Funções de Variáveis Complexas

Prof. Thaís Jordão

Notas por:
Lucas Giraldi Almeida Coimbra
Renan Wenzel

GitHub com o Arquivo das Notas (Link clicável)
`https://github.com/RenanLeznew/USP-Math-LaTeX/tree/master/ComplexAnalysis`

31 de janeiro de 2023

Conteúdo

1 Aula 01 - 03/01/2023

1.1 Motivações

- Definir o corpos dos complexos
- Definir a topologia no corpo dos complexos
- Esfera de Riemann

1.2 Definições Básicas

Definição. *Um corpo f é um conjunto não vazio em que definem-se duas operações* $+ : F \times F \to F, \cdot : F \times F \to F$ *satisfazendo:*

i) $w + z = z + w$

ii) $w + (z + u) = (w + z) + u$

iii) Existe 0 em F tal que $w + 0 = w$

iv) Para cada $w \in F$*, existe* $-w \in F$ *tal que* $w + (-w) = 0$

v) $w \cdot z = z \cdot w$

vi) $w \cdot (z \cdot u) = (w \cdot z) \cdot u$

vii) Existe $e \in \mathbb{F}$ *tal que* $w \cdot e = w$

viii) Para cada $w \in F - \{0\}$*, existe* $w^{-1} \in F$ *tal que* $w \cdot w^{-1} = e$

ix) $(w + z) \cdot u = w \cdot u + z \cdot u$,

em que w, z, u pertencem a F.

Considere F um corpo contendo $\mathbb{R}$ e tal que

$$x^2 + 1 = 0$$

tenha solução. Seja i esta solução. Segue que -i é solução dela também, -1.z = z e 0.z = 0 para z em F. Definimos

$$\mathbb{C} := \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}$$

de maneira que os elementos de $\mathbb{C}$ são unicmaente determinados, $\mathbb{C}$ é subcorpo de F e a estrutura algébrica de $\mathbb{C}$ não depende de F. Além disso, este corpo existe.

Com efeito,

1.2.1 Unicidade

Sejam a, b, c, d $\in \mathbb{R}$ tais que

$$a + bi = c + di.$$

Assim, $a - c = i(d - b) \Rightarrow (a - c)^2 = (d - b)^2$, donde segue a unicidade a = c e d = b

1.2.2 Subcorpo

Exercício.

1.2.3 Estrutura Algébrica Independe de F

Seja F outro corpo contendo $\mathbb{R}$ em que $x^2 + 1 = 0$ possui solução. Considere $\mathbb{C}' = \mathbb{R} + j\mathbb{R}$, em que j é a solução da equação em F'. Definimos $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}'$ por

$$T(a + bi) = a + bj$$

e, neste caso, T(z + w) = T(z) + T(w), T(zw) = T(z)T(w) para todos $z, w \in \mathbb{C}$. (Exercício.)

1.2.4 Existência

Seja $F = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ munido das operações $+ : F \times F \to F, \cdot : F \times F \to F$ dadas por

$$+((a, b), (c, d)) = (a + c, b + d)$$
$$\cdot((a, b), (c, d)) = (ac - bd, ad + bc).$$

Note que $(0, 1)^2 = (-1, 0)$. Assim, (F, +, .) é um corpo contendo $\mathbb{R}$. (Exercício).

Algumas propriedades(Exercícios):

a) $Re(z) \leq |z|$ e $Im(z) \leq |z|$

b) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$ e $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$

c) $\overline{\frac{1}{z}} = \frac{1}{\overline{z}}$

d) $|z| = |\overline{z}|$ e $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$

e) $z + \overline{z} = 2Re(z), z - \overline{z} = 2iIm(z)$ e $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$

1.3 Representação Polar de $\mathbb{C}$

Dado $z \in \mathbb{C}$, temos

$$z = |z|(\cos\theta + i \sin\theta), \quad \theta = \arg z.$$

Neste caso, temos, para z não-nulo,

$$z^{-1} = |z|^{-1}(\cos -\theta + i \sin -\theta) = |z|^{-1}(\cos\theta - i \sin -\theta)$$

Para $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, temos

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2))$$

com $\theta_1 = \arg z_1, \theta_2 = z_2$. Mais geralmente,

$$\prod_{k=1}^{n} z_k = \prod_{k=1}^{n} |z_k|(\cos(\sum_{k=1}^{n} \theta_k) + i \sin(\sum_{k=1}^{n} \theta_k)),$$

com $\theta_k = \arg z_k$. Em particular,

$$z^n = |z|^n(\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Buscando w tal que $w^n = z$ para dado z não-nulo,

$$w = |z|^{\frac{1}{n}}(\cos(\frac{\theta + 2k\pi}{n}) + i \sin(\frac{\theta + 2k\pi}{n})), \quad k = 0, 1, \cdots, n.$$

1.4 A Esfera de Riemann

Considere $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ a esfera

$$\mathbb{S}^2 := \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}.$$

Chame N={0, 0, 1} de polo norte. Fazemos uma associação entre $\mathbb{S}^2 - \{N\}$ e o plano z=0 de $\mathbb{R}^3$, chamada de projeção estereográfica. Nessa associação, o ponto $z(= x + iy) \in \mathbb{C}$ é associado a (x, y, 0), e definimos uma reta por N e z como r: N + t(x, y, -1), $t \in \mathbb{R}$. Assim,

$$r \cap \mathbb{S}^2 \Rightarrow S_z = \left(\frac{2x}{|z|^2+1}, \frac{2y}{|z|^2+1}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right) \in \mathbb{S}^2$$

Reciprocramente, o ponto (x, y, z) de $\mathbb{S}^2$ pode ser associado ao considerar a reta r: N + t(x, y, s-1), em que s é um número real. Com isso, a intersecção $r \cap \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\} \Rightarrow t = \frac{1}{1-s}$ mostra que $z = \left(\frac{x}{1-s}, \frac{y}{1-s}, 0\right)$ corresponde ao ponto z de $\mathbb{C}$.

Associando N ao infinito, obtemos o plano estendido $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, chamado de Esfera de Riemann. Se $\phi : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{S}^2$ é dada por $\phi(\infty) = N$ e, para $z \neq \infty$,

$$\phi(z) = (\frac{z+\overline{z}}{|z|^2+1}, \frac{z-\overline{z}}{|z|^2+1}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}),$$

então dados $z, w \in \mathbb{C}_\infty$, definimos a métrica

$$d(z, w) = \begin{cases} ||\phi(z) - \phi(w)||, & z, w \neq \infty \\ 0, & z = w = \infty \\ \infty, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Exemplo 1.1. *Se $z, w \neq \infty$, então*

$$d(z, w) = d(\phi(z), \phi(w)) = \frac{2|z-w|}{[(1+|z|^2)(1+|w|^2)]^{\frac{1}{2}}}$$

e, se $z \neq \infty$,

$$d(z, \infty) = ||\phi(z) - N|| = \frac{2}{(1+|z|^2)^{\frac{1}{2}}}$$

1.5 Topologia de $\mathbb{C}$

Definição. *Sejam X um conjunto e $d : X \times X \to X$ uma função. Dizemos que d é uma métrica se*

i) $d(x, y) \geq 0, d(x, y) = 0 \iff x = y$

ii) $d(x, y) = d(y, x)$

iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$,

em que x, y, z pertencem a X. Neste caso, chamamos a terna (X, d) de espaço métrico.

Considere (X, d) um espaço métrico. Dado x em X e $r > 0$,

$$B(x, r) := \{y \in X : d(x, y) < r\}$$

é a bola aberta, seu fecho é

$$B_c(x, r) := \{y \in X : d(x, y) = r\}$$

e a bola fechada é a união deles, ou seja,

$$\overline{B(x, r)} := \{y \in X : d(x, y) \leq r\}$$

Exemplo 1.2. *Considere X não-nulo e d(x, y) = $\delta_{x,y}$. (X, d) é metrico e*

$$B\left(x, \frac{1}{2}\right) = \{x\} = \overline{B\left(x, \frac{1}{2}\right)} = B\left(x, \frac{1}{333}\right), x \in X$$

$$B(x, 2) = X = B(x, 1001), x \in X$$

Utilizando bolas, definimos que um conjunto $A \subset X$ é aberto se para todo x em A, existe $r > 0$ tal que B(x, r) está contido em A. Por outro lado, um conjunto é fechado se seu complemenetar é aberto. A união infinita de abertos é aberta e, pelas Leis de DeMorgan, a intersecção infinita de fechados é fechada. Além disso, intersecções finitas de abertos é aberta e união finita de fechados é fechado.

Definimos, também, o interior de A como $A^\circ := \cup_B\{B \subset A : B \text{ aberto}\}$, o fecho de A como $\overline{A} = \cap_F\{A \subseteq F : F \text{ fechado}\}$ e o bordo de A como $\partial A = \overline{A} \cap \overline{A^c}$. Diremos que A é denso quando $\overline{A} = X$.

Proposição. *Seja (X, d) um espaço métrico e A um subconjunto. Então,*

i) A é aberto se, e só se, $A = A^\circ$

ii) A é fechado se, e só se, $A = \overline{A}$

iii) Se x pertence a A°, então existe $\epsilon > 0$ tal que $B(x, \epsilon) \subseteq A$.

iv) Se x pertence a $\overline{A}$, então para todo $\epsilon > 0$ tal que $B(x, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$.

Um espaço métrico (X, d) é conexo se os únicos subconjuntos abertos e fechados de X são X e vazio. Caso contrário, X é dito ser desconexo, ou seja, existem abertos disjunto não-vazios cuja união dá o espaço todo. Um exercício é mostrar mostrar que um conjunto é conexo se, e só se, ele é um intervalo.

Dados z, w em $\mathbb{C}$, o segmento [z, w] é o conjunto

$$[z, w] := \{tw + (1-t)z : t \in [0, 1]\}$$

Além disso, dados $z_1, \cdots, z_n$, a poligonal com esses vértices é

$$[z_1, \cdots, z_n] = \bigcup_{k=1}^{n-1} [z_k, z_{k+1}]$$

Proposição. *Seja G um subconjunto de $\mathbb{C}$ aberto. Então, G é conexo se, e só se para todo z, w em G, existe uma poligonal $[z, z_1, \cdots, z_n, w] \subseteq G$.*

Prova. $\Leftarrow$) *Assumindo que G satisfaz a propriedade da poligonal, suponha também que G não é conexo. Assim, podemos escrever $G = B \cup C$ com $B \cap C = \emptyset$ e B, C não-vazios. Pela propriedade de G, existe $[b, z_1, \cdots, z_n, c] \subseteq G$. Neste caso, existe k tal que $z_k \in B$ e $z_{k+1} \in C$. Agora, considere os conjuntos*

$$B' = \{t \in [0, 1] : tz_k + (1-t)z_{k+1} \in B\}$$
$$C' = \{t \in [0, 1] : tz_k + (1-t)z_{k+1} \in C\}$$

e note que $B' \neq \emptyset$ pois $z_k \in B$ e $1 \in B'$. Analogamente, C' é não-vazio. No entanto, isso é um absurdo, pois [0, 1] seria conexo e $B' \cup C'$ seria uma cisão não trivial

$\Rightarrow$) *Suponha, agora, que G é conexo e seja z um elemento dele. Defina*

$$C = \{w \in G : \textit{Existe } [z, z_1, \cdots, z_n, w] \subseteq G\}$$

Observe que C é não-vazio, z pertence a G e [z] é subconjunto de G. Mostremos que C é aberto e fechado (pois implicará em C = G). Com efeito, se $w \in C \subseteq G$, existe $r > 0$ tal que B(w, r) está contigo em G, pois G é aberto. Assim, para todo $s \in B(w, r)$, temos $[s, w] \subseteq B(w, r)$ e, com isso, existe uma poligonal ligando s a z com $s \in C$, mostrando que C é aberto.

Mostrar que o complementar de C é aberto é análogo. Com efeito, se $C^c = \emptyset$, o resultado está provado. Por outro lado, se $C^c \neq \emptyset$, seja $w \in C^c$ = G - C. Logo, existe $r > 0$ tal que $B(w, r) \subseteq G$. Afirmamos que $B(w, r) \subseteq G - C$. Caso contrário, existe s em B(w, r) contido, também, em C. Neste caso, existe uma poligonal ligando s a z e s a w, uma contradição, pois isso conectaria w a z, mesmo com w no complementar de z. Portanto, o complementar é aberto e C é aberto e fechado. ■

2 Aula 02 - 05/01/2023

2.1 Motivações

- Sequências e suas convergências;
- Teorema de Cantor para espaços completos;
- Compacidade e Heine-Borel;
- Continuidade e convergência de funções.

2.2 Fim de Conexos

Teorema. *Seja $G \subseteq \mathbb{C}$ um aberto e conexo, então existe uma poligonal ligando qualquer z, w em G cujos segmentos sejam paralelos ao eixo real ou imaginário.*

Definição. *Um subconjunto de um espaço métrico (M, d) é uma componente conexa se é um conexo maximal*

Exemplo 2.1. *Coloque $A = \{1, 2, 3\}$.$\{1\}$ é componente conexa de A, mas $\{1, 2\}$ não é.*

Teorema. *Seja (M, d) um espaço métrico. Então,*

1) Para x em M, existe C_x uma componente conexa de M com x em C_x;

2) As componentes são disjuntas.

Prova. *1)*
Seja x em M e tomemos

$$C_x = \bigcup_{D \subseteq M} \{D : D \text{ conexos com } x \in D\}$$

Mostremos que C_x é conexo, pois a maximalidade segue da definição dada a ele. Note que $C_x \neq \emptyset$, visto que qualquer conjunto unitário é conexo. Seja $A \subseteq C_x$ aberto, fechado e não-nulo. Existe $D_x \in C_x$ tal que $D_x \cap A \neq \emptyset$, o que implica que $D_x \subseteq A$.

Finalmente, considere $D \in C_x$, de modo que $D_x \cup D$ é conexo e $(D_x \cup D) \cap A \neq \emptyset$ o que garante que $D \subseteq A$. Assim, $A = C_x$. ■.

Exercícios. *1) Prove a segunda afirmação do teorema;*

2) Se D e conexo e $D \subseteq A \subseteq \overline{D}$, então A é conexo.

Teorema. *Seja G um subconjunto aberto de $\mathbb{C}$. As componentes conexas são abertas e há no máximo uma quantidade enumerável delas.*

Prova. *Seja D uma componente conexa de G. Tome $x \in D$, tal que existe $r > 0$ com $B(x, r) \subseteq G$, já que G é aberto. Suponha que $B(x, r) \nsubseteq D$. Neste caso, $B(x, r) \cup D$ seria um conexo contendo D propriamente. Logo, $B(x, r) \subseteq D$ e D é aberto.*

Para a segunda afirmação, considere

$$\Omega = \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}(\overline{\Omega} = \mathbb{C})$$

Para cada componente conexa C de G, como G é aberto, existe $z \in \Omega \cap C$, o que é suficiente para garantir a enumerabilidade das componentes de G. ■.

2.3 Sequências e Completude

Definição. *Seja (M, d) um espaço métrico. Uma sequência $\{x_n\}$ de M é convergente se existe x em M tal que para todo $\epsilon > 0$, existe n_0 natural tal que*

$$d(x_n, x) < \epsilon, \quad n \geq n_0.$$

Escrevemos, neste caso, $x_n \to x$. Dizemos que uma sequência é de Cauchy se para todo $\epsilon > 0$, existe n_0 natural satisfazendo

$$d(x_n, x_m) < \epsilon, \quad n, m \geq n_0.$$

Exercícios. *i) Se $\{x_n\}$ é convergente, então $\{x_n\}$ é de Cauchy, mas a recíproca é só válida quando a sequência possui uma subsequência convergente.*

ii) Se $\{x_n\}$ é de Cauchy, então x_n é limitada.

iii) $F \subseteq M$ é fechado se e só se toda x_n de F com $x_n \to x$ é tal que x pertence a F.

Dizemos que um espaço métrico é completo se toda sequência de Cauchy for convergente.

Exercícios. *i) Mostre que $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ são espaços métricos completos;*

ii) Se (M,d) é um espaço métrico e $S \subseteq M$, mostre que se (S,d) for completo, ele é fechado em M. Mostre e recíproca no caso em que (M, d) é completo.

O resultado a seguir é conhecido como Teorema de Cantor.

Teorema. *Um espaço métrico é completo se e só se toda cadeia descendente de fechado $\{F_n\}$ satisfazendo*

$$diam F_n \to 0, \quad n \to \infty$$

é tal que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ é unitário. Aqui, $diam A := sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$.

Prova. *Suponha que M é um espaço métrico completo. Se $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F \neq \emptyset$, então ele é unitário. De fato, se $x, y \in \cap_n F$,*

$$d(x, y) \leq diam F_n (diam F_{n+1} \leq diam F_n),$$

mas $diam F_n \to 0$ e d(x, y) = 0, de modo que x = y.

Agora, seja $x_n \in F_n, n \in \mathbb{N}$ e observe que

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq diam F_n,$$

pois $F_{n+1} \subseteq F_n$. Isto garante que $\{x_n\}$ é de Cauchy e, como M é completo, existe x com $x_n \to x$. Neste caso, $x \in F_n$ para todo n e $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \{x\}$.

Reciprocramente, seja $\{a_n\}$ de Cauchy em M. Construímos

$$F_n = \overline{\{a_k : k \geq n\}}$$

que são fechados satisfazendo $F_{n+1} \subseteq F_n$. Assim, $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n = \{x\}$ para algum x de M. Como

$$d(x, a_n) \leq diam F_n \to 0,$$

temos, portanto, $a_n \to x$. ■

Um exercício que fica é mostrar que se $\{a_n\}$ é de Cauchy, então $diam F_n \to 0$

2.4 Compactos

Definição. *Seja (M, d) um espaço métrico. Um subconjunto $S \subseteq M$ é compacto se para toda coleção $\mathcal{A}$ de abertos de M cobrindo S existe $A_1, \cdots, A_n \in \mathcal{A}$ tal que*

$$S \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} A_k$$

Dado um espaço métrico (M, d), M é dito sequencialmente completo se todas as sequências de M possuem subse quência convergente. Também diremos que ele é totalmente limitado se para todo $\epsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}, x_1, \cdots, x_n \in M$ com

$$M = \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \epsilon).$$

Um conjunto A é dito limitado se seu diametro é finito.

Exercícios. *i) Se A é totalmente limitado, então A é limitado, mas a recíproca não é necessariamente verdade.*

ii) Se A é compacto, então A é limitado, mas a recíproca não é necessariamente verdade.

Proposição. *Seja (M, d) um espaço métrico e K um subconjutno de M. Então, K é compacto se esó se toda família de fechados com PIF tem interseção não-vazia.*

A PIF é a Propriedade da Intersecção Finita, que afirma que dados conjuntos $F_1, \cdots, F_n \Rightarrow \bigcap_{k=1}^{n} F_k \neq \emptyset$

Teorema. *Seja (M, d) um espaço métrico. As seugintes afirmações são equivalentes:*

i) M é compacto;

ii) Para todo conjunto ininito S de M, existe x em S tal que para todo $\epsilon > 0, B(x, \epsilon) \cap S - \{x\} \neq \emptyset$;

iii) M é sequencialmente compacto;

iv) M é completo e totalmente limitado.

Teorema. *Um conjunto K de $\mathbb{R}^n$ é compacto se e só se ele é fechado e limitado.*

Segue um esboço da prova.

Prova. *Se K é compacto, ele é completo (logo, fechado) e totalmente limitado (logo, limitado). Por outro lado, se K é fechado e limitado, então K é completo porque $\mathbb{R}^n$ é completo. Além disso, pela propriedade Arquimediana da reta, para todo $\epsilon > 0$, existem $x_1, \cdots, n_n \in K$ com*

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \epsilon)$$

2.5 Continuidade

Definição. *Sejam (X, d), (Y, d') espaços métricos. $f : X \to Y$ é contínua em x de X se para todo $\epsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que*

$$d(x, y) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \epsilon$$

f é dita contínua se isso ocorre para todos os pontos de M.

Exercícios. *Mostre que equivalem à definição de contínua:*

i) $f^{-1}(B(x, \epsilon))$ contém uma bola aberta centrada em x, para todo $\epsilon > 0$;

ii) $x_n \to x$ implica $f(x_n) \to f(x)$

iii) $F^{-1}(A)$ *é aberta em* X *para todo aberto* A *com* $x \in A$

Proposição. *Sejam* $f, g : X \to \mathbb{C}$ *funções contínuas. Então,*

1) $\alpha f + \beta g$ *é contínua,* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$*;*

2) fg *é conínua;*

3) Se $x \neq 0$*, então* f/g *é contínua em* x*;*

4) Se $h : Y \to X$ *é contínua, então* $f \circ h : Y \to \mathbb{C}$ *é contínua.*

Definição. *Uma função* $f : (X, d) \to (Y, d')$ *é uniformemente contínua se para todo* $\epsilon > 0$*, existe* $\delta > 0$ *tal que*

$$d(x, y) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \epsilon.$$

Uma função $f : (X, d) \to (Y, d')$ *é Lipschitz se existe* $c > 0$ *tal que*

$$d'(f(x), f(y)) \leq cd(x, y)$$

Teorema. *Seja* $f : (X, d) \to (Y, d')$ *uma função. Então,*

i) Se X é compacto, então f(X) é compacto;

ii) Se X é conexo, então f(X) é conexo. Adicionalmente, se $Y = \mathbb{R}$*, então f(X) é um intervalo.*

Corolário. *Se* $f : X \to \mathbb{R}$ *é contínua, então para todo* $K \subseteq X$ *compacto, existem* $x_m, x_M \in K$ *tais que*

$$f(x_m) = \inf_{x \in K}\{f(x)\}, \quad f(x_M) = \sup_{x \in K}\{f(x)\}$$

Corolário. *Nas mesmas condições, mas f uma função complexa, temos*

$$|f(x_m)| = \inf_{x \in K}\{|f(x)|\}, \quad |f(x_M)| = \sup_{x \in K}\{|f(x)|\}$$

Teorema. *Seja* $f : X \to Y$ *contínua. Se* X *é compacto, então* f *é uniformemente contínua.*

2.6 Convergência Uniforme

Definição. *Uma sequência de funções* $\{f_n\}$ *de* X *em* Y *converge pontualmente para* $f : X \to Y$ *se*

$$f_n(x) \to f(x), \quad n \to \infty, \forall x \in X$$

$\{f_n\}$ *converge uniformemente para* f *se para todo* $\epsilon > 0$*, existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$\sup_{x \in X}\{d'(f_n(x), f(x))\} < \epsilon, n \geq n_0$$

Teorema. *Se* $\{f_n\}$ *é uma sequência de funções contínuas e* $f_n \to f$ *uniformemente, então* f *é contínua.*

Teorema. *Seja* $u_n : X \to \mathbb{C}$ *uma sequência de funções satisfazendo*

$$|u_n(x)| \leq c_n, n \in \mathbb{N}.$$

Se $\sum_{n=0}^{\infty} c_n < \infty$*, então* $\sum_{k=1}^{n} u_k \to \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ *uniformemente.*

3 Aula 03 - 06/01/2023

3.1 Motivações

i) Introdução às séries de potência e raio de convergência;

ii) Funções analíticas e diferenciáveis em $\mathbb{C}$;

iii) Definição da exponencial complexa;

iv) Ramos de funções inversas.

3.2 Séries de Potências

Definição. *Considere $\{a_n\}$ uma sequência em $\mathbb{C}$. A série de potência em $\{a_n\}$, denotada por $\sum_{n=0}^{\infty}$, é dita convergente se para todo $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|\sum_{n=0}^{k} -a|, k \geq n_0$, para algum $a \in \mathbb{C}$. Denotamos isso por*

$$a = \sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty,$$

A série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente se $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$.

Exercícios. *Mostre que se uma soma converge absolutamente, ela também converge normalmente.*

Definição. *Uma série de potências é uma série da forma*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n, \quad z \in \mathbb{C},$$

em que $\{a_n\}$ é uma sequência de $\mathbb{C}$ e a é um número complexo.

Exemplo 3.1. *No caso da série geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} z^n, z \in \mathbb{C}$, considere a soma parcial $s_n = \sum_{k=0}^{n} = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}, z \neq 1$. Se $|z| < 1$, então $z^{n+1} \to 0$ e $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}, |z| < 1$. Caso $|z| \geq 1$, a série geométrica diverge.*

Denotamos por $\limsup_{n\to\infty}\{b_n\}$ a expressão $\lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n}\{b_k\}$.

Teorema. *Considere a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} (z-a)^n$ e $\frac{1}{R} := \limsup_{n\to\infty}\{\sqrt[n]{|a_n|}\}$. Então,*

1) A série converge absolutamente em B(a, R)

2) A série diverge se $|z-a| > R$

3) A série converge uniformemente em B(a, r) para $0 < r < R$.

Prova. *Sem perda de generalidade, suponha a = 0. 1.) Seja $z \in B(0, R)$. Existe $|z| < r < R$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n^{\frac{1}{n}}| < \frac{1}{r}, n \geq n_0$. Daí, temos*

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} |a_n||z^n| \leq \sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{|z^n|}{r^n} < \infty.$$

Como essa fração é menor que um, o resultado está provado.

2.) Seja $|z| > R$ e r tal que $|z| > r > R$. Existe $\{a_{n_k}\}_k$ tal que $|a_{n_k}|^{\frac{1}{n_k}} > \frac{1}{r}, k = 0, 1, \cdots$. Assim, temos

$$|a_{n_k}||z|^{n_k} > \left(\frac{|z|}{r}\right)^{n_k} \to \infty$$

Conforme k tende a infinito.

3.) Seja $0 < r < R$ *e* $r < \rho < R$. *Se z pertence a uma bola B(0, r), então*

$$|a_n||z|^n < \left(\frac{r}{\rho}\right)^n, \quad n \geq n_0, n_0 \in \mathbb{N}.$$

Como consequência do teste M de Weierstrass, já que $\frac{r}{\rho}$ *é um número, segue o resultado.* ■

Exercícios. *Mostre que o R do teorema acima é único.*

Exemplo 3.2. *Considere a série que define a exponencial de z:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, R = \infty. \quad e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, z \in \mathbb{C}.$$

Este série é convergente pelo teste da razão. Com efeito,

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)!}{n!}\right) = \infty.$$

Com isso, a série converge para todos os valores possíveis, pois seu raio de convergência é infinito.

Proposição. *Nas notações da proposição anterior, se* $R < \infty$, *então*

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

3.3 Funções Analíticas

Definição. *Seja G um aberto de* $\mathbb{C}$ *e* $f : G \to \mathbb{C}$ *uma função. Dizemos que ela é diferenciável em* $z \in G$ *se*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{w\to z} \frac{f(z) - f(w)}{z - w}$$

existe. Neste caso, o denotamos por f'(z). Diremos que f é diferenciável se f'(z) existe para todo z de G.

Definição. *Se* $f : G \to \mathbb{C}$ *é diferenciável e* $f' : G \to \mathbb{C}(z \mapsto f'(z))$ *é contínua, então dizemos que f é continuamente diferenciável.*

Analogamente, se $f' : G \to \mathbb{C}$ *é diferenciável e* $f'' : G \to \mathbb{C}$ *(f" = (f')') é contínua, então f é duas vezes continuamente diferenciável. Nesta linha, diremos que uma função é analítica se ela é continuamente diferenciável em G.*

Proposição. *Seja G um aberto de* $\mathbb{C}$. *Então,*

- *i) Se* $f : G \to \mathbb{C}$ *é diferenciável em* $a \in G$, *então f é contínua em a;*
- *ii) Se f e g são analíticas em G, então f+g e f.g são analíticas em G. Se* $G' = G - \{0\}$, *então f/g é analítica em G'. Valem as regras clássicas de derivação.*
- *iii) Sejam f e g analíticos em* G_f, G_g, *respectivamente, com* $f(G_f) \subseteq f(G_g)$. *Então,* $g \circ f$ *é analítica em* G_f *e*

$$(g \circ f)'(z) = g'(f(z))f'(z), \quad z \in G.$$

Prova. *Exercício.* ■

Proposição. *Seja* $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ *com raio de convergência R. Então, f é infinitamente diferenciável em B(a, R). Além disso, a derivada de ordem k é*

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n \frac{n!}{(n-k)!}(z-a)^{n-k}, k \in \mathbb{N}$$

com mesmo raio de convergência de f.

Prova. *A última afirmação fica como exercício.*

Consideremos

$$s_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k(z-a)^k, \quad R_n(z) = f(z) - s_n(z),$$
$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n(z-a)^{n-1}, \quad z \in B(a,R), n \in \mathbb{N}.$$

Seja $\delta > 0$ *tal que* $B(z,\delta) \subseteq B(a,r)$ *com* $|z| < r < R$. *Assim, para* w *em* $B(z,\delta)$

$$\frac{f(z)-f(w)}{z-w} - g(z) = \frac{s_n(z)-s_n(w)}{z-w} + \frac{R_n(z)-R_n(w)}{z-w} - g(z) == \left[\frac{s_n(z)-s_n(w)}{z-w} - s_n'(z)\right] + \left[\frac{R_n(z)-R_n(w)}{z-w}\right] - (g(z)-s_n'(z)).$$

Note que

$$\left|\frac{R_n(z)-R_n(w)}{z-w}\right| = \left|\frac{1}{z-w}\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \frac{[(z-a)^k-(w-a)^k]}{(z-a)-(w-a)}\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \left((z-a)^{k-1}+\dots+(w-a)^{k-1}\right)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| k r^{k-1} \to 0,$$

pois $g(r) < \infty$, *em que* n *tende a infinito. Como as duas expressões em chaves tendem a 0 quando* w *tende a* z, *concluímos que*

$$\lim_{z \to w} \frac{f(z)-f(w)}{z-w} = g(z)$$

e a afirmação segue. ■

Corolário. *Nas notações e condições da proposição anterior, f é analítica em B(a, R) e*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, n \in \mathbb{N}$$

Prova. *Exercício.*

Proposição. *Seja* G *aberto e conexo. Se* $f: G \to \mathbb{C}$ *é tal que* $f'(z) = 0, z \in G$, *então* f *é constante.*

Prova. *Seja* $z_0 \in G$ *e considere* $C = f^{-1}(\{f(z_0)\})$, *tal que* C *é não-vazio e fechado. Mostremos que* C *é, também, aberto. Seja* z *um elemento de* C *e* $r > 0$ *tal que* $B(z,r) \subseteq G$. *Para todo* $w \in B(z,w)$, *definimos* $g : [0,1] \to \mathbb{C}$ *por g(t) = f(tz + (1-t)w). Neste caso,*

$$g'(t) = f'(tz + (1-t)w)(z-w) = 0.$$

Como g *é real, segue que ela é constante. Com isso, note que* $f(w) = g(0) = g(1) = f(z) = f(z_0)$, *tal que* $w \in C$. ■

Exemplo 3.3. $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, R = \infty$

Coloque $g(z) = e^z e^{z-w}, w \in \mathbb{C}$ fixo. Temos $g'(z) = (e^z)'e^{w-z} + e^z(e^{w-z})' - 0$. Assim, g é constante e, como $g(0) = e^w$, concluímos que $e^w = e^z e^{w-z}$ para todo $z, w \in \mathbb{C}$.

Exercícios. *Prove que, para* $z, w \in \mathbb{C}$,*:*

1) $e^{z+w} = e^z e^w$;

2) $e^z e^{-z} = 1$;

3) $e^{\overline{z}} = \overline{(e^z)}$;

4) $|e^z| = e^{Re(z)}$.

Exemplo 3.4. *Defina, para z complexo,*

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$
$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Exercícios. *Dado z complexo, mostre que*

i) $(\sin(z)' = \cos(z), \quad (\cos(z))' = -\sin(z)$;

ii) $\cos(z) = \frac{1}{2}\Big(e^{iz} + e^{-iz}\Big), \quad \sin(z) = \frac{1}{2}\Big(e^{iz} - e^{-iz}\Big)$*;*

iii) $\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1$*;*

iv) $e^{iz} = \cos(z) + i\sin(z)$.

3.4 Ramos de Funções Inversas

Seja $z \in \mathbb{C}$. Buscamos $w \in \mathbb{C}$ tal que $e^w = z, z \neq 0$. Logo, w deve satisfazer $|e^w| = e^{Re(w)} = |z| \Rightarrow Re(w) = \ln|z|$. Se w = x + iy, então

$$e^w = e^x e^{iy} = e^x\Big(\cos(y) + i\sin(y)\Big) = z = |z|\Big(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\Big)$$

com $\theta = \arg z$. Assim, $y = \theta + 2k\pi$ para algum k. Portanto, $w = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$.

Definição. *Seja G um aberto conexo de* $\mathbb{C} e f : G \to \mathbb{C}$ *contínua. Diremos que f é um ramo de logarítmo em G se* $e^{f(z)} = z, z \in G$.

Proposição. *Se G é um aberto conexo e f, g são ramos de logarítmos em G, então* $f(z) = g(z) + 2k\pi i$ *para algum* $k \in \mathbb{Z}$.

Prova. *Seja z em G. Mostraremos que*

$$\frac{f(z) - g(z)}{2\pi i} \in \mathbb{Z}.$$

Observe que $e^{f(z)-g(z)} = \frac{e^{f(z)}}{e^{g(z)}} = \frac{z}{z} = 1$. *Daí,* $f(z) = g(z) + 2k\pi i$ *para algum inteiro k, pois*

$$f(z) - g(z) = \ln|1| + i(\arg 1 + 2k\pi)$$

Definimos $h : G \to \mathbb{C}$ *por*

$$h(w) = \frac{f(w) - g(w)}{2\pi i}, \quad \in G.$$

De forma análoga ao anterior, concluímos $Im(h) \subseteq \mathbb{Z}$ *deve ser conexo, pois h é contínua. Assim, h é constante, pois os únicos conexos de* $\mathbb{Z}$ *são o vazio e conjuntos unitários, provando o resultado.* ∎

Proposição. *Sejam* G, Ω *abertos e* $f : G \to \mathbb{C}$ *e* $g : \Omega \to \mathbb{C}$ *contínuas com* $f(G) \subseteq \Omega$ *e satisfazendo* $f(g(z)) = z, z \in G$. *Se g é diferenciável em z e* $g'(f(z)) \neq 0$, *então*

$$f'(z) = \frac{1}{g'(f(z))}.$$

Caso g seja analítica, f também o é.

Prova. *Exercício.*

Considere G um aberto conexo. Chamamos a função $f : G \to \mathbb{C}$ dada por

$$f(z) = \ln|z| + i\theta, \quad \theta = \arg(z) \in (-\pi, \pi)$$

de ramo principal do logarítmo.

4 Aula 04 - 09/01/2023

4.1 Motivações

- Equações de Cauchy-Riemann;
- Funções Harmônicas e suas Relações com as Analíticas.
- Funções Conformes e Transformações de Möbius

4.2 Equações de Cauchy-Riemann

Definição. *Uma região G do plano complexo é um aberto conexo dele.*

Considere uma função $f : G \to \mathbb{C}$ analítica sobre a região G e defina

$$u(x, y) = Re(f(z)), \quad v(x, y) = Im(f(z)), \quad z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}$$

Assim, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y), z = x + iy \in \mathbb{C}$. Observe que

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{ih\to 0} \frac{f(z+ih) - f(z)}{ih} \\ &= \lim_{h\to 0} \left(\frac{u(x+h, y) - u(x, y)}{h} + i \frac{v(x+h, y) - v(x, y)}{h} \right) \\ &= \frac{du}{dx}(x, y) + i \frac{dv}{dx}(x, y), \quad z = x + iy \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{ih\to 0} \left(\frac{u(x, y+h) - u(x, y)}{ih} + i \left(\frac{v(x, y+h) - v(x, y)}{ih} \right) \right) \\ &= \frac{1}{i} \frac{du}{dy}(x, y) + \frac{dv}{dy}(x, y) = \frac{dv}{dy}(x, y) - i \frac{du}{dy}(x, y). \end{aligned} \tag{2}$$

A partir de (1) e (2), derivamos as equações de Cauchy-Riemann:

$$\boxed{\frac{du}{dx} = \frac{dv}{dy} \quad \text{e} \quad \frac{dv}{dx} = -\frac{du}{dy}}$$

4.3 Funções Harmônicas

Além disso, se u e v possuem derivadas de segunda ordem, temos

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{du}{dx}\right) = \frac{d^2v}{dy^2}, \quad \frac{d}{dy}\left(\frac{dv}{dx}\right), \quad \frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{dy}{dxdy}$$

de onde segue que

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} = 0$$

e, de forma análoga, u é harmônica. Nesta lógica, diremos que f é harmônica se $\Delta f = \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{d^2 f}{dy^2} = 0$.

Seja $u : G \to \mathbb{R}$ harmônica, a busca por $v : G \to \mathbb{R}$ harmônica satisfazendo Cauchy-Riemman é um questão. Um exercício é mostrar que a existência de v depende de G e que, em geral, não encontra-se v harmônica satisfazendo Cauchy-Riemann. (Por exemplo, $G = G - \{0\}, \quad u(x, y) = \ln{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}$)

Teorema. *Sejam $u, v : G \to \mathbb{R}$ harmônicas de classe C^1. Então, $f = u + iv$ é analítica se e só se u e v satisfazem Cauchy-Riemann.*

Prova. *Exercício.*

Dada $u : G \to \mathbb{R}$ harmônica, uma função $v : G \to \mathbb{R}$ tal que f = u + iv seja analítica é dita ser a função harmônica conjugada de u.

Exercícios.

1) Seja $f : G \to \mathbb{C}$ um ramo e n um natural. Então, $z^n = e^{nf(z)}, z \in G$.

2) Mostre que $Re(z^{\frac{1}{2}}) > 0$;

3) tome $G = \mathbb{C} - \{z : z \leq 0\}$. Ache todos as funções analíticas tais que $z = (f(z))^n$.

4) Seja $f : G \to \mathbb{C}$, G conexo e f anaítica. Se, para todo z de G, f(z) é real, então f é constante.

Teorema. *Considere $G = \mathbb{C}$ ou $G = B(0, r), r > 0$. Se $u : G \to \mathbb{R}$, então u admite harmônico conjugado.*

Prova. *Buscamos $v : G \to \mathbb{R}$ satisfazendo Cauchy-Riemann. Coloque*

$$v(x, y) = \int_0^y \frac{du}{dx}(x, t)dt + \phi(x)$$

em que $\phi(x) = -\int\limits_0^x \frac{du}{dy}(t, 0)dt$.

Portanto,

$$f = u(x, y) + i\left(\int_0^y \frac{du}{dx}(x, t)dt - \int_0^x \frac{du}{dy}(t, 0)dt.\right). \quad \blacksquare$$

4.4 Transformações Conformes

Exercícios. *Mostre que e^z leva retas ortogonais em curvas ortogonais.*

Definição. *Uma γ é uma curva numa região G se $\gamma : [a, b] \to G$ é contínua.*

Sejam γ_1, γ_2 curvas em G tais que $\gamma_1'(t_1) \neq 0, \gamma_2'(t_2) \neq 0, \gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2) = z_0 \in G$. O ângulo entre γ_1 e γ_2 em z_0 é dado por

$$\arg(\gamma_1'(t_1)) - \arg(\gamma_2'(t_2)).$$

Observe que se γ é uma curva em G e $f : G \to \mathbb{C}$ é analítica, $\sigma = f \circ \gamma$ é uma curva em $\mathbb{C}$. Assumimos $\gamma \in C^1$. Neste caso, $[a, b] = Dom(\gamma)$, ou seja, temos

$$\gamma'(t) = f'(\gamma(t))\gamma'(t), \quad t \in [a, b],$$

donde segue que

$$\arg(\gamma'(t)) = \arg(f'(\gamma(t))) + \arg(\gamma'(t))$$

Teorema. *Seja $f : G \to \mathbb{C}$ analítica. Então, f preserva ângulos para todo z em G tal que $f'(z) \neq 0$.*

Prova. *Seja $z_0 \in G$ tal que $f'(z_0) \neq 0$. Considere curvas γ_1, γ_2 tais que $\gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2) = z_0$. Se θ é ângulo entre γ_1 e γ_2 em z_0, então*

$$\theta = \arg(\gamma_1'(t_1)) - \arg(\gamma_2'(t_2))$$

Agora, note que o ângulo entre $\sigma_1 = f \circ \gamma_1$ e $\sigma_2 = f \circ \gamma_2$ em $f(z_0)$ é

$$\arg \sigma_1'(t_1) - \arg \sigma_2'(t_2) = \theta.$$

Portanto, f preserva ângulos. $\blacksquare$.

Seja $f : G \to \mathbb{C}$ que preserva ângulo e

$$\lim_{w \to z} \frac{|f(z) - f(w)|}{|z - w|}$$

existe. Então, f é dita aplicação conforme. Por exemplo, $f(z) = e^z$ é injetora em qualquer faixa horizontal de largura menor que 2π.

Corolário. $e^G = \mathbb{C} - \{z : z \leq 0\}$.

Se G é uma faixa aberta de comprimento 2π, o ramo de log faz o caminho inverso. Adicionalmente, $\frac{1}{z}$ é a sua derivada.

5 Aula 05 - 10/01/2023

5.1 Motivações

- Transformações de Möbius elementares;
- Consequências Geométricas da Transformação de Möbius;

5.2 Transformações de Möbius

Definição. *Uma fração linear é* $\frac{az+b}{cz+d}, z \in \mathbb{C}, a, b, c, d \in \mathbb{C}$ *fixos.*

Definição. *Uma fração linear tal que* $ad - bc \neq 0$ *define uma transformação*

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad z \in \mathbb{C},$$

chamada tranformação de Möbius.

Consideraremos a tranformação como sendo $T : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ da seguinte maneira:

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad z \neq -\frac{d}{c}$$
$$T\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty \quad \text{e} \quad T(\infty) = \frac{a}{c}.$$

Neste caso, $T^{-1}(z) = \dfrac{dz-b}{-cz+a}, \quad z \in \mathbb{C}_\infty$. Note, também, que os coeficientes de uma Transformação de Möbius são unicamente determinados, pois

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{(\lambda a)z + (\lambda b)}{(\lambda c)z + (\lambda d)}, \quad \lambda \neq 0.$$

Denotaremos por TM a coleção de transformações de Möbuis.

Exemplo 5.1. *As TM's elementares, dado* $a \in \mathbb{C}$*, são*

- *Translação:* $T(z) = z + a, z \in \mathbb{C}_\infty$,
- *Rotação:* $R(z) = e^{i\theta} z, \theta \in \mathbb{R}$,
- *Inversão:* $I(z) = \frac{1}{z}$,
- *Homotetia:* $H(z) = az$.

Proposição. *Toda TM é composição de TM's elementares.*

Prova. *Seja* $T \in TM$ *dada por* $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$.
Caso 1) Se $c = 0$, *então* $T(z) = \frac{az}{d} + \frac{b}{d}$. *Neste caso,* $H(z) = \frac{a}{d}z$ *e* $S(z) = z + \frac{b}{d}$, *tal que* $T(z) = S \circ H(z)$
Caso 2) Se $c \neq 0$, *então tome*

$$T_1(z) = z + \frac{d}{c}, I(z) = \frac{1}{z}, H(z) = \frac{(bc-ad)z}{c^2}, \text{ e } T_2(z) = z + \frac{a}{c}.$$

Com isso, temos

$$t_2 \circ H \circ I \circ T_1 = t. \quad \blacksquare$$

Exercícios. *1) Mostre que* $(TM, \circ)$ *é um grupo.*

2) Se $T \in TM$ *é tal que* $T(z_i) = z_i, i = 1, 2, 3, z_i \neq z_j, i \neq j$, *então* $T = Id_{\mathbb{C}_\infty}$.

Proposição. *Sejam $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}_\infty$, distintos. Existe uma única $T \in TM$ tal que*

$$T(z_1) = 1, T(z_2) = 0, T(z_3) = \infty.$$

Prova. *Unicidade:*

Se existem $T, S \in TM$ satisfazendo a hipótese, então $S^{-1}(T(z_i)) = z_i, i = 1,2,3$. Logo, $S^{-1} \circ T = Id_{\mathbb{C}_\infty}$ e $S = T$.

Existência: Defina $T : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ por

$$T(z) = \begin{cases} \frac{\frac{z-z_2}{z-z_3}}{\frac{z_1-z_2}{z_1-z_3}}, & z_i \in \mathbb{C}, i = 1,2,3; \\ \dfrac{z-z_2}{z-z_3}, & z_1 = \infty; \\ \dfrac{z_1-z_3}{z-z_3}, & z_2 = \infty; \\ \dfrac{z-z_2}{z_1-z_2}, & z_3 = \infty. \end{cases},$$

tal que $T \in TM$ satisfazendo a hipótese. ■

Corolário. *Dados $z_1, z_2, z_3, w_1, w_2, w_3$ distintos em $\mathbb{C}_\infty$, existe uma única $T \in TM$ tal que*

$$T(z_i) = w_i, \quad i = 1,2,3.$$

Prova. *Exercício.* ■

Observe que se $z_i \in \mathbb{C}_\infty, i = 1,2,3$, distintos e $T \in TM$ é tal que a proposição seja satisfeita, denotaremos T(z) por $T(z) := [z, z_1, z_2, z_3]$.

Exemplo 5.2. *Se $[z, 1, 0, \infty] = z, z \in \mathbb{C}_\infty, z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}_\infty$ distintos, então*

$$[z_1, z_1, z_2, z_3] = 1;$$
$$[z_2, z_1, z_2, z_3] = 0;$$
$$[z_3, z_1, z_2, z_3] = \infty.$$

Proposição. *Sejam $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}_\infty$ distintos e $S \in TM$. Então,*

$$[z, z_1, z_2, z_3] = [S(z), S(z_1), S(z_2), S(z_3)], \quad z \in \mathbb{C}_\infty.$$

Prova. *Seja $T(z) = [z, z_1, z_2, z_3]$ e tome $M = T \circ S^{-1}$. Note que*

$$M(S(z_1)) = 1,$$
$$M(S(z_2)) = 0,$$
$$M(S(z_3)) = \infty.$$

Assim,

$$M(z) = [S(z), S(z_1), S(z_2), S(z_3)]$$

e $T(z) = M(S(z)) = [S(z), S(z_1), S(z_2), S(z_3)]$. ■

Proposição. *Sejam $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}_\infty$ distintos. Então, $[z_1, z_2, z_3, z_4] \in \mathbb{R}$ se e só se $z_i \in C$ para algum círculo.*

Prova. $\Rightarrow$) *Se $z_i \in C, i = 1,2,3,4$, então $z_1 \in D$, em que D é o único círculo determinado por z_2, z_3, z_4.*

Exercícios. *Mostre que $[z_1, z_2, z_3, z_4] \in \mathbb{R}$*

$\Leftarrow$) *Definimos* $S(z) = [z, z_2, z_3, z_4], z \in \mathbb{C}_\infty$. *Mostraremos que* $S^{-1}(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$ *e* $S^{-1}(\mathbb{R}_\infty)$ *é um círculo.* *Caso 1: Seja* $w \in S^{-1}(\mathbb{R})$ *e sejam a, b, c, d números complexos tais que*

$$S(z) = \frac{az+b}{cz+d}.$$

como S(w) pertence a $\mathbb{R}$*, temos* $S(w) = \overline{S(w)}$*, donde segue que*

$$\frac{aw+b}{cw+d} = \frac{\bar{a}\bar{w}+\bar{b}}{\bar{c}\bar{w}+\bar{d}},$$

o que implica em $(cw+d)(\bar{a}\bar{w}+\bar{b}) = (aw+b)(\bar{c}\bar{w}+\bar{d})$. *Logo,*

$$(c\bar{a} - a\bar{c})|w|^2 + (c\bar{b} - a\bar{d})w + (d\bar{a} - b\bar{c})\bar{w} + (d\bar{b} - b\bar{d}) = 2iIm(a\bar{c}) + 2i(Im(w(-\bar{b}c + a\bar{d})) + 2iIm(b\bar{d})) = 0. \quad (3)$$

Caso 1.1: $Im(\bar{a}c) = 0$*, seja* $\alpha = bc - ad$. *Segue de 3 que*

$$2i(Im(w\alpha) + Im(d\bar{b})) = 0.$$

Logo, $Im(\alpha w + \beta) = 0, \beta = Im(d\bar{b})$. *Assim,* $\alpha w + \beta \in r$*, em que* $r : \frac{-\beta t}{\alpha}, t \in \mathbb{R}$.

Caso 1.2: $\rho = Im(\bar{a}c) \neq 0$. *Seja* $\gamma = c\bar{b} - a\bar{d}$. *Então, dividindo 3 por* $2i\rho$*, temos*

$$|w|^2 + Im(\frac{\gamma}{\rho})w + Im(\frac{d\bar{b}}{\rho}) = 0$$
$$|w - \gamma|^2 = (|\gamma|^2 - \beta)^{\frac{1}{2}} = r > 0.$$

6 Aula 06 - 12/01/2023

6.1 Motivações

- Transformações de Möbius e Harmônicos Conjugados;
- Simetrias e Orientação no Plano $\mathbb{C}$;
- Integração Complexa.

6.2 Exercícios de Hoje

6.2.1 Jéssica

a) $(7+i, 1, 0, \infty)$

b) $(2, 1-i, 1, 1+i)$

c) $(0, 1, i, -1)$

d) $(i-1, \infty, 1+i, 0)$

Utilizaremos os seguintes casos: Se $z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$, então $S(z) = \frac{\frac{z-z_3}{z-z_4}}{\frac{z_2-z_3}{z_2-z_4}}$. Caso $z_3 = \infty, S(z) = \dfrac{z-z_3}{z-z_4}$. Por fim, se $z_4 = \infty, S(z) = \dfrac{z-z_3}{z_2-z_3}$.

Assim, vamos às contas.

a)
$$S(7+i) = \frac{7+i}{1} = 7+i;$$

b)
$$S(2) = \frac{\frac{2-1}{2-1-i}}{\frac{1-i-1}{1-i-1-i}} = \frac{\frac{1}{1-i}}{\frac{i}{2i}} = \frac{2}{1-i}\frac{1+i}{1+i} = \frac{2}{2}(1+i) = 1+i$$

c)
$$S(0) = \frac{\frac{0-i}{0+1}}{\frac{1-i}{2}} = \frac{-2i}{1-i}\frac{1+i}{1+i} = \frac{-2i}{2}(1+i) = 1-i;$$

d)
$$S(1i) = \frac{i-1-1-i}{i-1-0} = \frac{-2}{i-1}\frac{1+i}{1+i} = \frac{-2}{-2}1+i = 1+i.$$

6.2.2 Tiago

Vamos mostrar que $T(\mathbb{R}_\infty) = \mathbb{R}_\infty \iff a, b, c, d \in \mathbb{R}$. $\Rightarrow$) Suponha que $T(\mathbb{R}_\infty) = \mathbb{R}_\infty, T(z_0) = 0, z_0 \in \mathbb{R}_\infty$. Então,
$$\frac{az_0+b}{cz_0+d} = 0 \Rightarrow az_0 + b = 0 \Rightarrow z_0 = \frac{-b}{a} \in \mathbb{R}_\infty.$$
No caso de $z_\infty \in \mathbb{R}_\infty = \infty$, então
$$\frac{az_\infty+b}{cz_\infty+d} = \infty \Rightarrow \frac{cz_\infty+d}{az_\infty+b} = 0 \Rightarrow cz_\infty + d = 0 \Rightarrow z_\infty = \frac{-d}{c} \in \mathbb{R}_\infty.$$
Agora, para $z_1 \in \mathbb{R}_\infty, T(z_1) = 1$, tal que
$$\frac{az_1+b}{cz_1+d} = 1 \Rightarrow az_1 + b = cz_1 + d \Rightarrow z_1(a-c) = db \Rightarrow az_1\left(1-\frac{c}{a}\right) = db \Rightarrow z_1\left(1-\frac{c}{a}\right) = \frac{db}{a}$$

$$\Rightarrow \frac{z_1}{c} - \frac{z_1}{a} = \frac{\frac{d}{a}}{c} - \frac{\frac{b}{a}}{c} \Rightarrow \frac{z_1}{c} - \frac{z_1}{a} == \frac{r_2}{a} - \frac{r_1}{c} \Rightarrow \frac{z_1 + r_1}{c} = \frac{r_2 + z_1}{a} \Rightarrow \frac{z_1 + r}{z_1 + r_2} = \frac{c}{a}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{a} = \frac{d}{c}\frac{c}{a} \in \mathbb{R}_\infty = r_2 r_3$$

Logo, colocando $r_1 = \frac{b}{a}, r_2 = \frac{d}{c}, r_3 = \frac{c}{a}$, encontramos os coeficientes

$$Tz = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{a}\frac{z+\frac{b}{a}}{z\frac{c}{a}+\frac{d}{a}} = \frac{z+r_1}{r_3 z + r_2 r_3}.$$

$\Leftarrow$) Para provar esse lado, considere $z \in \mathbb{R}_\infty$. Então, $T(z) = \frac{az+b}{cz+d} \in \mathbb{R}_\infty$. Portanto, $T(\mathbb{R}_\infty) = \mathbb{R}_\infty$. ■

6.3 Final de Transformações de Möbius.

A continuação da prova da proposição é exercício.

Teorema. *Transformações de Möbius levam círculos em círculos.*

Prova. *Exercício.*

6.4 Simetria e Orientação.

Dada uma circunferência Ω e $z_1, z_2, z_3 \in \Omega$ distintos, diremos que z e z* são simétricos se $[z^*, z_1, z_2, z_3] = \overline{[z, z_1, z_2, z_3]}$

Exemplo 6.1. *Um ponto é simétrico a si mesmo se $z \in C$ com C o círculo determinado por z_1, z_2, z_3.*

Exercícios. *Mostre que a definição de simetria não depende da escolha dos $z_i's$.*

A ideia geométrica por trás desse conceito é a seguinte: Considere γ uma reta e $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ e coloque $z_3 = \infty$. Dizer que z e z* são simétricos equivale a

$$[z^*, z_1, z_2, \infty] = \overline{[z, z_1, z_2, z_3]} \Longleftrightarrow \frac{z^* - z_2}{z_1 - z_2} = \overline{\left(\frac{z - z_2}{z_1 - z_2}\right)} == \left(\frac{\overline{z} - \overline{z_2}}{\overline{z_1} - \overline{z_2}}\right).$$

Assim, obtemos

$$\frac{z^* - z_2}{z_1 - z_2} = \frac{\overline{z} - \overline{z_2}}{\overline{z_1} - \overline{z_2}}$$

o que implica

$$\frac{z^* - z_2}{|z_1 - z_2|^2} = \overline{z} - \overline{z_2} \quad (\text{Exercício: } |z^* - z_2| = |z - z_2|)$$

para qualquer z_2 em r. Logo, d(z*, r) = d(z, r). Além disso, $[z^*, z] \perp r$.

A seguir, vamos lidar com o conceito de simetria com relação à um círculo de $\mathbb{C}$. De fato, tome

$$\begin{aligned}
&\Omega = \{z : |z - a| = r\}, \quad r > 0. \\
&[z^*, z_1, z_2, z_3] = \overline{[z, z_1, z_2, z_3]} = \quad \text{(Aplicando translação, inversão, homotetia:)} \\
&= [\bar{z}, \bar{z_1}, \bar{z_2}, \bar{z_3}] = \left[\frac{r^2}{\bar{z} - \bar{a}}, \frac{r^2}{\bar{z_1} - \bar{a}}, \frac{r^2}{\bar{z_2} - \bar{a}}, \frac{r^2}{\bar{z_3} - \bar{a}}\right] \\
&= \left[\frac{r^2 + a}{\bar{z} - \bar{a}}, z_1 - a, z_2 - a, z_3 - a\right].
\end{aligned}$$

Decorre que

$$z^* = a + \frac{r^2}{\bar{z} - \bar{a}}$$

Exercícios. $z^* \in l := \{a + t(z - a) : 0 < t < \infty\}$

7 Aula 07 - 13/01/2023

7.1 Motivações

- Simetrias e Transformações d Möbius;
- Orientação;
- Funções de Variação Limitada.

7.2 Exercícios de Hoje

7.2.1 Ana Lídia

Dado z em C, temos $\bar{z}$ em C também, tal que $|z|^2 = z\bar{z} = 1$. Como queremos T(C) = C, $|T(z)| = 1$ e $T(z)\overline{T(z)} = 1 \forall z \in C$. Note que

$$T(z)\overline{T(z)} = 1 \iff \frac{az+b}{cz+d}\frac{\overline{az}+\bar{b}}{\overline{cz}+\bar{d}} = 1 \iff$$
$$0 = z\bar{z}\left(a\bar{a} - c\bar{c}\right) + \bar{z}\left(b\bar{a} - d\bar{c}\right) + z(\bar{b}a - \bar{d}c) + b\bar{b} - d\bar{d}.$$

Como $z\bar{z} - 1 = 0$, temos

$$\begin{cases} a\bar{a} - c\bar{c} = 1 \\ b\bar{a} - d\bar{c} = 0 \\ a\bar{b} - c\bar{d} = 0 \\ b\bar{b} - d\bar{d} = -1 \end{cases}$$

Daí,

$$|a|^2 - |c|^2 = 1, |b|^2 - |d|^2 = -1 \Rightarrow |a|^2 - |c|^2 = -|b|^2 + |d|^2 \Rightarrow |a|^2 + |b|^2 = |c|^2 + |d|^2.$$

Assim, as condições suficientes para o sistema são

$$a\bar{b} - c\bar{d} = 0, \quad \text{e } |a|^2 + |b|^2 = |c|^2 + |d|^2.$$

Para a condição necessária, suponha $c = \lambda\bar{b}$. Então,

$$a\bar{b} - \lambda\overline{bd} = 0 \Rightarrow (a - \lambda\bar{d})\bar{b} = 0 \Rightarrow a = \lambda\bar{d} \iff d = \frac{\bar{a}}{\lambda}$$

7.2.2 João Vitor Occhiucci

Do Teorema 3.14, sabemos transformações de Möbius levam círculos em círculos, portanto $T(\mathbb{R}_\infty) = \mathbb{R}_\infty$ é equivalente a $Tz = (z, z_2, z_3, z_4)$ com $z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{R}_\infty$ distintos. Ademais, do exercício 3.7, temos

$$z_2 = \frac{d-b}{a-c}$$
$$z_3 = -\frac{b}{a}$$
$$z_4 = -\frac{d}{c}$$

Portanto, é imediato que se existirem a, b, c e d reais para T, então z_2, z_3, z_4 estarão em $\mathbb{R}_\infty$ e, consequentemente, $T(\mathbb{R}_\infty) = \mathbb{R}_\infty$. Por outro lado, se tivermos uma transformação de Möbius T, tal que $T(\mathbb{R}_\infty) = \mathbb{R}_\infty$, então $T(z) = (z, z_2, z_3, z_4)$ com $z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{R}_\infty$ distintos. Daí, tome

$$a = \frac{1}{z_2 - \_3}, b = \frac{z_3}{z_2 - z_3}, c = \frac{1}{z_2 - z_4} \text{ e } d = \frac{z_4}{z_2 - \_4}$$

e

$$Uz = \frac{az+b}{cz+d}$$

Veja que $Uz_2 = 1, Uz_3 = 0$ e $Uz_4 = \infty$, portanto, pela proposição 3.9, U = T, ou seja, podemos escolher a, b, c e d reais tais que $Tz = \dfrac{az+b}{cz+d}$.

7.3 Continuando Simetrias

Proposição. *Transformações de Möbius levam pontos simétricos em pontos simétricos.*

Prova. *Seja l uma circunferência e z e z* simétricos com relação à Ω. Devemos mostrar que T(z), T(z*) são simétricos com relação a $T(\Omega)$. Em outras palavras, queremos*

$$[T(z), T(z_1), T(z_2), T(z_3)] = \overline{[T(z^*), T(z_1), T(z_2), T(z_3)]}.$$

(Fica como exercício mostrar que $[T(z), T(z_1), T(z_2), T(z_3)] = [\bar{z}, \bar{z_1}, \bar{z_2}, \bar{z_3}]$).

Definição. *Dada uma circunferência Ω e uma tripla $z_i \in \Omega, i = 1, 2, 3,$ dizemos que esta tripla é uma orientação. Definimos o conjunto*

$$D_l = \{z : Im[z, z_1, z_2, z_3] > 0\}$$

como o lado direito de l. O lado esquerdo, por outro lado, é

$$E_l = \{z : Im[z, z_1, z_2, z_3] < 0\}.$$

Exemplo 7.1. *Um circuito passando por $\infty < z_1, z_2, z_3$ em $\mathbb{R}_\infty$. Seja $T(z) = [z, z_1, z_2, z_3], z \in \mathbb{R}_\infty$. Neste caso, $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}, a, b, c, d \in \mathbb{R}_\infty$. Assim,*

$$\frac{az+b}{cz+d}\frac{c\bar{z}+d}{c\bar{z}+d} = \frac{ac|z|^2 + adz + cb\bar{z} + bd}{|cz+d|^2}.$$

Logo, $Im(T(z)) > 0 \Longleftrightarrow Im\Bigg[(ad-bc)z\Bigg] > 0$. Portanto, se Ω é o círculo,

$$D_\Omega = \{z : (ad-bc)Im(z) > 0.\}$$

Proposição. *Sejam Ω_1, Ω_2 circunferências em $\mathbb{C}_\infty$ e T uma TM com $T(\Omega_1) = \Omega_2$. Então, T preserva orientação.*

Prova. *Exercício.*

Exemplo 7.2. *Seja $D = \{z : Rez > 0\}, D^U = \{z : |z| < 1\}$. Seja Ω_1 o círculo e Ω_2 dados por*

$$\Omega_1 = \{z : z = iy, y \in \mathbb{R}\}$$
$$\Omega_2 = \{e^{iy}, y \in \mathbb{R}.\}$$

Assim,

$$D_{\Omega_1} = \{z : Im[z, -i, 0, i] > 0\} = \{z : Im(iz) > 0\} = \{z : Re(z) > 0\}.$$
$$D_{\Omega_2} = \{z : Im[z, -i, -1, i] > 0\} = \{z : |z| < 1\}.$$

A TM que leva Ω_1 em Ω_2 é dada por

$$T(z) = \frac{z-1}{z+1},$$

e $M(z) = \frac{e^z-1}{e^z+1}$ é tal que $M(D) = D^U$.

7.4 Integração Complexa

7.4.1 Funções de Variação Limitada (BV - Bounded Variation)

Definição. *Seja* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ *uma função. Diremos que* γ *tem variação limitada se*

$$v(\gamma, P) = \sum_{k=1}^{n} |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k+1})| < M, \quad M > 0,$$

com $P = \{a = t_0, t_1, \cdots, t_n = b\}$ *partição de [a, b]. Se* γ *é BV, a quantia*

$$V(\gamma) = \sup_{p} v(\gamma, P)$$

é chamada variação de γ*.*

Exercícios. *Se* $P \subseteq Q$*, então* $V(\gamma, P) \leq V(\gamma, Q)$*. Se* γ_1, γ_2 *são BV, então* $\alpha\gamma_1 + \beta\gamma_2$ *é BV para* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$*. Além disso,*

$$V(\alpha\gamma_1 + \beta\gamma_2) \leq |\alpha|V(\gamma_1) + |\beta|V(\gamma_2)$$

Exercícios. *Se* γ *é BV, então ela é limitada, mas a recíproca não vale.*

Exemplo 7.3. *Tome* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}, Im(\gamma) = 0$ *e* γ *crescente. Neste caso,* γ *é BV. Com efeito, para toda partição P de [a, b], temos*

$$v(\gamma, P) = \sum_{k=1}^{n} |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k+1})| = \gamma(b) - \gamma(a)$$

De fato, dada uma γ *com as duas características acima, ela é BV se, e só se,* $\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$*, com* γ_1, γ_2 *monótonas crescentes.*

Exercícios.

$$\gamma(t) = \begin{cases} t \sin\left(\frac{1}{t}\right), & t \in [0, 2\pi] \\ 0, t = 0 \end{cases}$$

não é bv, apesar de ser contínua.

Dica: *Tome* $t_n = \dfrac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2}} \Rightarrow \gamma(t_n) = \dfrac{(-1)^n}{n\pi + \frac{\pi}{2}} \Rightarrow v(\gamma, P) \geq c \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Dada γ BV em [a, b], considere

$$\gamma_t : [a, t] \to \mathbb{R}$$

a restrição de γ. Então, considerando a aplicação $v(\gamma_t), t \in [a, b]$, crescente e BV, defina $g(t) = \gamma(t) + v(\gamma_t)$, de modo que

$$\gamma(t) = -g(t)_v(\gamma_t).$$

8 Aula 08 - 16/01/2023

8.1 Motivações

- Integração Complexa em Curvas;
- Propriedades das Integrais de Linha;
- Primeira Fórmula Integral de Cauchy.

8.2 Finalizando Funções BV's

Proposição. *Se γ é suave, então γ é BV e $V(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|dt$.*

Prova. *Seja $P = \{t_0, \cdots, t_n\}$ partição de [a, b],*

$$\begin{aligned} v(\gamma, P) &= \sum_{k=1}^{n} |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \gamma'(t)dt \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} |\gamma'(t)|dt = \int_a^b |\gamma'(t)|dt \end{aligned}$$

Agora, dado $\epsilon > 0$, buscamos $\delta > 0$ tal que $|P| < \delta$ resulta em

$$v(\gamma) - \epsilon < v(\gamma, P)$$

Seja $\delta > 0$ tal que $|\gamma'(s) - \gamma'(t)| < \epsilon$ para $|s - t| < \delta$. Agora, se $|P| < \delta$, então

$$\left| \int_a^b |\gamma'(t)|dt - \sum_{k=1}^{n} |\gamma'(s_k)||t_k - t_{k-1}| \right| < \epsilon$$

Com isso, o que queríamos está satisfeito e $s_k \in [t_k, t_{k-1}]$, o que implica em

$$0 < \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} |\gamma'(s_k) - \gamma'(s_{k-1}) + |\gamma'(t)|dt + \epsilon < (b-a)\epsilon + \int_a^b |\gamma'(t)|dt + \epsilon. \blacksquare$$

8.3 Integrais de Linha

Definição. *Seja γ BV e $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ limitada. Se existir I complexo tal que para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ de forma que $|P| < \delta$ implica*

$$\left| I - \sum_{k=1}^{n} f(s_k)|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1}) \right| < \epsilon,$$

para qualquer escolha de $s_k \in [t_k, t_{k-1}]$, dizemos que I é a integral de f sobre a curva γ, denotado por $\int_\gamma f$ ou $\int_a^b f(t)d\gamma(t)$

Teorema. *Se γ é BV e f é contínua, então f é integrável sobre γ.*

Prova. *Usaremos o Teorema de Cantor.*

1) *Dado $\epsilon > 0$, seja $\delta > 0$ tal que $|s - t| < \delta$. Então, $|f(s) - f(t) < \epsilon$*
2) *Para cada n natural, seja $\delta_n > 0$ tal que $|f(s) - f(t)| < \frac{1}{n}$, em que $\{\delta_n\}$ pode ser considerado decrescente.*

Definimos
$$\mathcal{F}_n = \{s(f,p) : |P| < \delta_n\}, \quad n \in \mathbb{N}$$
Observamos que $\overline{\mathcal{F}_n} \supseteq \overline{\mathcal{F}_{n+1}}$. *Se diam*$\mathcal{F}_n \to 0$, *então o Teorema de Cantor garante que* $\bigcap_{n=0}^{\infty} = \{I\}$. *Neste caso,* $\int_\gamma f$. *Fica de exercício mostrar que diam*$\mathcal{F}_n \leq \frac{c}{n}$.

Proposição. *Sejam* $f, g : [a,b] \to \mathbb{C}$ *contínuas,* γ_1, γ_2 *BV em [a, b] e* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. *Temos:*

i) $\int \alpha f + \beta g d; g = \alpha \int f d\gamma + \beta \int g d\gamma$;

ii) $\int f d(\alpha\gamma_1 + \beta\gamma_2) = \alpha \int f d\gamma_1 + \beta \int f d\gamma_2$;

iii) $\int_a^b f(t)d\gamma(t) - \int_a^c f(t)d\gamma(t) + \int_c^b f(t)d\gamma(t), \quad c \in [a,b]$.

Teorema. *Seja* γ *suave (ou suave por partes) e f con'înua. Então,*
$$\int f d\gamma = \int_a^b f(t)\gamma'(t)dt.$$

γ ser suave por partes significa que existe $P = \{a = t_0, t_1, \cdots, t_n = b\}$ tal que
$$\int_a^b f(t)d\gamma(t) = \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(t)d\gamma(t)$$

Exercícios. *Mostre que para a fórmula acima, também vale a igualdade com* $\int_{t_{k-1}}^{t_k} f(t)\gamma'(t)dt$.

Definição. *Seja* γ *uma curva em [a, b]. Escreveremos* $\{\gamma\}$ *para o traço de* γ *dado por*
$$\{\gamma\} := \{\gamma(t) : t \in [a,b]\}.$$
Note que $\{\gamma\}$ *é conexo e compacto. Chamaremos de comprimento de* γ *o valor* $v(\gamma)$ *caso* γ *seja BV. Também chamaremos* γ *de retificável se* γ *é curva BV.*

Definição. *Seja* $f : G \to \mathbb{C}$, $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ *retificável e* $\{\gamma\} \subseteq G$. *A integral de linha de f ao longo de* γ *é*
$$\int_\gamma f := \int_a^b f(\gamma(t))d\gamma(t).$$

Exemplo 8.1. *i) Seja* $f(z) = z^n, \quad n \in \mathbb{N}$, *sejam* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ *e* $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ *dada por* $\gamma(t) = t\beta + (1-t)\alpha$.
$$\int_\gamma = \int_0^1 (t\beta + (1-t)\alpha)^n(\beta - \alpha)dt = \left.\frac{(t\beta + (1-t)\alpha)^{n+1}}{n+1}\right|_0^1$$

ii) Tome $f(z) = z^{-n}, \quad n \neq 1, \quad \gamma(t) = e^{-it}, t \in [-\pi, \pi]$. *Então,*
$$\int_\gamma f = \int_{-\pi}^{\pi} e^{nit}(-i)e^{-it}dt = -i\int_{-\pi}^{\pi} e^{ti(n-1)}dt = 0.$$

iii) Considere $f(z) = \frac{1}{z}, \quad \gamma(t) = e^{-it}, t \in [-\pi, \pi]$. *Assim,*
$$\int_\gamma f = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it}(-i)e^{-it} = -2\pi i.$$

Proposição. *Seja* $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ *retificável e* $\phi : [c,d] \to [a,b]$*crescente é contínua. Se* $f : G \to \mathbb{C}$ *é contínua em* $\{\gamma\}$, *então*
$$\int_\gamma f = \int_{\gamma\circ\phi} f$$

Prova.

Exercícios. *Note que $\gamma \circ \phi$ é BV, $\{\gamma\} = \{\phi\}$ e $v(\gamma \circ \phi) = v(\gamma)$.*

Se dadas γ, σ, existir $\phi : [c,d] \to [a,b]$ com $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ e $\sigma : [c,d] \to \mathbb{C}, \sigma = \gamma \circ \phi, \phi$ conínua estritamente crescente, dizemos que γ é equivalente à σ, denotado por γ σ. Segue da proposição que γ γ implica

$$\int_\gamma f = \int_\sigma f.$$

Exercícios. *É verdade que $\{\gamma\} = \{\sigma\} \Rightarrow \int_\gamma f = \int_\sigma f$?*

Seja $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ retificável. Para cada $t \in [a,b]$, considere $\gamma_t := \gamma|_[a,t]$ e note que $t \mapsto v(\gamma_t)$ é crescente e, portatno, BV. Para f contínua sobre $\{\gamma\}$, definimos

$$\int_\gamma f|dz| := \int_a^b f(\gamma(t))d|\gamma|(t)$$

com $|\gamma| : [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por $|\gamma|(t) = v(\gamma_t)$. Fixemos a notação $\gamma_- : [-b,-a] \to \mathbb{C}$ para $\gamma_-(t) = \gamma(-t)$ e $\gamma + c : [a,b] \to \mathbb{C}$ para $(\gamma + c)(t) = \gamma(t) + c, c \in \mathbb{C}$.

Proposição. *Se γ é reificável com $\{\gamma\} \subseteq A \subseteq \mathbb{C}$ e $f : A \to \mathbb{C}$ é contínua sobre $\{\gamma\}$, então,*

i) $\int_{\gamma_-} f = -\int_\gamma f$

ii) $\int_{\gamma+c} f(z-c)dz = \int_\gamma f$

iii) $\left|\int_\gamma f\right| \leq \int_\gamma |f||dz| \leq v(\gamma) \max_{z\in\{\gamma\}} |f(z)|$

Lema. *Seja $A \subseteq \mathbb{C}$ aberto e $\gamma : [a,b] \to A$ retificável com $\{\gamma\} \subseteq A$. Para todo $\epsilon > 0$, existe Γ poligonal em A tal que*

$$\left|\int_\gamma f - \int_\Gamma f\right| < \epsilon.$$

A seguir, vemos o Teorema Fundamental das Funções de Variável Complexa.

Teorema. *Seja $A \subseteq \mathbb{C}$ aberto, γ retificável, $\{\gamma\} \subseteq A$ e $f : A \to \mathbb{C}$ com f con$\hat{\imath}$nua em $\{\gamma\}$. Se existe $F : A \to \mathbb{C}$ tal que $F' = f$, então*

$$\int_\gamma f = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Prova. *i) Vamos assumir γ suave por partes. Sem perda de generalidade, podemos assumir suave. Neste caso,*

$$\int_\gamma f = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = (F \circ \gamma)(t)\Big|_a^b = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

ii) No caso geral, considere $\epsilon > 0$ e Γ a plligonal dada pelo Lema. Temos

$$\left|\int_\gamma f - \int_\Gamma f\right| < \epsilon, \quad \blacksquare$$

Exercícios. *Mostre que $f(z) = |z|^2$ é contínua, mas não possui primitiva.*

Corolário. *Nas condições e notações de TFVC, se γ é fechada, então $\int\limits_\gamma f = 0$.*

8.4 Versão Introdutória da Fórmula Integral de Cauchy

Um resultado que será usado de forma recorrente é o Lema de Leibniz, como enunciado a seguir

Lema. *Seja* $\phi : [a,b]x[c,d] \to \mathbb{C}$ *contínua e*

$$g(t) := \int_a^b \phi(s,t)ds.$$

Então, g é contínua. Adicionalmente, se $\frac{\partial \phi}{\partial t}$ *é contínua, então g é suave e temos*

$$g'(t) = \int_a^b \frac{\partial \phi}{\partial t}(s,t)ds.$$

Exemplo 8.2. *Se* $|z| < 1$,

$$I := \int_0^{2\pi} \frac{e^{is}}{e^{is} - z} ds = 2\pi.$$

Definimos $\phi : [0, 2\pi]x[0,1] \to \mathbb{C}$ *por*

$$\phi(s,t) = \frac{e^{is}}{e^{is} - tz}, \quad t \in [0,1], \quad s \in [0, 2\pi].$$

Considere g como no lema e observe que $g(1) = I, g(0) = 2\pi$. *Além disso,*

$$g'(t) = \int_0^{2\pi} \frac{e^{is}}{(e^{is} - tz)^2} ds = \frac{1}{i}\left(\frac{1}{e^{is} - tz}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 0$$

9 Aula 09 - 17/01/2023

9.1 Motivações

- Fórmula Integral de Cauchy para círculos;
- Toda função analítica pode ser representada em série de potência;
- Zeros de funções

9.2 Exercício de Hoje

9.2.1 Edson

Tome $\gamma = [1, i], \sigma = [1, 1+i, i], f(z) = |z|^2$ como as poligonais. Além disso, coloque $\gamma(t) = (1-t)+it, \gamma'(t) = -1+i, t \in [0,1]$ e

$$\sigma(t) = \begin{cases} it+1, & t \in [0,1] \\ 2+i-t, & t \in [1,2] \end{cases} \quad , \quad \sigma'(t) = \begin{cases} i, & t \in (0,1) \\ -1, & t \in (1,2). \end{cases}$$

Assim,

$$\int_\gamma f = \int_0^1 f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_0^1 |it+(1-t)|^2(i-1)dt == (i-1)\int_0^1 (2t^2-2t+1)dt = \frac{2}{3}(i-1)$$

Além disso,

$$\int_\sigma f = \int_0^2 f(\sigma(t))\sigma'(t)dt = i\int_0^1 |it+1|^2 dt - \int_1^2 |2+i-t|^2 dt == i\int_0^1 (t^2+1) - \int_1^2 ((2-t)^2+1)dt = 1 - \frac{7}{3} + i\frac{4}{3}.$$

9.3 Fórmula Integral de Cauchy - Versão Introdutória

Proposição. *Seja $f : G \to \mathbb{C}$ e $\overline{B(a,r)} \subseteq G$. Se $\gamma(t) = a + re^{it}, t \in [0, \pi]$, então*

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw, \quad |z-a| < r.$$

Prova. *Suponha $\sigma(t) = e^{it}, t \in [0, 2\pi]$, então $\gamma = a + r\sigma$. Note que a fórmula buscada equivale a*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw - f(z) = 0,$$

ou seja,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}f(e^{it})}{e^{it}-z} - f(z)dt = 0.$$

Considere $\phi(s,t) = \frac{e^{is}f(e^{is}+t(e^{is}-z))}{e^{is}-z} - f(z), t \in [0,1], s \in [0, 2\pi]$. Tome, também, $g(t) = \int\limits_0^{2\pi} \phi(s,t)dt$. Com isso, observe que

$$g(1) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}f(e^{it})}{e^{it}-z} - f(z)dz$$
$$g(0) = \int_0^{2\pi} \frac{e^{is}f(z)}{e^{is}-z} - f(z)ds = f(z)\int_0^{2\pi} \frac{e^{is}}{e^{is}-z} - 1ds = 0.$$

Temos

$$g'(t) = \int_0^{2\pi} \frac{e^{is}}{e^{is}-z} f'(z+t(e^{is}-z))ds = \int_0^{2\pi} e^{is}f'(z+t(e^{is}-z)) = \frac{1}{it}f(z+t(e^{is}-z))\Big|_0^{2\pi} = 0.$$

Portanto, g é constante, garantindo a proposição. ■

Lema. *Seja γ retificável em $\mathbb{C}, \{f_n\}$ sequência contínua sobre $\{\gamma\}$ e f contínua sobre $\{\gamma\}$. Se $f_n \to f$ em $\{\gamma\}$, então*

$$\int_\gamma f = \lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n.$$

Prova. *Exercício.*

Teorema. *Seja f analítica em B(a, r). Então,*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n, \quad |z-a| < r,$$

em que $a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, n = 0, 1, \cdots$. Além disso, f tem raio de convergência $R \geq r$.

Prova. *Considere $0 < \rho < r$ e suponha f analítica em $\overline{B(a,\rho)}$. Pela proposição, $f(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw, \gamma_\rho =$ $a + re^{it}$. Vamos mostrar que*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(z-a)^n \left(\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_\rho} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}dw.\right)$$

Com efeito, considere

$$g_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\frac{f(w)(z-a)^k}{(w-a)^{k+1}}}_{f_n(z)}$$

Mostremos, agora, que $\sum\limits_{k=0}^{n} f_n(z)$ converge uniformemente. Para $w \in \{\gamma_\rho\}$,

$$|f_k(w)| = \frac{|f(w)||(z-a)^k|}{|w-a|^{k+1}} < |f(w)|\frac{|z-a|^k}{\rho^{k+1}} \leq \max_{w\in\{\gamma\}} |f(w)|\frac{1}{\rho}\left(\frac{|z-a|^k}{\rho^k}\right)^k.$$

Pelo working finee M de Weierstras,

$$g(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}}$$

é contínua. Assim,

$$g(z) = \frac{f(w)}{w-a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n = \frac{f(w)}{w-a}\frac{1}{1-\frac{z-a}{w-a}} = \frac{f(w)}{w-z}$$

Como consequência, conseguimos calcular a integral de g na curva:

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_\rho} g(w)dw = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_\rho}\frac{f(w)}{w-z}dw = \frac{1}{2i\pi}\lim_{n\to\infty}\int_{\gamma_\rho}\frac{f(w)(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}}dw$$
$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(z-a)^n \underbrace{\int_{\gamma_\rho}\frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}dw}_{b_n}$$

Corolário. *Se f é analítica em B(a, R) e γ é retificável, $\{\gamma\} \subseteq B(a,R)$ e fechada, então*

$$\int_\gamma f = 0.$$

Prova. *Exercício.*

9.4 Zeros de Funções Analíticas

Definição. *Diremos que f é inteira se f é analítica em $\mathbb{C}$.*

Exemplo 9.1. *Polinômios são funções inteiras.*

Definição. *Se $f : G \to \mathbb{C}$ é uma função analítica com f(a) = 0 e que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que*

$$f(z) = (z-a)^m g(z),$$

com g analítica e não-nula em a, diremos que a é um zero de multiplicidade m de f.

Um teorema muito relevante em FVC é o Teorema de Liouville:

Teorema. *Se f é inteira e limitada, então f é constante.*

Prova. *Seja $0 < \rho < r$ e sendo f analítica em $B(a,r)$. Então,*

$$|f^{(n)}(a)| = \frac{n!}{2\pi}\left|\int_{\gamma_\rho} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}dw\right| \leq \frac{n!}{2\pi}\int_{\gamma_\rho} \frac{|f(w)|}{\rho^{n+1}}|dw| \leq \frac{n!}{2\pi}\frac{Mv(\gamma_\rho)}{\rho^{n+1}} = \frac{n!M}{\rho^{n+1}}.$$

Fazendo ρ tender a infinito, concluímos que $|f^{(n)}(a)| \leq 0$, ou seja, $f^{(n)}(a) = 0$.

Uma consequência simples e trivial dessa discussão toda é o Teorema Fundamental da Álgebra.

Teorema. *Todo polinômio complexo de grau maior que 1 possui raíz complexa.*

Prova. *Se p não possui zeros, $\frac{1}{p}$ é inteira e limitada, visto que $\lim_{z\to\infty} p(z) = \infty$ e $\lim_{z\to\infty} \frac{1}{p(z)} = 0$, o que implica na limitação e, por Liouville, $\frac{1}{p}$ é constante, fazendo com que p seja constante, uma contradição. Portanto, p possui ao menos uma raíz.* $\blacksquare$

Corolário. *Se p é um polinômio não identicamente nulo com zeros $a_1, \cdots, a_n$ de multiplicidade $m_1, \cdots, m_n$ respectivamente. Então, existe uma constante tal que*

$$p(z) = (z-a_1)^{m_1} \cdots (z-a_n)^{m_n} c$$

e que o grau de p é $\sum_{i=1}^{n} m_i$.

10 Aula 10 - 19/01/2023

10.1 Motivações

- Teorema do Máximo Módulo;
- Índice de Curvas Fechadas e Dando Voltas em Círculos;

10.2 Continuação de Zeros de Funções Analíticas

Proposição. *Suponha $f : G \to \mathbb{C}$ analítica na região G. São equivalentes:*

i) $f \equiv 0$;

ii) Existe um a de G tal que $f^{(n)}(a) = 0, n = 0, 1, \cdots$;

iii) O conjunto $\{z \in G : f(z) = 0\} = F_0$ *possui ponto de acumulação.*

Prova. *iii)* $\Rightarrow$ *ii) Seja a ponto de acumulação de F_0. Considere $\{a_n\}$ em F_0 tal que $a_n \to a$, f contínua em a.*

Afirmamos que $f^{(n)}(a) = 0$. Seja m tal que $f^{(m)}(a) \neq 0$ e $f^{(n)}(a) = 0, n = 0, 1, \cdots, m-1$. Seja r positivo e, para z em B(a, r), temos

$$f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n (z-a)^n = (z-a)^m \underbrace{\sum_{n=m}^{\infty} a_n (z-a)^{n-m}}_{g(z)\ \text{analítica.}} .$$

Temos g analítica e g(a) não-nulo. Logo, existe $0 < \delta < r$ tal que g(z) é não-nulo para z em $B(a, \delta)$. Portanto, $f(z) \neq 0$ para z em $B(a, r) - \{a\}$, uma contradição, donde segue que a terceira afirmação deve implicar na segunda. ■

ii) $\Rightarrow$ *i) Considere a tal que $f^{(n)}(a) = 0, n = 0, 1, \cdots$. Seja $A = \{z \in G : f^{(n)}(z) = 0, n = 0, 1, \cdots\}$. Note que a pertence a A e, além disso,*

$$A = \bigcap_{n=0}^{\infty} \{z \in G : f^{(n)}(z) = 0\}$$

é fechado. Mostremos que A é aberto. Tome b em A e r positivo, tal que $B(b, r) \subseteq G$. Observe que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-b)^n, \quad z \in B(b, r).$$

Portanto, $A = G$ e segue a prova. ■

Corolário. *Com as hipóteses do Teorema, se f(a) = 0, entõ existe $n_a \in \mathbb{Z}_+$ tal que $f(z) = (z-a)^{n_a} g(z), z \in G$, com g analítica em g e $g(a) \neq 0$ Em particular, os zeros de f são isolados.*

Teorema. *Seja f analítica numa região G. Se existe a em G tal que*

$$|f(z)| \leq |f(a)|, \quad z \in G,$$

então f é constante.

Prova. *Seja $r > 0$ tal que $B(a, r) \subseteq G$. Mostraremos que $|f| : B(a, r) \to \mathbb{R}$ é constante na bola, mas $|f| \equiv |f(a)| \neq 0$. Mostrado isso, se $f = u + iv$, então, para z em B(a, r), vale*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_v} \frac{f(w)}{w-a} dw,$$

$\gamma_v(t) = a + re^{it}, t \in [0, 2\pi]$.

$$|f(a)| \leq \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} \frac{f(a+re^{it})}{re^{it}} rie^{it}dt\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(a+re^{it})|dt \leq |f(a)|.$$

Assim, $|f(a+re^{it})| = |f(a)|$. *Como* r *é qualquer tal que* $B(a,r) \subseteq G$, *a afirmação segue.*

Agora, se f = u + iv, z em B(a, r),

$$|f(z)| = u^2 + v^2 = |f(a)| \neq 0.$$

Exercícios. *Mostre que*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

o que implicará f'(z) = 0. ■.

10.3 Índice de Curvas Fechadas

Exemplo 10.1. *Tome* $\gamma(t) = a + re^{nit}, t \in [0, 2\pi], n = 1, 2, \cdots$. *Então,*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n} \frac{1}{w-a}dw = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{nit}} rine^{rint}dt = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} indt = n.$$

Proposição. *Considere* γ *retificável e fechada. Então,*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{1}{w-a}dw \in \mathbb{Z}, \quad a \notin \{\gamma\}.$$

Prova. *Seja* γ *curva* C^1 *por partes definida em [0, 1]. Considere* $g(t) = \int_0^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-a}ds, t \in [0,1]$. *Note que g(0) = 0 e* $g(1) = \int_\gamma \frac{1}{w-a}dw$. *Defina* $h(t) = e^{-g(t)}(\gamma(t) - a), t \in [0, 1]$ *e observe que* $h(0) = (\gamma(0) - a) \neq 0$. *Derivando h:*

$$h'(t) = -g'(t)e^{-g(t)}(\gamma(t) - a) + e^{-g(t)}\gamma'(t) = 0, t \in [0, 1].$$

Assim, $h \equiv (\gamma(0) - a)$. *Neste caso,* $h(1) = e^{-g(1)}(\gamma(0) - a) = \gamma(0) - a$. *Com isso,* $e^{-g(1)} = 1$. *Portanto,* $g(1) = 2\pi ki$, *para algum* $k \in \mathbb{Z}$. *Portanto, a fórmula está provada.* ■

11 Aula Gravada(ft. AraMat) - 23/01/2023

11.1 Índice de Curva Fechada - Continuando

Definição. *Escrevemos, para o índice de uma curva γ fechada e retificável em a,*

$$n(\gamma, a) := \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \frac{1}{z-a} dz, \quad a \notin \{\gamma\}.$$

Proposição. *Dadas curvas γ, σ tais que*

$$\sigma + \gamma(t) = \begin{cases} \gamma(2t), & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \gamma(2t-1), & t \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

segue que o índice das curvas satisfaz as seguintes propriedades

i) $n(\gamma, a) = -n(\gamma_-, a)$

ii) $n(\sigma + \gamma, a) = n(\sigma, a) + n(\gamma, a), a \notin \{\gamma\} \cup \{\sigma\}$

Proposição. *Seja γ retificável e fechada. Então, $n(\gamma, \cdot) : \mathbb{C} - \{\gamma\} \to \mathbb{Z}$ é contínua.*

Prova. *Tome a fora de $\mathbb{C} - \{\gamma\}$ e $r > 0$ tal que $B(a, r) \subseteq \mathbb{C} - \{\gamma\}$. Então,*

$$\begin{aligned} n(\gamma, a) - n(\gamma, b) &= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{a-b}{(z-a)(z-b)} dz \\ \Rightarrow |n(\gamma, a) - n(\gamma, b)| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_\gamma \frac{a-b}{(z-a)(z-b)} dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \frac{|a-b|}{|z-a||z-b|} |dz| \\ \leq \frac{1}{2\pi} \sup_{\{\gamma\}} \frac{|a-b|}{|z-a||z-b|} v(\gamma) \overbrace{\to}^{b-a} 0 \end{aligned}$$

Teorema. *Seja γ retificável e fechada. A função índice é constante em cada componente conexa de $\mathbb{C} - \{\gamma\}$. Em particular, anula na componente conexa ilimitada de $\mathbb{C} - \{\gamma\}$.*

Prova. *Seja $r > 0$ tal que $\{\gamma\} \subseteq B(0, \frac{r}{2})$. Se $|a| > r$,*

$$|n(\gamma, a)| \leq \frac{1}{2\pi} \max_{\{\gamma\}} |z-a|^{-1} v(\gamma) \overbrace{\to}^{r\to\infty} 0. \quad \blacksquare$$

11.2 Teorema e Fórmulas Integrais de Cauchy

Lema. *Seja γ retificável, ϕ contínua em $\{\gamma\}$ e*

$$F_m(z) := \int_\gamma \frac{\phi(w)}{(w-z)^m} dw, \quad z \in \mathbb{C} - \{\gamma\}, m = 1, 2, \cdots$$

Então, F_m é analítica com $F_m = mF_{m+1}, m = 1, 2, \cdots$.

Prova. *Note que*

$$\begin{aligned} F_m(a) - F_m(b) &= \int_\gamma \frac{\phi(w)}{(w-a)^m} - \frac{\phi(w)}{(w-b)^m} dw \\ &= \int_\gamma \phi(w) \underbrace{\left[\frac{1}{(w-a)^m} - \frac{1}{(w-b)^m} \right]}_{\sum_{n=1}^{m} (w-a)^{-n}(w-b)^{-m-1+n}} dw. \end{aligned}$$

Assim,

$$F'_m(a) = \lim_{b \to a} \sum_{n=1}^{m} \int_\gamma \frac{\phi(w)}{(w-a)^n (w-b)^{m+1-n}} dw = mF_{m+1}(a).$$

Teorema. *Seja $f : G \to \mathbb{C}$ analítica, γ retificável e fechada tal que $n(\gamma, a) = 0$ para todo $a \in \mathbb{C} - G$. Então,*

$$f(b)n(\gamma, b) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-b}dw, \quad b \in G - \{\gamma\}.$$

Prova. *Considere $\phi : GxG \to \mathbb{C}$ dada por*

$$\phi(z, w) = \begin{cases} \frac{f(w)-f(z)}{w-z}, & z \neq w \\ f'(z), & = w. \end{cases}$$

Observe que $\phi(\cdot, w) : G \to \mathbb{C}$ é analítica (Exercício.). Além disso, defina $H := \{w \in \mathbb{C} - \{\gamma\} : n(\gamma, w) = 0\}$. Assim, $\mathbb{C} - G \subseteq H$ e $\mathbb{C} = G \cup H$. Coloque $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ da forma

$$g(z) = \begin{cases} \int_\gamma \phi(z, w)dw, & z \in G \\ \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw, & z \in H. \end{cases}$$

Vamos mostrar que essa g está bem-definida, tomando z em $H \cap G$. Então,

$$\int_\gamma \phi(z, w)dw = \int_\gamma \frac{f(w) - f(z)}{w-z}dw = \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw - f(z)n(\gamma, z)$$

Um exercício é mostrar que o lema garante que g é analítica e, logo, inteira. Além disso, mostre que g é limitada em bolas de $\mathbb{C} - G$ como $B(a, r) \subseteq G \Rightarrow |g(z)| \leq \int\limits_\gamma |\phi(z, w)||dw| \leq \sup\limits_{B(a,r)x\{\gamma\}} |\phi|v(\gamma)$. Portanto, g é limitada. Como consequência de Liouville, g é constante. Mostre, por fim, que g é identicamente nula tal que, dado b em $G - \{\gamma\}$,

$$g(b) = 0 = \int_\gamma \frac{f(w) - f(b)}{w-b} = \int_\gamma \frac{f(w)}{w-b}dw - f(b)\int_\gamma \frac{1}{w-b}dw$$

Portanto,

$$2\pi i f(b)n(\gamma, b) = \int_\gamma \frac{f(w)}{w-b}dw. \quad \blacksquare$$

12 Aula 11 - 24/01/2023

12.1 Motivações

- Consequências da Fórmula Integral de Cauchy;
- Teorema de Morera (mais uma versão do Teorema de Cauchy);
- Teorema de Goursat.

12.2 Exercícios de Hoje

12.2.1 João

$$\begin{aligned} f(a)\sum_{k=1}^{n} n(\gamma_k, a) &= \sum_{k=1}^{n} f(a)n(\gamma_k, a) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_k} \frac{f(z)}{z-a}dz \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a}dz. \end{aligned}$$

12.3 Consequências da Fórmula Integral de Cauchy

Começamos esta aula com os respectivos Teorema de Morera e Teorema de Goursat.

Teorema. *Seja $f : G \to \mathbb{C}$, G aberto. Se $\int_\Delta f = 0$ para $\Delta = [a, b, c, a] \subseteq G$, então f é analítica.*

Prova. *Sejam z um elemento de G e $r > 0$ tal que $B(a, r) \subseteq G$. Defina $F_z : B(z, r) \to \mathbb{C}$ por $F_z(u) = \int_{[z,u]} f dw$. Temos,*

$$\frac{F_z(a) - F_z(b)}{a - b} - f(a) = \frac{1}{a-b}\left(\int_{[z,a]} f dw + \int_{[z,b]} f dw\right) - f(a),$$

de onde segue

$$\begin{aligned} \left|\frac{F_z(a) - F_z(b)}{a - b} - f(a)\right| &= \frac{1}{|a-b|}\left|\int_{[b,a]} f(w) - f(a)\right| \\ &\leq \frac{1}{|a-b|}\int_{[b,a]} |f(w) - f(a)||dw| \\ &\leq \frac{1}{|a-b|}\sup_{w\in[b,a]} |f(w) - f(a)|v([b, a])) = \sup_{w\in[b,a]} |f(w) - f(a)|. \end{aligned}$$

Como $\sup_{w\in[b,a]} |f(w) - f(a)| \to 0, b \to a$, segue a prova. ■

Teorema. *Seja $f : G \to \mathbb{C}$ aberto. Se f é diferenciável, então f é analítica.*

Prova. *Verificamos que f satisfaz as hipóteses do Teorema de Morera. Sem perda de generalidade, suponha que $G = B(w, r)$ e seja $\Delta = [a, b, c, a]$. Queremos verificar que $\int_\Delta f = 0$.*

Com efeito, considere $\epsilon > 0$ e mostraremos que $|\int_\Delta f| < \epsilon$. Se m_{ab}, m_{ba}, m_{ca} são os pontos médios de [a, b], [b, c], [c, a], respectivamente, então

$$\int_\Delta f = \sum_{j=1}^{a} \int_{\Delta_j} f.$$

Além disso, assumiremos que $|\int_{\Delta_j} f|$ *é o máximo de* $|\int_{\Delta_j} f|, j = 1, \cdots, 4$. *Assim, segue que*

$$\left|\int_\Delta f\right| \leq 4\left|\int_{\Delta_1} f.\right|$$

Seja $l(\Delta)$ *o perímetro de* Δ *e diam*Δ. *Note que*

$$l(\Delta_1) = \frac{1}{2}l(\Delta) \quad \text{ e } diam\Delta_1 = \frac{1}{2}diam\Delta.$$

Indutivamente, consideramos $\Delta_n, n = 1, 2, \cdots$ *tais que*

1) $l(\Delta_n) = \frac{1}{2^n}l(\Delta) \to 0, n \to \infty$;
2) $diam(\Delta_n) = \frac{1}{2^n}diam\Delta$;
3) $\left|\int_\Delta f\right| \leq 4^n\left|\int_{\Delta_n} f\right|$.

Considere, agora, F_n *sendo o fecho do triângulo fechado. Temos* $F_{n+1} \subseteq F_n, n = 1, 2, \cdots$. *Logo, pelo Teorema de Cantor,* $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \{u\}$. *Dado* $\epsilon > 0$, *seja* $\delta > 0$ *tais que*

$$|f(w) - f(u) - f'(u)(w - u)| < \epsilon|w - u|.$$

Se n *é tal que diam*$\Delta_n < \delta$, *então*

$$\int_{\Delta_n} f = \int_{\Delta_n} (f(z) - f(u)) - f'(u)(z - u)dz.$$

Assim, $|\int_{\Delta_n} f| \leq \int_{\Delta_n} \epsilon|z - u|dz \leq \epsilon \sup_{z\in\Delta_n} |z - u|l(\Delta_n)$. *Portanto,* $|\int_\Delta f \leq \epsilon l(\Delta)diam(\Delta).|$ ■

13 Aula 12 - 26/01/2023

13.1 Motivações

- Homotopia e curvas;
- Versão Homotópica do Teorema de Cauchy;
- Existência de Primitivas para Funções Analíticas

13.2 Exercícios do Dia

13.2.1 Francisco Jonatã

Seja P(z) de grau n e considere $\{z : |z| \geq R\}, \gamma(t) = Re^{it}$. Então, P(z) pode ser escrito como

$$P(z) = c(z-r_1)(z-r_2)\cdots(z-r_n), \quad P'(z) = c(z-r_2)\cdots(z-r_n)+c(z-r_1)\cdots(z-r_n)+\cdots+c(z-r_1)\cdots(z-r_{n-1})$$

Assim,

$$\int_\gamma \frac{P'(z)}{P(z)}dz = \int_\gamma \sum_{k=1}^n \frac{1}{z-r_k}dz = \sum_{k=1}^n \int_\gamma \frac{1}{z-r_k}dz = \sum_{k=1}^n n(\gamma, r_k)2\pi i = n2\pi i. \quad \blacksquare$$

13.2.2 Gabriel Passareli

Seja $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}, \gamma(0) = 1, \gamma(1) = w$. Existe um k inteiro tal que $\int_\gamma \frac{1}{z}dz = \ln(r) + i\theta + 2k\pi i, w = re^{i\theta}$. Considere

$$\{\tilde{\gamma}\} = \{\gamma\} \cup [w, 1].$$

Da definição,

$$2\pi i = n(\tilde{\gamma}, 0) = \int_\gamma \frac{1}{z}dz = \int_\gamma \frac{1}{z}dz + \int_{[w,1]} \frac{1}{z}dz.$$

Tome

$$G = \{z \in \mathbb{C} : d(z, [w,1]) < \epsilon\}.$$

Sobre G, tome também

$$\ln(re^{i\theta}) = \ln(r) + i\theta, \quad -\pi < \theta < \pi.$$

Então, pelo TFVC,

$$\int_\gamma \frac{1}{z}dz = -k\pi i + \int_{[w,1]} \frac{1}{z}dz. \quad \blacksquare$$

13.3 Versão Homotópica do Teorema de Cauchy

Escreveremos I = [0, 1] para o intervalo mencionado. Seja G uma região e γ_1, γ_2 curvas tais que existe $\Gamma : I^2 \to G$ contínuo tal que

$$\begin{cases} \Gamma(s,0) = \gamma_1(s) \\ \Gamma(s,1) = \gamma_2(s) \\ \Gamma(0,t) = \gamma_1(0) = \gamma_2(0) \\ \Gamma(1,t) = \gamma_1(1) = \gamma_2(1). \end{cases}$$

Então, diremos que γ_1 é homotópica à γ_2 e escreveremos $\gamma_1 \sim \gamma_2$. Fica de exercício mostrar que $\sim$ é uma relação de equivalência.

Teorema. *Sejam γ_1, γ_2 retificáveis na região G. Se $\gamma_1 \sim \gamma_2$, então*

$$\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f$$

para toda f analítica em G.

Prova. *O caso em que as duas curvas são não fechadas fica como exercício. Destarte, suponha γ_1, γ_2 fechadas. Supondo que $\Gamma \in C^2$, temos*

$$\int_{\gamma_1} f = \int_0^1 f(\Gamma(s,0))\frac{\partial \Gamma}{\partial s}(s,0)dS$$

e

$$\int_{\gamma_t} f = g(t), t \in [0,1], \quad \gamma_t(s) = \Gamma(s,t).$$

Temos

$$g'(t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_0^1 f(\Gamma(s,t))\frac{\partial \Gamma}{\partial s}(s,t)ds\right) = \left(f(\Gamma(s,t))\frac{\partial \Gamma}{\partial t}(s,t)\right)\Big|_0^1 = 0.$$

Agora, no caso geral, suponha $\Gamma(I^2)$ completo, Γ é uniformemente contínua. Coloque $\gamma_t(s) := \Gamma(s,t), s \in I$.

1) *Existe $\epsilon > 0$ tal que $B(z, 13\epsilon) \subseteq G, \forall z \in \Gamma(I^2)$;*

2) *Existe $\gamma > 0$ tal que $|s_1 - s_2| < \delta \Rightarrow |\Gamma(s_1,t) - \Gamma(s_2,t)| < 2\epsilon$.*

Mostremos que $\int\limits_{\Gamma(\cdot,s_1)} f = \int_{\Gamma(\cdot,s_2)} f$. Fica como exercício, também, particionar I como $P = \{s_0, \cdots, s_n\}$. de forma que $|P| < \delta$. Com efeito, considere $z_0, \cdots, z_n, w_1, \cdots, w_n$ e bolas $B_i, i = 1, 2, \cdots, n$ centradas em $\Gamma(I^2)$ de raio ϵ com $z_i, w_i, z_{i+1}, w_{i+1} \in B_i, i = 1, \cdots, n-1$. Temos

$$g'(t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_0^1 f(\Gamma(s,t))\frac{\partial}{\partial t}(s,t)ds\right) = \left(f(\Gamma(s,t))\frac{\partial \Gamma}{\partial t}(s,t)\right)\Big|_0^1 = 0.$$

Para cada i, f é primitivável em B_i. Neste caso, se F_i é a primitiva de f em B_i, então

$$F_i - F_{i+1} = c \in B_i \cap B_{i+1}, \quad c \in \mathbb{C}, i = 1, \cdots, n = 1.$$

Logo,

$$F_i(z_{i+1}) - F_{i+1}(z_{i+1}) = F_i(w_{i+1}) - F_{i+1}(w_{i+1}).$$

Consequentemente,

$$F_i(z_{i+1}) - F_i(w_{i+1}) = F_{i+1}(z_i) - F_{i+1}(w_{i+1}).$$

Finalmente,

I) $\int\limits_{\Gamma(\cdot,s_1)} f = \sum\limits_{i=1}^{n-1} F_i(z)\Big|_{z_i}^{z_{i+1}}$

II) $\int\limits_{\Gamma(\cdot,s_2)} f = \sum\limits_{i=1}^{n-1} F_i(z)\Big|_{w_i}^{w_{i+1}}$

Subtraindo, obtemos

$$\sum_{i=1}^{n-1}\left[F_i(z_{i+1}) - F_i(z_i) - \Big(F_i(w_{i+1}) - F_i(w_i)\Big)\right] = 0. \quad \blacksquare$$

Exercícios. *Sejam $\gamma_1(t) = e^{2\pi i t}, \gamma_2(t) = e^{-2\pi i t}, t \in [0,1]$. Mostre que $\gamma_1 \sim \gamma_2$.*

Escrevemos $\gamma \sim 0$ se γ é homotópica a uma curva constante. Além disso, dada uma região G, diremos que G é simplesmente conexa se $\gamma \sim 0$ para toda curva em G.

Exercícios. *A região $G = B(a,\ r)$ é simplesmente conexa.*

Teorema. *Toda função analítica em uma região simplesmente conexa possui uma primitiva.*

Prova. *Seja* $a \in G$ *e, para cada* z *em* G*, seja* γ_z *retificável tal que* $\gamma_z(0) = a, \gamma_z(1) = z$*. Defina* $F : G \to \mathbb{C}$ *por*

$$F(z) = \int_{\gamma_z} f dw.$$

Note que se σ_2 *é outra curva tal que* $\sigma_z(0) = a$ *e* $\sigma_z(1) = z$*, então* $\sigma_z - \gamma_z$ *é fechada, fazendo com que sejam homotópicas a 0 e*

$$\int_{\sigma_z - \gamma_z} f = 0 \Rightarrow \int_{\gamma_z} f = \int_{\sigma_z} f.$$

Observe que

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \frac{1}{h} \int_{\gamma_{z+h}} f - \int_{\gamma_z} f = \frac{1}{h} \int_{[z,z+h]} f = \frac{1}{h} \int_0^1 f(zt + (1-t)(z+h)) - hdt$$

14 Aula 13 - 27/01/2023

14.1 Motivações

- Versão de Múltiplos Zeros da Integral de Cauchy;
- Teorema da Aplicação Aberta.

14.2 Teorema Integral de Cauchy com Vários Zeros

Teorema. *Seja f analítica na região G com zeros $a_1, \cdots, a_m$. Se γ é retificável e fechada é tal que $\gamma \sim 0$ e $a_i \notin \{\gamma\}, i = 1, \cdots, m$, então*

$$\sum_{k=1}^{m} n(\gamma, a_k) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

Prova. *Podemos escrever*

$$f(z) = (z - a_1) \cdots (z - a_m) g(z),$$

para alguma g analítica tal que $g(z) \neq 0$ para qualquer z em G. Com isso, $\dfrac{g'(z)}{g(z)}$ analítica em G; ja que $\gamma \approx 0$, o Teorema de Cauchy faz com que

$$\int_\gamma \frac{g'(z)}{g(z)} dz = 0.$$

Assim, segue de

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z - a_1} + \frac{1}{z - a_2} + \cdots + \frac{1}{z - a_m} + \frac{g'(z)}{g(z)}, \quad z \neq a_1, \cdots, a_m,$$

que

$$\int_\gamma \frac{g'(z)}{g(z)} dz = \int_\gamma \frac{1}{z - a_1} + \int_\gamma \frac{1}{z - a_2} + \cdots + \int_\gamma \frac{1}{z - a_m} - \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}.$$

Portanto,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} = \int_\gamma \frac{1}{z - a_1} + \int_\gamma \frac{1}{z - a_2} + \cdots + \int_\gamma \frac{1}{z - a_m} = \sum_{k=1}^{m} n(\gamma, a_k). \blacksquare$$

Proposição. *Seja f analítica na região G, γ retificável e fechado em G com $n(\gamma, z) \in \{0, 1\}, z \in G$. Se $n(\gamma, a) = 1$ e $\alpha := f(a) \notin \{\sigma := f \circ \gamma\}$, então $f - \beta$ possui pelo menos uma raíz para todo β na mesma componente de α em $f(G) \cap \mathbb{C} - \{\sigma\}$.*

Prova. *Seja β como na proposição. Então,*

$$n(\sigma, \alpha) = n(\sigma, \beta).$$

Vamos assumir que $\gamma \in C^1$. Neste caso, temos duas igualdades relevantes:

$$n(\sigma, \alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma = f \circ \gamma} \frac{1}{w - \alpha} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{1}{f(\gamma(t)) - \alpha} f'(\gamma(t)) d\gamma(t) = \sum_{k=1}^{m} n(\gamma, a_k(\alpha)).$$

$$n(\sigma, \alpha) = n(\sigma, \beta) = \sum_{k=1}^{m} n(\sigma, a_k(\beta)),$$

em que $a_k(\alpha)$ é zero de $f - \alpha$. $\blacksquare$

14.3 Teorema da Aplicação Aberta

<u>Teorema</u>. *Seja G região e f analítica em G. Então, f é aberat, ou seja, f(A) é aberto para todo aberto em G.*

<u>Prova</u>. *Seja* $A \subseteq G, \alpha := f(a) \in f(A)$. *Afirmamos que se* $f : B(a, r) \to \mathbb{C}$ *e* $\alpha := f(a)$ *é zero de multiplicidade m de f-a, então existem* $\epsilon, \delta > 0$ *tais que*

$$\beta \in B(\alpha, \delta) - \{\alpha\} \Rightarrow f - \beta \text{ possui } m \text{ zeros simples em } B(a, \epsilon).$$

Com esta afirmação, tome $\epsilon > 0$ *tal que* $B(a, \epsilon) \subseteq A$ *e seja* $\delta > 0$ *como na afirmação. Note que*

$$B(\alpha, \delta) \subseteq f(B(a, \epsilon)) \subseteq f(A).$$

Para provar a afirmação, suponha que existe $\epsilon > 0$ *tal que* $f - \alpha$ *não possua zeros em* $B(a, \epsilon)$. *Considere* $\gamma(t) = a + \epsilon e^{2\pi it}, t \in [0, 1]$. *Além disso, existe* $\gamma > 0$ *tal que* $B(\alpha, \delta) \cap \{\sigma := f \circ \gamma\} = \emptyset$. *Dado* $\beta \in B(a, \delta)$ *pela proposição anterior*

$$n(\gamma, \beta) = n(\gamma, \alpha) = \sum_{k=1}^{m} n(\gamma, a_k(\alpha)) = m. \quad \blacksquare$$

15 COMENTÁRIO À PARTE

A partir desse momento, as aulas são dadas pelos alunos através da forma de Seminários. Neste prisma, o crédito será devidamente dado a cada grupo e, caso não ocorra isso, por favor, me contate para que possa ser corrigido. Ademais, os créditos também devem ser dados à professora Thaís pela organização e orientação.

16 Aula 14 - 30/01/2023 - Pedro Rangel, Renan Wenzel, Roberta Agnes Mendes Melo.