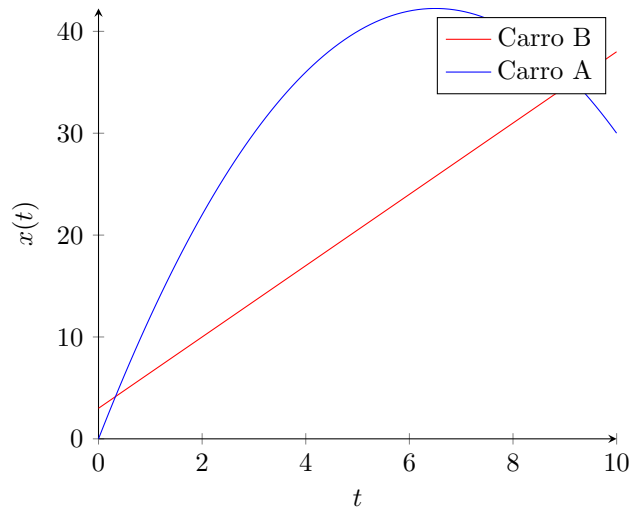
## 4 Aula 03 - 30/03/2023

### 4.1 Motivações

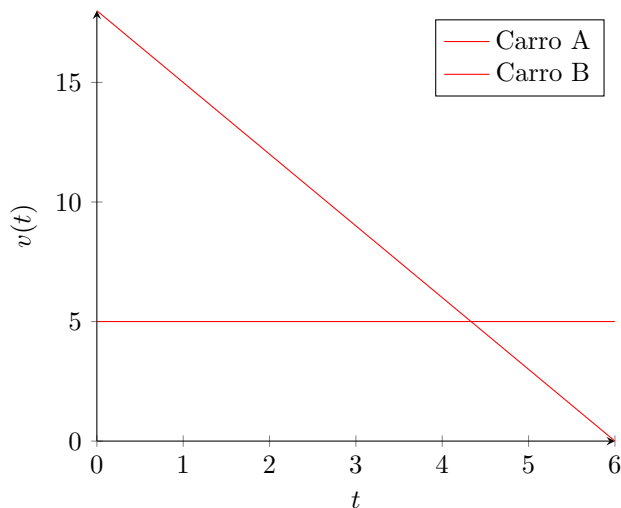
- Resolução de Exercícios.

### 4.2 Exercício 29 - Tipler

“Considere a trajetória de dois carros, o Carro A e o Carro B. (a) Existe algum instante para o qual os carros estão lado-a-lado? (b) Eles viajam sempre no mesmo sentido? (c) Eles viajam com a mesma velocidade em algum instante  $t$ ? (d) Para que  $t$  os carros estão mais distantes entre si? (e) Esboce os gráficos de  $v \times t$ ”



Os carros se encontram lado-a-lado quando os gráficos se cruzam, ou seja, em  $t = 1$  s e  $t = 9$  s (Tipler mais acurado que meu gráfico.). É notável que eles não estão sempre no mesmo sentido, visto que, a partir de 6 s, o gráfico do carro B passa a mudar o sentido. Em aproximadamente 5 s, ambos estão com a mesma velocidade, ou seja, estão com a mesma velocidade, e a distância entre eles está maior exatamente no ponto em que as velocidades estão iguais. Finalmente, seguem os gráficos:



---

### 4.3 Exercício 44 - Tipler

“Um carro viaja em linha reta com  $\vec{v} = 80\text{km/h}$  durante  $\Delta t_1 = 2.5\text{h}$ . Depois,  $\vec{v}_2 = 40\text{km/h}$ ,  $\Delta t_2 = 1.5\text{h}$ . Qual é o deslocamento total? E qual é a velocidade  $\vec{v}$  total?”

$$(a) \quad \Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 = \vec{v}_1 \Delta t_1 + \vec{v}_2 \Delta t_2 \Rightarrow \Delta x = 260\text{km}.$$

$$(b) \quad \vec{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{260}{4} = 65\text{km/h}.$$

### 4.4 Exercício 58 - Tipler

“Um carro acelera de  $48.3\text{km/h}$  para  $80.5\text{km/h}$  em  $3.70\text{s}$ . Qual a aceleração média?”

Primeiramente, precisamos converter as unidades para medidas iguais. Com isso, note que  $\vec{v}_1 = 48.3\text{km/h} = 13.52\text{m/s}$ ,  $\vec{v}_2 = 80.5\text{km/h} = 22.54\text{m/s}$ . Assim, chegamos em

$$\vec{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t} \approx 2.4\text{m/s}.$$

### 4.5 Exercício 67 - Tipler

“Um corpo está em uma posição inicial  $x_1$  com velocidade inicial  $\vec{v}_1$ . Passado um tempo, ele se encontra na posição  $x_2$  com velocidade  $\vec{v}_2$ . Qual é a aceleração deste corpo?”

Utilizaremos Torricelli. sabemos que

$$(1) : \quad x_1 = 6\text{m}, \vec{v}_1 = 10\text{m/s}$$

$$(2) : \quad x_2 = 10\text{m}, \vec{v}_2 = 15\text{m/s}.$$

$$\text{Deste modo, } v^2 = v_0^2 + 2a\Delta x \Rightarrow v_2^2 = v_1^2 + 2a(x_2 - x_1) \Rightarrow a \approx 16\text{m/s}^2$$

### 4.6 Exercício 72 - Tipler

“Um parafuso se desprende de um elevador subindo a  $v_0 = 6\text{m/s}$ . O parafuso atinge o fundo do poço em  $3\text{s}$ .

(a) Qual era a altura do elevador? (b) Qual é a velocidade do parafuso no chão? Tome  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ ”

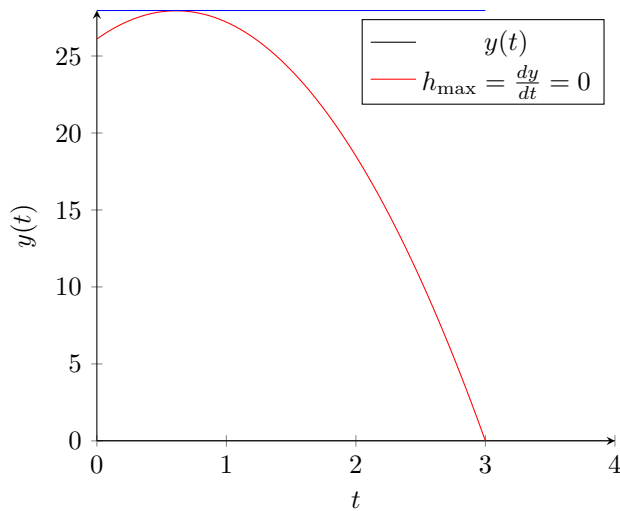
Sabemos que  $t_0 = 0\text{s}$ ,  $y(t_0) = h$ ,  $v(t_0) = v_0$ . Com isso, podemos descrever  $y(t) = h + v_0 t + \frac{1}{2}gt^2$ . Vamos responder, agora, o item a, isto é, qual é o valor da altura  $h$ ? Segue que, em  $t = 3\text{s}$ ,  $y(t) = 0$ . Utilizando a fórmula,

$$h = -v_0 t + \frac{1}{2}gt^2 = -6 \cdot 3 + \frac{1}{2}9.8 \cdot 3^2 = 26.1\text{m}$$

Com relação ao item (b), vimos que  $v(t) = v_0 + at$ . Deste modo,

$$v(3\text{s}) = 6 - 9.8 \cdot 3 = -23.4\text{m/s}$$

Indo um pouco além do que foi pedido, analisemos o movimento do parafuso. É possível concluir que o parafuso atingirá a altura máxima no instante em que  $t^* = \frac{v_0}{g} = 0.6\text{s}$ , visto que este momento ocorre quando  $v(t) = v_0 - gt = 0$ . Com isso, conclui-se que a altura máxima é  $y(t^*) = h + v_0 t^* - \frac{1}{2}gt^{*2} \approx 27.5\text{m}$ . No gráfico,



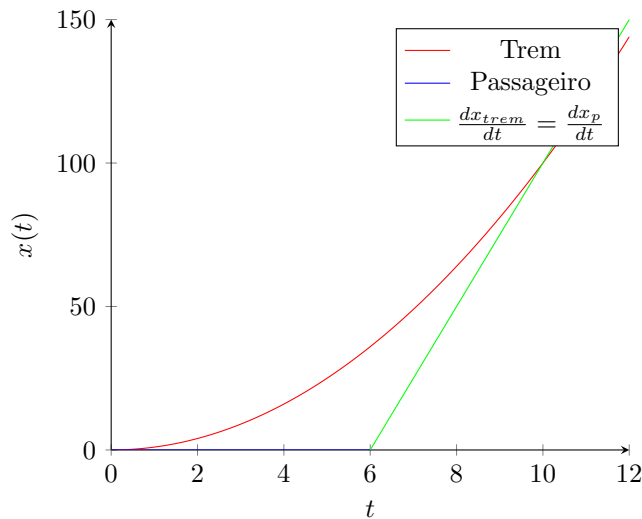
#### 4.7 Exemplo - Aula 06 Vanderlei

“Suponha que há um trem parado no instante  $t=0$  com aceleração  $a$ . Passados 6s, um passageiro chega ao local e observa o trem na posição  $x_{trem_1}$ . Este passageiro sai correndo com velocidade  $v_0$  para tentar alcançar o trem. Qual é a velocidade mínima que o passageiro precisa atingir para alcançá-lo?”

Com relação ao trem, suas condições iniciais são  $t_0 = 0, x_{trem} = 0, v_{trem} = 0$ , tal que  $x_{trem}(t) = \frac{1}{2}at^2$ . Por outro lado, quanto ao passageiro, quando  $t = 6s, x_p = 0$ , de modo que  $x_p(t) = x_{p_0} + v_0t$ . Como temos a informação da posição do passageiro aos 6s,

$$x_p(6) = x_{p_0} + v_0 \cdot 6 = 0 \Rightarrow x_{p_0} = -6v_0 \Rightarrow x_p(t) = v_0(t - 6).$$

No momento em que o passageiro alcança o trem, eles possuem posições iguais, isto é,  $x_p(t) = x_{trem}(t)$ . Graficamente,



Ou seja, buscamos  $t^*$  tal que  $x_p(t^*) = x_{trem}(t^*), v_p(t^*) = v_{trem}(t^*)$ . Com efeito,

$$v_0(t^* - 6) = \frac{at^{*2}}{2} \Rightarrow v_0 = at^* \Rightarrow t^* = \frac{v_0}{a}$$

$$v_0 = \frac{a \left(\frac{v_0}{a}\right)^2}{2 \frac{v_0}{a} - 6} \Rightarrow \frac{v_0^2}{2a} = 6v_0 \Rightarrow v_0 = 12a.$$

---

Outra forma de resolver é utilizando o fato de que quando  $\frac{dv}{dt} = 0$ , a função está num mínimo. Ou seja, basta encontrar o valor mínimo de  $v_0$  que satisfaça o que buscamos. Temos

$$v_0(t-6) = \frac{at^2}{2} \Rightarrow v_0(t) = \frac{at^2}{2} \frac{1}{(t-6)}.$$

Agora, derivando essa equação para  $v_0$ ,

$$\frac{dv_0}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{at^2}{2} \frac{1}{t-6} \right) = \frac{d}{dt} (f(t)g(t)),$$

em que  $f(t) = \frac{at^2}{2}$ ,  $g(t) = (t-6)^{-1}$ . Fazemos isso porque há uma regra para derivar o produto de funções, a Regra do Produto

$$\boxed{\frac{df(t)g(t)}{dt} = g(t)\frac{df(t)}{dt} + f(t)\frac{dg(t)}{dt}}$$

Derivando individualmente  $f$  e  $g$ ,

$$\frac{df(t)}{dt} = at, \quad \frac{dg(t)}{dt} = -(t-6)^{-2} = -\frac{1}{(t-6)^2}.$$

Agora, vamos juntar tudo para obter a derivada de  $v_0$ :

$$\begin{aligned} \frac{dv_0}{dt} &= \frac{df(t)}{dt}g(t) + \frac{dg(t)}{dt}f(t) = \frac{at}{t-6} - \frac{1}{2(t-6)^2}at^2 \\ &= at \left( \frac{1}{t-6} - \frac{t}{2(t-6)^2} \right) = 0 \\ &\Rightarrow \frac{1}{t-6} = \frac{t}{2(t-6)} \Rightarrow 1 = \frac{t}{2(t-6)} \\ &\Rightarrow 2(t-6) = t \Rightarrow 2t - t = 12 \Rightarrow t = 12s. \end{aligned}$$

---

## 5 Aula 04 - 10/04/2023

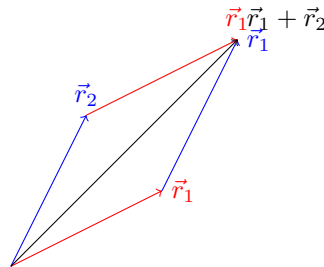
### 5.1 Motivações

- Iniciar os estudos de movimentos em um plano todo (duas dimensões);
- Revisar vetores e sua manipulação.

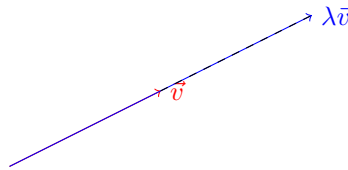
### 5.2 Vetores

Começamos com um estudo das propriedades de vetores. Dados vetores  $\vec{r}_1, \vec{r}_2$  e um número real  $\lambda$ , definimos:

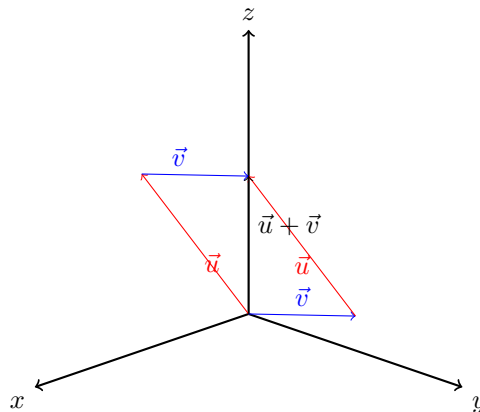
- i) A soma dos vetores:



- ii) A multiplicação por escalar:  $\lambda(r_1 + r_2)$  (Essencialmente, o resultado é aumentar ou diminuir o tamanho da seta.)



A título de curiosidade, a soma de vetores em três dimensões seria desta forma:



Porém, não basta utilizar apenas representações gráficas para vetores. Desta forma, é comum definirmos um sistema de coordenadas cartesiano para suas componentes. Assim, um vetor  $\vec{u}$  pode ser decomposto em uma coordenada x e outra coordenada y:

$$\vec{u} = u_x \hat{i} + u_y \hat{j} (+ u_z \hat{k})$$

chamamos os valores  $u_x, u_y, u_z$  de projeções, sendo a última um objeto presente apenas no caso de três coordenadas. Com isso, definimos o módulo do vetor, ou seja, seu tamanho, pela fórmula

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2},$$

e, de brinde, ganhamos fórmulas para as projeções em cada coordenada:

$$\begin{aligned}u_x &= |u| \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{u_x}{|\vec{u}|} \\u_y &= |u| \sin \theta \Rightarrow \sin \theta = \frac{u_y}{|\vec{u}|} \\\tan \theta &= \frac{u_y}{u_x}.\end{aligned}$$

É importante, também, darmos uma forma de obter um vetor de módulo 1, i.e., um vetor unitário, visto que ele pode nos fornecer a informação do valor do ângulo  $\theta$ , a direção, etc. Ele é obtido reduzindo um vetor  $u$  pelo seu módulo,

$$\hat{u} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}.$$

Uma utilidade imediata da definição em coordenadas é que agora temos um modo de tratar a soma de vetores algebricamente

$$\text{Soma: } \vec{u} + \vec{v} = (u_x \hat{i} + u_y \hat{j}) + (v_x \hat{i} + v_y \hat{j}) = (u_x + v_x) \hat{i} + (u_y + v_y) \hat{j}$$

$$\text{Multiplicação por Escalar: } \lambda \vec{u} = \lambda(u_x \hat{i} + u_y \hat{j}) = \lambda u_x \hat{i} + \lambda u_y \hat{j}$$

$$\theta = \text{ctg} \left( \frac{\lambda u_y}{\lambda u_x} \right) = \text{ctg} \left( \frac{u_y}{u_x} \right).$$

Agora podemos ir à aplicação física dessa discussão, o deslocamento de uma partícula no plano. Nesta configuração, normalmente terá-se uma partícula com posição  $\vec{x}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} \quad (+z(t)\hat{k})$ . Para realizar o estudo desses casos, vamos decompor o movimento dela em cada eixo, ou seja, quebramos o movimento no plano em dois movimentos independentes, um em cada eixo  $x$  ou  $y$ . Nestas condições, o deslocamento de uma partícula de uma posição 1 até uma posição 2 será

$$\vec{x}_2 - \vec{x}_1 = (x_2 \hat{i} + y_2 \hat{j}) - (x_1 \hat{i} + y_1 \hat{j}) = (x_2 - x_1) \hat{i} + (y_2 - y_1) \hat{j}.$$

Com isso, podemos escrever que o deslocamento  $\Delta \vec{r}$  é

$$\Delta \vec{r} = \Delta x \hat{i} + \Delta y \hat{j}.$$

Ainda mais, se conhecemos o valor do ângulo entre as posições 1 e 2 e o módulo dos vetores representando-as,

$$|\Delta r|^2 = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 \cos \theta.$$

Tendo o básico do deslocamento, podemos repetir o raciocínio prévio para trabalhar com aceleração e velocidade. De fato,

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}, \quad \vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}_m}{\Delta t}$$

e os valores instantâneos serão dados por

$$\begin{aligned}\vec{v}(t) &= \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt} \hat{i} + \frac{dy(t)}{dt} \hat{j} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j}. \\\vec{a}(t) &= \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{dv_x(t)}{dt} \hat{i} + \frac{dv_y(t)}{dt} \hat{j} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j}.\end{aligned}$$

Além disso, o módulo e orientação desses valores serão dados por

$$\begin{aligned}|\vec{v}| &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2}, \quad \theta_v = \text{ctg} \left( \frac{v_y}{v_x} \right) \\|\vec{a}| &= \sqrt{a_x^2 + a_y^2}, \quad \theta_a = \text{ctg} \left( \frac{a_y}{a_x} \right).\end{aligned}$$

Note que a aceleração não aponta na direção da velocidade em si, mas sim na direção da **variação** da velocidade.

---

### 5.3 Movimento Uniforme Bidimensional

Considere uma partícula com posição  $\vec{r}(t)$  e uma orientação, tal que forma um ângulo  $\theta$  com o plano. Como estaremos considerando o movimento do tipo uniforme, a aceleração é nula e a velocidade  $\vec{v}(t) = v_0$  é constante, tendo módulo  $v_0$  e orientação  $\theta$ . Em outras palavras, as componentes desse vetor serão, também, constantes, isto é,

$$\text{constantes} \begin{cases} v_x(t) = v_{x_0} \\ v_y(t) = v_{y_0}. \end{cases}$$

Desta forma, a decomposição da velocidade em coordenadas é tal que

$$\text{Eixo x: } v_x(t) = v_{x_0} \Rightarrow x(t) = x_0 + v_{x_0}(t - t_0), \quad x_0 = x(t_0)$$

$$\text{Eixo y: } v_y(t) = v_{y_0} \Rightarrow y(t) = y_0 + v_{y_0}(t - t_0), \quad y_0 = y(t_0).$$

Logo, a posição da partícula no plano será dada por

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} = (x_0 + v_{x_0}(t - t_0))\hat{i} + (y_0 + v_{y_0}(t - t_0))\hat{j}.$$

Note que, quando falamos de trajetória de uma partícula ou objeto, buscamos uma relação entre as componentes  $x(t)$  e  $y(t)$  que independe do tempo, isto é, a relação temporal é dada de forma implícita. Uma forma de fazer isso é a através da tangente, pois

$$\frac{y(t) - y_0}{x(t) - x_0} = \frac{v_{y_0}(t - t_0)}{v_{x_0}(t - t_0)} = \frac{v_{y_0}}{v_{x_0}} = \tan \theta_0.$$

Com isso,

$$y(t) - y_0 = \tan \theta_0 (x(t) - x_0) \Rightarrow y = \tan(\theta_0)x - \tan(\theta_0)x_0 + y_0,$$

ou seja,  $y$  tem a forma de uma equação da reta com inclinação constante e igual a  $\tan \theta_0$ .

---

## 6 Aula 06 - 13/04/2023

### 6.1 Motivações

- Revisar movimento relativo;

### 6.2 Movimento Relativo

Fixada uma origem O, a soma dos vetores representando os corpos A e B

$$\vec{r}_{AO} + \vec{r}_{BA} = \vec{r}_{BO}$$

nos fornece a direção relativa do corpo B com relação a A. Se A e B estão se movendo, ou seja, os vetores deles possuem dependência no tempo ( $\vec{r}_{AO} = \vec{r}_{AO}(t)$ ,  $\vec{r}_{BO} = \vec{r}_{BO}(t)$ ), então

$$\vec{r}_{BA}(t) = \vec{r}_{BO}(t) + \vec{r}_{AO}(t),$$

ou seja, a posição relativa de B com relação a A também dependerá do tempo. Além de posição relativa, podemos definir outros conceitos, tais como a velocidade relativa:

$$\vec{v}_{BA}(t) = \frac{d\vec{r}_{BA}(t)}{dt} = \frac{d\vec{r}_{BO}}{dt} + \frac{d\vec{r}_{AO}}{dt} \Rightarrow \vec{v}_{BA}(t) = \vec{v}_{BO}(t) + \vec{v}_{AO}(t)$$

e aceleração relativa de modo análogo, i.e.,  $\vec{a}_{BA}(t) = \vec{a}_{BO}(t) + \vec{a}_{AO}(t)$ . Vejamos alguns exemplos

**Exemplo 3.** Considere um sistema em que um carrinho viaja com velocidade  $\vec{v}_r$  e tem um passageiro  $\vec{v}_p$  com ele. Ambos se movem para a direita. Neste caso, há o sistema referencial de inércia da pessoa dentro do trem. Buscamos descobrir a velocidade da pessoa com relação ao trem. De fato, segue que

$$\vec{v}_p = \vec{v}_{PT} + \vec{v}_T.$$

**Exemplo 4.** Considere um sistema análogo ao anterior, mas, embaixo, há uma plataforma se movendo para a esquerda com velocidade igual à do trem. Neste caso, há o sistema referencial de inércia da pessoa dentro do trem. Buscamos descobrir a velocidade da pessoa com relação à plataforma. Obtemos

$$\vec{v}_{PT} = \vec{v}_{PT}^x \hat{i} + \vec{v}_{PT}^y \hat{j}. \Rightarrow \vec{v}_p = (\vec{v}_{PT}^x + \vec{v}_T^x) \hat{i} + \vec{v}_{PT}^y \hat{j}$$

**Exemplo 5.** (Exemplo 32 do Tipler): Considere um sistema de avião e vento, no qual o módulo da velocidade do avião é de 200km/h e, o da velocidade do vento, é 90km/h. O vento é dado por um vetor apontando para a direita, enquanto o avião é um vetor apontando para cima. Pergunta-se: (a) Qual é a orientação que o avião deve voar? (Ambos estão sendo vistos do solo.) (b) Qual é o módulo da velocidade do avião visto do solo? (a) Segue que

$$\vec{v}_{AO} = \vec{v}_A - \vec{v}_v \Rightarrow \sin \theta = \frac{|\vec{v}_v|}{|\vec{v}_{av}|} = \frac{90}{200} = \frac{9}{20} \approx 27 \text{ deg}$$

(b) Sabemos, por pitágora, que

$$|\vec{v}_{AT}|^2 = |\vec{v}_v|^2 + |\vec{v}_a|^2 \Rightarrow |\vec{v}_a| = \sqrt{|\vec{v}_{av}|^2 - |\vec{v}_v|^2} = \sqrt{51900} \approx 178 \text{ km/h}$$

Com relação a este último exemplo, por que a velocidade  $\vec{v}_a$  tem valor 178km/h e não 200 - 90 = 110km/h? A resposta está na decomposição de  $\vec{v}_{av}$ , pois

$$\begin{aligned} v_{av}^x &= |\vec{v}_{av}| \sin \theta = -200 \cdot 0.454 \approx -90 \text{ km/h} \\ v_{av}^y &= |\vec{v}_{av}| \cos \theta = 200 \cdot 0.891 \approx 178 \text{ km/h.} \end{aligned}$$

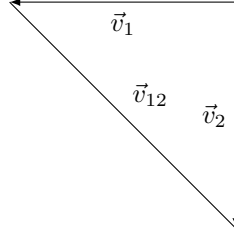
**Exemplo 6.** Suponha que, num instante  $t_0$ , dois trens estão andando em direção a uma plataforma. O trem um chegou nela, vindo do Norte, enquanto o trem dois, vindo pelo Leste, ainda se move, ambos com velocidade

$$|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| = 60 \text{ km/h.}$$



Passados dois minutos, o trem 2 alcança a plataforma e continua andando na direção Oeste com velocidade  $\vec{v}_2$  e o trem 1 continuou sua viagem ao Sul com velocidade  $\vec{v}_1$ . Pedese: (a) Determine o vetor  $\vec{v}_{21}$  da velocidade relativa dos trens. (b) Encontre, para este vetor do item (a), seu módulo (c) Quando a distância entre os vetores é mínima?

Faremos o diagrama de velocidades. Nele,  $|v_1| = |v_2|$ .



Além disso, pelo desenho,

$$\sin \theta = \frac{|\vec{v}_2|}{|\vec{v}_{21}|}, \quad \cos \theta = \frac{|\vec{v}_1|}{|\vec{v}_{21}|} = \frac{|\vec{v}_2|}{|\vec{v}_{21}|} = \sin \theta.$$

A igualdade entre seno e cosseno ocorre quando o ângulo vale 45 graus, ou seja,  $\theta = 45^\circ$ . Assim,

$$\vec{v}_{21} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = -|\vec{v}_2|\hat{i} - (-|\vec{v}_1|\hat{j}) \Rightarrow \vec{v}_{21} = -|\vec{v}_2|\hat{i} + |\vec{v}_1|\hat{j}.$$

Logo,

$$|\vec{v}_{21}| = \sqrt{|\vec{v}_1|^2 + |\vec{v}_2|^2} \approx 85 \text{ km/h}$$

Para resolver, agora, o item b, a comecemos pela posição relativa 2 nos instantes  $t=0$ ,  $t=2\text{min}$  e  $t=4\text{min}$ . Quanto ao trem 2, as informações que temos indicam que ele se move no eixo  $x$  ( $y_2(t) = 0$ ), em  $t=2\text{min}$ , ele está na origem ( $x_2(2\text{min}) = 0$ ) e, deste modo,

$$\vec{r}_2(t) = x_2(t)\hat{i} + y_2(t)\hat{j} = x_2(t)\hat{i} \Rightarrow x_2(t) = x_{2O} + |\vec{v}_2|t$$

Utilizando o valor que sabemos, i.e.,  $x(2\text{min})$ , segue que, convertendo 2 minutos para horas ( $2\text{min} \approx 0.03\text{h}$ ),

$$x(0.03) = 0 = x_{2O} - 60 \cdot 0.03 \Rightarrow x_{2O} = 60 \cdot 0.03 = 2 \text{ km}.$$

Agora, sobre o trem 1, sabe-se que ele se move no eixo  $y$ , ou seja,  $x_1(t) = 0$ , tal que

$$y_1(t) = -|\vec{v}_1|t = -60t$$

Com essas informações, encontramos os valores

$$\begin{aligned} t = 0\text{min} : \quad & x_1(0) = 0, y_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 2\text{km}, y_2(0) = 0\text{km} \\ t = 2\text{min} : \quad & x_1(2) = 0, y_1(2) = -2\text{km}, \quad x_2(2) = 0\text{km}, y_2(2) = 0\text{km} \\ t = 4\text{min} : \quad & x_1(4) = 0, y_1(4) = -4\text{km}, \quad x_2(4) = -2, y_2(4) = 0\text{km}. \end{aligned}$$

Desta forma,

$$\vec{r}_{21}(t) = \vec{r}_2(t) - \vec{r}_1(t) \Rightarrow \vec{r}_{21}(t) = x_2(t)\hat{i} - y_1(t)\hat{j}.$$

Finalmente, para o item c, calculamos a distância como

$$L_{21}(t) = \sqrt{x_1^2 + (-y_1)^2} = \sqrt{(x_{2O} - |\vec{v}_2|t)^2 + (|\vec{v}_1|t)^2} = \sqrt{7200t^2 - 240t + 4}.$$

Para encontrar a distância **mínima**, é preciso derivar esta fórmula, igualar a 0 e resolver para tempo. Coloque  $l = 7200t^2 - 240t + 4$ , tal que

$$\frac{dl}{dt} = 2 \cdot 7200t - 240 + 0 = 0$$

Resolvendo isso, encontramos o tempo em que a distância é mínima, valendo  $t^* \approx 0.017\text{h} \approx 1\text{min}$ , tal que a distância mínima é

$$L_{21}(t^*) \approx 1.4.$$

---

## 7 Aula 7 - 17/03/2023

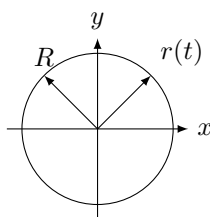
### 7.1 Motivações

- Começar a estudar o movimento circular;
- 

### 7.2 Movimento Circular

Quando temos uma partícula fazendo movimento circular em um círculo de raio  $R$  num eixo  $x, y$ , diremos que ela, sua posição em qualquer instante será dada por um vetor  $\vec{r}(t)$ , sendo sua trajetória limitada a este círculo. Assim, obtemos o sistema  $R = |\vec{r}(t)|$ , sendo  $\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j}$  e

$$\begin{cases} x(t) = R \cos \theta(t) \\ y(t) = R \sin \theta(t). \end{cases}$$



Utilizando o sistema e o desenho, obtemos

$$\vec{r}(t) = R \cos \theta(t)\hat{i} + R \sin \theta(t)\hat{j},$$

donde segue o valor do módulo do vetor  $\vec{r}(t)$ :

$$\begin{aligned} |\vec{r}(t)|^2 &= x^2(t) + y^2(t) = (R \cos \theta(t))^2 + (R \sin \theta(t))^2 \\ &= R^2(\cos^2 \theta(t) + \sin^2 \theta(t)) \\ &= R^2 \Rightarrow |\vec{r}(t)| = R. \end{aligned}$$

Concluimos, assim, que todo o movimento da partícula é dado em termos do ângulo  $\theta(t)$ . Além disso, o deslocamento da partícula é feita em arcos de círculo  $s(t) = R\theta(t)$ . Chamamos esta posição de “posição escalar do corpo sobre o círculo”. No entanto, no movimento circular, há outra posição, chamada “posição angular do corpo”, que é dada por  $\theta(t) = \frac{s(t)}{R}$ .

Utilizando estes dois, podemos encontrar uma equação para  $\vec{r}(t)$ :

$$\vec{r}(t) = R \cos \theta(t)\hat{i} + R \sin \theta(t)\hat{j} = R \underbrace{[\cos \theta(t)\hat{i} + \sin \theta(t)\hat{j}]}_{\hat{r}(t)} = R\hat{r}(t),$$

em que  $\hat{r}(t)$  é um versor na direção de  $\vec{r}(t)$ , isto é, um vetor com módulo um. De fato, vamos verificar isto:

$$|\hat{r}(t)| = \sqrt{\cos^2(\theta(t)) + \sin^2(\theta(t))} = 1$$

A seguir, vamos estudar como este versor  $\hat{r}(t)$  varia, ou seja, vamos derivar este vetor com respeito ao tempo. Para isso, introduziremos outra regra de derivação, a “Regra da Cadeia”. Dada uma função  $f(t) = u(v(t))$ , ou seja, uma função definida como uma função composta, sua derivação é feita de dentro pra fora: Derivamos  $v(t)$  com respeito a  $t$ , depois derivamos  $u$  com relação a  $v$  e multiplicamos, ou seja,

$$\boxed{\frac{df}{dt} = \frac{du}{dv} \frac{dv}{dt}}.$$

Assim, no caso do versor  $\hat{r}(t)$ ,

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{r}(t)}{dt} &= \frac{d}{dt}[\cos \theta(t)\hat{i} + \sin \theta(t)\hat{j}] \\ &= \frac{d}{dt}[\cos \theta(t)]\hat{i} + \frac{d}{dt}[\sin \theta(t)]\hat{j} \\ &= \frac{d \cos \theta(t)}{d\theta} \frac{d\theta(t)}{dt} \hat{i} + \frac{d \sin \theta(t)}{d\theta} \frac{d\theta(t)}{dt} \hat{j} \\ &= -\sin \theta(t) \frac{d\theta(t)}{dt} \hat{i} + \cos \theta(t) \frac{d\theta(t)}{dt} \hat{j}.\end{aligned}$$

Como  $\theta(t)$  é a posição angular, chamamos a sua derivada com respeito a tempo de velocidade angular

$$\boxed{\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt}.$$

De brinde, conseguimos definir a velocidade escalar da partícula como

$$\begin{aligned}\frac{ds(t)}{dt} &= \frac{dR\theta(t)}{dt} = R \frac{d\theta(t)}{dt} = R\omega(t). \\ \Rightarrow \boxed{v(t) = R\omega(t)}.\end{aligned}$$

Vamos estudar a dimensão dessa quantidade. Temos

$$[\omega] = \frac{[\theta]}{[t]} = \frac{1}{T} \quad (\text{Exemplo: rad/s (radianos por segundo.)})$$

como unidades de velocidade angular e

$$[v] = [R][\omega] = LT^{-1} \quad (\text{Exemplo: m/s (metros por segundo)})$$

como dimensão da velocidade escalar. Com relação ao versor definido, sua derivada é

$$\frac{d\hat{r}(t)}{dt} = \omega(t) \underbrace{[-\sin \theta(t)\hat{i} + \cos \theta(t)\hat{j}]}_{\hat{\theta}(t)},$$

em que  $\hat{\theta}(t)$  é um versor apontando na direção do ângulo. Com isso, definimos a velocidade vetorial por

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = R \frac{d\hat{r}(t)}{dt} \Rightarrow \vec{v}(t) = R\omega(t)\hat{\theta}(t).$$

Algo interessante de notar é que a velocidade escalar consiste do módulo da velocidade vetorial, i.e.,  $v(t) = |\vec{v}(t)|$ . Também podemos representar a velocidade por meio das componentes em cada eixo:

$$\vec{v}(t) = \underbrace{-R\omega(t) \sin \theta(t)}_{v_x(t)} \hat{i} + \underbrace{R\omega(t) \cos \theta(t)}_{v_y(t)} \hat{j}.$$

### 7.3 Acelerações no Movimento Circular.

Agora que estamos mais familiarizados com a velocidade e posição angular, podemos estudar a aceleração no movimento circular. Assim como antes, começamos definindo a aceleração angular:

$$\alpha(t) = \frac{d\omega(t)}{dt} = \frac{d^2\theta(t)}{dt^2},$$

que possui dimensão  $[\alpha] = \frac{[\omega]}{[t]} = \frac{T^{-1}}{T} = T^{-2}$ , sendo um exemplo a unidade  $rad/s^2$ , i.e., radiano por segundo quadrado. Analogamente, definimos a aceleração vetorial por

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}[R\omega(t)\hat{\theta}(t)].$$

Pela regra do produto,

$$\vec{a}(t) = R\left[\frac{d\omega(t)}{dt}\hat{\theta}(t) + \omega(t)\frac{d\hat{\theta}(t)}{dt}\right].$$

Analisando termo a termo, a primeira derivada acontece no módulo da velocidade, i.e.,  $R\frac{d\omega(t)}{dt}$ , ou seja, representa a variação no módulo da velocidade. Por outro lado, o segundo termo representa a variação da direção da velocidade. Como já encontramos alguns desses termos antes, segue que

$$\vec{a}(t) = R[\alpha(t)\hat{\theta}(t) + v(t)\frac{d\hat{\theta}(t)}{dt}].$$

Mas o que é este termo  $\frac{d\hat{\theta}}{dt}$ ? Olhando pra ele com cuidado, vemos que

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{\theta}}{dt} &= \frac{d}{dt}[-\sin\theta(t)\hat{i} + \cos\theta(t)\hat{j}] \\ &= -\frac{d}{dt}[\sin\theta(t)]\hat{i} + \frac{d}{dt}[\cos\theta(t)]\hat{j} \\ &= -\cos\theta(t)\frac{d\theta(t)}{dt}\hat{i} - \sin\theta(t)\frac{d\theta(t)}{dt}\hat{j} \\ &\Rightarrow \frac{d\hat{\theta}(t)}{dt} = \omega(t)[- \cos\theta(t)\hat{i} - \sin\theta(t)\hat{j}] = \omega(t)(-\hat{r}(t)).\end{aligned}$$

Portanto,

$$\vec{a}(t) = R[\alpha(t)\hat{\theta}(t) + \omega^2(t)(-\hat{r}(t))] = \underbrace{R\alpha(t)\hat{\theta}(t)}_{\text{aceleração tangencial } \vec{a}_t(t)} - \underbrace{R\omega^2(t)\hat{r}(t)}_{\text{aceleração centrípeta } \vec{a}_{cp}(t)}$$

Obtivemos disso tudo duas acelerações novas e que precisam ser mais compreendidas. Vamos começar pela tangencial.

Com relação ao módulo da aceleração tangencial, note que  $|\vec{a}_t(t)| = R\alpha(t) = \frac{dv(t)}{dt}$ . Agora, quanto à aceleração centrípeta, seu módulo é dado por  $|\vec{a}_{cp}(t)| = R\omega^2(t) \Rightarrow |\vec{a}_{cp}(t)| = \frac{v^2}{R}$ .

## 7.4 Movimento Circular Uniforme

Resumindo o que temos até o momento em forma de tabela, segue que

	Variáveis angulares	Variáveis escalares
<b>Posição</b>	$\theta(t)$	$s(t) = R\theta(t)$
<b>Velocidade</b>	$\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt}$	$v(t) = \frac{ds(t)}{dt} = R\omega(t)$
<b>Aceleração</b>	$\alpha(t) = \frac{d\omega(t)}{dt} = \frac{d^2\theta(t)}{dt^2}$	$ \vec{a}(t)  = \frac{dv(t)}{dt} = R\alpha(t), \quad  \vec{a}_{cp}  = \frac{v^2}{R}$

Tabela 1: Resumo movimento circular.

No movimento circular uniforme, estudamos arcos iguais em tempos iguais, ou seja,

$$\Delta s_1 = \Delta s_2, \quad \Delta t_1 = \Delta t_2,$$

tal que  $\Delta\theta_1 = \Delta\theta_2$ . Além disos,  $\omega(t) \equiv \omega$  constante. Assim,

$$|\vec{v}(t)| = v(t) = R\omega(t) \equiv v, \text{ constante} \Rightarrow a_t = R\alpha(t) = 0.$$

Com isso, as posições são descritas por

$$\begin{aligned}\omega(t) &= \omega \Rightarrow \theta(t) = \theta_0 + \omega(t - t_0) \\ v(t) &= v \Rightarrow s(t) = s_0 + v(t - t_0)\end{aligned}$$

---

Neste caso, o movimento é periódico, ou seja, ele volta a ter as mesmas propriedades após um período  $T$ . Em forma matemática, isso quer dizer que

$$\begin{cases} \vec{r}(t+T) = \vec{r}(t) \\ \vec{v}(t+T) = \vec{v}(t). \end{cases}$$

Tendo isso em mente, definimos também a frequência como o número de ocorrências. Ele vale o inverso do período  $T$ , i.e.,  $f = \frac{1}{T}$ .

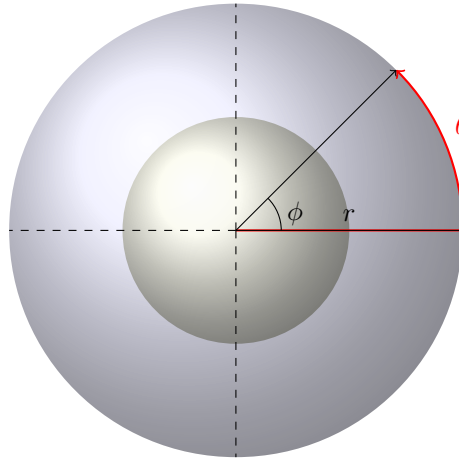
## 8 Aula 8 - 19/04/2023

### 8.1 Motivações

- Começar os estudos de dinâmica

### 8.2 Exemplo de MCU - 67 Típicos

Suponha que a Terra tem velocidade angular  $\omega$  constante, velocidade e aceleração angulares  $\vec{v}_\theta(t), \vec{a}_\theta(t)$  e velocidade e aceleração escalares  $\vec{v}_e(t), \vec{a}_e(t)$ .



No equador,  $R_E = R_T, \omega_E = \omega$ , tal que

$$\begin{cases} v_E = \omega R_T = \omega R_E \\ a_{Ecp} = \frac{v_E^2}{R_E} = \frac{(\omega R_T)^2}{R_T} = \omega^2 R_T. \end{cases}$$

Na latitude  $\theta$ ,  $R_\theta = R_T \cos \theta, \omega_\theta = \omega$ , de modo que

$$\begin{cases} v_\theta = \omega R_T \cos \theta \\ a_{\theta cp} = \omega^2 R_T \cos \theta \end{cases}$$

Para a Terra dar uma volta em torno de si de novo, ela demora aproximadamente 24h. Assim,  $T = 24h$  é o período da Terra, donde concluímos que a frequência será  $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{86400} s^{-1}$ . Como  $\omega = 2\pi f$ , segue que

$$\omega = \frac{2\pi}{86400} = 7.27 \cdot 10^{-5} rad/s.$$

Pede-se: a) Quais são os valores de  $v_e, a_e$ ? b e d) Quais são as orientações das acelerações? c) Quanto valem  $v_\theta, a_\theta$ ?

a.) Vemos que  $v_E = 463.1 m/s, a_E = 0.0337 m/s^2, g = 9.8 m/s^2$ . Em particular,  $a_E = 0.0034g$ .

b. e d.) O diagrama de v indica que o vetor aceleração aponta na vertical pra esquerda e levemente pra cima.

c.) Temos  $v_\theta = 379.4 m/s, a_\theta = 0.0276 m/s^2$ .

### 8.3 Dinâmica e Leis de Newton

#### 8.3.1 O que esperar

Quando estudamos os movimentos anteriores, estávamos vendo cinemática, a descrição matemática do movimento. No entanto, nunca nos questionamos o que causa o movimento. Como ele surge, o que influencia-o, etc. Essa pergunta é respondida pela dinâmica, q formulação matemática que explicita as causas do movimento. Ela nos fornece uma relação entre as interações, chamadas forças, que o corpo sofre e o seu movimento. A primeira formulação da dinâmica foi feita por Isaac Newton, sendo suas Leis nosso Ponto de partida.

### 8.3.2 Leis de Newton

A primeira Lei de Newton, também chamada de Lei da Inércia, afirma que

“Um corpo em repouso, ou em movimento retilíneo uniforme, permanecerá em seu estado de movimento a não ser que uma força externa atue sobre ele. ”

Observe que velocidade constante significa que tanto seu módulo será constante quanto a direção o movimento precisa ser em linha reta. Uma consequência dessa Lei é que não tem distinção entre um corpo em repouso e um corpo se movendo com velocidade constante. Com isso, um sistema de referencial inercial será definido como um eixo de coordenadas que está em repouso ou se movendo com velocidade constante.

A segunda Lei de Newton surge para explicar como aparecem as forças dentro do contexto da dinâmica, dizendo que

“A força resultante atuando em um corpo é igual à massa dele multiplicada pela aceleração”

Matematicamente, isto significa que

$$\vec{F}_r = m \cdot \vec{a} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}$$

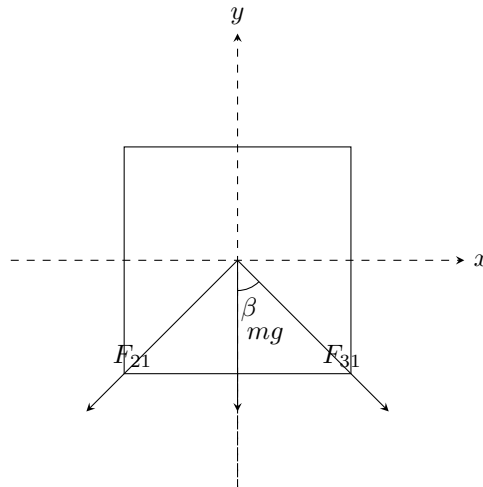
O termo novo  $m$  é chamado de massa inercial, sendo interpretada como a grandeza física que expressa a resistência do corpo ao movimento. Quanto maior for a massa, maior vai ser a resistência a se mover. De fato, se temos dois blocos de massas  $m_1 > m_2$ , então

$$\vec{a}_1 = \frac{\vec{F}}{m_1}, \quad \vec{a}_2 = \frac{\vec{F}}{m_2} \Rightarrow a_1 < a_2.$$

A dimensão dessa grandeza é  $[m] = M$ . No Sistema Internacional, a unidade de massa é o quilograma.

Note que a força é uma grandeza vetorial que soma-se, ou seja, se há várias forças agindo sobre um corpo, a resultante será a soma delas. Se temos forças  $\vec{F}_{21}, \vec{F}_{31}$  agindo sobre um corpo, então a resultante será  $\vec{F}_R = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{31}$ . Além disso, suas coordenadas serão

$$\begin{aligned} x : F_{res}^x &= -F_{21} \sin \alpha + F_{31} \sin \beta \\ y : F_{res}^y &= -F_{21} \cos \alpha - F_{31} \cos \beta. \end{aligned}$$



A unidade da força é dada por  $[F] = [ma] = MLT^{-2}$ . No SI, sua unidade é  $1kgms^{-2} = 1N$  o Newton. Um corpo será dito em equilíbrio quando a força resultante agindo sobre ele é nula, pois, neste caso,

$$\vec{F}_{res} = \sum_n \vec{F}_n = 0 \Rightarrow F_{res} = ma = 0 \Rightarrow a = 0.$$

A terceira e última Lei de Newton é conhecida como Lei da Ação e Reação. Segue seu enunciado

---

“Se um corpo faz uma força em outro, então este segundo também realizará uma força no primeiro, sendo esta de mesmo módulo, mas com direção oposta. ”

Em outras palavras, se um corpo 2 age sobre um corpo 1 com força  $\vec{F}_{21}$ , então o corpo 1 fará uma força sobre o corpo 2  $\vec{F}_{12}$  tal que  $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$ ,  $|\vec{F}_{21}| = |\vec{F}_{12}|$ .

### 8.3.3 Exemplo 4.2 - Tipler

Os dados que temos é que há uma pessoa que se moveu 2.25m em 3s e cuja massa é 68kg. Pede-se para encontrar o módulo da força agindo sobre ela. Segue que

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \Rightarrow \Delta x = x(3) - x(0) = \frac{1}{2} a 3^2 = \frac{9}{2} a = 2.25m$$

Isolando a equação, encontra-se que  $a = 0.5m/s^2$ . Com isso, como  $|\vec{F}| = |m\vec{a}| = 68 \cdot 0.5 = 34N$ . ■