UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS E COMPUTACIONAIS - ICMC

Notas de Aula de Análise

Renan Wenzel - 11169472

Alexandre Nolasco de Carvalho - andcarva@icmc.usp.br

24 de março de 2023

Conteúdo

1 Aula 01 - 13/03/2023

1.1 Motivação

- Relembrar sistemas básicos da matemática;
- Relembrar propriedades básicas das principais estruturas $(\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q})$.

1.2 Os Números Naturais

Os números naturais são os que utilizamos para contar objetos, e são caracterizados pelos Axiomas de Peano:

1) Todo número natural tem um único sucessor;
2) Números naturais diferentes têm sucessores diferentes;
3) Existe um único número natural, zero (0), que não é sucessor de nenhum número natural.
4) Seja $X \subseteq \mathbb{N}$ tal que $0 \in X$ e, se n pertence a X, seu sucessor n+1 também pertence a X. Então, X = $\mathbb{N}$. (Propriedade de Indução).

Definição. *Definimos a adição por:* $n + 0 = n, n \in \mathbb{N},$ *e* $n + (p + 1) = (n + p) + 1, p \in \mathbb{N}$. *Além disso, a multiplicação é dada por:* $n.0 = 0, n.(p + 1) = n.p + n, n, p \in \mathbb{N}$. *Ou seja, sabendo somar ou multiplicar um número, sabemos somar e multiplicar seu sucessor.*

Com relação ao quarto axioma, ele leva este nome porque um dos métodos de demonstração, conhecido como prova por indução. Nele, mostramos um caso base, o caso 0, e utilizamos a segunda parte para provar que, se um resultado vale para o caso n, ele vale para n+1, portanto sendo verdadeiro para todos os naturais.

Lema. *Para todo n natural, 1 + n = n + 1.*

Prova. *Note que o resultado é verdadeiro para n = 0. Suponha que o resultado seja válido para n = k e mostremos que vale também para n = k+1. Com efeito, segue pela propriedade de indução e pela definição de soma que*

$$1 + (k + 1) = (1 + k) + 1 = (k + 1) + 1.$$

Segue que o resultado vale para todo n natural. ■

A seguir, mostramos a associatividade e a comutatividade, respectivamente, das operações nos naturais.

Lema. *Para todo n, p, r naturais, (n + p) + r = n + (p + r).*

Prova. *Note que o resultado é válido trivialmente para r = 0 e r = 1. Suponha que o resultado seja válido para r = k e mostremos que vale também para r = k + 1. Com efeito, pela hipótese de indução e definição de adição,*

$$n + (p + (k + 1)) = n + ((p + k) + 1) = (n + (p + k)) + 1 = ((n + p) + k) + 1 = (n + p) + (k + 1).$$

Segue o resultado por indução. ■

Lema. *Para todo n, p naturais, n + p = p + n.*

Prova. *Observe que já mostramos o caso em que p = 1. Suponha que o resultado vale para p = k e vamos mostrar o caso p = k + 1. De fato, pela hipótese de indução e definição de adição, junto do lema de associatividade, temos*

$$n + (k + 1) = (n + k) + 1 = (k + n) + 1 = 1 + (k + n) = (1 + k) + n = (k + 1) + n.$$

Por indução, segue que isso vale para todo natural n. ■

Definição. *Definimos uma ordem em* $\mathbb{N}$ *colocando que* $m \leq n$ *se existe p natural tal que* $n = m + p$.□

A relação de ordem possui as seguintes propriedades:

i) Reflexiva: Para todo n natural, $n \leq n$;

ii) Antissimétrica: Se $m \leq n$ e $n \leq m$, então $m = n$;

iii) Transitiva: Se $m \leq n$ e $n \leq p$, então $m \leq p$;

i Dados m, n naturais, temos ou $m \leq n$, ou $n \leq m$;

v Se $m \leq n$ e p é um natural, então $n + p \leq n$ e $mp \leq np$

1.3 Números Inteiros e Racionais

Usualmente, construimos os inteiros a partir dos naturais tomando os pares ordenados de números naturais com a seguinte identificação (a, b) $\sim$ (c, d) se a + d = b + c. Assim, podemos representar

$$\mathbb{N} = \{(0,0),(1,0),(2,0),(3,0),\ldots\}, \quad -\mathbb{N}^* = \{\cdots,(0,3),(0,2),(0,1)\}.$$

Tomar o sucessor será somar 1 à primeira coordenada e, para os inteiros negativos, voltar a identificar (1, n) com (0, n-1).

Os números racionais são construídos tomando o conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ e identificando os pares $(a,b) \sim (c,d)$ para os quais ad = bc. Representamos um par (a, b) neste conjunto por $\frac{a}{b}$. A soma e o produto em $\mathbb{Q}$ são dados, respectivamente, por:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} := \frac{ad+bc}{bd}$$
$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} := \frac{ac}{bd}.$$

Chamamos a adição a operação que a cada par $(x,y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ associa sua soma $x + y \in \mathbb{Q}$ e chamamos multiplicação a operação que a cada par $(x,y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ associa seu produto $x.y \in \mathbb{Q}$. A terna $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ satisfaz as propriedades de um corpo, i.e.,

$$\begin{aligned}
&(A1)(x+y)+z = x+(y+z), \quad \forall x,y,z \in \mathbb{Q}\\
&(A2)x+y = y+x, \quad \forall x,y \in \mathbb{Q}\\
&(A3)\exists 0 \in \mathbb{Q} : x+0 = x, \quad \forall x \in \mathbb{Q}\\
&(A4)\forall x \in \mathbb{Q}, \exists y \in \mathbb{Q}(y=-x) : x+y = 0\\
&(M1)(xy)z = x(yz), \quad \forall x,y,z \in \mathbb{Q}\\
&(M2)xy = yx, \quad x,y \in \mathbb{Q}\\
&(M3)\exists 1 \in \mathbb{Q} : 1.x = x.1 = x, \quad \forall x \in \mathbb{Q}\\
&(M4)\forall x \in \mathbb{Q}^*, \exists y = \frac{1}{x} \in \mathbb{Q} : x.y = 1\\
&(D)x(y+z) = xy+xz, \quad \forall x,y,z \in \mathbb{Q}.
\end{aligned}$$

2 Aula 02 - 15/03/2023

2.1 Motivações

- Propriedades básicas dos racionais;
- Construção do corpo dos reais a partir dos racionais;
- Cortes de Dedekind.

2.2 Propriedades de $\mathbb{Q}$ e sua Ordem

Com as 9 propriedades de corpo, conseguimos obter novas regras nos racionais, como a famosa lei do cancelamento:

Proposição. *Em $\mathbb{Q}$, vale*

$$x + z = y + z \Rightarrow x = y$$

e, se $z \neq 0$,

$$xz = yz \Rightarrow x = y$$

Prova.

$$x = x + 0 = x + (z + (-z)) = (x + z) + (-z) = (y + z) + (-z) = y + (z + (-z)) = y + 0 = y$$
$$x = x.1 = x(z.\frac{1}{z}) = (xz)\frac{1}{z} = (yz)\frac{1}{z} = y(z\frac{1}{z}) = y.1 = y. \blacksquare$$

Proposição. *Os elementos neutros da adição e multiplicação são únicos. Os elementos oposto e inverso também o são.*

Proposição. *Para todo x racional, x.0 = 0.*

Proposição. *Para todo x racional, -x = (-1)x.*

A maioria desses resultados acima seguem diretamente da lei do cancelamento. Suas demonstrações ficam como exercício.

Definição. *Diremos que*

$$\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} = \begin{cases} \textit{não-negativo}, & ab \in \mathbb{N} \\ \textit{positivo}, & ab \in \mathbb{N}, a \neq 0 \end{cases}$$

e diremos que

$$\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} = \begin{cases} \textit{não-positivo}, & \frac{a}{b} \textit{ não for postivo} \\ \textit{negativo}, & \frac{a}{b} \textit{ não for não-negativo.} \end{cases} \square$$

Definição. *Sejam x, y racionais. Diremos que x é menor e que y e escrevemos "$x < y$" se existir t racional positivo tal que*

$$y = x + t.$$

Neste mesmo caso, podemos dizer que y é maior que x, escrevendo "$x > y$". Em particular, temos $x > 0$ se x for positivo e $x < 0$ se x for negativo.

Ademais, se $x < y$ ou $x = y$, escrevemos "$x \leq y$" se existir racional t não-negativo tal que

$$y = x + t$$

e, se $x > y$ ou $x = y$, escrevemos "$x \geq y$" caso exista racional t não-positivo com

$$y = x + t.\square$$

A quádrupla $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ satisfaz as propriedades de um corpo ordenado, i.e.,

$$
\begin{aligned}
&(O1) x \leq x \forall x \in \mathbb{Q};\\
&(O2) x \leq y \text{ e } y \leq x \Rightarrow x = y \forall x, y \in \mathbb{Q};\\
&(O3) x \leq y, y \leq z \Rightarrow x \leq z \forall x, y, z \in \mathbb{Q};\\
&(O4) \forall x, y \in \mathbb{Q}, x \leq y \text{ ou } y \leq x;\\
&(OA) x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z;\\
&(OM) x \leq y \text{ e } z \geq 0 \Rightarrow xz \leq yz.
\end{aligned}
$$

Proposição. *Para quaisquer x, y, z, w no corpo ordenado dos racionais, valem*

$$
\begin{aligned}
&i.) x < y \iff x + z < y + z\\
&ii.) z > 0 \iff \frac{1}{z} > 0\\
&iii.) z > 0 \iff -z < 0\\
&iv.) z > 0 \Rightarrow x < y \iff xz < yz\\
&v.) z < 0 \Rightarrow x < y \iff xz > yz\\
&vi.) xz < yw \iff \begin{cases} 0 \leq x < y \\ 0 \leq z < w \end{cases}\\
&vii.) 0 < x < y \iff 0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}\\
&viii.) x < y \text{ ou } x = y \text{ ou } x > y\\
&ix.) xy = 0 \iff x = 0 \text{ ou } y = 0.\\
&x.) \left.\begin{array}{c} x \leq y \\ z \leq w \end{array}\right\} \Rightarrow x + z \leq y + w\\
&xi.) \left.\begin{array}{c} 0 \leq x \leq y \\ 0 \leq z \leq w \end{array}\right\} \Rightarrow xz \leq yw.
\end{aligned}
$$

2.3 Incompletude de $\mathbb{Q}$

Os números racionais podem ser representados por pontos em uma reta horizontal ordenada, chamada reta real. Se P for a representação de um número racional x, diremos que x é a abscissa de P. Note que nem todo ponto da reta real é racional. Para isso, considere um quadrado de lado 1 e diagonal d. Pelo Teorema de Pitágoras, $d^2 = 1^2 + 1^2 = 2$. Agora, seja P a intersecção do eixo x com a circunferência de centro em 0 e raio d. Mostremos que P é um ponto da reta com abscissa $x \notin \mathbb{Q}$.

Proposição. *Seja a um inteiro. Então, se a for ímpar, seu quadrado também será. Além disso, se a for par, seu quadrado também é par.*

Proposição. *A equação $x^2 = 2$ não admite solução racional.*

A ideia da prova é escrever um x na forma de fração e chegar na contradição de que tanto o numerador quanto o denominador serão números pares. Com isso, conclui-se que não existe racional irredutível com quadrado igual a 2, portanto não existe racional satisfazendo a equação.

Essa discussão mostra que existem vãos na “reta” dos racionais, requerindo a adoção de um novo corpo. Essa é a principal motivação por trás dos números reais, ”preencher”os buracos deixados pelos racionais.

Proposição. *(Exercício.) Sejam $p_1, \ldots, p_n$ números primos distintos. Então, a equação $x^2 = p_1 p_2 \cdots p_n$ não tem solução racional.*

Vimos que os números racionais com a sua adição, multiplicação e relação de ordem é um corpo ordenado. Nos interessamos, também, pelo corpo dos reais e dos racionais $(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. De forma abstrata, um corpo é um conjunto não-vazio $\mathbb{F}$ em que estão definidas duas operações binárias

$$+ : \mathbb{F} \times \mathbb{F} \to \mathbb{F}, \quad (x, y) \mapsto x + y$$

e

$$\cdot : \mathbb{F} \times \mathbb{F} \to \mathbb{F}, \quad (x, y) \mapsto xy$$

em que valem as oito propriedades vistas previamente para a definição das operações em $\mathbb{Q}$ Se, ainda por cima, no corpo $\mathbb{F}$ está definida uma ordem com propriedades análogas às vistas para a quádrupla $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$, diremos que $(\mathbb{F}, +, \cdot, \leq)$ é um corpo ordenado.

Definição. *Diremos que um subconjunto A de um corpo $\mathbb{F}$ ordenado é limitado superiormente se existe um L neste corpo tal que $a \leq L$ para todo a de A.*

Definimos para um subconjunto limitado superiormente um número $\sup(A) \in \mathbb{F}$ como o menor limitante superior de A, i.e., se $a \leq \sup(A)$ para todo a de A e se existe $f \in \mathbb{F}$ com $f < \sup(A)$, então existe um a em A com $f < a$.

Por fim, diremos que um corpo ordenado é completo se todo subconjunto limitado superiormente possui supremo. □

Nem todo subconjunto limitado superiormente de $\mathbb{Q}$ tem supremo, ou seja, $\mathbb{Q}$ não é completo.

2.4 Os Números Reais ($\mathbb{R}$)

A ideia que iremos usar para construir o conjunto dos reais é que o conjunto dos números reais preenche toda a reta real. Os Elementos de $\mathbb{R}$ serão os subconjuntos de $\mathbb{Q}$ à esquerda de um ponto da reta real e serão chamados de cortes.

Definição. *Um corte é um subconjunto $\alpha \subsetneq \mathbb{Q}$ com as seguintes propriedades:*

i) $\alpha \neq \emptyset$ *e* $\alpha \neq \mathbb{Q}$;

ii) Se $p \in \alpha$ e q é um racional com $q < p$, então $q \in \alpha$ (todos os racionais à esquerda de um elemento de α estão em α);

iii) Se $p \in \alpha$, existe um $r \in \alpha$ com $p < r$ (α não tem um maior elemento). □

Essa ideia foi proposta inicialmente por Julius Wilhelm Richard Dedekind, um matemático alemão, em 1872, com o objetivo de encontrar uma explicação e construção elementar para os números reais.

Exemplo 1. *Se q é um racional, definimos $q^* = \{r \in \mathbb{Q} : r < q\}$.Então, q^* é um corte que chamamos de racional. Os cortes que não são desse tipo se chamam cortes irracionais.*

Exemplo 2. $\sqrt{2} = \{q \in \mathbb{Q} : q^2 < 2\} \cup \{q \in \mathbb{Q} : q < 0\}$ *é um corte irracional.*

Observe que se α é um corte, p é um ponto dele e q não é, então $p < q$. Além disso, se r pertence a α e $r < s$, então s não pertence ao corte.

Definição. *Diremos que $\alpha < \beta$, em que α e β são cortes, se $\alpha \subsetneq \beta$.*□

Proposição. *Se α, β, γ são cortes,*

i) $\alpha < \beta$ *e* $\beta < \gamma$ *implica que* $\alpha < \gamma$;

ii) Exatamente uma das seguintes relações é válida: $\alpha < \beta$ ou $\alpha = \beta$ ou $\beta < \alpha$

iii) Todo subconjunto não-vazio e limitado superiormente de $\mathbb{R}$ tem supremo.

3 Aula 03 - 17/03/2023

3.1 Motivações

- Finalizar a construção de $\mathbb{R}$ por cortes;
- Definir um corpo ordenado com base nos cortes;

3.2 Cortes - Soma e Ordem

Coloquemos, para fins de conveniência, $\mathbb{R}$ como a união de todos os cortes.

Vamos mostrar que os cortes racionais são, de fato, cortes. Considere, dado um racional q, $q^* = \{p \in \mathbb{Q} : p < q\}$. Ele não pode completar todos os racionais, pois q + 1 não pertence a q^*. Além disso, ele é não vazio, visto que q-1 pertence a ele, mostrando a primeira propriedade dos cortes.

Ademais, se r pertence a q^* e p é um racional menor que r, segue da transitividade da ordem que p é menor que q, já que r também é. Assim, p pertence a q^*, mostrando a segunda propriedade dos cortes.

Por fim, dado um r em q^*, seja $s = \dfrac{r+q}{2}$. Então,

$$r - \frac{r+q}{2} = \frac{r-q}{2} < 0,$$

tal que s é menor que r e, logo, pertence a q^*. Portanto, q^* forma um corte.

Daremos continuidade às atividades da aula anterior demonstrando a última proposição vista.

Proposição. *Se α, β, γ são cortes,*

i) $\alpha < \beta$ e $\beta < \gamma$ implica que $\alpha < \gamma$;

ii) Exatamente uma das seguintes relações é válida: $\alpha < \beta$ ou $\alpha = \beta$ ou $\beta < \alpha$

iii) Todo subconjunto não-vazio e limitado superiormente de $\mathbb{R}$ tem supremo.

Prova. *As duas primeiras partes seguem automaticamente da forma que definimos a ordem $\leq$ para os cortes. Resta mostrar a última.*

Vamos exibir o supremo explicitamente. Com efeito, seja $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}$ um coleção de cortes limitada superiormente, i.e., existe um l em $\mathbb{R}$ tal que $\alpha \leq l$ para todo α em $\mathcal{A}$. Defina $\mathcal{S} = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} \alpha$. Mostremos que $\mathcal{S}$ é um corte. Com efeito, que $\mathcal{S}$ é não-vazio e diferente de $\mathbb{Q}$ é automático. Além disso, dado q em $\mathcal{S}$ e $r < q$, segue que $r \in \alpha_0$ para algum α_0 em $\mathcal{A}$.

Para ver que $\mathcal{S}$ é o supremo, suponha que $\mathcal{S}' < \mathcal{S}$. Então, existe r em $\mathcal{S}/\mathcal{S}'$. Como r pertence a $\mathcal{S}$, r pertence a α_0 para algum $\alpha_0 \in \mathcal{A}$. Logo, $\alpha_0 > \mathcal{S}'$. Portanto, $\mathcal{S}$ é o menor limitante superior de $\mathcal{A}$, ou seja, seu supremo. ■

Definição. *Se α, β são cortes, definimos $\alpha + \beta$ como o conjunto de todos os racionais da forma $r + s$, com r em α e s em β. Ademais, tome $0^* = \{s \in \mathbb{Q} : s < 0\}$.*□

Vamos conferir a definição, i.e., que $\alpha + \beta$ é um corte. Com efeito, $\alpha + \beta \neq \emptyset$, pois $\alpha \neq \emptyset$ e $\beta \neq \emptyset$. Além disso, se p não pertence a α e q não pertence a β, mas r pertence a α e s a β, então $r + s < p + q$, tal que $p + q$ não pertence a $\alpha + \beta$.

Além disso, tome $r + s$ em $\alpha + \beta$ e $p < r + s$. Escreva $p = r' + s' = \underbrace{p - r}_{\in \beta} + \underbrace{r}_{\in \alpha}$. Assim, p pertence a $\alpha + \beta$.

Por fim, tome $r + s$ em $\alpha + \beta$ e seja $r' > r$ (ambos em α). Logo, $\underbrace{r' + s}_{\in \alpha + \beta} > r + s$. Portanto, $\alpha + \beta$ é um corte.

Fica de exercício mostrar que 0^* é um corte. Agora, mostremos os axiomas de corpo.

A comutatividade e associatividade da adição são triviais. Além disso, dado r em α e s em 0^*,

$$r + s < r + 0 = r \Rightarrow r + s \in \alpha.$$

Logo, $\alpha + 0^* \subseteq \alpha$. Por outro lado, dado r em α, existe r' em α tal que $r' > r$. Assim, $r = \underbrace{r'}_{\alpha} + \underbrace{(r - r')}_{\in 0^*}$, pois $r - r' < 0$. Portanto, $\alpha \subseteq \alpha + 0^*$ e $\alpha = \alpha + 0^*$.

Proposição. *Dado um corte α, existe um único corte β tal que $\alpha + \beta = 0^*$, em que*

$$\beta = \{-p \in \mathbb{Q} : p - r \notin \alpha \text{ para algum } r \in \mathbb{Q}, r > 0\}$$

e é denotado por $-\alpha$.

Prova. *Começamos mostrando que β é um corte. Feito isso, vamos mostrar que $\beta + \alpha = 0^*$.*

Com efeito, dado -p em β, segue que p não pertence a β. Caso $s = p + r$, -s pertence a β, tal que β é não-vazio. Ademais, se $p \in \alpha, -p \notin \beta$, tal que β é diferente de $\mathbb{Q}$.

Além disso, se $-q < -p$ e $-p \in \beta$, então $-q \in \beta$. Por fim, se -p pertencer a β, $-p + \dfrac{r}{2} \in \beta$. Portanto, β é um corte.

Agora, vamos conferir o outro item. De fato, se r pertence a α e s a $-\alpha$, então $-s \notin \alpha$ e $r < -s$, i.e., $r + s < 0$. Segue que $\alpha + (-\alpha) \subseteq 0^*$. Por outro lado, se $-2r \in 0^*$ com $r > 0$, existe um inteiro n tal que $nr \in \alpha$ e $(n+1)r \notin \alpha$. Escolha $p = -(n+2)r \in -\alpha$ e escreva $-2r = nr + p$. Portanto, $0^* \subseteq \alpha + (-\alpha)$ e os conjuntos são iguais. ■

4 Aula 04 - 20/02/2023

4.1 Motivações

- Definir multiplicação de cortes;
- Definir conceito de distância entre números de $\mathbb{R}$

4.2 Cortes - Multiplicação

Definição. *Se α, β são cortes,*

$$\alpha\beta = \begin{cases} \alpha 0^*, & \forall \alpha \in \mathbb{R} \\ \{p \in \mathbb{Q} : \exists 0 < r \in \alpha \text{ e } 0 < s \in \alpha : p \leq rs\}, & \alpha, \beta > 0^* \\ (-\alpha)(-\beta), & \alpha, \beta < 0^* \\ -[(-\alpha)\beta], & \alpha < 0^* e \beta > 0^* \\ -[\alpha(-\beta)], & \alpha > 0^* e \beta < 0^* \end{cases}$$

Definimos, também, $1^*\{s \in \mathbb{Q} : s < 1\}$.

4.3 $\mathbb{R}$ Como Corpo Ordenado Completo

Temos $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ e diremos que todo número que não é real é irracional.

Teorema. *A quádrupla* $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ *satisfaz as condições de corpo ordenado, de corpo e é completo.*

Definição. *Seja* $x \in \mathbb{R}$*. O módulo, ou valor absoluto de* x*, é dado por*

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Disto segue que $|x| \geq 0$ *e* $-|x| \leq x \leq |x|$ *para todo* x *real.*

Exemplo 3. *Mostre que* $|x|^2 = x^2$*, ou seja, o quadrado de um número real não muda quando se troca seu sinal.*

Exemplo 4. *A equação* $|x| = r$*, com* r *maior que 0, tem como soluções apenas r e -r.*

Sejam P e Q dois pontos da reta real de abscissas x e y. Então, a distância de P a Q é definida por $|x-y|$. Assim, $|x-y|$ é a medida do segmento PQ. Em particular, como $|x| = |x-0|$, $|x|$ é a distância de x a 0.

Exemplo 5. *Seja r maior que 0. Então,* $|x| < r$ *se, e somente se,* $-r < x < r$*. Logo, o intervalo (-r, r) é o conjunto dos pontos reais cuja disância de 0 é menor que r.*

Exemplo 6. *Para quaisquer x, y reais, vale*

$$|xy| = |x||y|.$$

Exemplo 7. *Para quaisquer x, y reais, temos*

$$|x+y| \leq |x| + |y|.$$

Com efeito, somando $-|x| \leq x \leq |x|$ *e* $-|y| \leq y \leq |y|$*, obtemos* $-|x| - |y| \leq x + y \leq |x| + |y|$.■

Definição. *Um intervalo em* $\mathbb{R}$ *é um subconjunto de* $\mathbb{R}$ *que tem uma das seguintes formas:*

$$\begin{aligned}
&[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}, \quad \textit{(Intervalo fechado.)} \\
&(a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}, \quad \textit{(Intervalo aberto.)} \\
&[a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} \\
&(a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} \\
&(-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\} \\
&(-\infty,b) = \{x \in \mathbb{R} : x > b\} \\
&[a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\} \\
&(a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\} \\
&(-\infty,+\infty) = \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Definição. *Um conjunto A de* $\mathbb{R}$ *é dito limitado se existir L positivo tal que* $|x| \leq L$ *para todo x em A.*

Proposição. *Um conjunto A de* $\mathbb{R}$ *é limitado se, e só se, existir L positivo, tal que A está contido em* $[-L, L]$

Exemplo 8. *a)* $A = [0,1]$ *é limitado;*

b) $\mathbb{N}$ *não é limitado;*

c) $B = \left\{\dfrac{2^n - 1}{2^n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ *é limitado;*

d) $C = \left\{\dfrac{2^n - 1}{2^n} : n \in \mathbb{N}^*\right\}$ *é limitado.*

Definição. *Seja $A \subseteq \mathbb{R}$.*

- *A será dito limitado superiormente se existir um L real tal que $x \leq L$ para todo x de A. Diremos que L é o limitante superior de A.;*
- *A será dito limitado inferiormente se existir um L real tal que $x \geq L$ para todo x de A. Diremos que L é o limitante inferior de A.;*

Caso ambos ocorram, diremos que A é limitado.

Definição. *Seja A um subconjunto dos reais limitado superiormente e não-vazio. Diremos que $\overline{L}$ é o supremo de A se for um limitante superior e para qualquer outro limitante superior L de A, tivermos $\overline{L} \leq L$. Quando o supremo pertencer ao conjunto, chamaremos ele de máximo.*

Vimos que todo subconjunto não-vazio e limitado superiormente de $\mathbb{R}$ tem supremo.

Definição. *Seja A um subconjunto dos reais limitado inferiormente e não-vazio. Diremos que $\bar{l}$ é o ínfimo de A se for um limitante inferior e para qualquer outro limitante inferior l de A, tivermos $\bar{l} \geq l$. Quando o ínfimo pertencer ao conjunto, chamaremos ele de mínimo.*

Proposição. *Dado um subconjunto A dos reais não-vazio e limitado superiormente, $L = \sup A$ se, e somente se,*

a) L for limitante superior de A;

b) para todo $\epsilon > 0$, existe $a \in A$ tal que $a > L - \epsilon$.

Teorema. *O conjunto $A = \{nx : n \in \mathbb{N}\}$ será ilimitado para todo x não-nulo.*

Prova. *Se $x > 0$, suponhamos, por absurdo, que A seja limitado e seja L seu supremo. Como $x > 0$, deve existir um natural m tal que*

$$L - x < mx \quad \text{ e } L = \sup A < (m+1)x.$$

Mas isso é uma contradição.

A prova para $x < 0$ é análoga e será deixada como exercício. ■

Exemplo 9. *a) Considere $A = [0, 1)$. Então, -2 e 0 são limitantes inferiores de A enquanto $1, \pi, 101$ são limitantes superiores de A.*

b) $\mathbb{N}$ não é limitado, mas é limitado inferiormente por 0, visto que $0 \leq x$ para todo x natural.

c) $B = \{x \in \mathbb{Q} : x \leq \sqrt{2}\}$ não é limitado, mas é limitado superiormente por L, em que $L \geq 2$. ■

Corolário. *Para todo $\epsilon > 0$, existe um n natural tal que*

$$\frac{1}{n} < \epsilon, \quad \frac{1}{n\sqrt{2}} < \epsilon, \quad 2^{-n} < \epsilon.$$

Já sabemos, por construção, que entre dois números reais distintos existe um número racional. O mesmo vale para irracionais. De fato, sejam a e b números reais distintos. Se $a < b$ e $\epsilon = b - a > 0$, do corolário, tome um natural n tal que $\frac{1}{n\sqrt{2}} < \frac{1}{n} < \epsilon$. Se a é racional, $r = a + \frac{1}{n\sqrt{2}}$ é irracional e $a < r < b$. Por outro lado, se a é irracional, $r = a + \frac{1}{n}$ também é, tal que $a < r < b$. Portanto, dados dois números reais quaisquer, existe um número irracional.

Corolário. *Qualquer intervalo aberto e não-vazio contém infinitos números racionais e infinitos irracionais.*

Corolário. *Se $A = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\right\}$, então $\inf A = 0$.*

Exemplo 10.

(a) Seja $A = (0, 1]$. *Então,* $\inf A = 0, \max A = 1$;

(b)$\sqrt{2} = \{r \in \mathbb{Q} : r \leq 0\} \cup \{r \in \mathbb{Q} : r^2 < 2\}$ *é um corte.* *(c)*$C = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\} \Rightarrow \sqrt{2} = \sup C$ *e* $\inf C = -\sqrt{2}$.

Vamos analisar mais cautelosamente o item b e prová-lo. De fato, se $0 < r \in \mathbb{Q}$ *e* $r^2 < 2$, *existe n natural tal que* $[2r+1]\frac{1}{n} < 2 - r^2$ *e* $(r + \frac{1}{n})^2 < 2$. *As outras propriedades de cortes são triviais.*

Olhando também para o item C, como todos seus elementos são racionais saitsfazendo $x^2 < 2, \sqrt{2}$*é um limitante superior de C. Agora, se* $0 < L < \sqrt{2}$, *existe um racional* $r \in (L, \sqrt{2})$ *e* $L^2 < r^2 < 2$. *Logo, r pertence a C e L não é limitante superior para C, provando o resultado.*

Proposição. *Se A é um subconjunto não-vazio e limitado inferiormente, então* $-A = \{-x : x \in A\}$ *será limitado superiormente e* $\inf A = -\sup(-A)$. *Analogamente, se for limitado superiormente, o conjunto -A será limitado inferiormente, e* $\sup A = -\inf(-A)$

Prova. *Se A for limitado inferiormente,* $\inf(A) \leq x$ *para todo x de A e, dado* $\epsilon > 0$, *deve existir a em A tal que* $a < \inf(A) + \epsilon$, *ou, trocando o sinal,* $-\inf(A) \geq -x$ *para todo -x de -A e, dado* $\epsilon > 0$, *deve existir* $b = -a$ *em -A tal que* $-a > -\inf(A) - \epsilon$.

Com isso, segue que -A será limitado superiormente, e $\sup(-A) = -\inf(A)$. *A outra prova fica como exercício.* ■

Corolário. *Todo conjunto A não-vazio e limitado inferiormente de* $\mathbb{R}$ *tem ínfimo.*

Corolário. *Todo conjunto A não-vazio e limitado de* $\mathbb{R}$ *tem ínfimo e supremo.*

Definição. *Uma vizinhança de um número real a é qualquer intervalo aberto da reta contendo a.*

Exemplo 11. *Se* $\delta > 0, V_\delta(a) := (a - \delta, a + \delta)$ *é uma vizinhança de a que será chamada de* $\delta-$*vizinhança de a.*

Definição. *Sejam A um subconjunto de* $\mathbb{R}$ *e b um número real. Se, para todo* $\delta > 0$, *existir* $a \in V_\delta(b) \cap A, a \neq b$, *então b será dito um ponto de acumulação de A.*

Exemplo 12. *a) O conjunto dos pontos de acumulação de (a, b) é [a, b];*

b) Seja $B = \mathbb{Z}$. *Então, B não tem pontos de acumulação;*

c) Subconjuntos finitos de $\mathbb{R}$ *não têm pontos de acumulação;*

d) O conjunto dos pontos de acumulação de $\mathbb{Q}$ *é* $\mathbb{R}$.

Definição. *Seja* $B \subseteq \mathbb{R}$. *Um ponto b de B será dito um ponto isolado de B, se existir* $\delta > 0$ *tal que* $V_\delta(b)$ *não contém pontos de B distintos de b.* ☐

Exemplo 13. *Seja* $B = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots\}$. *Então, o conjunto dos pontos de acumulação de B é* $\{0\}$ *e o conjunto dos pontos isolados de B é o próprio conjunto B.*

Observe que existem conjuntos infinitos sem pontos de acumulação, tal como $\mathbb{Z}$. Por outro lado, todo conjunto infinito e limitado possui pelo menos um ponto de acumulação.

Teorema. *Se A é um subconjunto infinito e limitado de* $\mathbb{R}$, *então A possui pelo menos um ponto de acumulação.*

Prova. *Se* $A \subseteq [-L, L]$ *e* $[a_n, b_n], n \in \mathbb{N}$ *são escolhidos tais que* $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n], b_0 = -a_0 = L, b_n - a_n = \frac{2L}{2^n}, n \in \mathbb{N}^*$ *e* $[a_n, b_n]$ *contém infinitos elementos de A. Seja* $a = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Note que $[a_n, b_n] \subseteq a_j, b_j, j \leq n$ *e* $[a_j, b_j] \subseteq [a_n, b_n], j > n$. *Em qualquer um dos casos,* $a_n \leq b_j$ *para todo* $j \in \mathbb{N}$. *Logo,* $a \leq b_j, j \in \mathbb{N}$. *Segue que* $a_n \leq a = \sup\{s_n : n \in \mathbb{N}\} \leq b_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *e* $a \in \bigcap_{n \geq 1} [a_n, b_n]$. *Dado* $\delta > 0$, *escolha* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $\frac{2L}{2^n} < \delta$. *Segue que* $a \in [a_n, b_n] \subseteq (a - \delta, a + \delta) = V_\delta(a)$ *e a é ponto de acumulação de A.* ■

5 Aula 05 - 22/03/2023

5.1 Motivações

- Sequências de Números Reais;
- Convergência de Sequências;

5.2 Sequências de Números Reais

Definição. *Uma sequência é uma função definida no conjunto dos números reais que, para cada n natural, associa um número real a_n.*

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$$
$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$
$$n \mapsto a_n.$$

Denotamos a função por $\{a_n\}$ $\square$

Exemplo 14. *Sendo $a_n = \frac{f1}{n+1}$ para todo n natural, temos a sequência $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots\}$.*

Exemplo 15. *Sendo $a_n = 6$ para todo n natural, temos a sequência constante*

$$\{6, 6, 6, \cdots\}.$$

Exemplo 16. *Coloque $a_{2n+1} = 7, a_{2n} = 4$ para todo n natural. Temos*

$$\{4, 7, 4, 7, \cdots\}$$

Consideremos as sequências

$$\alpha_n = n, \quad \beta_n = (-1)^n, \quad \text{e } \gamma_n = \frac{1}{n}.$$

Como funções, elas podem ter os gráficos traçados, mas não são muito significativos, visto que consistem em coletâneas de pontos discretos. Ademais, note que a sequência (α_n) "diverge" para infinito, a sequência (β_n) "oscila" e a sequência (γ_n) "converge para 0". Precisamente,

Definição. *A sequência $\{a_n\}$ é dita convergente com limite l se, para todo $\epsilon > 0$, existe um natural N dependendo de $\epsilon (N = N(\epsilon) \in \mathbb{N})$ tal que $n > N$ implica em $|a_n - l| < \epsilon$. Ou seja, a partir de um certo N, os a_n estão no intervalo $(l - \epsilon, l + \epsilon)$ e, como ϵ é arbitrário, os a_n se juntam em torno de l. Disto, segue que a condição exigida equivale a*

$$l - \epsilon < a_n < l + \epsilon, \quad n \geq N.$$

Denotamos esse fenômeno por $\lim_{n\to\infty} a_n = l$, ou $a_n \to l$, ou $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$.$\square$.

Exemplo 17. *$\circ \frac{1}{n} \to 0, n \to \infty$. De fato, dado $\epsilon > 0$, da propriedade arquimediana, segue que existe um N natural tal que $N\epsilon > 1$. Logo, para todo $n \geq N$, temos*

$$0 - \epsilon < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < 0 + \epsilon.$$

$\circ \frac{n}{n+1} \to 1, n \to \infty$. Com efeito, dado $\epsilon > 0$, queremos encontrar N natural não-nulo tal que se n é maior que N, temos

$$\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \epsilon.$$

No entanto, $|\frac{n}{n+1} - 1| = \frac{1}{n+1}$ e, da propriedade Archimediana, existe N em $\mathbb{N}^\times$ tal que $(N + 1)\epsilon > 1$. Logo, se $n \geq N$,

$$1 - \epsilon < \frac{n}{n+1} < 1 + \epsilon.$$

Definição. *Uma sequência $\{a_n\}$ será divergente quando ela não for convergente.*

I) *Sequência divergente para $+\infty$: Este caso ocorre se dado $K > 0$, existe N natural tal que se $n > N, a_n > K$.*

II) *Sequência divergente para $-\infty$: Acontece quando dado $K > 0$, existe N natural tal que se $n > N, a_n < -K$.*

III) *Sequência oscilante: Por fim, ocorre quando a sequência diverge, mas nem para $+\infty$ e nem para $-\infty$.* $\square$

Note que, como sequências são funções, podemos multiplicá-las por constante, somar, dividir e multiplicar por outras sequência. De fato,

Definição. *Dadas sequências $\{a_n\}, \{b_n\}$ e um número real c, deifnimos*

$$i)\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\}$$
$$ii)c\{a_n\} = \{c \cdot a_n\}$$
$$iii)\{a_n\}\{b_n\} = \{a_n b_n\}$$
$$iv) \text{ Se } b_n \neq 0 \forall n \in \mathbb{N}, \frac{\{a_n\}}{\{b_n\}} = \left\{\frac{a_n}{b_n}\right\} \square$$

Definição. *Seja $\{a_n\}$ uma sequência de número reais. Diremos que $\{a_n\}$ é limitada se sua imagem for um subconjunto limitado de $\mathbb{R}$.* $\square$

Teorema. *Seja $\{a_n\}$ uma sequência de números reais.*

a) *$a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$ se, e somente, toda vizinhança de a contém todo, exceto uma possível quantidade finita de a_n's.*

b) *O limite é único.*

c) *Se $\{a_n\}$ é convergente, então $\{a_n\}$ é limitada*

d) *Se $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$, exite N natural tal que $a_n > 0$ para todo $n \geq N$.*

e) *Se $A \subseteq \mathbb{R}$ e a é um ponto de acumulação de A, então existe uma sequência $\{a_n\}$ de elementos de A que converge para a.*

Prova. *O item a é trivial. Mostremos a unicidade do limite: Suponha que a_n converge para a e para b, com a diferente de b. Então, dado $\epsilon > 0$, existem naturais N_1, N_2 tais que se $n \geq N_1, |a_n - a| < \epsilon$ e se $n \geq N_2, |a_n - b| < \epsilon$. Tome $N = \min N_1, N_2$ e suponha que $n \geq N$. Então, temos*

$$|b - a| \leq |b - a_n| + |a_n - a| = |b - a_n| + |a - a_n| < 2\epsilon.$$

(P.S.: pode ser boa prática tomar $\frac{\epsilon}{2}$ ao invés de ϵ, pois assim obtemos $|b - a| < \frac{2\epsilon}{2} = \epsilon$.)

Como ϵ é abritrário, podemos selecionar ϵ infinitamente próximo de 0. Portanto, $b = a$.

Para o item c, suponha que a_n converge para a, isto é, dado $\epsilon > 0, \epsilon = 1$ em particular, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N, |a_n - a| < 1$. Logo, $a_n \in (a - 1, a + 1)$ para n maior que N suficientemente grande. Restam os N-1 primeiros elementos da sequência. Assim, tome $R = \max\left\{|a_1|, \cdots, |a_{N-1}|, |a + 1|, |a - 1|\right\}$. Deste modo, $a_n \in [-R, R]$ para todo n natural.

Com relação ao item d, basta tomar $\epsilon = \frac{a}{2} > 0$.

Por fim, quanto ao item e, suponha o que é dito no enunciado. Como a é ponto de acumulação, dado $\epsilon > 0$, existe $a' \in A, a' \neq a$ tal que

$$a' \in V_\epsilon(a) = (a - \epsilon, a + \epsilon).$$

Logo, tomadno $\epsilon = \frac{1}{n}$, podemos encontrar $a_n \in A, a_n \neq a$ tal que $a_n \in \left(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right)$. A sequência $\{a_n\}$ converge para a. De fato, dado $\epsilon > 0$, tome N natural tal que $N\epsilon > 1$. Assim, se $n \geq N, a_n \in (a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}) \subseteq a - \epsilon, a + \epsilon)$. Portanto, $a_n \to a$. ■

Teorema. *Seja* $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a, b_n \overset{n\to\infty}{\to} b$ *e* c *um número real. Então,*

$$a) a_n + b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a + b.$$
$$b) ca_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} ca$$
$$c) a_n b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} ab$$
$$d) Se b \neq 0, b_n \neq 0 \forall n \in \mathbb{N}, \frac{a_n}{b_n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{a}{b}.$$

Prova. *Item c). Suponha* $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a, b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} b$. *Note que*

$$|a_n b_n - ab| = a_n b_n - a_n b + a_n b - ab \leq |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a|$$

Como $\{a_n\}$ *é convergente, ela é limitada pelo teorema anterior. Assim, existe* $M > 0$ *tal que* $|a_n| \leq M$ *para todo* n *natural, tal que Assim,*

$$|a_n b_n - ab| \leq |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a| \leq M|b_n - b| + (|b| + 1)|a_n - a|.$$

Agora, dado $\epsilon > 0$, *existem naturais* N_1, N_2 *tais que*

$$|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2(|b| + 1)}, \quad \forall n \geq N_1$$
$$|b_n - b| < \frac{\epsilon}{2M}, \quad \forall n \geq N_2.$$

Logo, tomando $N = \max\{N_1, N_2\}$, *se* $n \geq N$,

$$|a_n b_n - ab| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Portanto, $a_n b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} ab$. ■

Definição. *Seja* $\{a_n\}$ *uma sequência. Diremos que* $\{b_n\}$ *é uma subsequência de* $\{a_n\}$ *se existir uma função estritamente crescente* $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *tal que* $b_k = a_{s(k)}$ *para todo* k *natural.* □

Definição. *Seja* $\{a_n\}$ *uma sequência. Diremos que* $\{a_n\}$ *é de Cauchy se, dado* $\epsilon > 0$, *existe um natural* $N = N(\epsilon)$ *tal que* $|a_n - a_m| < \epsilon$ *para todo* $n, m \geq N$.□

Teorema. *a) Uma sequência é convergente se, e somente se, toda subsequência dela converge para o mesmo limite.*

b) Toda sequência convergente é de Cauchy;

c) Toda sequência limitada tem subsequência convergente;

d) Toda sequência de Cauchy é limitada;

e) Toda sequência de Cauchy que tem subsequência convergente é convergente.

f) Toda sequência de Cauchy é convergente;

g) Toda sequência crescente e limitada é convergente;

h) Toda sequência decrescente e limitada é convergente.

6 Aula 06 - 24/03/2023

6.1 Motivações

- Provar o teorema da aula anterior;
- Exemplos.

6.2 Propriedades de Sequências

Recapitulemos o teorema da aula anterior:

Teorema. *a) Uma sequência é convergente se, e somente se, toda subsequência dela converge para o mesmo limite.*

b) Toda sequência convergente é de Cauchy;

c) Toda sequência limitada tem subsequência convergente;

d) Toda sequência de Cauchy é limitada;

e) Toda sequência de Cauchy que tem subsequência convergente é convergente.

f) Toda sequência de Cauchy é convergente;

g) Toda sequência crescente e limitada é convergente;

h) Toda sequência decrescente e limitada é convergente.

Prova. *a.) $\Leftarrow$) Se toda subsequência de $\{a_n\}$ converge, então $\{a_n\}$ converge, pois ela é uma subsequência de si mesma (basta tomar $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, s(n) = n$.)'*

$\Rightarrow$) Suponha que $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} l$ e $\{b_n\}$ é uma subsequência de $\{a_n\}$, existe $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estritamente crescente tal que $b_k = a_{s(k)}$. Dado $\epsilon > 0$, seja N o natural tal que $|a_n - l| < \epsilon$ para todo $n \geq N$. Note que $s(n) \geq n$, tal que se $n \geq N$, então $s(n) \geq N$, de forma que $|a_{s(n)} - l| < \epsilon$. Portanto, qualquer subsequência de $\{a_n\}$ é convergente.

b.) Se $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} l$, então dado $\epsilon > 0$, existe N natural tal que

$$|a_n - l| < \frac{\epsilon}{2}, \quad \forall n \geq N.$$

Logo, $|a_n - a_m| = |a_n - l + l - a_m| \leq |a_n - l| + |l - a_m| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$ para todo $n, m \geq N$.

c.) Suponha que $\{a_n\}$ é uma sequência limitada. Recorde que, do teorema de Bolzano-Weierstrass, todo conjunto inifinito e limitado possui um ponto de acumulação. Segue que a imagem I da sequência é finita ou infinita.

No primeiro caso, se I é finito, um dos valores pertencentes a I é tal que $a_n = a$ para infinitos índices. Construiremos a sequência como segue - Coloque s(0) como o menor elemento do conjunto dos n's para os quais $a_n = a, i.e., \{n \in \mathbb{N} : a_n = a\} = A$. Além disso, tome s(1) como o menor elemento de A, com exceção do s(0). Repetindo esse processo, obtemos uma subsequência constante até que se obtenha s(n) = a, ou seja, ela será convergente.

Agora, se I é infinito, segue de Bolzano-Weierstrass que I tem um ponto de acumulação, nomeie-o de a. Dado $\epsilon > 0, (a - \epsilon, a + \epsilon)$ tem infinitos elementos do conjunto I. Analogamente ao anterior, coloque $N = s(0)$ como o menor elemento de $\{n \in \mathbb{N} : a_n \neq a, a_n \in (a - \epsilon, a + \epsilon)\}$ e coloque, também, $\epsilon_1 = |a - a_{s(0)}|$. Em seguida, tome $s(1) = \{n \in \mathbb{N} : a_n \neq a, a_n \in (a - \frac{\epsilon}{2}, a + \frac{\epsilon}{2})\}$. Indutivamente, $b = a_{s(n)}$ é convergente para a.

d.) Dado $\epsilon = 1$, seja N um número natural tal que

$$|a_n - a_m| < 1, \quad \forall n \geq N.$$

Considere $M = \{|a_0|, |a_1|, \cdots, |a_{N-1}|, |a_N + 1|, |a_N - 1|\}$. Assim, $a_n \in [-M, M]$ para todo n natural.

e.) Seja $\{a_n\}$ de Cauchy e $\{a_{s(n)}\}$ convergente para l. Dado $\epsilon > 0$, existe um natural N_1 tal que

$$|a_n - a_m| < \frac{\epsilon}{2}, \quad \forall n \geq N_1.$$

Além disso, existe N_2 natural tal que

$$|a_{s(n)} - l| < \frac{\epsilon}{2}, \quad \forall s(n) \geq N_2.$$

Seja $N = \max\{s(N_2), N_1\}$ e tome $n \geq N$.

$$|a_n - l| = |a_n - a_{s(N_2)} + a_{s(N_2)} - l| \leq |a_n - a_{s(N_2)}| + |a_{s(N_2)} - l| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

f.) Segue os itens (e), (d) e (c), visto que toda subsequência de Cauchy terá subsequência convergente pelos itens (d) e (c).

g.) Seja $\{a_n\}$ limitada e crescente, $l = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Então, para todo $n \geq N$, em que N é tal que $a_N \in (l - \epsilon, l)$

$$l - \epsilon < a_N \leq a_n \leq l.$$

h.) Análoga ao g.

Exemplo 18. *Mostre que*

i) $\{a, a, a, \cdots\}, a \in \mathbb{R}$ é convergente;

ii) $\{0, 1, 0, 1\}$ não é convergente;

iii) $\{n\}$ não é convergente.

Exemplo 19. *Se a é um número real mais ou igual a zero, então a sequência $\{a^n\}$ é convergente se $0 \leq a \leq 1$ e divergente se $a > 1$. Com efeito, se $a > 1, a = 1 + h, h > 0$. Então,*

$$a^n = (1+h)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} h^k = 1 + nh + \cdots > 1 + nh.$$

Mas, segue da Archimediana que $1 + nh$ sempre forma um conjunto ilimitado para n natural, ou seja, a_n é ilimitada. Logo, a sequência diverge.

Por outro lado, suponha que a pertence a (0, 1). Então, $a^{n+1} = aa^n < a^n$, ou seja, é uma sequência decrescente e limitada inferiormente. Portanto $\{a_n\}$ é convergente.

Exemplo 20. *Mostre que, se a é diferente de 1,*

$$\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$$

e que a sequência $\left\{\frac{1-a^{n+1}}{1-a}\right\}$ é convergente se $0 \leq a < 1$ e divergente se $a > 1$.

Exemplo 21. *Mostre que a sequência $\{a_n\}$, com $a_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}$ é convergente para todo n natural. (Crescente e limitada por 3.)*

Exemplo 22. *Mostre que as sequências $\left\{(a + \frac{1}{n}^n)\right\}, \{n^{\frac{1}{n}}\}$ e $\{a^{\frac{1}{n}}\}$ com $a > 0$, são convergentes.*

$$\circ\, (1 + \frac{1}{n})^n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}(1 - \frac{1}{n}) + \cdots + \frac{1}{n!}(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) \cdots (1 - \frac{n-1}{n})$$

$$\circ\, n^{\frac{1}{n}} > (n+1)^{\frac{1}{n+1}} \Longleftrightarrow n^{n+1} > (n+1)^n \Longleftrightarrow n > (1 + \frac{1}{n})^n$$

$$\circ\, x = a^n < 1 \Rightarrow x < 1, x^n = a, x^{n+1} = a^{\frac{n+1}{n}}, \text{ e } y^{n+1} = a \Rightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} = a^{\frac{1}{n}}.$$