Exercício 1

a.)

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = -1.(-1) + 2.2 = 1 + 4 = 5.$$

■

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = -1.4 + 2.6 = -4 + 12 = 8.$$

■

Por fim, basta dividirmos um resultado pelo outro:

$$\frac{u.v}{u.u} = \frac{8}{5}$$

b.)

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -5 \end{bmatrix} = 3.3 + 1.1 + 5.5 = 9 + 1 + 25 = 35$$

■

$$\begin{bmatrix} -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = 3.6 + (-1)(-2) + (-5)(3) = 18 + 2 - 15 = 5$$

■

Como antes, resta dividir os dois resultados:

$$\frac{x.w}{w.w} = \frac{5}{35} = \frac{1}{7}$$

■

c.) Agora, é simplesmente dividir cada valor da matriz por 35 para obtermos o valor em questão:

$$\frac{w}{w.w} = \begin{bmatrix} \frac{3}{35} \\ \frac{-1}{35} \\ \frac{-5}{35} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{35} \\ \frac{-1}{35} \\ \frac{-1}{7} \end{bmatrix}$$

d.) Finalmente, primeiro calculamos a divisão e, em seguida, dividimos o vetor x pelo valor obtido. Segue que

$$\frac{1}{343} = \frac{x.w}{x.x}$$

tal que

$$\frac{1}{343}.x = \begin{bmatrix} \frac{6}{343} \\ \frac{-2}{343} \\ \frac{3}{343} \end{bmatrix}$$

■

Exercício 2

a.) É preciso normalizar o vetor para encontrar o seu unitário, ou seja, dividimos ele por "seu tamanho". Com efeito, temos $v.v = -30. - 30 + 40.40 = 2500$ e $\sqrt{v.v} = 50$. Assim, segue que o versor de v é:

$$\begin{bmatrix} \frac{-30}{50} \\ \frac{40}{50} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

b.) Agora, calculando a norma desse vetor, obtém-se $v.v = -6.(-6) + 4.4 + (-3)(-3) = 36 + 16 + 9 = 61$, ou seja, o vetor unitário é dado por:

$$\begin{bmatrix} \frac{-6}{\sqrt{61}} \\ \frac{4}{\sqrt{61}} \\ \frac{-3}{\sqrt{61}} \end{bmatrix}$$

Exercício 3

Calculamos a raíz da diferença para obter a distância, i.e.,

$$d(x, u) = \sqrt{(u_1 - x_1)^2 + (u_2 - x_2)^2} = \sqrt{121 + 25} = \sqrt{146}$$

Assim, concluímos que a distância entre os vetores é $\sqrt{146}$.

Exercício Qualquer

Mostre que se $< u, v >= 0$ para todo v, então u = 0

Prova: Suponha, primeiramente, que $\langle u, v\rangle = 0$ para todo v no espaço. Em particular, como é válido para todo v, tome v = u. Por hipótese, $\langle u, u\rangle = 0$. Portanto, u=0. ■

Exercício 8

Suponha que y é ortogonal a u e a v, ou seja,

$$\langle y, u\rangle = \langle y, v\rangle = 0.$$

Logo, o produto

$$\langle y, u + v\rangle = \langle y, u\rangle + \langle y, v\rangle = 0 + 0 = 0.$$

Implica que y é ortogonal a u + v. ■

Exercício 10

c.) Utilizando o item b, temos, para quaisquer indíces i, j:

$$\langle f(e_i), f(e_j)\rangle = \langle e_i, e_j\rangle = 0, i \neq j \quad \& \langle f(e_i), f(e_i)\rangle = \langle e_i, e_i\rangle = 1.$$

Para ver que é realmente uma base, considere o conjunto $\mathcal{B} = \{f(e_1), \cdots, f(e_n)\}$ e suponha que

$$0 = \alpha_1 f(e_1) + \cdots + \alpha_n f(e_n).$$

Então, segue que para algum i,

$$0 = \langle f(e_i), \alpha_1 f(e_1) + \cdots + \alpha_n f(e_n)\rangle = \langle f(e_i), \alpha_1 f(e_1)\rangle + \cdots + \langle f(e_i), \alpha_i f(e_i)\rangle + \cdots + \langle f(e_i), \alpha_n f(e_n)\rangle =$$

$$\langle f(e_i), \alpha_i f(e_i)\rangle = \alpha_i \langle f(e_i), f(e_i)\rangle = \alpha_i.$$

Como i era arbitrário, vale que $\alpha_i = 0, \forall 1 \leq i \leq n$, donde concluímos que $\mathcal{B}$ é uma independência linear. Portanto, forma uma base. ■

d.) Utilzando o item c, obtemos

$$f(v) = x_1 f(e_1) + \cdots + x_n f(e_n).$$

tal que

$$\langle f(v), u_i\rangle = \langle f(v), f(e_i)\rangle = \langle x_1 f(e_1), f(e_i)\rangle + \cdots + \langle x_n, f(e_n)\rangle =$$

$$\langle x_i f(e_i), f(e_i)\rangle = x_i$$

e.) Não entendi :(.

Exercício 11

Suponha que $A : E \to E$ e $B : E \to E$ são transformações lineares auto-adjuntas, ou seja, $\langle Au, v\rangle = \langle u, Av\rangle$ e $\langle Bu, v\rangle = \langle u, Bv\rangle$. Além disso, por hipótese, exigimos que $\langle Au, u\rangle = \langle Bu, u\rangle$. Com isso, temos:

$$\langle Au, u\rangle = \langle Bu, u\rangle \Rightarrow \langle Au - Bu, u\rangle = 0 \Rightarrow \langle (A - B)u, u\rangle = 0.$$

Como A e B são autoadjuntos, segue da última igualdade que A - B = 0. Portanto, A = B. ■

Exercício 12

Seja $A : E \to E$ auto-adjunto e que $A^k v = 0$, tal que $\left\langle A^k v, v\right\rangle = 0$. Sendo A auto-adjunto, obtemos

$$0 = \left\langle A^k v, v\right\rangle = \left\langle A(A^{k-1}v), v\right\rangle \Rightarrow A^{k-1} = 0$$

Agora, temos

$$0 = \left\langle A^{k-1} v, v\right\rangle = \left\langle A(A^{k-2}v), v\right\rangle \Rightarrow A^{k-2} = 0$$

$$\vdots$$

$$0 = \left\langle A^2 v, v\right\rangle = \langle A(Av), v\rangle \Rightarrow A = 0$$

Portanto, Av = 0. ■

Exercício 2.6

Começando pela implicação de que se A é normal, então BC = CB, vamos computar $\langle Au, Av\rangle$, $\langle A * u, A * v\rangle$ e comparar os resultados. Com efeito,

$$\langle Au, Av\rangle = \langle (B + C)u, (B + C)v\rangle = \langle Bu, Bv\rangle + \langle Bu, Cv\rangle + \langle Cu, Bv\rangle + \langle Cu, Cv\rangle =$$

$$\left\langle B^2 u, v\right\rangle + \langle (BC - CB)u, v\rangle - \left\langle C^2, v\right\rangle$$

Repetindo o mesmo para o outro produto,

$$\langle A^* u, A^* v\rangle = \langle (B^* + C^*)u, (B^* + C^*)v\rangle = \left\langle B^2 u, v\right\rangle + \langle (CB - BC)u, v\rangle - \left\langle C^2, v\right\rangle$$

Agora, observe que $\langle Au, Av\rangle - \langle A^* u, A^* v\rangle = 0$. Logo,

$$\left\langle B^2 u, v\right\rangle + \langle (BC - CB)u, v\rangle - \left\langle C^2, v\right\rangle - \left\langle B^2 u, v\right\rangle - \langle (BC - CB)u, v\rangle + \left\langle C^2, v\right\rangle =$$

$$2\,\langle (BC - CB)u, v\rangle = 0 \Rightarrow \langle (BC - CB)u, v\rangle = 0.$$

Como u e v são arbitrários, a única alternativa é que BC - CB = 0. Portanto, BC = CB.

Por outro lado, caso BC = CB, utilizando as expansões obtidas acima, temos:

$$\langle A^* u, A^* v\rangle = \left\langle B^2 u, v\right\rangle + \langle (CB - BC)u, v\rangle - \left\langle C^2 u, v\right\rangle = \left\langle B^2 u, v\right\rangle + \langle (BC - CB)u, v\rangle - \left\langle C^2 u, v\right\rangle = \langle Au, Av\rangle$$

Portanto, A é normal. ■

Exercício 2.7

Supondo que A é ortogonal, segue que $A^T = A^{-1}$. Além disso, suponha que A é triangular superior, ou seja,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Nessas condições, as contas mostram que a transposta dessa matriz será a versão triangular superior dela mesma, ou seja, $Id = AA^{-1}$ é o produto de duas matrizes triangulares, uma superior e outra inferior. Assim, um elemento da matriz produto será igual a

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^{n} a_{il}a_{lj}.$$

Com isso, note que, se $i \neq j$, então ou $a_{ij} = 0$, ou $a_{ji} = 0$. Logo, os únicos elementos que são não-nulos têm a forma c_{ii}. Porém, $c_{ii} = 1$, pois $Id = AA^{-1}$, de modo que

$$1 = \sum_{l=1}^{n} a_{il}a_{li} = \sum_{l=1}^{n} a_{ll}a_{ll} = \sum_{l=1}^{n} a_{ll}^2$$

Em outras palavras, mostramos duas coisas: A primeira é que todos os elementos que não possuem indíces iguais são nulos (Caso contrário, a matriz não seria ortogonal, pois seu produto pela transposta não daria a identidade). A segunda é que, como os únicos elementos restantes estão na diagonal, o produto dela pela transposta é formado por apenas coeficientes de A elevados ao quadrado e todos eles valem 1. Portanto, a matriz A é diagonal e seu quadrado é a identidade.

Apêndice: Base ortonormal

Encontre uma base ortonormal a partir de $\mathcal{B} = \{(1,1),(0,1)\}$ **de** $\mathbb{R}^2$.

Solução: Obtemos o primeiro vetor fazendo

$$c_1 = \frac{b_1}{||b_1||} = \frac{(1,1)}{\sqrt{\langle b_1, b_1\rangle}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

temos nosso primeiro vetor da base ortonormal. Com isso, obtemos o segundo pela fórmula

$$c_2' = b_2 - \sum_{i=1}^{1} \frac{\langle b_2, c_i\rangle}{\langle c_i, c_i\rangle} c_i = (0,1) - \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

Agora, normalizamos este vetor, notando que sua norma é $\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, tal que o segundo vetor da nossa base ortonormal será

$$c_2 = \frac{c_2'}{||c_2'||} = \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Portanto, a base obtida é $\mathcal{O} = ((\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), (-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}})$.Resta conferir se é de fato ortonormal. Com efeito,

$$\langle c_1, c_2\rangle = -1 + 1 = 0,$$

$$\langle c_1, c_1\rangle = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1,$$

$$\langle c_2, c_2\rangle = \sqrt{\frac{2}{4} + \frac{2}{4}} = 1.$$

■