UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS E COMPUTACIONAIS - ICMC

# Notas de Aula de Análise

**Renan Wenzel - 11169472**

**Alexandre Nolasco de Carvalho - andcarva@icmc.usp.br**

3 de abril de 2023

# Conteúdo

# 1 Aula 01 - 13/03/2023

## 1.1 Motivação

- Relembrar sistemas básicos da matemática;
- Relembrar propriedades básicas das principais estruturas $(\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q})$.

## 1.2 Os Números Naturais

Os números naturais são os que utilizamos para contar objetos, e são caracterizados pelos Axiomas de Peano:

1) Todo número natural tem um único sucessor;
2) Números naturais diferentes têm sucessores diferentes;
3) Existe um único número natural, zero (0), que não é sucessor de nenhum número natural.
4) Seja $X \subseteq \mathbb{N}$ tal que $0 \in X$ e, se n pertence a X, seu sucessor n+1 também pertence a X. Então, X = $\mathbb{N}$. (Propriedade de Indução).

**Definição.** *Definimos a adição por:* $n + 0 = n, n \in \mathbb{N},$ *e* $n + (p + 1) = (n + p) + 1, p \in \mathbb{N}$. *Além disso, a multiplicação é dada por:* $n.0 = 0, n.(p + 1) = n.p + n, n, p \in \mathbb{N}$. *Ou seja, sabendo somar ou multiplicar um número, sabemos somar e multiplicar seu sucessor.*

Com relação ao quarto axioma, ele leva este nome porque um dos métodos de demonstração, conhecido como prova por indução. Nele, mostramos um caso base, o caso 0, e utilizamos a segunda parte para provar que, se um resultado vale para o caso n, ele vale para n+1, portanto sendo verdadeiro para todos os naturais.

**Lema.** *Para todo n natural, 1 + n = n + 1.*

**Prova.** *Note que o resultado é verdadeiro para n = 0. Suponha que o resultado seja válido para n = k e mostremos que vale também para n = k+1. Com efeito, segue pela propriedade de indução e pela definição de soma que*

$$1 + (k + 1) = (1 + k) + 1 = (k + 1) + 1.$$

*Segue que o resultado vale para todo n natural.* ■

A seguir, mostramos a associatividade e a comutatividade, respectivamente, das operações nos naturais.

**Lema.** *Para todo n, p, r naturais, (n + p) + r = n + (p + r).*

**Prova.** *Note que o resultado é válido trivialmente para r = 0 e r = 1. Suponha que o resultado seja válido para r = k e mostremos que vale também para r = k + 1. Com efeito, pela hipótese de indução e definição de adição,*

$$n + (p + (k + 1)) = n + ((p + k) + 1) = (n + (p + k)) + 1 = ((n + p) + k) + 1 = (n + p) + (k + 1).$$

*Segue o resultado por indução.* ■

**Lema.** *Para todo n, p naturais, n + p = p + n.*

**Prova.** *Observe que já mostramos o caso em que p = 1. Suponha que o resultado vale para p = k e vamos mostrar o caso p = k + 1. De fato, pela hipótese de indução e definição de adição, junto do lema de associatividade, temos*

$$n + (k + 1) = (n + k) + 1 = (k + n) + 1 = 1 + (k + n) = (1 + k) + n = (k + 1) + n.$$

*Por indução, segue que isso vale para todo natural n.* ■

**Definição.** *Definimos uma ordem em* $\mathbb{N}$ *colocando que* $m \leq n$ *se existe* $p$ *natural tal que* $n = m + p$.□

A relação de ordem possui as seguintes propriedades:

i) Reflexiva: Para todo n natural, $n \leq n$;

ii) Antissimétrica: Se $m \leq n$ e $n \leq m$, então $m = n$;

iii) Transitiva: Se $m \leq n$ e $n \leq p$, então $m \leq p$;

i Dados m, n naturais, temos ou $m \leq n$, ou $n \leq m$;

v Se $m \leq n$ e p é um natural, então $n + p \leq n$ e $mp \leq np$

### 1.3 Números Inteiros e Racionais

Usualmente, construimos os inteiros a partir dos naturais tomando os pares ordenados de números naturais com a seguinte identificação (a, b) $\sim$ (c, d) se a + d = b + c. Assim, podemos representar

$$\mathbb{N} = \{(0,0), (1,0), (2,0), (3,0), \ldots\}, \quad -\mathbb{N}^* = \{\cdots, (0,3), (0,2), (0,1)\}.$$

Tomar o sucessor será somar 1 à primeira coordenada e, para os inteiros negativos, voltar a identificar (1, n) com (0, n-1).

Os números racionais são construídos tomando o conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ e identificando os pares $(a, b) \sim (c, d)$ para os quais ad = bc. Representamos um par (a, b) neste conjunto por $\dfrac{a}{b}$. A soma e o produto em $\mathbb{Q}$ são dados, respectivamente, por:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} := \frac{ad + bc}{bd}$$
$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} := \frac{ac}{bd}.$$

Chamamos a adição a operação que a cada par $(x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ associa sua soma $x + y \in \mathbb{Q}$ e chamamos multiplicação a operação que a cada par $(x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ associa seu produto $x.y \in \mathbb{Q}$. A terna $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ satisfaz as propriedades de um corpo, i.e.,

$$\begin{aligned}
&(A1)(x + y) + z = x + (y + z), \quad \forall x, y, z \in \mathbb{Q} \\
&(A2)x + y = y + x, \quad \forall x, y \in \mathbb{Q} \\
&(A3)\exists 0 \in \mathbb{Q} : x + 0 = x, \quad \forall x \in \mathbb{Q} \\
&(A4)\forall x \in \mathbb{Q}, \exists y \in \mathbb{Q}(y = -x) : x + y = 0 \\
&(M1)(xy)z = x(yz), \quad \forall x, y, z \in \mathbb{Q} \\
&(M2)xy = yx, \quad x, y \in \mathbb{Q} \\
&(M3)\exists 1 \in \mathbb{Q} : 1.x = x.1 = x, \quad \forall x \in \mathbb{Q} \\
&(M4)\forall x \in \mathbb{Q}^*, \exists y = \frac{1}{x} \in \mathbb{Q} : x.y = 1 \\
&(D)x(y + z) = xy + xz, \quad \forall x, y, z \in \mathbb{Q}.
\end{aligned}$$

# 2 Aula 02 - 15/03/2023

## 2.1 Motivações

- Propriedades básicas dos racionais;
- Construção do corpo dos reais a partir dos racionais;
- Cortes de Dedekind.

## 2.2 Propriedades de $\mathbb{Q}$ e sua Ordem

Com as 9 propriedades de corpo, conseguimos obter novas regras nos racionais, como a famosa lei do cancelamento:

**Proposição.** *Em $\mathbb{Q}$, vale*

$$x + z = y + z \Rightarrow x = y$$

*e, se $z \neq 0$,*

$$xz = yz \Rightarrow x = y$$

**Prova.**

$$x = x + 0 = x + (z + (-z)) = (x + z) + (-z) = (y + z) + (-z) = y + (z + (-z)) = y + 0 = y$$

$$x = x.1 = x(z.\frac{1}{z}) = (xz)\frac{1}{z} = (yz)\frac{1}{z} = y(z\frac{1}{z}) = y.1 = y. \blacksquare$$

**Proposição.** *Os elementos neutros da adição e multiplicação são únicos. Os elementos oposto e inverso também o são.*

**Proposição.** *Para todo x racional, x.0 = 0.*

**Proposição.** *Para todo x racional, -x = (-1)x.*

A maioria desses resultados acima seguem diretamente da lei do cancelamento. Suas demonstrações ficam como exercício.

**Definição.** *Diremos que*

$$\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} = \begin{cases} \textit{não-negativo}, & ab \in \mathbb{N} \\ \textit{positivo}, & ab \in \mathbb{N}, a \neq 0 \end{cases}$$

*e diremos que*

$$\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} = \begin{cases} \textit{não-positivo}, & \frac{a}{b} \textit{ não for postivo} \\ \textit{negativo}, & \frac{a}{b} \textit{ não for não-negativo.} \end{cases} \square$$

**Definição.** *Sejam x, y racionais. Diremos que x é menor e que y e escrevemos "$x < y$" se existir t racional positivo tal que*

$$y = x + t.$$

*Neste mesmo caso, podemos dizer que y é maior que x, escrevendo "$x > y$". Em particular, temos $x > 0$ se x for positivo e $x < 0$ se x for negativo.*

*Ademais, se $x < y$ ou $x = y$, escrevemos "$x \leq y$" se existir racional t não-negativo tal que*

$$y = x + t$$

*e, se $x > y$ ou $x = y$, escrevemos "$x \geq y$" caso exista racional t não-positivo com*

$$y = x + t.\square$$

A quádrupla $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ satisfaz as propriedades de um corpo ordenado, i.e.,

$$
\begin{aligned}
&(O1) x \leq x \forall x \in \mathbb{Q};\\
&(O2) x \leq y \text{ e } y \leq x \Rightarrow x = y \forall x, y \in \mathbb{Q};\\
&(O3) x \leq y, y \leq z \Rightarrow x \leq z \forall x, y, z \in \mathbb{Q};\\
&(O4) \forall x, y \in \mathbb{Q}, x \leq y \text{ ou } y \leq x;\\
&(OA) x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z;\\
&(OM) x \leq y \text{ e } z \geq 0 \Rightarrow xz \leq yz.
\end{aligned}
$$

**Proposição.** *Para quaisquer x, y, z, w no corpo ordenado dos racionais, valem*

$$
\begin{aligned}
&i.) x < y \iff x + z < y + z\\
&ii.) z > 0 \iff \frac{1}{z} > 0\\
&iii.) z > 0 \iff -z < 0\\
&iv.) z > 0 \Rightarrow x < y \iff xz < yz\\
&v.) z < 0 \Rightarrow x < y \iff xz > yz\\
&vi.) xz < yw \iff \begin{cases} 0 \leq x < y \\ 0 \leq z < w \end{cases}\\
&vii.) 0 < x < y \iff 0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}\\
&viii.) x < y \text{ ou } x = y \text{ ou } x > y\\
&ix.) xy = 0 \iff x = 0 \text{ ou } y = 0.\\
&x.) \left.\begin{array}{c} x \leq y \\ z \leq w \end{array}\right\} \Rightarrow x + z \leq y + w\\
&xi.) \left.\begin{array}{c} 0 \leq x \leq y \\ 0 \leq z \leq w \end{array}\right\} \Rightarrow xz \leq yw.
\end{aligned}
$$

## 2.3 Incompletude de $\mathbb{Q}$

Os números racionais podem ser representados por pontos em uma reta horizontal ordenada, chamada reta real. Se P for a representação de um número racional x, diremos que x é a abscissa de P. Note que nem todo ponto da reta real é racional. Para isso, considere um quadrado de lado 1 e diagonal d. Pelo Teorema de Pitágoras, $d^2 = 1^2 + 1^2 = 2$. Agora, seja P a intersecção do eixo x com a circunferência de centro em 0 e raio d. Mostremos que P é um ponto da reta com abscissa $x \notin \mathbb{Q}$.

**Proposição.** *Seja a um inteiro. Então, se a for ímpar, seu quadrado também será. Além disso, se a for par, seu quadrado também é par.*

**Proposição.** *A equação $x^2 = 2$ não admite solução racional.*

A ideia da prova é escrever um x na forma de fração e chegar na contradição de que tanto o numerador quanto o denominador serão números pares. Com isso, conclui-se que não existe racional irredutível com quadrado igual a 2, portanto não existe racional satisfazendo a equação.

Essa discussão mostra que existem vãos na "reta" dos racionais, requerindo a adoção de um novo corpo. Essa é a principal motivação por trás dos números reais, "preencher"os buracos deixados pelos racionais.

**Proposição.** *(Exercício.) Sejam $p_1, \ldots, p_n$ números primos distintos. Então, a equação $x^2 = p_1 p_2 \cdots p_n$ não tem solução racional.*

Vimos que os números racionais com a sua adição, multiplicação e relação de ordem é um corpo ordenado. Nos interessamos, também, pelo corpo dos reais e dos racionais $(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. De forma abstrata, um corpo é um conjunto não-vazio $\mathbb{F}$ em que estão definidas duas operações binárias

$$+ : \mathbb{F} \times \mathbb{F} \to \mathbb{F}, \quad (x, y) \mapsto x + y$$

e

$$\cdot : \mathbb{F} \times \mathbb{F} \to \mathbb{F}, \quad (x, y) \mapsto xy$$

em que valem as oito propriedades vistas previamente para a definição das operações em $\mathbb{Q}$ Se, ainda por cima, no corpo $\mathbb{F}$ está definida uma ordem com propriedades análogas às vistas para a quádrupla $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$, diremos que $(\mathbb{F}, +, \cdot, \leq)$ é um corpo ordenado.

**Definição.** *Diremos que um subconjunto $A$ de um corpo $\mathbb{F}$ ordenado é limitado superiormente se existe um $L$ neste corpo tal que $a \leq L$ para todo $a$ de $A$.*

*Definimos para um subconjunto limitado superiormente um número $\sup(A) \in \mathbb{F}$ como o menor limitante superior de $A$, i.e., se $a \leq \sup(A)$ para todo $a$ de $A$ e se existe $f \in \mathbb{F}$ com $f < \sup(A)$, então existe um $a$ em $A$ com $f < a$.*

*Por fim, diremos que um corpo ordenado é completo se todo subconjunto limitado superiormente possui supremo.* □

Nem todo subconjunto limitado superiormente de $\mathbb{Q}$ tem supremo, ou seja, $\mathbb{Q}$ não é completo.

## 2.4 Os Números Reais ($\mathbb{R}$)

A ideia que iremos usar para construir o conjunto dos reais é que o conjunto dos números reais preenche toda a reta real. Os Elementos de $\mathbb{R}$ serão os subconjuntos de $\mathbb{Q}$ à esquerda de um ponto da reta real e serão chamados de cortes.

**Definição.** *Um corte é um subconjunto $\alpha \subsetneq \mathbb{Q}$ com as seguintes propriedades:*

*i)* $\alpha \neq \emptyset$ *e* $\alpha \neq \mathbb{Q}$;

*ii) Se $p \in \alpha$ e $q$ é um racional com $q < p$, então $q \in \alpha$ (todos os racionais à esquerda de um elemento de $\alpha$ estão em $\alpha$);*

*iii) Se $p \in \alpha$, existe um $r \in \alpha$ com $p < r$ ($\alpha$ não tem um maior elemento).* □

Essa ideia foi proposta inicialmente por Julius Wilhelm Richard Dedekind, um matemático alemão, em 1872, com o objetivo de encontrar uma explicação e construção elementar para os números reais.

**Exemplo 1.** *Se $q$ é um racional, definimos $q^* = \{r \in \mathbb{Q} : r < q\}$.Então, $q^*$ é um corte que chamamos de racional. Os cortes que não são desse tipo se chamam cortes irracionais.*

**Exemplo 2.** $\sqrt{2} = \{q \in \mathbb{Q} : q^2 < 2\} \cup \{q \in \mathbb{Q} : q < 0\}$ *é um corte irracional.*

Observe que se $\alpha$ é um corte, p é um ponto dele e q não é, então $p < q$. Além disso, se r pertence a $\alpha$ e $r < s$, então s não pertence ao corte.

**Definição.** *Diremos que $\alpha < \beta$, em que $\alpha$ e $\beta$ são cortes, se $\alpha \subsetneq \beta$.*□

**Proposição.** *Se $\alpha, \beta, \gamma$ são cortes,*

*i) $\alpha < \beta$ e $\beta < \gamma$ implica que $\alpha < \gamma$;*

*ii) Exatamente uma das seguintes relações é válida: $\alpha < \beta$ ou $\alpha = \beta$ ou $\beta < \alpha$*

*iii) Todo subconjunto não-vazio e limitado superiormente de $\mathbb{R}$ tem supremo.*

# 3 Aula 03 - 17/03/2023

## 3.1 Motivações

- Finalizar a construção de $\mathbb{R}$ por cortes;
- Definir um corpo ordenado com base nos cortes;

## 3.2 Cortes - Soma e Ordem

Coloquemos, para fins de conveniência, $\mathbb{R}$ como a união de todos os cortes.

Vamos mostrar que os cortes racionais são, de fato, cortes. Considere, dado um racional q, $q^* = \{p \in \mathbb{Q} : p < q\}$. Ele não pode completar todos os racionais, pois q + 1 não pertence a $q^*$. Além disso, ele é não vazio, visto que q-1 pertence a ele, mostrando a primeira propriedade dos cortes.

Ademais, se r pertence a $q^*$ e p é um racional menor que r, segue da transitividade da ordem que p é menor que q, já que r também é. Assim, p pertence a $q^*$, mostrando a segunda propriedade dos cortes.

Por fim, dado um r em $q^*$, seja $s = \frac{r+q}{2}$. Então,

$$r - \frac{r+q}{2} = \frac{r-q}{2} < 0,$$

tal que s é menor que r e, logo, pertence a $q^*$. Portanto, $q^*$ forma um corte.

Daremos continuidade às atividades da aula anterior demonstrando a última proposição vista.

**Proposição.** *Se $\alpha, \beta, \gamma$ são cortes,*

*i) $\alpha < \beta$ e $\beta < \gamma$ implica que $\alpha < \gamma$;*

*ii) Exatamente uma das seguintes relações é válida: $\alpha < \beta$ ou $\alpha = \beta$ ou $\beta < \alpha$*

*iii) Todo subconjunto não-vazio e limitado superiormente de $\mathbb{R}$ tem supremo.*

**Prova.** *As duas primeiras partes seguem automaticamente da forma que definimos a ordem $\leq$ para os cortes. Resta mostrar a última.*

*Vamos exibir o supremo explicitamente. Com efeito, seja $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}$ um coleção de cortes limitada superiormente, i.e., existe um $l$ em $\mathbb{R}$ tal que $\alpha \leq l$ para todo $\alpha$ em $\mathcal{A}$. Defina $\mathcal{S} = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} \alpha$. Mostremos que $\mathcal{S}$ é um corte. Com efeito, que $\mathcal{S}$ é não-vazio e diferente de $\mathbb{Q}$ é automático. Além disso, dado q em $\mathcal{S}$ e $r < q$, segue que $r \in \alpha_0$ para algum $\alpha_0$ em $\mathcal{A}$.*

*Para ver que $\mathcal{S}$ é o supremo, suponha que $\mathcal{S}' < \mathcal{S}$. Então, existe r em $\mathcal{S}/\mathcal{S}'$. Como r pertence a $\mathcal{S}$, r pertence a $\alpha_0$ para algum $\alpha_0 \in \mathcal{A}$. Logo, $\alpha_0 > \mathcal{S}'$. Portanto, $\mathcal{S}$ é o menor limitante superior de $\mathcal{A}$, ou seja, seu supremo.* ■

**Definição.** *Se $\alpha, \beta$ são cortes, definimos $\alpha + \beta$ como o conjunto de todos os racionais da forma $r + s$, com $r$ em $\alpha$ e $s$ em $\beta$. Ademais, tome $0^* = \{s \in \mathbb{Q} : s < 0\}$.*□

Vamos conferir a definição, i.e., que $\alpha + \beta$ é um corte. Com efeito, $\alpha + \beta \neq \emptyset$, pois $\alpha \neq \emptyset$ e $\beta \neq \emptyset$. Além disso, se p não pertence a $\alpha$ e q não pertence a $\beta$, mas r pertence a $\alpha$ e s a $\beta$, então $r + s < p + q$, tal que $p + q$ não pertence a $\alpha + \beta$.

Além disso, tome $r + s$ em $\alpha + \beta$ e $p < r + s$. Escreva $p = r' + s' = \underbrace{p - r}_{\in \beta} + \underbrace{r}_{\in \alpha}$. Assim, p pertence a $\alpha + \beta$.

Por fim, tome $r + s$ em $\alpha + \beta$ e seja $r' > r$ (ambos em $\alpha$). Logo, $\underbrace{r' + s}_{\in \alpha + \beta} > r + s$. Portanto, $\alpha + \beta$ é um corte.

Fica de exercício mostrar que $0^*$ é um corte. Agora, mostremos os axiomas de corpo.

A comutatividade e associatividade da adição são triviais. Além disso, dado r em $\alpha$ e s em $0^*$,

$$r + s < r + 0 = r \Rightarrow r + s \in \alpha.$$

Logo, $\alpha + 0^* \subseteq \alpha$. Por outro lado, dado r em $\alpha$, existe $r'$ em $\alpha$ tal que $r' > r$. Assim, $r = \underbrace{r'}_{\alpha} + \underbrace{(r - r')}_{\in 0^*}$, pois $r - r' < 0$. Portanto, $\alpha \subseteq \alpha + 0^*$ e $\alpha = \alpha + 0^*$.

**Proposição.** *Dado um corte $\alpha$, existe um único corte $\beta$ tal que $\alpha + \beta = 0^*$, em que*

$$\beta = \{-p \in \mathbb{Q} : p - r \notin \alpha \text{ para algum } r \in \mathbb{Q}, r > 0\}$$

*e é denotado por $-\alpha$.*

**Prova.** *Começamos mostrando que $\beta$ é um corte. Feito isso, vamos mostrar que $\beta + \alpha = 0^*$.*

*Com efeito, dado -p em $\beta$, segue que p não pertence a $\beta$. Caso $s = p + r$, -s pertence a $\beta$, tal que $\beta$ é não-vazio. Ademais, se $p \in \alpha, -p \notin \beta$, tal que $\beta$ é diferente de $\mathbb{Q}$.*

*Além disso, se $-q < -p$ e $-p \in \beta$, então $-q \in \beta$. Por fim, se -p pertencer a $\beta$, $-p + \dfrac{r}{2} \in \beta$. Portanto, $\beta$ é um corte.*

*Agora, vamos conferir o outro item. De fato, se r pertence a $\alpha$ e s a $-\alpha$, então $-s \notin \alpha$ e $r < -s$, i.e., $r + s < 0$. Segue que $\alpha + (-\alpha) \subseteq 0^*$. Por outro lado, se $-2r \in 0^*$ com $r > 0$, existe um inteiro n tal que $nr \in \alpha$ e $(n+1)r \notin \alpha$. Escolha $p = -(n+2)r \in -\alpha$ e escreva $-2r = nr + p$. Portanto, $0^* \subseteq \alpha + (-\alpha)$ e os conjuntos são iguais.* ■

# 4 Aula 04 - 20/02/2023

## 4.1 Motivações

- Definir multiplicação de cortes;
- Definir conceito de distância entre números de $\mathbb{R}$

## 4.2 Cortes - Multiplicação

**Definição.** *Se $\alpha, \beta$ são cortes,*

$$\alpha\beta = \begin{cases} \alpha 0^*, & \forall \alpha \in \mathbb{R} \\ \{p \in \mathbb{Q} : \exists 0 < r \in \alpha \text{ e } 0 < s \in \alpha : p \leq rs\}, & \alpha, \beta > 0^* \\ (-\alpha)(-\beta), & \alpha, \beta < 0^* \\ -[(-\alpha)\beta], & \alpha < 0^* e \beta > 0^* \\ -[\alpha(-\beta)], & \alpha > 0^* e \beta < 0^* \end{cases}$$

*Definimos, também,* $1^*\{s \in \mathbb{Q} : s < 1\}$.

## 4.3 $\mathbb{R}$ Como Corpo Ordenado Completo

Temos $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ e diremos que todo número que não é real é irracional.

**Teorema.** *A quádrupla* $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ *satisfaz as condições de corpo ordenado, de corpo e é completo.*

**Definição.** *Seja* $x \in \mathbb{R}$. *O módulo, ou valor absoluto de x, é dado por*

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$$

*Disto segue que* $|x| \geq 0$ *e* $-|x| \leq x \leq |x|$ *para todo x real.*

**Exemplo 3.** *Mostre que* $|x|^2 = x^2$, *ou seja, o quadrado de um número real não muda quando se troca seu sinal.*

**Exemplo 4.** *A equação* $|x| = r$, *com r maior que 0, tem como soluções apenas r e -r.*

Sejam P e Q dois pontos da reta real de abscissas x e y. Então, a distância de P a Q é definida por $|x-y|$. Assim, $|x-y|$ é a medida do segmento PQ. Em particular, como $|x| = |x-0|$, $|x|$ é a distância de x a 0.

**Exemplo 5.** *Seja r maior que 0. Então,* $|x| < r$ *se, e somente se,* $-r < x < r$. *Logo, o intervalo (-r, r) é o conjunto dos pontos reais cuja disância de 0 é menor que r.*

**Exemplo 6.** *Para quaisquer x, y reais, vale*

$$|xy| = |x||y|.$$

**Exemplo 7.** *Para quaisquer x, y reais, temos*

$$|x+y| \leq |x| + |y|.$$

*Com efeito, somando* $-|x| \leq x \leq |x|$ *e* $-|y| \leq y \leq |y|$, *obtemos* $-|x| - |y| \leq x + y \leq |x| + |y|$.$\blacksquare$

**Definição.** *Um intervalo em* $\mathbb{R}$ *é um subconjunto de* $\mathbb{R}$ *que tem uma das seguintes formas:*

$$\begin{aligned}
&[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}, \quad \textit{(Intervalo fechado.)}\\
&(a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}, \quad \textit{(Intervalo aberto.)}\\
&[a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}\\
&(a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}\\
&(-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}\\
&(-\infty,b) = \{x \in \mathbb{R} : x > b\}\\
&[a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}\\
&(a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}\\
&(-\infty,+\infty) = \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

**Definição.** *Um conjunto A de* $\mathbb{R}$ *é dito limitado se existir L positivo tal que* $|x| \leq L$ *para todo x em A.*

**Proposição.** *Um conjunto A de* $\mathbb{R}$ *é limitado se, e só se, existir L positivo, tal que A está contido em* $[-L, L]$

**Exemplo 8.** *a)* $A = [0,1]$ *é limitado;*

*b)* $\mathbb{N}$ *não é limitado;*

*c)* $B = \left\{ \dfrac{2^n - 1}{2^n} : n \in \mathbb{N} \right\}$ *é limitado;*

*d)* $C = \left\{ \dfrac{2^n - 1}{2^n} : n \in \mathbb{N}^* \right\}$ *é limitado.*

**Definição.** *Seja $A \subseteq \mathbb{R}$.*

- *A será dito limitado superiormente se existir um L real tal que $x \leq L$ para todo x de A. Diremos que L é o limitante superior de A.;*
- *A será dito limitado inferiormente se existir um L real tal que $x \geq L$ para todo x de A. Diremos que L é o limitante inferior de A.;*

*Caso ambos ocorram, diremos que A é limitado.*

**Definição.** *Seja A um subconjunto dos reais limitado superiormente e não-vazio. Diremos que $\overline{L}$ é o supremo de A se for um limitante superior e para qualquer outro limitante superior L de A, tivermos $\overline{L} \leq L$. Quando o supremo pertencer ao conjunto, chamaremos ele de máximo.*

Vimos que todo subconjunto não-vazio e limitado superiormente de $\mathbb{R}$ tem supremo.

**Definição.** *Seja A um subconjunto dos reais limitado inferiormente e não-vazio. Diremos que $\bar{l}$ é o ínfimo de A se for um limitante inferior e para qualquer outro limitante inferior l de A, tivermos $\bar{l} \geq l$. Quando o ínfimo pertencer ao conjunto, chamaremos ele de mínimo.*

**Proposição.** *Dado um subconjunto A dos reais não-vazio e limitado superiormente, $L = \sup A$ se, e somente se,*

*a) L for limitante superior de A;*

*b) para todo $\epsilon > 0$, existe $a \in A$ tal que $a > L - \epsilon$.*

**Teorema.** *O conjunto $A = \{nx : n \in \mathbb{N}\}$ será ilimitado para todo x não-nulo.*

**Prova.** *Se $x > 0$, suponhamos, por absurdo, que A seja limitado e seja L seu supremo. Como $x > 0$, deve existir um natural m tal que*

$$L - x < mx \quad \text{ e } L = \sup A < (m+1)x.$$

*Mas isso é uma contradição.*

*A prova para $x < 0$ é análoga e será deixada como exercício.* ■

**Exemplo 9.** *a) Considere $A = [0, 1)$. Então, -2 e 0 são limitantes inferiores de A enquanto $1, \pi, 101$ são limitantes superiores de A.*

*b) $\mathbb{N}$ não é limitado, mas é limitado inferiormente por 0, visto que $0 \leq x$ para todo x natural.*

*c) $B = \{x \in \mathbb{Q} : x \leq \sqrt{2}\}$ não é limitado, mas é limitado superiormente por L, em que $L \geq 2$.* ■

**Corolário.** *Para todo $\epsilon > 0$, existe um n natural tal que*

$$\frac{1}{n} < \epsilon, \quad \frac{1}{n\sqrt{2}} < \epsilon, \quad 2^{-n} < \epsilon.$$

Já sabemos, por construção, que entre dois números reais distintos existe um número racional. O mesmo vale para irracionais. De fato, sejam a e b números reais distintos. Se $a < b$ e $\epsilon = b - a > 0$, do corolário, tome um natural n tal que $\frac{1}{n\sqrt{2}} < \frac{1}{n} < \epsilon$. Se a é racional, $r = a + \frac{1}{n\sqrt{2}}$ é irracional e $a < r < b$. Por outro lado, se a é irracional, $r = a + \frac{1}{n}$ também é, tal que $a < r < b$. Portanto, dados dois números reais quaisquer, existe um número irracional.

**Corolário.** *Qualquer intervalo aberto e não-vazio contém infinitos números racionais e infinitos irracionais.*

**Corolário.** *Se $A = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\right\}$, então $\inf A = 0$.*

**Exemplo 10.**

(*a*) *Seja* $A = (0,1]$. *Então,* $\inf A = 0, \max A = 1$;

(*b*)$\sqrt{2} = \{r \in \mathbb{Q} : r \leq 0\} \cup \{r \in \mathbb{Q} : r^2 < 2\}$ *é um corte.* (*c*)$C = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\} \Rightarrow \sqrt{2} = \sup C$ *e* $\inf C = -\sqrt{2}$.

*Vamos analisar mais cautelosamente o item b e prová-lo. De fato, se* $0 < r \in \mathbb{Q}$ *e* $r^2 < 2$, *existe n natural tal que* $[2r+1]\frac{1}{n} < 2 - r^2$ *e* $(r + \frac{1}{n})^2 < 2$. *As outras propriedades de cortes são triviais.*

*Olhando também para o item C, como todos seus elementos são racionais saitsfazendo* $x^2 < 2, \sqrt{2}$*é um limitante superior de C. Agora, se* $0 < L < \sqrt{2}$, *existe um racional* $r \in (L, \sqrt{2})$ *e* $L^2 < r^2 < 2$. *Logo, r pertence a C e L não é limitante superior para C, provando o resultado.*

**Proposição.** *Se A é um subconjunto não-vazio e limitado inferiormente, então* $-A = \{-x : x \in A\}$ *será limitado superiormente e* $\inf A = -\sup(-A)$. *Analogamente, se for limitado superiormente, o conjunto -A será limitado inferiormente, e* $\sup A = -\inf(-A)$

**Prova.** *Se A for limitado inferiormente,* $\inf(A) \leq x$ *para todo x de A e, dado* $\epsilon > 0$, *deve existir a em A tal que* $a < \inf(A) + \epsilon$, *ou, trocando o sinal,* $-\inf(A) \geq -x$ *para todo -x de -A e, dado* $\epsilon > 0$, *deve existir* $b = -a$ *em -A tal que* $-a > -\inf(A) - \epsilon$.

*Com isso, segue que -A será limitado superiormente, e* $\sup(-A) = -\inf(A)$. *A outra prova fica como exercício.* ■

**Corolário.** *Todo conjunto A não-vazio e limitado inferiormente de* $\mathbb{R}$ *tem ínfimo.*

**Corolário.** *Todo conjunto A não-vazio e limitado de* $\mathbb{R}$ *tem ínfimo e supremo.*

**Definição.** *Uma vizinhança de um número real a é qualquer intervalo aberto da reta contendo a.*

**Exemplo 11.** *Se* $\delta > 0, V_\delta(a) := (a - \delta, a + \delta)$ *é uma vizinhança de a que será chamada de* $\delta-$*vizinhança de a.*

**Definição.** *Sejam A um subconjunto de* $\mathbb{R}$ *e b um número real. Se, para todo* $\delta > 0$, *existir* $a \in V_\delta(b) \cap A, a \neq b$, *então b será dito um ponto de acumulação de A.*

**Exemplo 12.** *a) O conjunto dos pontos de acumulação de (a, b) é [a, b];*

*b) Seja* $B = \mathbb{Z}$. *Então, B não tem pontos de acumulação;*

*c) Subconjuntos finitos de* $\mathbb{R}$ *não têm pontos de acumulação;*

*d) O conjunto dos pontos de acumulação de* $\mathbb{Q}$ *é* $\mathbb{R}$.

**Definição.** *Seja* $B \subseteq \mathbb{R}$. *Um ponto b de B será dito um ponto isolado de B, se existir* $\delta > 0$ *tal que* $V_\delta(b)$ *não contém pontos de B distintos de b.* □

**Exemplo 13.** *Seja* $B = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots\}$. *Então, o conjunto dos pontos de acumulação de B é* $\{0\}$ *e o conjunto dos pontos isolados de B é o próprio conjunto B.*

Observe que existem conjuntos infinitos sem pontos de acumulação, tal como $\mathbb{Z}$. Por outro lado, todo conjunto infinito e limitado possui pelo menos um ponto de acumulação.

**Teorema.** *Se A é um subconjunto infinito e limitado de* $\mathbb{R}$, *então A possui pelo menos um ponto de acumulação.*

**Prova.** *Se* $A \subseteq [-L, L]$ *e* $[a_n, b_n], n \in \mathbb{N}$ *são escolhidos tais que* $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n], b_0 = -a_0 = L, b_n - a_n = \frac{2L}{2^n}, n \in \mathbb{N}^*$ *e* $[a_n, b_n]$ *contém infinitos elementos de A. Seja* $a = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

*Note que* $[a_n, b_n] \subseteq a_j, b_j, j \leq n$ *e* $[a_j, b_j] \subseteq [a_n, b_n], j > n$. *Em qualquer um dos casos,* $a_n \leq b_j$ *para todo* $j \in \mathbb{N}$. *Logo,* $a \leq b_j, j \in \mathbb{N}$. *Segue que* $a_n \leq a = \sup\{s_n : n \in \mathbb{N}\} \leq b_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *e* $a \in \bigcap_{n \geq 1} [a_n, b_n]$.

*Dado* $\delta > 0$, *escolha* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $\frac{2L}{2^n} < \delta$. *Segue que* $a \in [a_n, b_n] \subseteq (a - \delta, a + \delta) = V_\delta(a)$ *e a é ponto de acumulação de A.* ■

# 5 Aula 05 - 22/03/2023

## 5.1 Motivações

- Sequências de Números Reais;
- Convergência de Sequências;

## 5.2 Sequências de Números Reais

**Definição.** *Uma sequência é uma função definida no conjunto dos números reais que, para cada $n$ natural, associa um número real $a_n$.*

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &= \{0, 1, 2, \cdots\} \\ f &: \mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ n &\mapsto a_n. \end{aligned}$$

*Denotamos a função por $\{a_n\}$*$\square$

**Exemplo 14.** *Sendo $a_n = \frac{f1}{n+1}$ para todo $n$ natural, temos a sequência $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots\}$.*

**Exemplo 15.** *Sendo $a_n = 6$ para todo $n$ natural, temos a sequência constante*

$$\{6, 6, 6, \cdots\}.$$

**Exemplo 16.** *Coloque $a_{2n+1} = 7, a_{2n} = 4$ para todo $n$ natural. Temos*

$$\{4, 7, 4, 7, \cdots\}$$

Consideremos as sequências

$$\alpha_n = n, \quad \beta_n = (-1)^n, \quad \text{e } \gamma_n = \frac{1}{n}.$$

Como funções, elas podem ter os gráficos traçados, mas não são muito significativos, visto que consistem em coletâneas de pontos discretos. Ademais, note que a sequência $(\alpha_n)$ "diverge" para infinito, a sequência $(\beta_n)$ "oscila" e a sequência $(\gamma_n)$ "converge para 0". Precisamente,

**Definição.** *A sequência $\{a_n\}$ é dita convergente com limite $l$ se, para todo $\epsilon > 0$, existe um natural $N$ dependendo de $\epsilon(N = N(\epsilon) \in \mathbb{N})$ tal que $n > N$ implica em $|a_n - l| < \epsilon$. Ou seja, a partir de um certo $N$, os $a_n$ estão no intervalo $(l - \epsilon, l + \epsilon)$ e, como $\epsilon$ é arbitrário, os $a_n$ se juntam em torno de $l$. Disto, segue que a condição exigida equivale a*

$$l - \epsilon < a_n < l + \epsilon, \quad n \geq N.$$

*Denotamos esse fenômeno por $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = l$, ou $a_n \to l$, ou $a_n \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} a$.*$\square$

**Exemplo 17.** *$\circ \frac{1}{n} \to 0, n \to \infty$. De fato, dado $\epsilon > 0$, da propriedade arquimediana, segue que existe um $N$ natural tal que $N\epsilon > 1$. Logo, para todo $n \geq N$, temos*

$$0 - \epsilon < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < 0 + \epsilon.$$

*$\circ \frac{n}{n+1} \to 1, n \to \infty$. Com efeito, dado $\epsilon > 0$, queremos encontrar $N$ natural não-nulo tal que se $n$ é maior que $N$, temos*

$$\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \epsilon.$$

*No entanto, $|\frac{n}{n+1} - 1| = \frac{1}{n+1}$ e, da propriedade Archimediana, existe $N$ em $\mathbb{N}^{\times}$ tal que $(N+1)\epsilon > 1$. Logo, se $n \geq N$,*

$$1 - \epsilon < \frac{n}{n+1} < 1 + \epsilon.$$

**Definição.** *Uma sequência* $\{a_n\}$ *será divergente quando ela não for convergente.*

I) *Sequência divergente para* $+\infty$ : *Este caso ocorre se dado* $K > 0$, *existe* $N$ *natural tal que se* $n > N, a_n > K$.

II) *Sequência divergente para* $-\infty$ : *Acontece quando dado* $K > 0$, *existe* $N$ *natural tal que se* $n > N, a_n < -K$.

III) *Sequência oscilante: Por fim, ocorre quando a sequência diverge, mas nem para* $+\infty$ *e nem para* $-\infty$.□

Note que, como sequências são funções, podemos multiplicá-las por constante, somar, dividir e multiplicar por outras sequência. De fato,

**Definição.** *Dadas sequências* $\{a_n\}, \{b_n\}$ *e um número real* $c$, *deifnimos*

$$
\begin{aligned}
&i)\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\}\\
&ii)c\{a_n\} = \{c \cdot a_n\}\\
&iii)\{a_n\}\{b_n\} = \{a_n b_n\}\\
&iv)\ \text{Se } b_n \neq 0 \forall n \in \mathbb{N}, \frac{\{a_n\}}{\{b_n\}} = \left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}\square
\end{aligned}
$$

**Definição.** *Seja* $\{a_n\}$ *uma sequência de número reais. Diremos que* $\{a_n\}$ *é limitada se sua imagem for um subconjunto limitado de* $\mathbb{R}$.□

**Teorema.** *Seja* $\{a_n\}$ *uma sequência de números reais.*

a) $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$ *se, e somente, toda vizinhança de a contém todo, exceto uma possível quantidade finita de* $a_n$*'s.*

b) *O limite é único.*

c) *Se* $\{a_n\}$ *é convergente, então* $\{a_n\}$ *é limitada*

d) *Se* $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$, *exite* $N$ *natural tal que* $a_n > 0$ *para todo* $n \geq N$.

e) *Se* $A \subseteq \mathbb{R}$ *e a é um ponto de acumulação de A, então existe uma sequência* $\{a_n\}$ *de elementos de A que converge para a.*

**Prova.** *O item a é trivial. Mostremos a unicidade do limite: Suponha que* $a_n$ *converge para a e para b, com a diferente de b. Então, dado* $\epsilon > 0$, *existem naturais* $N_1, N_2$ *tais que se* $n \geq N_1, |a_n - a| < \epsilon$ *e se* $n \geq N_2, |a_n - b| < \epsilon$. *Tome* $N = \min N_1, N_2$ *e suponha que* $n \geq N$. *Então, temos*

$$|b - a| \leq |b - a_n| + |a_n - a| = |b - a_n| + |a - a_n| < 2\epsilon.$$

*(P.S.: pode ser boa prática tomar* $\frac{\epsilon}{2}$ *ao invés de* $\epsilon$, *pois assim obtemos* $|b - a| < \frac{2\epsilon}{2} = \epsilon$.*)*

*Como* $\epsilon$ *é abritrário, podemos selecionar* $\epsilon$ *infinitamente próximo de 0. Portanto,* $b = a$.

*Para o item c, suponha que* $a_n$ *converge para a, isto é, dado* $\epsilon > 0, \epsilon = 1$ *em particular, existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que se* $n \geq N, |a_n - a| < 1$. *Logo,* $a_n \in (a - 1, a + 1)$ *para n maior que N suficientemente grande. Restam os N-1 primeiros elementos da sequência. Assim, tome* $R = \max\left\{|a_1|, \cdots, |a_{N-1}|, |a + 1|, |a - 1|\right\}$. *Deste modo,* $a_n \in [-R, R]$ *para todo n natural.*

*Com relação ao item d, basta tomar* $\epsilon = \frac{a}{2} > 0$.

*Por fim, quanto ao item e, suponha o que é dito no enunciado. Como a é ponto de acumulação, dado* $\epsilon > 0$, *existe* $a' \in A, a' \neq a$ *tal que*

$$a' \in V_\epsilon(a) = (a - \epsilon, a + \epsilon).$$

*Logo, tomadno* $\epsilon = \frac{1}{n}$, *podemos encontrar* $a_n \in A, a_n \neq a$ *tal que* $a_n \in \left(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right)$. *A sequência* $\{a_n\}$ *converge para a. De fato, dado* $\epsilon > 0$, *tome N natural tal que* $N\epsilon > 1$. *Assim, se* $n \geq N, a_n \in (a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}) \subseteq a - \epsilon, a + \epsilon)$. *Portanto,* $a_n \to a$. ■

**Teorema.** *Seja* $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a, b_n \overset{n\to\infty}{\to} b$ *e* $c$ *um número real. Então,*

$$\begin{aligned}
&a)a_n + b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a+b.\\
&b)ca_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} ca\\
&c)a_nb_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} ab\\
&d)Se b \neq 0, b_n \neq 0 \forall n \in \mathbb{N}, \frac{a_n}{b_n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{a}{b}.
\end{aligned}$$

**Prova.** *Item c). Suponha* $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a, b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} b$. *Note que*

$$|a_nb_n - ab| = a_nb_n - a_nb + a_nb - ab \leq |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a|$$

*Como* $\{a_n\}$ *é convergente, ela é limitada pelo teorema anterior. Assim, existe* $M > 0$ *tal que* $|a_n| \leq M$ *para todo* $n$ *natural, tal que Assim,*

$$|a_nb_n - ab| \leq |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a| \leq M|b_n - b| + (|b|+1)|a_n - a|.$$

*Agora, dado* $\epsilon > 0$, *existem naturais* $N_1, N_2$ *tais que*

$$\begin{aligned}
|a_n - a| &< \frac{\epsilon}{2(|b|+1)}, \quad \forall n \geq N_1\\
|b_n - b| &< \frac{\epsilon}{2M}, \quad \forall n \geq N_2.
\end{aligned}$$

*Logo, tomando* $N = \max\{N_1, N_2\}$, *se* $n \geq N$,

$$|a_nb_n - ab| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

*Portanto,* $a_nb_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} ab$. ■

**Definição.** *Seja* $\{a_n\}$ *uma sequência. Diremos que* $\{b_n\}$ *é uma subsequência de* $\{a_n\}$ *se existir uma função estritamente crescente* $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *tal que* $b_k = a_{s(k)}$ *para todo* $k$ *natural.* □

**Definição.** *Seja* $\{a_n\}$ *uma sequência. Diremos que* $\{a_n\}$ *é de Cauchy se, dado* $\epsilon > 0$, *existe um natural* $N = N(\epsilon)$ *tal que* $|a_n - a_m| < \epsilon$ *para todo* $n, m \geq N$.□

**Teorema.** *a) Uma sequência é convergente se, e somente se, toda subsequência dela converge para o mesmo limite.*

*b) Toda sequência convergente é de Cauchy;*

*c) Toda sequência limitada tem subsequência convergente;*

*d) Toda sequência de Cauchy é limitada;*

*e) Toda sequência de Cauchy que tem subsequência convergente é convergente.*

*f) Toda sequência de Cauchy é convergente;*

*g) Toda sequência crescente e limitada é convergente;*

*h) Toda sequência decrescente e limitada é convergente.*

# 6 Aula 06 - 24/03/2023

## 6.1 Motivações

- Provar o teorema da aula anterior;
- Exemplos.

## 6.2 Propriedades de Sequências

Recapitulemos o teorema da aula anterior:

**Teorema.** *a) Uma sequência é convergente se, e somente se, toda subsequência dela converge para o mesmo limite.*

*b) Toda sequência convergente é de Cauchy;*

*c) Toda sequência limitada tem subsequência convergente;*

*d) Toda sequência de Cauchy é limitada;*

*e) Toda sequência de Cauchy que tem subsequência convergente é convergente.*

*f) Toda sequência de Cauchy é convergente;*

*g) Toda sequência crescente e limitada é convergente;*

*h) Toda sequência decrescente e limitada é convergente.*

**Prova.** *a.) $\Leftarrow$) Se toda subsequência de $\{a_n\}$ converge, então $\{a_n\}$ converge, pois ela é uma subsequência de si mesma (basta tomar $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, s(n) = n$.)'*

*$\Rightarrow$) Suponha que $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} l$ e $\{b_n\}$ é uma subsequência de $\{a_n\}$, existe $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estritamente crescente tal que $b_k = a_{s(k)}$. Dado $\epsilon > 0$, seja $N$ o natural tal que $|a_n - l| < \epsilon$ para todo $n \geq N$. Note que $s(n) \geq n$, tal que se $n \geq N$, então $s(n) \geq N$, de forma que $|a_{s(n)} - l| < \epsilon$. Portanto, qualquer subsequência de $\{a_n\}$ é convergente.*

*b.) Se $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} l$, então dado $\epsilon > 0$, existe $N$ natural tal que*

$$|a_n - l| < \frac{\epsilon}{2}, \quad \forall n \geq N.$$

*Logo, $|a_n - a_m| = |a_n - l + l - a_m| \leq |a_n - l| + |l - a_m| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$ para todo $n, m \geq N$.*

*c.) Suponha que $\{a_n\}$ é uma sequência limitada. Recorde que, do teorema de Bolzano-Weierstrass, todo conjunto inifinito e limitado possui um ponto de acumulação. Segue que a imagem $I$ da sequência é finita ou infinita.*

*No primeiro caso, se $I$ é finito, um dos valores pertencentes a $I$ é tal que $a_n = a$ para infinitos índices. Construiremos a sequência como segue - Coloque s(0) como o menor elemento do conjunto dos n's para os quais $a_n = a, i.e., \{n \in \mathbb{N} : a_n = a\} = A$. Além disso, tome s(1) como o menor elemento de A, com exceção do s(0). Repetindo esse processo, obtemos uma subsequência constante até que se obtenha s(n) = a, ou seja, ela será convergente.*

*Agora, se $I$ é infinito, segue de Bolzano-Weierstrass que $I$ tem um ponto de acumulação, nomeie-o de $a$. Dado $\epsilon > 0, (a - \epsilon, a + \epsilon)$ tem infinitos elementos do conjunto $I$. Analogamente ao anterior, coloque $N = s(0)$ como o menor elemento de $\{n \in \mathbb{N} : a_n \neq a, a_n \in (a - \epsilon, a + \epsilon)\}$ e coloque, também, $\epsilon_1 = |a - a_{s(0)}|$. Em seguida, tome $s(1) = \{n \in \mathbb{N} : a_n \neq a, a_n \in (a - \frac{\epsilon}{2}, a + \frac{\epsilon}{2})\}$. Indutivamente, $b = a_{s(n)}$ é convergente para $a$.*

*d.) Dado $\epsilon = 1$, seja $N$ um número natural tal que*

$$|a_n - a_m| < 1, \quad \forall n \geq N.$$

*Considere $M = \{|a_0|, |a_1|, \cdots, |a_{N-1}|, |a_N + 1|, |a_N - 1|\}$. Assim, $a_n \in [-M, M]$ para todo $n$ natural.*

*e.) Seja $\{a_n\}$ de Cauchy e $\{a_{s(n)}\}$ convergente para l. Dado $\epsilon > 0$, existe um natural $N_1$ tal que*

$$|a_n - a_m| < \frac{\epsilon}{2}, \quad \forall n \geq N_1.$$

*Além disso, existe $N_2$ natural tal que*

$$|a_{s(n)} - l| < \frac{\epsilon}{2}, \quad \forall s(n) \geq N_2.$$

*Seja $N = \max\{s(N_2), N_1\}$ e tome $n \geq N$.*

$$|a_n - l| = |a_n - a_{s(N_2)} + a_{s(N_2)} - l| \leq |a_n - a_{s(N_2)}| + |a_{s(N_2)} - l| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

*f.) Segue os itens (e), (d) e (c), visto que toda subsequência de Cauchy terá subsequência convergente pelos itens (d) e (c).*

*g.) Seja $\{a_n\}$ limitada e crescente, $l = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Então, para todo $n \geq N$, em que $N$ é tal que $a_N \in (l - \epsilon, l)$*

$$l - \epsilon < a_N \leq a_n \leq l.$$

*h.) Análoga ao g.*

**Exemplo 18.** *Mostre que*

*i)* $\{a, a, a, \cdots\}, a \in \mathbb{R}$ *é convergente;*

*ii)* $\{0, 1, 0, 1\}$ *não é convergente;*

*iii)* $\{n\}$ *não é convergente.*

**Exemplo 19.** *Se a é um número real mais ou igual a zero, então a sequência $\{a^n\}$ é convergente se $0 \leq a \leq 1$ e divergente se $a > 1$. Com efeito, se $a > 1, a = 1 + h, h > 0$. Então,*

$$a^n = (1+h)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} h^k = 1 + nh + \cdots > 1 + nh.$$

*Mas, segue da Archimediana que $1 + nh$ sempre forma um conjunto ilimitado para n natural, ou seja, $a_n$ é ilimitada. Logo, a sequência diverge.*

*Por outro lado, suponha que a pertence a (0, 1). Então, $a^{n+1} = aa^n < a^n$, ou seja, é uma sequência decrescente e limitada inferiormente. Portanto $\{a_n\}$ é convergente.*

**Exemplo 20.** *Mostre que, se a é diferente de 1,*

$$\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$$

*e que a sequência $\left\{\frac{1-a^{n+1}}{1-a}\right\}$ é convergente se $0 \leq a < 1$ e divergente se $a > 1$.*

**Exemplo 21.** *Mostre que a sequência $\{a_n\}$, com $a_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}$ é convergente para todo n natural. (Crescente e limitada por 3.)*

**Exemplo 22.** *Mostre que as sequências $\left\{(1 + \frac{1}{n}^n)\right\}, \{n^{\frac{1}{n}}\}$ e $\{a^{\frac{1}{n}}\}$ com $a > 0$, são convergentes.*

$$\circ\, (1 + \frac{1}{n})^n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}(1 - \frac{1}{n}) + \cdots + \frac{1}{n!}(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) \cdots (1 - \frac{n-1}{n})$$

$$\circ\, n^{\frac{1}{n}} > (n+1)^{\frac{1}{n+1}} \iff n^{n+1} > (n+1)^n \iff n > (1 + \frac{1}{n})^n$$

$$\circ\, x = a^n < 1 \Rightarrow x < 1, x^n = a, x^{n+1} = a^{\frac{n+1}{n}}, \text{ e } y^{n+1} = a \Rightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} = a^{\frac{1}{n}}.$$

# 7 Aula 07 - 27/03/2023

## 7.1 Motivações

- Exemplos de Sequências;
- Teorema da Comparação e do Sanduíche;
- Limites superior e inferior.

## 7.2 Exemplos de Sequências

Revisemos os exemplos da última aula, com um extra ao final.

**Exemplo 23.** *Mostre que*

*i)* $\{a, a, a, \cdots\}, a \in \mathbb{R}$ *é convergente;*

*ii)* $\{0, 1, 0, 1\}$ *não é convergente;*

*iii)* $\{n\}$ *não é convergente.*

**Exemplo 24.** *Se a é um número real mais ou igual a zero, então a sequência* $\{a^n\}$ *é convergente se* $0 \leq a \leq 1$ *e divergente se* $a > 1$*. Com efeito, se* $a > 1, a = 1 + h, h > 0$*. Então,*

$$a^n = (1+h)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} h^k = 1 + nh + \cdots > 1 + nh.$$

*Mas, segue da Archimediana que* $1 + nh$ *sempre forma um conjunto ilimitado para n natural, ou seja,* $a_n$ *é ilimitada. Logo, a sequência diverge.*

*Por outro lado, suponha que a pertence a (0, 1). Então,* $a^{n+1} = aa^n < a^n$*, ou seja, é uma sequência decrescente e limitada inferiormente. Portanto* $\{a_n\}$ *é convergente.*

**Exemplo 25.** *Mostre que, se a é diferente de 1,*

$$\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$$

*e que a sequência* $\left\{\frac{1-a^{n+1}}{1-a}\right\}$ *é convergente se* $0 \leq a < 1$ *e divergente se* $a > 1$*.*

**Exemplo 26.** *Mostre que a sequência* $\{a_n\}$*, com* $a_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}$ *é convergente para todo n natural. (Crescente e limitada por 3.)*

*De fato, é claro que* $\{a_n\}$ *é crescente e que* $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$*, para* $n \geq 2$*. Logo,*

$$a_n \leq 1 + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} < 3.$$

*Portanto,* $\{a_n\}$ *é convergente, e denotamos seu limite por e.*

**Exemplo 27.** *Mostre que as sequências* $\left\{(1 + \frac{1}{n}^n)\right\}, \{n^{\frac{1}{n}}\}$ *e* $\{a^{\frac{1}{n}}\}$ *com* $a > 0$*, são convergentes.*

$$\circ\, (1 + \frac{1}{n})^n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}(1 - \frac{1}{n}) + \cdots + \frac{1}{n!}(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) \cdots (1 - \frac{n-1}{n})$$

$$\circ\, n^{\frac{1}{n}} > (n+1)^{\frac{1}{n+1}} \iff n^{n+1} > (n+1)^n \iff n > (1 + \frac{1}{n})^n$$

$$\circ\, x = a^n < 1 \Rightarrow x < 1, x^n = a, x^{n+1} = a^{\frac{n+1}{n}},\ \text{e } y^{n+1} = a \Rightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} = a^{\frac{1}{n}}.$$

*Ainda mais, uma delas têm como limite o número e definido no exemplo anterior. Para observar isso, considere o primeiro exemplo. Note que*

$$\begin{aligned} b_n &= 1 + \binom{n}{1}n^{-1} + \binom{n}{2}n^{-2} + \cdots + \binom{n}{n-1}n^{-n+1} + \binom{n}{n}n^{-n} \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n}) + \cdots + \frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n}) \\ &\leq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} = a_n < e \end{aligned}$$

*Como cada termo da soma que define $b_n$ é crescente, obtemos que $b_n$ é crescente, tal que ela converge com limite $l = \sup\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$.*

*Com relação ao último item, resta elaborar como ele converge para 1. Lembre-se que $a^{\frac{1}{n}}$ é o único número real positivo $x$ tal que $x^n = a$. Logo, se $x = a^n$ e $y = a^{\frac{1}{n+1}}$, temos $x^{n+1} = y^{n+1}x$ e, deste modo,*

$$(a) 0 < a < 1 \Rightarrow x < 1 \text{ e } \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} = x < 1 \text{ e, assim, } x < y.$$

$$(b) a > 1 \Rightarrow x > 1 \text{ e } \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} = x > 1 \text{ tal que } x > y.$$

*Logo, se $a < 1, \{a^{\frac{1}{n}}\}$ é crescente e limitada superiormente por 1, mostrando que ela é convergente. Além disto, se $a > 1, \{a^{\frac{1}{n}}\}$ é descrescente e limitada inferiormente por 1, também sendo convergente. Por fim, segue de $a^{\frac{1}{n(n+1)}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{a^{\frac{1}{n+1}}}$. Portanto, do item (a) do teorema junto com a regra para quociente de sequências, segue que $l = 1$ é o limite dela.*

<u>**Exemplo**</u> **28.** *Mostre que a sequência $\{c_n\}, c_0 = 1, c_n = n^{\frac{1}{n}}, n \geq 1$, é convergente. Com efeito, lembre-se que, para $n \geq 3, n > b_n = (1 + \frac{1}{n})^n$. Logo, para $n \geq 3, n^{n+1} > (n+1)^n$ e, consequentemente, $n^{\frac{1}{n}} > (n+1)^{\frac{1}{n+1}}$. Disto segue de $\{n^{\frac{1}{n}}\}$ é limitada e, por (h), que $\{c_n\}$ é convergente com limite $l \geq 1$. Ainda mais, $(2n)^{\frac{1}{2n}}(2n)^{\frac{1}{2n}} = (2n)^{\frac{1}{n}} = 2^{\frac{1}{n}}n^{\frac{1}{n}}$ e, portanto, usamos (a) e o exemplo da última aula para mostrar que $l^2 = l = 1$.*■

## 7.3 Teoremas da Comparação e do Sanduíche

Notação: Se uma sequência tem limite 0, ela é chamada infinitésima.

<u>**Teorema**</u>**.** *Se $\{a_n\}$ é limitada e $\{b_n\}$ é infinitésima, então $\{a_n \cdot b_n\}$ é infinitésima.*

<u>**Prova**</u>**.** *Como $\{a_n\}$ é limitada, seja $M > 0$ tal que $|a_n| \leq M$ para todo n natural. Como $\{b_n\}$ é infinitésima, dado $\epsilon > 0$, seja $N$ outro natural tal que $|b_n| < \frac{\epsilon}{M}$ para todo $n \geq N$. Segue que*

$$|a_n b_n| \leq M|b_n| < M\frac{\epsilon}{M} = \epsilon, \quad \forall n \geq N.$$

*Portanto, $\{a_n b_n\} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.*■

<u>**Exemplo**</u> **29.** *Mostre que $\left\{\frac{n+\cos(n)}{n+1}\right\}$ converge.*

Os resultados a seguir são os dois mencionados previamente, o teorema da comparação e o do sanduíche, respectivamente.

<u>**Teorema**</u>**.** *Se $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a, b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} b$ e existe $N$ natural tal que, para todo $n \geq N, a_n \leq b_n$, então $a \leq b$.*

<u>**Prova**</u>**.** *Dado $\epsilon > 0$, existe $N_1 \leq N$ tal que, para todo $n \geq N_1$,*

$$a - \epsilon < a_n < a + \epsilon \quad \text{e} \quad b - \epsilon < b_n < b + \epsilon.$$

*Logo, para todo $n \geq N$,*

$$a - \epsilon < a_n \leq b_n < b + \epsilon.$$

*Desta forma, $a - b < \epsilon$ para todo $\epsilon > 0$ e, portanto, $a - b \leq 0$.*■

**Teorema**. *Se* $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} l, c_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} l$ *e existe um* $N$ *natural tal que, para todo* $n \geq N, a_n \leq b_n \leq c_n$, *então* $b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} l$.

**Prova**. *Dado* $\epsilon > 0$, *existe* $N_1 \geq N$ *tal que, para todo* $n \geq N_1$,

$$l - \epsilon < a_n < l + \epsilon \quad e \quad l - \epsilon < c_n < l + \epsilon.$$

*Logo, para todo* $n \geq N_1$,

$$l - \epsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < l + \epsilon.$$

*Disto segue que* $|b_n - l| < \epsilon$ *para todo* $n \geq N_1$ *e que, portanto,* $\{b_n\}$ *é convergente para* $l$. ■

**Exemplo 30.** *Vamos mostrar que*

$$e = \lim_{n\to\infty} \overbrace{(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!})}^{a_n} = \lim_{n\to\infty} \overbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}^{b_n} = l.$$

*De fato, como* $a_n \geq b_n$ *para todo* $n$ *natural, segue do Teorema da Comparação que* $e \geq l$. *Por outro lado, se* $n \geq p \geq 2$,

$$b_n > 1 + 1 + \frac{1}{2!}(1 - \frac{1}{n}) + \cdots + \frac{1}{p!}(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) \cdots (1 - \frac{p-1}{n}).$$

*Agora, novamente pelo Teorema da Comparação,* $l = \lim\limits_{n\to\infty} b_n \geq a_p$ *para todo natural* $p$. *Portanto,* $l = \lim\limits_{n\to\infty} b_n \geq \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = e$. ■

**Definição.** *Seja* $\{a_n\}$ *uma sequência. Um número real* $a$ *é um valor de aderência de* $\{a_n\}$ *se a sequência* $\{a_n\}$ *possui uma subsequência convergente para* $a$. □

**Definição.** *Seja* $\{a_n\}$ *uma sequência limitada. Definimos o limite superior* $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$( *inferior* $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$) *da sequência* $\{a_n\}$ *por*

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} a_k$$
$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} a_k \quad \square$$

Uma consequência direta do Teorema do Confronto que utiliza os conceitos acima nos permite dizer se uma sequência converge apenas utilizando as ideias de limite superior e inferior:

**Teorema**. *Se* $a$ *é um valor de aderência da sequência* $\{a_n\}$, *então*

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leq a \leq \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

*Além disso, uma sequência é convergente se, e somente se,* $\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$.

# 8 Aula 08 - 29/03/2023

- Relação entre limite superior (e inferior), limites normais e valores de aderência;
- Aproximações sucessivas de valores.

## 8.1 Limite Superior e Inferior

**Definição.** *Seja $\{a_n\}$ uma sequência. Um número real $a$ é um valor de aderência de $\{a_n\}$ se a sequência $\{a_n\}$ possui uma subsequência convergente para $a$.* $\square$

**Definição.** *Seja $\{a_n\}$ uma sequência limitada. Definimos o limite superior $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$( inferior $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$) da sequência $\{a_n\}$ por*

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} a_k = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} a_k$$
$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} a_k = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq n} a_k \quad \square$$

Uma consequência direta do Teorema do Confronto que utiliza os conceitos acima nos permite dizer se uma sequência converge apenas utilizando as ideias de limite superior e inferior:

**Teorema.** *Se $\{a_n\}$ é uma sequência limitada, então $a = \liminf_{n\to\infty} a_n$ e $b = \limsup_{n\to\infty} a_n$ são valores de aderência de $\{a_n\}$*

**Prova.** *A prova se baseia em verificar que, dada uma vizinhança $V_a$ de $a$, temos $a_n \in V_a$ para infinitos índices $n$. Dado $\epsilon > 0$, existe $N$ natural tal que, colocando $a = \liminf\limits_{n\to\infty} = \lim\limits_{n\to\infty} \inf\limits_{k\geq n} a_k = \lim\limits_{n\to\infty} i_n$,*

$$a - \epsilon < i_n < a + \epsilon \quad \forall n \geq N.$$

*Assim, existe um $a_{\overline{k}}, \overline{k} \geq N$ em $(a-\epsilon, a+\epsilon)$. Assim, existe $\overline{n} > \overline{k}$ tal que*

$$a - \epsilon < i_{\overline{n}} < a + \epsilon.$$

*Repetindo o raciocício, existe $a_{\overline{\overline{k}}}, \overline{\overline{k}} \geq \overline{n} > k$ em $(a-\epsilon, a+\epsilon)$. Dando continuidade a este raciocínio ad infinitum, o teorema está provado.* ■

**Teorema.** *Se $a$ é um valor de aderência da sequência $\{a_n\}$, então*

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leq a \leq \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

*Além disso, uma sequência é convergente se, e somente se, $\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$.*

**Prova.** *Defina $i_n = \inf_{k\geq n} a_k$. Segue que $i_{s(n)} \leq a_{s(n)} \overset{\to}{\longrightarrow} a$, pois o conjunto $\{a_k : k \geq s(n)\}$ contém $a_{s(n)}$. Logo, como $i_{s(n)}$ converge para $\liminf_{n\to\infty} a_n$, segue do Teorema da comparação que*

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} a_{s(n)} = a.$$

*Analogamente, como $a_{s(n)} \leq \sup_{k\geq s(n)}(a_k) = s_{s(n)}$ e $\sup_{k\geq s(n)}(a_k) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a_n$, pelo teorema da comparação, chegamos novamente em*

$$\lim_{n\to\infty} a_{s(n)} = a \leq \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

*Portanto, juntando ambos, segue o resultado.* ■

A seguir, mostraremos um método para aproximar números por meio de sequências de Cauchy.

**Teorema.** *Se $\kappa \in [0,1), \{a_n\}$ é uma sequência tal que, para todo $n \in \mathbb{N}, |a_{n+2} - a_{n+1}| \leq \lambda |a_{n+1} - a_n|$, então $\{a_n\}$ é de Cauchy.*

**Prova.** *Se $m > n$ são naturais, $m = n + p$ para algum natural não-nulo $p$. Assim, como*

$$|a_{n+p} - a_n| = |a_{n+p} - a_{n+p-1} + a_{n+p-1} + \cdots + a_{n+1} - a_n|,$$

*segue da desigualdade triangular que*

$$\begin{aligned}|a_{n+p} - a_n| &\leq \kappa|a_{n+p-1} - a_{n+p-2}| + \kappa|a_{n+p-2} - a_{n+p-3}| + \cdots + \kappa|a_n - a_{n-1}| \\ &\leq \kappa^{n+p-1}|a_{n+p} - a_{n+p-1}| + \cdots + \kappa^n|a_p - a_{p-1}| \\ &= \kappa^n\left[\kappa^{p-1} + \cdots + 1\right]|a_1 - a_0| < \frac{\kappa^n}{1-\kappa}|a_1 - a_0|.\end{aligned}$$

*Dado $\epsilon > 0$, escolha $N$ natural tal que $\dfrac{\kappa^n}{1-\kappa}|a_1 - a_0| < \epsilon$. Assim, segue que, se $m, n \geq N, |a_m - a_n| < \epsilon$ e $\{a_n\}$ é de Cauchy.* ■

**Exemplo 31.** *Seja $a > 0$ e $\{a_n\}$ a sequência definida por $a_0 = c > 0$ e $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{a}{a_n}\right)$. Mostre que $\{a_n\}$ é convergente com limite $\sqrt{a}$.*

*Com efeito, observe que*

$$a_{n+2} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_{n+1} - a_n) + \frac{a}{2}\left(\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}\right) = \left(\frac{1}{2} - \frac{a}{2a_na_{n+1}}\right)(a_{n+1} - a_n)$$

*e note que, para todo $t > 0, \frac{1}{2}(t + \frac{a}{t}) > \sqrt{\frac{a}{2}}$. Logo, $a_n > \sqrt{\frac{a}{2}}$ para todo $n$ maior ou igual que 1. Disto segue que $2a_na_{n+1} > a$ e que*

$$\left|\frac{1}{2} - \frac{a}{2a_na_{n+1}}\right| < \frac{1}{2}.$$

*Portanto, segue do método das aproximações sucessivas que $\{a_n\}$ é convergente e seu limite $l$ deve satisfazer $l = \frac{1}{2}(l + \frac{a}{l})$, ou seja, $l^2 = a$.* ■

# 9 Aula 09 - 31/03/2023

## 9.1 Motivações

- Limites Infinitos;
- Sequências divergentes.

## 9.2 Pontos de Aderência e Limites Superiores/Inferiores.

**Definição.** *Seja* $\{a_n\}$ *uma sequência. Um número real* $a$ *é um valor de aderência de* $\{a_n\}$ *se a sequência* $\{a_n\}$ *possui uma subsequência convergente para* $a$. $\square$

**Definição.** *Seja* $\{a_n\}$ *uma sequência limitada. Definimos o limite superior* $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$( *inferior* $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$) *da sequência* $\{a_n\}$ *por*

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} a_k = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} a_k$$
$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} a_k = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq n} a_k \quad \square$$

Uma consequência direta do Teorema do Confronto que utiliza os conceitos acima nos permite dizer se uma sequência converge apenas utilizando as ideias de limite superior e inferior:

**Teorema.** *Se* $\{a_n\}$ *é uma sequência limitada, então* $a = \liminf_{n\to\infty} a_n$ *e* $b = \limsup_{n\to\infty} a_n$ *são valores de aderência de* $\{a_n\}$

**Prova.** *A prova se baseia em verificar que, dada uma vizinhança* $V_a$ *de* $a$*, temos* $a_n \in V_a$ *para infinitos índices* $n$*. Dado* $\epsilon > 0$*, existe* $N$ *natural tal que, colocando* $a = \liminf\limits_{n\to\infty} = \lim\limits_{n\to\infty} \inf\limits_{k\geq n} a_k = \lim\limits_{n\to\infty} i_n$,

$$a - \epsilon < i_n < a + \epsilon \quad \forall n \geq N.$$

*Assim, existe um* $a_{\overline{k}}, \overline{k} \geq N$ *em* $(a-\epsilon, a+\epsilon)$*. Assim, existe* $\overline{n} > \overline{k}$ *tal que*

$$a - \epsilon < i_{\overline{n}} < a + \epsilon.$$

*Repetindo o raciocício, existe* $a_{\overline{\overline{k}}}, \overline{\overline{k}} \geq \overline{n} > k$ *em* $(a-\epsilon, a+\epsilon)$*. Dando continuidade a este raciocínio ad infinitum, segue que* $V_a$ *contém* $a_n$ *para infinitos indíces* $n$*, tal que o teorema está provado.* $\blacksquare$

**Corolário.** *(Exercício) Nas condições do teorema,* $a$ *é um valor de aderência de* $\{a_n\}$ *e* $b = \limsup_{n\to\infty} a_n$ *também é um valor de aderência de* $\{a_n\}$

**Teorema.** *Se* $a$ *é um valor de aderência da sequência* $\{a_n\}$*, então*

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leq a \leq \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

*Além disso, uma sequência é convergente se, e somente se,* $\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$.

**Prova.** *Defina* $i_n = \inf_{k\geq n} a_k$*. Segue que* $i_{s(n)} \leq a_{s(n)} \overset{\to}{\longrightarrow} a$*, pois o conjunto* $\{a_k : k \geq s(n)\}$ *contém* $a_{s(n)}$*. Logo, como* $i_{s(n)}$ *converge para* $\liminf_{n\to\infty} a_n$*, segue do Teorema da comparação que*

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} a_{s(n)} = a.$$

*Analogamente, como* $a_{s(n)} \leq \sup_{k\geq s(n)}(a_k) = s_{s(n)}$ *e* $\sup_{k\geq s(n)}(a_k) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a_n$*, pelo teorema da comparação, chegamos novamente em*

$$\lim_{n\to\infty} a_{s(n)} = a \leq \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

*Portanto, juntando ambos, segue o resultado.* $\blacksquare$

## 9.3 Sequências Divergente para $\pm\infty$.

Recorde-se que

**Definição.** *Diremos que uma sequência $\{a_n\}$ diverge para $+\infty(-\infty)$ se, dado $M > 0$, existe um natural $N$ tal que $a_n \geq M(a_n \leq -M)$ para todo $n \geq N$. Escreveremos $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty(-\infty)$, ou $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty(-\infty)$*$\square$.

**Definição.** *Diremos que a sequência $\{a_n\}$ é eventualmente positiva (negativa) se existe um natural $N$ tal que $a_n > 0(a_n < 0)$ para todo $n \geq N$.*$\square$

Vejamos a seguir algumas das propriedades dessas sequências.

**Teorema.** *a) Se $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ e $\{b_n\}$ é limitada inferiormente, então $a_n + b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$.*

*b) Se $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ e $\liminf_{n\to\infty} b_n > 0$, então $\lim_{n\to\infty} a_n b_m = +\infty$*

*c) Seja $\{a_n\}$ uma sequência com $a_n \neq 0$ para todo $n$ natural. $\{a_n\}$ é eventualmente negativa e $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ se, e somente se, $\dfrac{1}{a_n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$.*

*d) Sejam $\{a_n\}, \{b_n\}$ sequências eventualmente positivas, $b_n \neq 0$ para todo $n$ natural.*

*d.1) Se $\liminf_{n\to\infty} a_n > 0$ e $b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, então $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = +\infty$.*

*d.2) Se $\{a_n\}$ é limitada e $b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, então $\dfrac{a_n}{b_n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.*

**Prova.** *(a) $\Rightarrow$) Como $\{b_n\}$ é limitada inferiormente, existe um número real $l > 0$ tal que $b_n \geq -l$ para todo $n$ natural. Como $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, dado $M$ positivo, existe $N$ natural tal que $a_n \geq M + l$ para todo $n \geq N$. Logo,*

$$a_n + b_n \geq M + l - l = M, \quad \forall n \geq N.$$

*Portanto, $a_n + b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$.*

*(b) $\Rightarrow$) Como $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ e $\liminf_{n\to\infty} b_n = r > 0$, existe $N_1$ natural tal que $\liminf_{k\geq n} a_n \geq \frac{r}{2}$ para todo $n \geq N_1$. Como $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, dado $M$ positivo, existe $N_2$ natural tal que $a_n > \frac{2M}{r}$ para todo $n \geq N_2$. Disto segue que, para $n \geq N = \max\{N_1, N_2\}$,*

$$a_n b_n \geq \frac{2M}{r}\frac{r}{2} = M, \quad \forall n \geq N.$$

*donde segue o que queríamos.*

*(c) $\Rightarrow$) Se $\{a_n\}$ é infintésima e eventualmente positiva, dado $M$ positivo, seja $N$ natural tal que $0 < a_n < \frac{1}{M}$ para quaisquer $n \geq N$. Logo, $\frac{1}{a_n} > M$ para todos os $n \geq N$, mostrando que $\frac{1}{a_n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$.*

*Reciprocamente, se $\frac{1}{a_n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, dado $\epsilon > 0$, seja $N$ natural tal que $\frac{1}{a_n} > \frac{1}{\epsilon}$ para todo $n \geq N$. Desta forma, $0 < a_n < \epsilon$ para todo $n \geq N$, provando o resultado.*

*(d.1) $\Rightarrow$) De fato, se $\liminf_{n\to\infty} a_n = r > 0$, existe $N_1$ natural tal que $a_n \geq \frac{r}{2}$ para todo $n \geq N_1$. Dado $M$ positivo, seja $N_2$ outro natural tal que $0 < a_n < \frac{r}{2M}$ para todo $n \geq N_2$. Logo, $\frac{a_n}{b_n} > \frac{r}{2}\frac{2M}{r} = M$ para todo $n \geq N = \max\{N_1, N_2\}$, tal que $\frac{a_n}{b_n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$.*

*(d.2) $\Rightarrow$) Seja $L > 0$ tal que $|a_n| \leq L$ para todo $n$ natural. Como $b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, dado $\epsilon > 0$, existe $N$ natural tal que $b_n > \frac{L}{\epsilon}(\frac{1}{b_n} < \frac{\epsilon}{L})$ para todo $n \geq N$. Logo,*

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - 0\right| < L \cdot \frac{\epsilon}{L} = \epsilon, \quad \forall n \geq N,$$

*mostrando que $\frac{a_n}{b_n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.*$\blacksquare$

É importante notar que, se $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ e $b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$, nada podemos afirmar de $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n)$. Neste caso, tudo pode ocorrer! $\{a_n + b_n\}$ pode convergir para qualquer número real, divergir para $+\infty, -\infty$ ou pode oscilar. Vamos ilustrar a situação.

**Exemplo 32.** *Se $a_n = \sqrt{n+1}, b_n = -\sqrt{n}$, para todo n natural, é fácil de ver que $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ e $b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$. Para ver o que ocorre com a sequência $\{a_n + b_n\}$, observe que*

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

*Segue de (d.2) que $\{a_n + b_n\}$ é infinitésima.*

**Exemplo 33.** *Se $a > 1$, então a sequência $\{a_n\}$ dada por $a_n = \frac{a^n}{n}$ diverge para $+\infty$. De fato, basta ver que $a = 1 + h$, com h positivo, e escrever*

$$\frac{a^n}{n} = \frac{(1+h)^n}{n} = \frac{1}{n} + h + (n-1)\frac{h^2}{2!} + s_n.$$

*O resultado segue aplicando (a).*

**Exemplo 34.** *Se $a > 1$, então a sequência $\{a_n\}$ com $a_n = \frac{n!}{a^n}$ diverge para $+\infty$. Com efeito, basta escolher $n_0$ tal que $\frac{n_0}{a} > 2$ e escrever, para $n \geq n_0, a_n = \frac{n_0!}{a^{n_0}} \frac{n!}{n_0!} \frac{1}{a^{n-n_0}}$. Se $r = \frac{n_0!}{a^{n_0}} \frac{n!}{n_0!}$, temos*

$$a_n = r\frac{n(n-1)\cdots(n_0+1)}{a^{n-n_0}} = r2^{n-n_0} + s_n = r(n+1-n_0) + \tilde{s}_n$$

*Novamente, o resultado segue aplicando (a).*

Por fim, algumas outras propriedades que não foram inclusas no teorema são deixadas como exercício ao leitor.

a) Se $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$ e $\{b_n\}$ é limitada superiormente, então $a_n + b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

b) Se $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$ e $\liminf_{n\to\infty} b_n > 0$, então $\lim_{n\to\infty} a_n b_m = -\infty$.

c) Seja $\{a_n\}$ uma sequência com $a_n \neq 0$ para todo n natural. $\{a_n\}$ é eventualmente negativa e $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ se, e somente se, $\frac{1}{a_n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

d) Sejam $\{a_n\}, \{b_n\}$ duas sequências eventualmente negativas com $b_n \neq 0$ para todo n natural.

d.1) Se $\liminf_{n\to\infty} a_n < 0$ e $b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, então $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$.

d.2) Se $\{a_n\}$ é limitada e $b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$, então $\frac{a_n}{b_n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

e) No item (d), analise a situação em que $\{a_n\}$ é eventualmente positiva e $\{b_n\}$ é eventualmente negativa.