



UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS E  
COMPUTACIONAIS - ICMC

**Notas de Aula de Análise**

**Renan Wenzel - 11169472**

**Alexandre Nolasco de Carvalho - andcarva@icmc.usp.br**

17 de março de 2023

---

## Conteúdo

<b>1</b>	<b>Aula 01 - 13/03/2023</b>	<b>3</b>
1.1	Motivação . . . . .	3
1.2	Os Números Naturais . . . . .	3
1.3	Números Inteiros e Racionais . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Aula 02 - 15/03/2023</b>	<b>4</b>
2.1	Motivações . . . . .	4
2.2	Propriedades de $\mathbb{Q}$ e sua Ordem . . . . .	5
2.3	Incompletude de $\mathbb{Q}$ . . . . .	6
2.4	Os Números Reais ( $\mathbb{R}$ ) . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Aula 03 - 17/03/2023</b>	<b>7</b>
3.1	Motivações . . . . .	7

---

# 1 Aula 01 - 13/03/2023

## 1.1 Motivação

- Relembrar sistemas básicos da matemática;
- Relembrar propriedades básicas das principais estruturas  $(\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q})$ .

## 1.2 Os Números Naturais

Os números naturais são os que utilizamos para contar objetos, e são caracterizados pelos Axiomas de Peano:

- 1) Todo número natural tem um único sucessor;
- 2) Números naturais diferentes têm sucessores diferentes;
- 3) Existe um único número natural, zero (0), que não é sucessor de nenhum número natural.
- 4) Seja  $X \subseteq \mathbb{N}$  tal que  $0 \in X$  e, se  $n$  pertence a  $X$ , seu sucessor  $n+1$  também pertence a  $X$ . Então,  $X = \mathbb{N}$ . (Propriedade de Indução).

**Definição.** Definimos a adição por:  $n + 0 = n, n \in \mathbb{N}$ , e  $n + (p + 1) = (n + p) + 1, p \in \mathbb{N}$ . Além disso, a multiplicação é dada por:  $n \cdot 0 = 0, n \cdot (p + 1) = n \cdot p + n, n, p \in \mathbb{N}$ . Ou seja, sabendo somar ou multiplicar um número, sabemos somar e multiplicar seu sucessor.

Com relação ao quarto axioma, ele leva este nome porque um dos métodos de demonstração, conhecido como prova por indução. Nele, mostramos um caso base, o caso 0, e utilizamos a segunda parte para provar que, se um resultado vale para o caso  $n$ , ele vale para  $n+1$ , portanto sendo verdadeiro para todos os naturais.

**Lema.** Para todo  $n$  natural,  $1 + n = n + 1$ .

**Prova.** Note que o resultado é verdadeiro para  $n = 0$ . Suponha que o resultado seja válido para  $n = k$  e mostremos que vale também para  $n = k+1$ . Com efeito, segue pela propriedade de indução e pela definição de soma que

$$1 + (k + 1) = (1 + k) + 1 = (k + 1) + 1.$$

Segue que o resultado vale para todo  $n$  natural. ■

A seguir, mostramos a associatividade e a comutatividade, respectivamente, das operações nos naturais.

**Lema.** Para todo  $n, p, r$  naturais,  $(n + p) + r = n + (p + r)$ .

**Prova.** Note que o resultado é válido trivialmente para  $r = 0$  e  $r = 1$ . Suponha que o resultado seja válido para  $r = k$  e mostremos que vale também para  $r = k + 1$ . Com efeito, pela hipótese de indução e definição de adição,

$$n + (p + (k + 1)) = n + ((p + k) + 1) = (n + (p + k)) + 1 = ((n + p) + k) + 1 = (n + p) + (k + 1).$$

Segue o resultado por indução. ■

**Lema.** Para todo  $n, p$  naturais,  $n + p = p + n$ .

**Prova.** Observe que já mostramos o caso em que  $p = 1$ . Suponha que o resultado vale para  $p = k$  e vamos mostrar o caso  $p = k + 1$ . De fato, pela hipótese de indução e definição de adição, junto do lema de associatividade, temos

$$n + (k + 1) = (n + k) + 1 = (k + n) + 1 = 1 + (k + n) = (1 + k) + n = (k + 1) + n.$$

Por indução, segue que isso vale para todo natural  $n$ . ■

**Definição.** Definimos uma ordem em  $\mathbb{N}$  colocando que  $m \leq n$  se existe  $p$  natural tal que  $n = m + p$ . □

---

A relação de ordem possui as seguintes propriedades:

- i) Reflexiva: Para todo  $n$  natural,  $n \leq n$ ;
- ii) Antissimétrica: Se  $m \leq n$  e  $n \leq m$ , então  $m = n$ ;
- iii) Transitiva: Se  $m \leq n$  e  $n \leq p$ , então  $m \leq p$ ;
- i) Dados  $m, n$  naturais, temos ou  $m \leq n$ , ou  $n \leq m$ ;
- v) Se  $m \leq n$  e  $p$  é um natural, então  $n + p \leq n$  e  $mp \leq np$

### 1.3 Números Inteiros e Racionais

Usualmente, construímos os inteiros a partir dos naturais tomando os pares ordenados de números naturais com a seguinte identificação  $(a, b) \sim (c, d)$  se  $a + d = b + c$ . Assim, podemos representar

$$\mathbb{N} = \{(0, 0), (1, 0), (2, 0), (3, 0), \dots\}, \quad -\mathbb{N}^* = \{\dots, (0, 3), (0, 2), (0, 1)\}.$$

Tomar o sucessor será somar 1 à primeira coordenada e, para os inteiros negativos, voltar a identificar  $(1, n)$  com  $(0, n-1)$ .

Os números racionais são construídos tomando o conjunto  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$  e identificando os pares  $(a, b) \sim (c, d)$  para os quais  $ad = bc$ . Representamos um par  $(a, b)$  neste conjunto por  $\frac{a}{b}$ . A soma e o produto em  $\mathbb{Q}$  são dados, respectivamente, por:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} + \frac{c}{d} &:= \frac{ad + bc}{bd} \\ \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} &:= \frac{ac}{bd}. \end{aligned}$$

Chamamos a adição a operação que a cada par  $(x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$  associa sua soma  $x + y \in \mathbb{Q}$  e chamamos multiplicação a operação que a cada par  $(x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$  associa seu produto  $x \cdot y \in \mathbb{Q}$ . A terna  $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$  satisfaz as propriedades de um corpo, i.e.,

$$(A1) (x + y) + z = x + (y + z), \quad \forall x, y, z \in \mathbb{Q}$$

$$(A2) x + y = y + x, \quad \forall x, y \in \mathbb{Q}$$

$$(A3) \exists 0 \in \mathbb{Q} : x + 0 = x, \quad \forall x \in \mathbb{Q}$$

$$(A4) \forall x \in \mathbb{Q}, \exists y \in \mathbb{Q} (y = -x) : x + y = 0$$

$$(M1) (xy)z = x(yz), \quad \forall x, y, z \in \mathbb{Q}$$

$$(M2) xy = yx, \quad x, y \in \mathbb{Q}$$

$$(M3) \exists 1 \in \mathbb{Q} : 1 \cdot x = x \cdot 1 = x, \quad \forall x \in \mathbb{Q}$$

$$(M4) \forall x \in \mathbb{Q}^*, \exists y = \frac{1}{x} \in \mathbb{Q} : x \cdot y = 1$$

$$(D) x(y + z) = xy + xz, \quad \forall x, y, z \in \mathbb{Q}.$$

## 2 Aula 02 - 15/03/2023

### 2.1 Motivações

- Propriedades básicas dos racionais;
- Construção do corpo dos reais a partir dos racionais;
- Cortes de Dedekind.

---

## 2.2 Propriedades de $\mathbb{Q}$ e sua Ordem

Com as 9 propriedades de corpo, conseguimos obter novas regras nos racionais, como a famosa lei do cancelamento:

**Proposição.** Em  $\mathbb{Q}$ , vale

$$x + z = y + z \Rightarrow x = y$$

e, se  $z \neq 0$ ,

$$xz = yz \Rightarrow x = y$$

**Prova.**

$$x = x + 0 = x + (z + (-z)) = (x + z) + (-z) = (y + z) + (-z) = y + (z + (-z)) = y + 0 = y$$

$$x = x.1 = x(z.\frac{1}{z}) = (xz).\frac{1}{z} = (yz).\frac{1}{z} = y(z.\frac{1}{z}) = y.1 = y. \blacksquare$$

**Proposição.** Os elementos neutros da adição e multiplicação são únicos. Os elementos oposto e inverso também o são.

**Proposição.** Para todo  $x$  racional,  $x.0 = 0$ .

**Proposição.** Para todo  $x$  racional,  $-x = (-1)x$ .

A maioria desses resultados acima seguem diretamente da lei do cancelamento. Suas demonstrações ficam como exercício.

**Definição.** Diremos que

$$\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} = \begin{cases} \text{n\~ao-negativo,} & ab \in \mathbb{N} \\ \text{positivo,} & ab \in \mathbb{N}, a \neq 0 \end{cases}$$

e diremos que

$$\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} = \begin{cases} \text{n\~ao-positivo,} & \frac{a}{b} \text{ n\~ao for positivo} \\ \text{negativo,} & \frac{a}{b} \text{ n\~ao for n\~ao-negativo.} \end{cases} \quad \square$$

**Definição.** Sejam  $x, y$  racionais. Diremos que  $x$  é menor e que  $y$  escrevemos “ $x < y$ ” se existir  $t$  racional positivo tal que

$$y = x + t.$$

Neste mesmo caso, podemos dizer que  $y$  é maior que  $x$ , escrevendo “ $x > y$ ”. Em particular, temos  $x > 0$  se  $x$  for positivo e  $x < 0$  se  $x$  for negativo.

Ademais, se  $x < y$  ou  $x = y$ , escrevemos “ $x \leq y$ ” se existir racional  $t$  não-negativo tal que

$$y = x + t$$

e, se  $x > y$  ou  $x = y$ , escrevemos “ $x \geq y$ ” caso exista racional  $t$  não-positivo com

$$y = x + t. \square$$

A quádrupla  $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$  satisfaz as propriedades de um corpo ordenado, i.e.,

- (O1)  $x \leq x \forall x \in \mathbb{Q}$ ;
- (O2)  $x \leq y$  e  $y \leq x \Rightarrow x = y \forall x, y \in \mathbb{Q}$ ;
- (O3)  $x \leq y, y \leq z \Rightarrow x \leq z \forall x, y, z \in \mathbb{Q}$ ;
- (O4)  $\forall x, y \in \mathbb{Q}, x \leq y$  ou  $y \leq x$ ;
- (OA)  $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$ ;
- (OM)  $x \leq y$  e  $z \geq 0 \Rightarrow xz \leq yz$ .

---

**Proposição.** Para quaisquer  $x, y, z, w$  no corpo ordenado dos racionais, valem

- i.)  $x < y \iff x + z < y + z$
- ii.)  $z > 0 \iff \frac{1}{z} > 0$
- iii.)  $z > 0 \iff -z < 0$
- iv.)  $z > 0 \Rightarrow x < y \iff xz < yz$
- v.)  $z < 0 \Rightarrow x < y \iff xz > yz$
- vi.)  $xz < yw \iff \begin{cases} 0 \leq x < y \\ 0 \leq z < w \end{cases}$
- vii.)  $0 < x < y \iff 0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$
- viii.)  $x < y$  ou  $x = y$  ou  $x > y$
- ix.)  $xy = 0 \iff x = 0$  ou  $y = 0$ .
- x.)  $\left. \begin{matrix} x \leq y \\ z \leq w \end{matrix} \right\} \Rightarrow x + z \leq y + w$
- xi.)  $\left. \begin{matrix} 0 \leq x \leq y \\ 0 \leq z \leq w \end{matrix} \right\} \Rightarrow xz \leq yw$ .

## 2.3 Incompletude de $\mathbb{Q}$

Os números racionais podem ser representados por pontos em uma reta horizontal ordenada, chamada reta real. Se  $P$  for a representação de um número racional  $x$ , diremos que  $x$  é a abscissa de  $P$ . Note que nem todo ponto da reta real é racional. Para isso, considere um quadrado de lado 1 e diagonal  $d$ . Pelo Teorema de Pitágoras,  $d^2 = 1^2 + 1^2 = 2$ . Agora, seja  $P$  a intersecção do eixo  $x$  com a circunferência de centro em 0 e raio  $d$ . Mostremos que  $P$  é um ponto da reta com abscissa  $x \notin \mathbb{Q}$ .

**Proposição.** Seja  $a$  um inteiro. Então, se  $a$  for ímpar, seu quadrado também será. Além disso, se  $a$  for par, seu quadrado também é par.

**Proposição.** A equação  $x^2 = 2$  não admite solução racional.

A ideia da prova é escrever um  $x$  na forma de fração e chegar na contradição de que tanto o numerador quanto o denominador serão números pares. Com isso, conclui-se que não existe racional irredutível com quadrado igual a 2, portanto não existe racional satisfazendo a equação.

Essa discussão mostra que existem vãos na “reta” dos racionais, requerindo a adoção de um novo corpo. Essa é a principal motivação por trás dos números reais, “preencher” os buracos deixados pelos racionais.

**Proposição.** (Exercício.) Sejam  $p_1, \dots, p_n$  números primos distintos. Então, a equação  $x^2 = p_1 p_2 \dots p_n$  não tem solução racional.

Vimos que os números racionais com a sua adição, multiplicação e relação de ordem é um corpo ordenado. Nos interessamos, também, pelo corpo dos reais e dos racionais  $(\mathbb{R}, \mathbb{Q})$ . De forma abstrata, um corpo é um conjunto não-vazio  $\mathbb{F}$  em que estão definidas duas operações binárias

$$+ : \mathbb{F} \times \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}, \quad (x, y) \mapsto x + y$$

e

$$\cdot : \mathbb{F} \times \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}, \quad (x, y) \mapsto xy$$

em que valem as oito propriedades vistas previamente para a definição das operações em  $\mathbb{Q}$ . Se, ainda por cima, no corpo  $\mathbb{F}$  está definida uma ordem com propriedades análogas às vistas para a quádrupla  $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ , diremos que  $(\mathbb{F}, +, \cdot, \leq)$  é um corpo ordenado.

---

**Definição.** Diremos que um subconjunto  $A$  de um corpo  $\mathbb{F}$  ordenado é limitado superiormente se existe um  $L$  neste corpo tal que  $a \leq L$  para todo  $a$  de  $A$ .

Definimos para um subconjunto limitado superiormente um número  $\sup(A) \in \mathbb{F}$  como o menor limitante superior de  $A$ , i.e., se  $a \leq \sup(A)$  para todo  $a$  de  $A$  e se existe  $f \in \mathbb{F}$  com  $f < \sup(A)$ , então existe um  $a$  em  $A$  com  $f < a$ .

Por fim, diremos que um corpo ordenado é completo se todo subconjunto limitado superiormente possui supremo.  $\square$

Nem todo subconjunto limitado superiormente de  $\mathbb{Q}$  tem supremo, ou seja,  $\mathbb{Q}$  não é completo.

## 2.4 Os Números Reais ( $\mathbb{R}$ )

A ideia que iremos usar para construir o conjunto dos reais é que o conjunto dos números reais preenche toda a reta real. Os Elementos de  $\mathbb{R}$  serão os subconjuntos de  $\mathbb{Q}$  à esquerda de um ponto da reta real e serão chamados de cortes.

**Definição.** Um corte é um subconjunto  $\alpha \subsetneq \mathbb{Q}$  com as seguintes propriedades:

- i)  $\alpha \neq \emptyset$  e  $\alpha \neq \mathbb{Q}$ ;
- ii) Se  $p \in \alpha$  e  $q$  é um racional com  $q < p$ , então  $q \in \alpha$  (todos os racionais à esquerda de um elemento de  $\alpha$  estão em  $\alpha$ );
- iii) Se  $p \in \alpha$ , existe um  $r \in \alpha$  com  $p < r$  ( $\alpha$  não tem um maior elemento).  $\square$

Essa ideia foi proposta inicialmente por Julius Wilhelm Richard Dedekind, um matemático alemão, em 1872, com o objetivo de encontrar uma explicação e construção elementar para os números reais.

**Exemplo 1.** Se  $q$  é um racional, definimos  $q^* = \{r \in \mathbb{Q} : r < q\}$ . Então,  $q^*$  é um corte que chamamos de racional. Os cortes que não são desse tipo se chamam cortes irracionais.

**Exemplo 2.**  $\sqrt{2} = \{q \in \mathbb{Q} : q^2 < 2\} \cup \{q \in \mathbb{Q} : q < 0\}$  é um corte irracional.

Observe que se  $\alpha$  é um corte,  $p$  é um ponto dele e  $q$  não é, então  $p < q$ . Além disso, se  $r$  pertence a  $\alpha$  e  $r < s$ , então  $s$  não pertence ao corte.

**Definição.** Diremos que  $\alpha < \beta$ , em que  $\alpha$  e  $\beta$  são cortes, se  $\alpha \subsetneq \beta$ .

**Proposição.** Se  $\alpha, \beta, \gamma$  são cortes,

- i)  $\alpha < \beta$  e  $\beta < \gamma$  implica que  $\alpha < \gamma$ ;
- ii) Exatamente uma das seguintes relações é válida:  $\alpha < \beta$  ou  $\alpha = \beta$  ou  $\beta < \alpha$
- iii) Todo subconjunto não-vazio e limitado superiormente de  $\mathbb{R}$  tem supremo.

## 3 Aula 03 - 17/03/2023

### 3.1 Motivações

- a