UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS E COMPUTACIONAIS - ICMC

Notas de Física II

Renan Wenzel - 11169472

Professor - Luis Gustavo Marcassa
E-mail: marcassa@ifsc.usp.br

21 de agosto de 2023

Disclaimer

Essas notas não possuem relação com professor algum.
Qualquer erro é responsabilidade solene do autor.
Caso julgue necessário, contatar: renan.wenzel.rw@gmail.com

Conteúdo

0 Aula 00 - 07/08/2023

Avisos sobre o curso (Ler e baixar o pdf no e-disciplinas!!!!);

1 Aula 01 - 09/08/2023

1.1 Motivações

- Ângulos, velocidade angular e aceleração angular;
- Energia em sistemas com rotação.

1.2 Rotação

Antes de qualquer coisa, convencionamos o sentido antihorário como aquele em que $\Delta\theta > 0$ e o sentido horário como o que $\Delta\theta < 0$. Uma volta completa em torno do círculo é dada pela versão com 2π da fórmula do arco de círculo $\Delta S_i = r_i \Delta\theta = 2\pi r_i$ e, com isso, a variação do ângulo em uma volta completa é dada por

$$\Delta\theta = \frac{S_i}{r_i} = \frac{2\pi r_i}{r_i} = 2\pi rad.$$

Um dos assuntos de importância para nós é o estudo da variação temporal do ângulo. Definimos, nessa lógica, a velocidade angular média por

$$\omega_{med} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}.$$

De modo análogo ao que vimos com cinemática, existe também a velocidade angular instantânea, obtida tomando o limite:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}.$$

Observa-se de cara que, se $\omega > 0, \theta$ aumenta e, se $\omega < 0, \theta$ diminui. Assim como antes, precisamos ver, também, a unidade. Em cinemática, a unidade de velocidade era metro por segundo. Dessa vez, já que o ângulo move-se em radianos, mas há outras unidades, como a revolução e o grau. Logo, as unidades de ω podem ser $[\omega] = \frac{radianos}{tempo} = \frac{rad}{s}, \frac{graus}{s}, \frac{\text{revolução}}{s}$, em que $1\text{revolução} = 2\pi rad = 360\deg$

Por exemplo, se um CD roda a 3000rpm, pode-se expressar essa velocidade de rotação como

$$\omega = 3000rpm = \frac{3000 \cdot 2\pi}{60} = \frac{600}{6}\pi = 100\pi\frac{rad}{s}.$$

Analogamente, é possível analisar a variação da própria velocidade angular com o tempo, resultando na chamada acelerações angulares média e instantânea:

$$\alpha_{med} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \quad \alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\theta}{dt}\right) = \frac{d^2\theta}{dt^2}.$$

A unidade dessa grandeza, novamente, similar à versão linear dela, será dada em $[\alpha] = \frac{radiano}{s^2}$, ou $[\alpha] = \frac{grau}{s^2}$, etc. Nessas situações todas, se $\alpha > 0, \omega$ aumenta e, se $\alpha < 0, \omega$ diminui.

Agora, suponha que α é constante. Todos os processos de movimento uniformemente acelerado são válidos aqui também:

Exemplo 1. *Suponha que há um CD que começa no repouso. Ele começa a girar, indo de 0 a 500rpm em 5.5s. Pergunta-se:*

a) *Quanto vale α?*

b) *Quantas voltas o CD dá em 5.5s?*

c) *Qual é a distância percorrida por uma ponta a 6cm do eixo de rotação?*

	Variáveis angulares	**Variáveis escalares**
Posição	$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{\alpha t^2}{2}$	$s(t) = R\theta(t)$
Velocidade	$\omega(t) = \omega_0 + \alpha t = \frac{d\theta}{dt}$	$v(t) = v_0 + at = \frac{dx}{dt}$
Aceleração	$\alpha(t) = \frac{d\omega(t)}{dt} = \frac{d^2\theta(t)}{dt^2}$	$\lvert\vec{a}(t)\rvert = \frac{dv(t)}{dt} = R\alpha(t), \quad \lvert\vec{a}_{cp}\rvert = \frac{v^2}{R}$
Torricelli	$\omega^2(t) = \omega_0^2 + 2\alpha\Delta\theta$	$v^2 = v_0^2 + 2a\Delta s.$

Tabela 1: Resumo movimento circular.

Soluções:

a) Temos $\omega(0) = 0, \omega(5.5) = 500rpm$. Segue que

$$\omega(t) = \omega_0 + \alpha t \Rightarrow \alpha = \frac{\omega(t)}{t} = \frac{500 \cdot 2\pi}{5.5 \cdot 60} \approx 9.52\frac{rad}{s^2}$$

b) Aplicamos o Torricelli angular com os dados que temos:

$$\omega^2 = 2\alpha\Delta\theta \Rightarrow \delta\theta = \frac{\omega^2}{2\alpha} \approx 144rad \Rightarrow \frac{144}{2\pi}rad \approx 23rota\c{c}\tilde{o}es.$$

c) Por fim, multiplicando a variação do ângulo pelo raio, obtemos

$$\Delta S_i = r\Delta\theta = 6 \cdot 10^{-2} \cdot 144 \approx 8.65m.$$

Olhando de forma cautelosa a fórmula de arco de circulo, podemos derivá-la com respeito ao tempo utilizando o que vimos até agora:

$$\frac{dS_i}{dt} = V_t = r_i\frac{d\theta}{dt} = r_i\omega.$$

Essa derivação resulta em uma velocidade linear, que também pode ser derivada a fim de obter uma aceleração linear

$$\frac{dV_t}{dt} = r_i\frac{d\omega}{dt} \Rightarrow a_t = r_i\alpha.$$

Note a relação entre as duas acelerações que obtivemos, $a_c = \frac{V_t^2}{r_i} = \frac{r_i^2\omega^2}{r_i} = r_i\omega^2$.

1.3 Energia Cinética de Rotação

A energia cinética, como vista previamente, é dada por

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2}m_i v_i^2.$$

Agora, imagine um corpo discreto (formado por vários pontos). Somemos as energias deles, tal que a energia cinética total é

$$\mathcal{K}_T = \sum \frac{1}{2}m_i v_i^2.$$

Mas, sabemos que $v_i = r_i\omega$, tal que

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2}\sum m_i r_i^2\omega^2 = \frac{1}{2}\left[\sum m_i r_i^2\right]\omega^2$$

Chamemos o termo em colchete de momento de inércia, denotado por $I := \sum m_i r_i^2 = \sum I_i$. Logo,

$$\boxed{\mathcal{K}_T = \frac{1}{2}I\omega^2.}$$

2 Aula 02 - 10/08/2023

2.1 Motivações

- Momento de Inércia

2.2 Distribuição Contínua de Massa

No caso de distribuições discretas de massa, vimos que o momento de inércia é dado por

$$I = \sum_i m_i r_i^2.$$

No entanto, muitas situações do mundo precisam que tratemos a distribuição de massa como algo único, uma quantidade contínua. Para isso, passamos de somar cada massa para uma integral com respeito a ela:

$$\boxed{I = \int r^2 dm.}$$

Para o caso de uma barra, por exemplo, na qual a distribuição de massa é dada por

$$\lambda = \frac{M}{L},$$

segue que $dm = \lambda dx \Rightarrow dI = x^2 dm = x^2 \lambda dx$. Portanto,

$$I = \lambda \int x^2 dx = \lambda \frac{x^3}{3}.$$

Por exemplo, se o tamanho da barra é 1 e o eixo de rotação está em uma extremidade, o momento de inércia será

$$I = \lambda \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} M L^2.$$

Há outros casos importantes que devem ser tratados. O primeiro deles é o eixo central, no qual o eixo de rotação é posicionado na metade do tamanho da barra. Assim,

$$I = \lambda \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x^2 dx = \lambda \frac{x^3}{3}\bigg|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \lambda \frac{L^3}{12} = \frac{ML^2}{12}.$$

O outro engloba a situação em que toda a massa na mesma distância. Neste caso, $\lambda = \frac{M}{2\pi R}$

$$I = R^2 \int dm = MR^2,$$

que também pode ser obtido fazendo uma integral com respeito ao ângulo θ:

$$I = R^2 \lambda \int_0^{2\pi} R d\theta = R^2 \lambda R \times 2\pi = MR^2.$$

Por fim, é importante olhar o caso dos discos. Discos consistem de dois círculos, um maior e outro menor dentro dele. Chamaremos de R o raio do maior e de r o do menor. Para eles, há uma distribuição de massa $\sigma = \frac{M}{\pi R^2}$, de maneira que o diferencial de massa será

$$dm = 2\pi r dr \sigma.$$

Com isso, conseguimos encontrar que o momento de inércia é

$$I = \int_0^R 2\pi\sigma r^3 dr = 2\pi\sigma \frac{\pi^4}{4}\bigg|_0^R = \frac{1}{2} MR^2$$

3 Aula 03 - 16/08/2023

3.1 Motivações

- Disco com buraco;
- Rodando disco e cilindro em torno do plano.

3.2 Momento de Inércia em um Disco

Vamos considerar um disco de raio R_2 que contém dentro de si um buraco de raio R_1. Nisso, consideramos o momento de inércia do disco inteiro como

$$I = I^+ + I^-.$$

Aqui, I^+ desconsidera a existência do buraco, ou seja, tem valor

$$I^+ = \frac{\pi R_2^2 \sigma R_2^2}{2} = \frac{1}{2} M^+ R_2^2$$

e o valor de I^- vale

$$I^- = \frac{1}{2} M^- R_1^2 = \frac{\pi R_1^2}{2} \sigma R_1^2.$$

Assim, considerando o valor total, obtivemos o mesmo resultado que o de antes:

$$I = \frac{\pi \sigma}{2}(R_2^4 - R_1^4).$$

Em particular, a densidade de massa após o buraco ser feito, σ^*, valerá

$$\sigma^* = \frac{M}{\pi(R_2^2 - R_1^2)},$$

de forma que, através de $I = \frac{\pi\sigma^*}{2}(R_2^4 - R_1^4$, obtemos

$$I = \frac{\pi M}{2} \frac{(R_2^2 - R_1^2)(R_2^2 + R_1^2)}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} = \frac{M}{2}(R_2^2 + R_1^2).$$

Agora, suponha que deixamos um disco girar em torno de um eixo com velocidade ω. Como podemos descrever esse sistema e seu momento de inércia? Faremos uso do Teorema dos Eixos Paralelos. Apesar de não conhecermos o momento de inércia, sabemos que em algum ponto, encontra-se o centro de massa do objeto, estando a uma distância h do eixo. Este centro de massa move-se com velocidade $\vec{v}_{cm}$. Como a energia cinética total tem valor $\mathbb{K}_T = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \mathbb{K}_{relcm}$, utilizamos que $\mathbb{K} = \frac{1}{2} I \omega^2$ e que $\mathbb{K}_{relcm} = \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2$. Logo, como $v_{cm} = h\omega$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} I \omega^2 &= \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2 \\
&= M h^2 \omega^2 + I_{cm} \omega^2 \\
&\Rightarrow I = M h^2 + I_{cm}.
\end{aligned}$$

Exemplo 2. *Considerando uma barra em a uma distância de $\frac{L}{2}$ do eixo de rotação e com momento de inércia $I = \frac{1}{3} M L^2$, podemos utilizar a fórmula para obter*

$$\begin{aligned}
I &= M h^2 + I_{cm} \\
\frac{1}{3} M L^2 &= M \frac{L^2}{4} + I_{cm} \\
I_{cm} &= \frac{1}{12} M L^2.
\end{aligned}$$

Mas, o que aconteceria se o disco rodasse em eixos x, y contidos no plano do disco? O que sabemos é que

$$I_z = \sum m_i r_i^2.$$

Além disso, $r_i^2 = (x_i^2 + y_i^2)$, ou seja,

$$\begin{aligned} I_z &= \sum m_i x_i^2 + \sum m_i y_i^2 \\ &= I_x + I_y. \end{aligned}$$

Este resultado é conhecido como teorema dos eixos perpendiculares, mas vale apenas para corpos bidimensionais. Em particular, no caso do cilindro, em que $I_x = I_y$,

$$I_x = I_y \Rightarrow 2I_x = I_z \Rightarrow I_x = \frac{1}{4}MR^2.$$

Além disso, considerando que $dI_x = \frac{1}{4}dmR^2 + dmz^2$, obtemos

$$I_x = \frac{1}{4}R^2 \int dm + \int dmz^2.$$

Como $dm = \lambda dz = \frac{M}{L}dz$, em que L é o comprimento, segue o seguinte resultado

$$I_x = \frac{1}{4}R^2 \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{M}{L}dz + \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{M}{L}z^2 dz$$

Assim, fazendo as contas,

$$I_x = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{ML^2}{12}$$

Exemplo 3. *Considere uma barra de tamanho L e massa M e deixe-a descer em um pivô. Qual é a força que ele terá que fazer?*

Sabe-se que há uma força peso com módulo Mg agindo e que $E_{mec_i} = E_{mec_f}$, tal que $\mathbb{K}_i + U_i = \mathbb{K}_f + U_f$. Mas, $\mathbb{K}_i = U_i = 0$ e $\mathbb{K}_f = \frac{1}{2}I\omega_f^2, U_f = Mg(\frac{-L}{2})$. Assim,

$$\frac{1}{2}I\omega_f^2 - Mg\frac{L}{2} = 0 \Rightarrow \omega_f^2 = \frac{MgL}{I} = \frac{MgL}{\frac{1}{3}ML^2} = \frac{3g}{L}.$$

Assim, usando que $a_{cm} = r\omega_f^2$,

$$\begin{aligned} F - Mg = Ma_{cm} \Rightarrow F &= Mg + M\frac{L}{2}\omega_f^2 \\ &= Mg + \frac{ML}{2}\frac{3g}{L} \\ &= Mg + \frac{3}{2}Mg = \frac{5}{2}Mg. \end{aligned}$$

Exemplo 4. *Considere uma roldana de raio R e massa m_r. Atrele a ela, com uma corda de massa m_c e tamanho L, um balde de massa m_b. Em seguida, solte-o para cair uma distância d. Qual é a velocidade do sistema?*

Sabemos que $E_{mec_i} = E_{mec_f}$, ou seja,

$$\mathbb{K}_i + U_i = \mathbb{K}_f + U_f.$$

Suponha que $\mathbb{K}_i = U_i = 0$. Quando o balde descer, sendo $m_c^* = \frac{d}{L}m_c$ a massa da fração de corda que desceu, a potencial final passará a valer $U_f = m_b(-d)g + m_c^*(\frac{-d}{2})g = -m_bgd - \frac{1}{2}m_c^*gd$. Com relação à cinética,

$$\mathbb{K}_f = \frac{1}{2}m_r v^2 + \frac{1}{2}m_c v^2 + \frac{1}{2}m_b v^2.$$

Utilizando as relações de energia que vimos, segue que

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{K}_f + U_f = 0 \\
&\Rightarrow \frac{1}{2}(m_c + m_r + m_b)v^2 = m_b g d + \frac{1}{2} m_c^* g d \\
&\Rightarrow (m_r + m_c + m_b)v^2 = 2 m_b g d + m_c g \frac{d^2}{L} \\
&\Rightarrow v^2 = \frac{(2 m_b L + m_c d)}{m_r + m_c + m_b} \frac{gd}{L} \\
&\Rightarrow v = \sqrt{\frac{(2 m_b L + m_c d)}{m_r + m_c + m_b} \frac{gd}{L}}.
\end{aligned}
$$

4 Aula 05 - 17/08/2023

4.1 Motivações

- Segunda lei de Newton do Movimento Circular;
- Torque da Gravidade.

4.2 Segunda Lei de Newton

Ao considerarmos uma força aplicada a um objeto em torno de um círculo de raio r, essa força faz um ângulo θ com a paralela ao raio. Além disso, há uma componente dessa força que será tangente à trajetória do objeto ao longo do círculo. Denotando essa segunda por F_t, há duas formas de expressá-la:

$$F \sin(\theta) = F_t, \quad F_t = ma_t.$$

Além disso, a aceleração tangencial a_t satisfaz $a_t = r\alpha$. Assim, obtemos a relação

$$F sin(\theta) = ma_t \Rightarrow F \sin\theta = mr\alpha \iff rF \sin(\theta) = mr^2\alpha.$$

Esse termo à esquerda é conhecido como **torque**

$$\boxed{\tau = mr^2\alpha = rF\sin(\theta)}$$

Em particular, sendo o torque total a soma de todos os torques, obtemos

$$\tau = \sum \tau_i = \sum m_i r_i^2 \alpha = I\alpha$$

Uma propriedade é que a soma dos torques das forças internas vale zero.

Olhando um caso mais específico, ao considerarmos um círculo de raio r e uma força que faz um ângulo θ com a paralela ao raio e outro círculo menor de raio r' com a mesma força aplicada, mas ângulo θ', então $l = r'\sin(\theta')$ é a componente perpendicular à linha na qual a força está atuando. A vantagem disso é que o torque pode ser, então, expresso através de $\tau = Fl = F_t r'$

4.3 O Torque da Força da Gravidade

Se considerarmos um corpo sofrendo a ação da força peso, o torque desse corpo pode ser descrito por $\tau_i = m_i g x_i$ e, o torque total, será a soma desses torques:

$$\tau_r = \sum \tau_i = \sum [m_i x_i] g$$

Mas, esse é exatamente o torque do centro de massa do objeto $\tau_r = Mx_{cm}g$. Outro assunto que é importante ressaltar é que, durante os estudos de dinâmica, a forma de estudar as forças em um sistema é através dos chamados diagramas de força, o que traz à tona a questão do que funcionaria pro estudo do torque.

Exemplo 5. *Considere uma roda de bicicleta e a catraca, que sofre uma força F de 18N. Suponha que o raio r da catraca é de 7cm e o da roda, R, vale 35cm. Além disso, a massa vale 2.4kg. Qual é a velocidade angular para t=5,5s?*

Começamos afirmando que o torque é $\tau = I\alpha = Fr_c$. Assim,

$$\alpha = \frac{Fr_c}{I} = \frac{Fr_c}{MR^2} = \frac{18 \cdot (0,07)}{2,4(0,35)^2} \frac{rad}{s^2}.$$

Com isso,

$$\omega = \omega_0 + \alpha t = \alpha t = \frac{18 \cdot (0,07)}{2,4(0,35)^2} \cdot 5,5 = 21,4 \frac{rad}{s}$$

Exemplo 6. *Considere uma barra de massa m e comprimento l está presa por um pivô, o qual realiza uma força F. Após soltá-la, qual é a força que o pivô realiza?*

Sabemos que $\tau = mg\frac{l}{2} = I\alpha = \frac{1}{3}ml^2$*. Logo,*

$$mg\frac{l}{2} = \frac{1}{3}ml^2\alpha$$
$$\alpha = \frac{3}{2}\frac{g}{l}.$$

Olhando no eixo y, sabemos que $a_{cm_y} = r\alpha = \frac{l}{2}\frac{3}{2}\frac{g}{l} = \frac{3}{4}g$*, tal que*

$$F - mg = -ma_{cm_y} \Rightarrow F = mg - \frac{3}{4}mg = \frac{1}{4}mg$$

Exemplo 7. *Suponha que temos uma roldana de raio R e momento de inércia I. Pendura-se um corpo de massa m na roldana. Qual é a aceleração de queda do corpo?*

Roldana: *As forças que atuam na roldana são o Peso dela,* P_r*, a tensão T e a força resultante ao peso* F_r*. Assim,*

$$F_r = P_r + T$$
$$TR = I\alpha, \quad a = \alpha R.$$

Corpo: *No corpo, por outro lado, tem-se apenas a tensão T e o peso mg, de forma que*

$$mg - T = ma. \quad a = \alpha R$$

Continua na próxima aula...

5 Aula 06 - 21/08/2023

5.1 Motivações

- Continuação do exemplo e outros;
- Potência;
- Corpos que rolam sem deslizar.

5.2 Continuando o Exemplo

Exemplo 8 (continuando...). *Segue a relação de tração*

$$TR = I\frac{a}{R} \Rightarrow T = \frac{I}{R^2}a.$$

Com isso,

$$mg = ma + T = ma + \frac{I}{R^2}a = a[1 + \frac{I}{mR^2} \Rightarrow a = \frac{g}{1 + \frac{I}{mR^2}}.$$

Descobrimos, assim, os valores de T e de F_s

$$T = \frac{I}{R^2}\frac{g}{1 + \frac{I}{mR^2}}$$
$$F_s = Mg + \frac{I}{R^2}\frac{g}{1 + \frac{I}{mR^2}}.$$

Exemplo 9. *Considere a máquina de Atroos - dois blocos presos a uma roldana, um de massa m_1 e outro de massa m_2 tais que $m_1 > m_2$. A roldana tem massa M, momento de inércia I e raio R. Vejamos as forças*

Bloco 1: *No primeiro bloco, agem forças de tração T_1 e peso m_1g. Escrevendo as equações,*

$$m_1g - T_1 = m_1a$$

Bloco 2: *No bloco dois, agem a tração T_2 e o peso m_2g*

$$T_2 - m_2g = m_2a$$

Roldana: *Tem-se a equação*

$$(T_1 - T_2)R = I\alpha. \iff T_1 - T_2 = \frac{I}{R}\frac{a}{R} = \frac{Ia}{R^2}$$

Como a roldana está rodando, tem-se a relação $m_{1_g} > T_1 > T_2 > m_2g$ A seguir, soma-se a equação do bloco 2 com a da Roldana, tal que

$$m_1g - m_2g - (T_1 - T_2) = (m_1 + m_2)a \iff (m_1 - m_2)g - \frac{Ia}{R^2} = (m_1 + m_2)a$$

Isola-se a equação no a:

$$a = \frac{(m_1 - m_2)g}{(m_1 + m_2) + \frac{I}{R^2}}$$

Exemplo 10. *Considere uma roldana com massa M, momento de inércia I e raio R presa à quina uma mesa. Atrela-se a ela dois corpos, um com massa m_1 e que está em cima da mesa e outro, de massa m_2, suspenso pela corda.* ***Corpo 1:*** *As forças atuando no bloco 1 são a normal F_{N_1}, a peso m_1g e a tração T_1, de forma que*

$$T_1 = m_1a$$

Corpo 2: *Para o bloco 2, podemos descrever o sistema considerando a tração T_2 e o peso m_2g, tal que*

$$m_2g - T_2 = m_2a.$$

Roldana: *As forças que atuam na roldana são a tração na direção do bloco 1, T_1, a outra na do bloco 2, T_2, o peso Mg e uma força da quinta nela $\vec{F}_s$. Além disso, $a = R\alpha$. A equação do sistema será*

$$(T_2 - T_1)R = I\alpha \Rightarrow T_2 - T_1 = \frac{Ia}{R^2}.$$

Somando a equação do bloco 1 e a do bloco 2, chega-se em

$$m_2g - (T_2 - T_1) = (m_1 + m_2)a$$

Assim,

$$\begin{aligned} T_2 - T_1 &= \frac{Ia}{R^2} \\ m_2g - \frac{Ia}{R^2} &= (m_1 + m_2)a \\ a &= \frac{m_2g}{(m_1 + m_2) + \frac{I}{R^2}} \end{aligned}$$

Além disso,

$$T_1 = \frac{m_1m_2g}{(m_1 + m_2) + \frac{I}{R^2}}.$$

5.3 Potência

Previamente, a potência era dada pela relação $dW = Fds$. Considerando o caso de uma força agindo emu ma situação circular, isso torna-se $dW = FRd\theta$. No entanto, esse termo à direita lembra muito um torque. De fato, a relação que obtemos é que $dW = \tau d\theta$. Portanto,

$$\boxed{P = \frac{dW}{dt} = \tau\frac{d\theta}{dt} = \tau\omega}$$

Exemplo 11. *Um motor de combustão de um carro fornece um torque de $\tau = 678Nm$ e está rodando a $\omega = 4500rpm \approx 471\frac{rad}{s}$. Com isso, a potência será*

$$P \approx 315kW.$$

Exemplo 12. *Tome uma roda gigante* ***(em Londres).*** *Ela tem um diâmetro de $135m$, pesa 1600 toneladas e dá 2 revoluções por hora. Qual é o torque necessário para parar a roda em 10m?*

Para começar, observe que $W = \tau\Delta\theta$ e que $S = R\Delta\theta = 10m$. Em particular, temos o valor de R, tal que

$$S = R\Delta\theta \iff 10 = 67.5\Delta\theta \Rightarrow \Delta\theta \approx 0,148rad.$$

Note que

$$W = -(\mathbb{K}_f - \mathbb{K}_i) \iff \tau\Delta\theta = -\left[0 - \frac{I\omega^2}{2}\right].$$

Logo, convertendo ω para radianos por segundo ($\omega = 3,5 \cdot 10^{-3}\frac{rad}{s}$,

$$\tau = \frac{I\omega^2}{2\Delta\theta} = \frac{MR^2\omega^2}{2\Delta\theta} \approx 3 \cdot 10^5Nm.$$

Em particular,

$$F = \frac{\tau}{R} \approx 4,4 \cdot 10^3N.$$

5.4 Corpos que Rolam sem Deslizar

Imagine um sistema em que um disco de raio R está a rolar com velocidade do centro de massa $\vec{v}_{cm}$. Considerando o ponto que tangencia o chão, em que a velocidade é nula, ele se mexe com velocidade angular ω em um raio $\vec{r}$. Assim, a energia cinética desse sistema será

$$\mathbb{K}_T = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \mathbb{K}_{rel} = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2,$$

em que considera-se que $v_{cm} = R\omega$.

Agora, considere um plano inclinado e uma bola de massa m, momento de inércia I e raio R que irá subir este plano inclinado até parar. Como podemos achar a altura que ela para, fornecida velocidade inicial do centro de massa v_{cm}. Utilizando a conservação da energia mecânica,

$$E_{mec_i} = E_{mec_f}.$$

Sabemos que

$$E_{mec_i} = \frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \frac{I_{cm}}{2}\omega^2 \quad \& E_{mec_f} = mgh.$$

Assim,

$$\begin{aligned} mgh &= \frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \frac{I_{cm}}{2}\omega^2 \\ \Rightarrow h &= \frac{1}{2}\left[v_{cm}^2 + \frac{I_{cm}}{2m}\frac{v_{cm}^2}{R^2}\right] \\ \Rightarrow h &= \frac{v_{cm}^2}{2g}\left[1 + \frac{I_{cm}}{mR^2}\right]. \end{aligned}$$

Exemplo 13. *Para o caso da esfera, em que* $I = \frac{2}{5}mR^2$*,*

$$h = \frac{v_{cm}^2}{2g}\left[1 + \frac{2}{5}\right] = \frac{7}{10}\frac{v_{cm}^2}{g}$$

Exemplo 14. *Considere um cenário de sinuca em que um taco aplica uma força F. Se ela é aplicada acima do eixo de rotação, a bola roda para frente. Caso seja exatamente no eixo de rotação, ela apenas deslizará. Por fim, se for atingida abaixo do eixo de rotação, ela rodará ao contrário. Como fazer ela não rodar?*

Em qualquer um desses pontos, a força é $F = ma$*. No caso em que ela roda para frente, ou seja, é atingida a uma distância d acima do eixo de rotação, temos* $\tau = Fd = I\alpha$*. Segue que, para que ela não rode,*

$$\begin{aligned} Fd &= I\alpha = \frac{Ia}{R} \\ \Rightarrow d &= \frac{I}{mR} = \frac{2}{5}\frac{mR^2}{mR} = \frac{2}{5}R. \end{aligned}$$