

# Funções de Variáveis Complexas

Prof. Thaís Jordão

Notas por:

João Vitor

Lucas Giraldi Almeida Coimbra

Renan Wenzel

GitHub com o Arquivo das Notas (Link clicável)

<https://github.com/RenanLeznew/USP-Math-LaTeX/tree/master/ComplexAnalysis>

13 de janeiro de 2023

---

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Aula 01 - 03/01/2023</b>	<b>4</b>
1.1	Motivações . . . . .	4
1.2	Definições Básicas . . . . .	4
1.2.1	Unicidade . . . . .	4
1.2.2	Subcorpo . . . . .	4
1.2.3	Estrutura Algébrica Independe de $F$ . . . . .	5
1.2.4	Existência . . . . .	5
1.3	Representação Polar de $\mathbb{C}$ . . . . .	5
1.4	A Esfera de Riemann . . . . .	6
1.5	Topologia de $\mathbb{C}$ . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Aula 02 - 05/01/2023</b>	<b>8</b>
2.1	Motivações . . . . .	8
2.2	Fim de Conexos . . . . .	8
2.3	Sequências e Completude . . . . .	9
2.4	Compactos . . . . .	10
2.5	Continuidade . . . . .	10
2.6	Convergência Uniforme . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Aula 03 - 06/01/2023</b>	<b>12</b>
3.1	Motivações . . . . .	12
3.2	Séries de Potências . . . . .	12
3.3	Funções Analíticas . . . . .	13
3.4	Ramos de Funções Inversas . . . . .	15
<b>4</b>	<b>Aula 04 - 09/01/2023</b>	<b>16</b>
4.1	Motivações . . . . .	16
4.2	Equações de Cauchy-Riemann . . . . .	16
4.3	Funções Harmônicas . . . . .	16
4.4	Transformações Conformes . . . . .	17
<b>5</b>	<b>Aula 05 - 10/01/2023</b>	<b>18</b>
5.1	Motivações . . . . .	18
5.2	Transformações de Möbius . . . . .	18
<b>6</b>	<b>Aula 06 - 12/01/2023</b>	<b>21</b>
6.1	Motivações . . . . .	21
6.2	Exercícios de Hoje . . . . .	21
6.2.1	Jéssica . . . . .	21
6.2.2	Tiago . . . . .	21
6.3	Final de Transformações de Möbius. . . . .	22
6.4	Simetria e Orientação. . . . .	22
<b>7</b>	<b>Aula 07 - 13/01/2023</b>	<b>23</b>
7.1	Motivações . . . . .	23
7.2	Exercícios de Hoje . . . . .	23
7.2.1	Ana Lídia . . . . .	23
7.2.2	João Vitor Occhiucci . . . . .	23
7.3	Continuando Simetrias . . . . .	24
7.4	Integração Complexa . . . . .	25
7.4.1	Funções de Variação Limitada (BV - Bounded Variation) . . . . .	25

---

<b>8</b>	<b>Aula 08 - 16/01/2023</b>	<b>26</b>
8.1	Motivações . . . . .	26

---

# 1 Aula 01 - 03/01/2023

## 1.1 Motivações

- Definir o corpos dos complexos
- Definir a topologia no corpo dos complexos
- Esfera de Riemann

## 1.2 Definições Básicas

**Definição.** Um corpo  $F$  é um conjunto não vazio em que definem-se duas operações  $+$  :  $F \times F \rightarrow F$ ,  $\cdot$  :  $F \times F \rightarrow F$  satisfazendo:

- i)  $w + z = z + w$
- ii)  $w + (z + u) = (w + z) + u$
- iii) Existe  $0$  em  $F$  tal que  $w + 0 = w$
- iv) Para cada  $w \in F$ , existe  $-w \in F$  tal que  $w + (-w) = 0$
- v)  $w \cdot z = z \cdot w$
- vi)  $w \cdot (z \cdot u) = (w \cdot z) \cdot u$
- vii) Existe  $e \in F$  tal que  $w \cdot e = w$
- viii) Para cada  $w \in F - \{0\}$ , existe  $w^{-1} \in F$  tal que  $w \cdot w^{-1} = e$
- ix)  $(w + z) \cdot u = w \cdot u + z \cdot u$ ,

em que  $w, z, u$  pertencem a  $F$ .

Considere  $F$  um corpo contendo  $\mathbb{R}$  e tal que

$$x^2 + 1 = 0$$

tenha solução. Seja  $i$  esta solução. Segue que  $-i$  é solução dela também,  $-1 \cdot z = z$  e  $0 \cdot z = 0$  para  $z$  em  $F$ . Definimos

$$\mathbb{C} := \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$$

de maneira que os elementos de  $\mathbb{C}$  são unicamente determinados,  $\mathbb{C}$  é subcorpo de  $F$  e a estrutura algébrica de  $\mathbb{C}$  não depende de  $F$ . Além disso, este corpo existe.

Com efeito,

### 1.2.1 Unicidade

Sejam  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  tais que

$$a + bi = c + di.$$

Assim,  $a - c = i(d - b) \Rightarrow (a - c)^2 = (d - b)^2$ , donde segue a unicidade  $a = c$  e  $d = b$

### 1.2.2 Subcorpo

Exercício.

### 1.2.3 Estrutura Algébrica Independe de F

Seja F outro corpo contendo  $\mathbb{R}$  em que  $x^2 + 1 = 0$  possui solução. Considere  $\mathbb{C}' = \mathbb{R} + j\mathbb{R}$ , em que j é a solução da equação em F'. Definimos  $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}'$  por

$$T(a + bi) = a + bj$$

e, neste caso,  $T(z + w) = T(z) + T(w)$ ,  $T(zw) = T(z)T(w)$  para todos  $z, w \in \mathbb{C}$ . (Exercício.)

### 1.2.4 Existência

Seja  $F = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$  munido das operações  $+: F \times F \rightarrow F$ ,  $\cdot: F \times F \rightarrow F$  dadas por

$$\begin{aligned} +((a, b), (c, d)) &= (a + c, b + d) \\ \cdot((a, b), (c, d)) &= (ac - bd, ad + bc). \end{aligned}$$

Note que  $(0, 1)^2 = (-1, 0)$ . Assim,  $(F, +, \cdot)$  é um corpo contendo  $\mathbb{R}$ . (Exercício.)

Algumas propriedades(Exercícios):

- a)  $Re(z) \leq |z|$  e  $Im(z) \leq |z|$
- b)  $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$  e  $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$
- c)  $\overline{\frac{1}{z}} = \frac{1}{\overline{z}}$
- d)  $|z| = |\overline{z}|$  e  $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$
- e)  $z + \overline{z} = 2Re(z)$ ,  $z - \overline{z} = 2iIm(z)$  e  $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$

## 1.3 Representação Polar de $\mathbb{C}$

Dado  $z \in \mathbb{C}$ , temos

$$z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta), \quad \theta = \arg z.$$

Neste caso, temos, para z não-nulo,

$$z^{-1} = |z|^{-1}(\cos -\theta + i \sin -\theta) = |z|^{-1}(\cos \theta - i \sin \theta)$$

Para  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ , temos

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2))$$

com  $\theta_1 = \arg z_1, \theta_2 = \arg z_2$ . Mais geralmente,

$$\prod_{k=1}^n z_k = \prod_{k=1}^n |z_k|(\cos(\sum_{k=1}^n \theta_k) + i \sin(\sum_{k=1}^n \theta_k)),$$

com  $\theta_k = \arg z_k$ . Em particular,

$$z^n = |z|^n(\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Buscando w tal que  $w^n = z$  para dado z não-nulo,

$$w = |z|^{\frac{1}{n}}(\cos(\frac{\theta + 2k\pi}{n}) + i \sin(\frac{\theta + 2k\pi}{n})), \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

---

## 1.4 A Esfera de Riemann

Considere  $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$  a esfera

$$\mathbb{S}^2 := \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}.$$

Chame  $N = \{0, 0, 1\}$  de polo norte. Fazemos uma associação entre  $\mathbb{S}^2 - \{N\}$  e o plano  $z=0$  de  $\mathbb{R}^3$ , chamada de projeção estereográfica. Nessa associação, o ponto  $z (= x + iy) \in \mathbb{C}$  é associado a  $(x, y, 0)$ , e definimos uma reta por  $N$  e  $z$  como  $r: N + t(x, y, -1), t \in \mathbb{R}$ . Assim,

$$r \cap \mathbb{S}^2 \Rightarrow S_z = \left( \frac{2x}{|z|^2 + 1}, \frac{2y}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right) \in \mathbb{S}^2$$

Reciprocamente, o ponto  $(x, y, z)$  de  $\mathbb{S}^2$  pode ser associado ao considerar a reta  $r: N + t(x, y, s-1)$ , em que  $s$  é um número real. Com isso, a intersecção  $r \cap \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\} \Rightarrow t = \frac{1}{1-s}$  mostra que  $z = \left( \frac{x}{1-s}, \frac{y}{1-s}, 0 \right)$  corresponde ao ponto  $z$  de  $\mathbb{C}$ .

Associando  $N$  ao infinito, obtemos o plano estendido  $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ , chamado de Esfera de Riemann. Se  $\phi: \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{S}^2$  é dada por  $\phi(\infty) = N$  e, para  $z \neq \infty$ ,

$$\phi(z) = \left( \frac{z + \bar{z}}{|z|^2 + 1}, \frac{z - \bar{z}}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right),$$

então dados  $z, w \in \mathbb{C}_\infty$ , definimos a métrica

$$d(z, w) = \begin{cases} \|\phi(z) - \phi(w)\|, & z, w \neq \infty \\ 0, & z = w = \infty \\ \infty, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

**Exemplo 1.1.** Se  $z, w \neq \infty$ , então

$$d(z, w) = d(\phi(z), \phi(w)) = \frac{2|z - w|}{[(1 + |z|^2)(1 + |w|^2)]^{\frac{1}{2}}}$$

e, se  $z \neq \infty$ ,

$$d(z, \infty) = \|\phi(z) - N\| = \frac{2}{(1 + |z|^2)^{\frac{1}{2}}}$$

## 1.5 Topologia de $\mathbb{C}$

**Definição.** Sejam  $X$  um conjunto e  $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  uma função. Dizemos que  $d$  é uma métrica se

- i)  $d(x, y) \geq 0, d(x, y) = 0 \iff x = y$
- ii)  $d(x, y) = d(y, x)$
- iii)  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ ,

em que  $x, y, z$  pertencem a  $X$ . Neste caso, chamamos a terna  $(X, d)$  de espaço métrico.

Considere  $(X, d)$  um espaço métrico. Dado  $x$  em  $X$  e  $r > 0$ ,

$$B(x, r) := \{y \in X : d(x, y) < r\}$$

é a bola aberta, seu fecho é

$$B_c(x, r) := \{y \in X : d(x, y) \leq r\}$$

e a bola fechada é a união deles, ou seja,

$$\overline{B(x, r)} := \{y \in X : d(x, y) \leq r\}$$

**Exemplo 1.2.** Considere  $X$  não-nulo e  $d(x, y) = \delta_{x,y}$ .  $(X, d)$  é métrico e

$$B\left(x, \frac{1}{2}\right) = \{x\} = \overline{B\left(x, \frac{1}{2}\right)} = B\left(x, \frac{1}{333}\right), x \in X$$

$$B(x, 2) = X = B(x, 1001), x \in X$$

Utilizando bolas, definimos que um conjunto  $A \subset X$  é aberto se para todo  $x$  em  $A$ , existe  $r > 0$  tal que  $B(x, r)$  está contido em  $A$ . Por outro lado, um conjunto é fechado se seu complementar é aberto. A união infinita de abertos é aberta e, pelas Leis de DeMorgan, a intersecção infinita de fechados é fechada. Além disso, intersecções finitas de abertos é aberta e união finita de fechados é fechado.

Definimos, também, o interior de  $A$  como  $A^\circ := \cup_B \{B \subset A : B \text{ aberto}\}$ , o fecho de  $A$  como  $\bar{A} = \cap_F \{A \subseteq F : F \text{ fechado}\}$  e o bordo de  $A$  como  $\partial A = \bar{A} \cap \bar{A}^c$ . Diremos que  $A$  é denso quando  $\bar{A} = X$ .

**Proposição.** Seja  $(X, d)$  um espaço métrico e  $A$  um subconjunto. Então,

- i)  $A$  é aberto se, e só se,  $A = A^\circ$
- ii)  $A$  é fechado se, e só se,  $A = \bar{A}$
- iii) Se  $x$  pertence a  $A^\circ$ , então existe  $\epsilon > 0$  tal que  $B(x, \epsilon) \subseteq A$ .
- iv) Se  $x$  pertence a  $\bar{A}$ , então para todo  $\epsilon > 0$  tal que  $B(x, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$ .

Um espaço métrico  $(X, d)$  é conexo se os únicos subconjuntos abertos e fechados de  $X$  são  $X$  e vazio. Caso contrário,  $X$  é dito ser desconexo, ou seja, existem abertos disjuntos não-vazios cuja união dá o espaço todo. Um exercício é mostrar que um conjunto é conexo se, e só se, ele é um intervalo.

Dados  $z, w$  em  $\mathbb{C}$ , o segmento  $[z, w]$  é o conjunto

$$[z, w] := \{tw + (1 - t)z : t \in [0, 1]\}$$

Além disso, dados  $z_1, \dots, z_n$ , a poligonal com esses vértices é

$$[z_1, \dots, z_n] = \bigcup_{k=1}^{n-1} [z_k, z_{k+1}]$$

**Proposição.** Seja  $G$  um subconjunto de  $\mathbb{C}$  aberto. Então,  $G$  é conexo se, e só se para todo  $z, w$  em  $G$ , existe uma poligonal  $[z, z_1, \dots, z_n, w] \subseteq G$ .

**Prova.**  $\Leftarrow$ ) Assumindo que  $G$  satisfaz a propriedade da poligonal, suponha também que  $G$  não é conexo. Assim, podemos escrever  $G = B \cup C$  com  $B \cap C = \emptyset$  e  $B, C$  não-vazios. Pela propriedade de  $G$ , existe  $[b, z_1, \dots, z_n, c] \subseteq G$ . Neste caso, existe  $k$  tal que  $z_k \in B$  e  $z_{k+1} \in C$ . Agora, considere os conjuntos

$$B' = \{t \in [0, 1] : tz_k + (1 - t)z_{k+1} \in B\}$$

$$C' = \{t \in [0, 1] : tz_k + (1 - t)z_{k+1} \in C\}$$

e note que  $B' \neq \emptyset$  pois  $z_k \in B$  e  $1 \in B'$ . Analogamente,  $C'$  é não-vazio. No entanto, isso é um absurdo, pois  $[0, 1]$  seria conexo e  $B' \cup C'$  seria uma cisão não trivial

$\Rightarrow$ ) Suponha, agora, que  $G$  é conexo e seja  $z$  um elemento dele. Defina

$$C = \{w \in G : \text{Existe } [z, z_1, \dots, z_n, w] \subseteq G\}$$

Observe que  $C$  é não-vazio,  $z$  pertence a  $G$  e  $[z]$  é subconjunto de  $G$ . Mostremos que  $C$  é aberto e fechado (pois implicará em  $C = G$ ). Com efeito, se  $w \in C \subseteq G$ , existe  $r > 0$  tal que  $B(w, r)$  está contido em  $G$ , pois  $G$  é aberto. Assim, para todo  $s \in B(w, r)$ , temos  $[s, w] \subseteq B(w, r)$  e, com isso, existe uma poligonal ligando  $s$  a  $z$  com  $s \in C$ , mostrando que  $C$  é aberto.

Mostrar que o complementar de  $C$  é aberto é análogo. Com efeito, se  $C^c = \emptyset$ , o resultado está provado. Por outro lado, se  $C^c \neq \emptyset$ , seja  $w \in C^c = G - C$ . Logo, existe  $r > 0$  tal que  $B(w, r) \subseteq G$ . Afirmamos que  $B(w, r) \subseteq G - C$ . Caso contrário, existe  $s$  em  $B(w, r)$  contido, também, em  $C$ . Neste caso, existe uma poligonal ligando  $s$  a  $z$  e  $s$  a  $w$ , uma contradição, pois isso conectaria  $w$  a  $z$ , mesmo com  $w$  no complementar de  $z$ . Portanto, o complementar é aberto e  $C$  é aberto e fechado. ■

---

## 2 Aula 02 - 05/01/2023

### 2.1 Motivações

- Sequências e suas convergências;
- Teorema de Cantor para espaços completos;
- Compacidade e Heine-Borel;
- Continuidade e convergência de funções.

### 2.2 Fim de Conexos

**Teorema.** *Seja  $G \subseteq \mathbb{C}$  um aberto e conexo, então existe uma poligonal ligando qualquer  $z, w$  em  $G$  cujos segmentos sejam paralelos ao eixo real ou imaginário.*

**Definição.** *Um subconjunto de um espaço métrico  $(M, d)$  é uma componente conexa se é um conexo maximal*

**Exemplo 2.1.** *Coloque  $A = \{1, 2, 3\} \cdot \{1\}$  é componente conexa de  $A$ , mas  $\{1, 2\}$  não é.*

**Teorema.** *Seja  $(M, d)$  um espaço métrico. Então,*

- 1) *Para  $x$  em  $M$ , existe  $C_x$  uma componente conexa de  $M$  com  $x$  em  $C_x$ ;*
- 2) *As componentes são disjuntas.*

**Prova.** 1)

*Seja  $x$  em  $M$  e tomemos*

$$C_x = \bigcup_{D \subseteq M} \{D : D \text{ conexos com } x \in D\}$$

*Mostremos que  $C_x$  é conexo, pois a maximalidade segue da definição dada a ele. Note que  $C_x \neq \emptyset$ , visto que qualquer conjunto unitário é conexo. Seja  $A \subseteq C_x$  aberto, fechado e não-nulo. Existe  $D_x \in C_x$  tal que  $D_x \cap A \neq \emptyset$ , o que implica que  $D_x \subseteq A$ .*

*Finalmente, considere  $D \in C_x$ , de modo que  $D_x \cup D$  é conexo e  $(D_x \cup D) \cap A \neq \emptyset$  o que garante que  $D \subseteq A$ . Assim,  $A = C_x$ . ■.*

**Exercícios.** 1) *Prove a segunda afirmação do teorema;*

- 2) *Se  $D$  é conexo e  $D \subseteq A \subseteq \overline{D}$ , então  $A$  é conexo.*

**Teorema.** *Seja  $G$  um subconjunto aberto de  $\mathbb{C}$ . As componentes conexas são abertas e há no máximo uma quantidade enumerável delas.*

**Prova.** *Seja  $D$  uma componente conexa de  $G$ . Tome  $x \in D$ , tal que existe  $r > 0$  com  $B(x, r) \subseteq G$ , já que  $G$  é aberto. Suponha que  $B(x, r) \not\subseteq D$ . Neste caso,  $B(x, r) \cup D$  seria um conexo contendo  $D$  propriamente. Logo,  $B(x, r) \subseteq D$  e  $D$  é aberto.*

*Para a segunda afirmação, considere*

$$\Omega = \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}(\overline{\Omega} = \mathbb{C})$$

*Para cada componente conexa  $C$  de  $G$ , como  $G$  é aberto, existe  $z \in \Omega \cap C$ , o que é suficiente para garantir a enumerabilidade das componentes de  $G$ . ■.*



---

## 2.3 Sequências e Completude

**Definição.** Seja  $(M, d)$  um espaço métrico. Uma sequência  $\{x_n\}$  de  $M$  é convergente se existe  $x$  em  $M$  tal que para todo  $\epsilon > 0$ , existe  $n_0$  natural tal que

$$d(x_n, x) < \epsilon, \quad n \geq n_0.$$

Escrevemos, neste caso,  $x_n \rightarrow x$ . Dizemos que uma sequência é de Cauchy se para todo  $\epsilon > 0$ , existe  $n_0$  natural satisfazendo

$$d(x_n, x_m) < \epsilon, \quad n, m \geq n_0.$$

**Exercícios.** i) Se  $\{x_n\}$  é convergente, então  $\{x_n\}$  é de Cauchy, mas a recíproca é só válida quando a sequência possui uma subsequência convergente.

ii) Se  $\{x_n\}$  é de Cauchy, então  $x_n$  é limitada.

iii)  $F \subseteq M$  é fechado se e só se toda  $x_n$  de  $F$  com  $x_n \rightarrow x$  é tal que  $x$  pertence a  $F$ .

Dizemos que um espaço métrico é completo se toda sequência de Cauchy for convergente.

**Exercícios.** i) Mostre que  $\mathbb{R}, \mathbb{C}$  são espaços métricos completos;

ii) Se  $(M, d)$  é um espaço métrico e  $S \subseteq M$ , mostre que se  $(S, d)$  for completo, ele é fechado em  $M$ . Mostre e recíproca no caso em que  $(M, d)$  é completo.

O resultado a seguir é conhecido como Teorema de Cantor.

**Teorema.** Um espaço métrico é completo se e só se toda cadeia descendente de fechado  $\{F_n\}$  satisfazendo

$$\text{diam} F_n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

é tal que  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$  é unitário. Aqui,  $\text{diam} A := \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$ .

**Prova.** Suponha que  $M$  é um espaço métrico completo. Se  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$ , então ele é unitário. De fato, se  $x, y \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$ ,

$$d(x, y) \leq \text{diam} F_n (\text{diam} F_{n+1} \leq \text{diam} F_n),$$

mas  $\text{diam} F_n \rightarrow 0$  e  $d(x, y) = 0$ , de modo que  $x = y$ .

Agora, seja  $x_n \in F_n, n \in \mathbb{N}$  e observe que

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \text{diam} F_n,$$

pois  $F_{n+1} \subseteq F_n$ . Isto garante que  $\{x_n\}$  é de Cauchy e, como  $M$  é completo, existe  $x$  com  $x_n \rightarrow x$ . Neste caso,  $x \in F_n$  para todo  $n$  e  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n = \{x\}$ .

Reciprocamente, seja  $\{a_n\}$  de Cauchy em  $M$ . Construimos

$$F_n = \overline{\{a_k : k \geq n\}}$$

que são fechados satisfazendo  $F_{n+1} \subseteq F_n$ . Assim,  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n = \{x\}$  para algum  $x$  de  $M$ . Como

$$d(x, a_n) \leq \text{diam} F_n \rightarrow 0,$$

temos, portanto,  $a_n \rightarrow x$ . ■

Um exercício que fica é mostrar que se  $\{a_n\}$  é de Cauchy, então  $\text{diam} F_n \rightarrow 0$

---

## 2.4 Compactos

**Definição.** Seja  $(M, d)$  um espaço métrico. Um subconjunto  $S \subseteq M$  é compacto se para toda coleção  $\mathcal{A}$  de abertos de  $M$  cobrindo  $S$  existe  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$  tal que

$$S \subseteq \bigcup_{k=1}^n A_k$$

Dado um espaço métrico  $(M, d)$ ,  $M$  é dito sequencialmente completo se todas as sequências de  $M$  possuem subseqüência convergente. Também diremos que ele é totalmente limitado se para todo  $\epsilon > 0$ , existe  $n \in \mathbb{N}, x_1, \dots, x_n \in M$  com

$$M = \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \epsilon).$$

Um conjunto  $A$  é dito limitado se seu diâmetro é finito.

**Exercícios.** i) Se  $A$  é totalmente limitado, então  $A$  é limitado, mas a recíproca não é necessariamente verdade.

ii) Se  $A$  é compacto, então  $A$  é limitado, mas a recíproca não é necessariamente verdade.

**Proposição.** Seja  $(M, d)$  um espaço métrico e  $K$  um subconjunto de  $M$ . Então,  $K$  é compacto se e só se toda família de fechados com PIF tem interseção não-vazia.

A PIF é a Propriedade da Interseção Finita, que afirma que dados conjuntos  $F_1, \dots, F_n \Rightarrow \bigcap_{k=1}^n F_k \neq \emptyset$

**Teorema.** Seja  $(M, d)$  um espaço métrico. As seguintes afirmações são equivalentes:

- i)  $M$  é compacto;
- ii) Para todo conjunto infinito  $S$  de  $M$ , existe  $x$  em  $S$  tal que para todo  $\epsilon > 0, B(x, \epsilon) \cap S - \{x\} \neq \emptyset$ ;
- iii)  $M$  é sequencialmente compacto;
- iv)  $M$  é completo e totalmente limitado.

**Teorema.** Um conjunto  $K$  de  $\mathbb{R}^n$  é compacto se e só se ele é fechado e limitado.

Segue um esboço da prova.

**Prova.** Se  $K$  é compacto, ele é completo (logo, fechado) e totalmente limitado (logo, limitado). Por outro lado, se  $K$  é fechado e limitado, então  $K$  é completo porque  $\mathbb{R}^n$  é completo. Além disso, pela propriedade Arquimediana da reta, para todo  $\epsilon > 0$ , existem  $x_1, \dots, x_n \in K$  com

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \epsilon)$$

## 2.5 Continuidade

**Definição.** Sejam  $(X, d), (Y, d')$  espaços métricos.  $f : X \rightarrow Y$  é contínua em  $x$  de  $X$  se para todo  $\epsilon > 0$ , existir  $\delta > 0$  tal que

$$d(x, y) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \epsilon$$

$f$  é dita contínua se isso ocorre para todos os pontos de  $M$ .

**Exercícios.** Mostre que equivalem à definição de contínua:

- i)  $f^{-1}(B(x, \epsilon))$  contém uma bola aberta centrada em  $x$ , para todo  $\epsilon > 0$ ;
- ii)  $x_n \rightarrow x$  implica  $f(x_n) \rightarrow f(x)$

---

iii)  $F^{-1}(A)$  é aberta em  $X$  para todo aberto  $A$  com  $x \in A$

**Proposição.** Sejam  $f, g : X \rightarrow \mathbb{C}$  funções contínuas. Então,

- 1)  $\alpha f + \beta g$  é contínua,  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ;
- 2)  $fg$  é contínua;
- 3) Se  $x \neq 0$ , então  $f/g$  é contínua em  $x$ ;
- 4) Se  $h : Y \rightarrow X$  é contínua, então  $f \circ h : Y \rightarrow \mathbb{C}$  é contínua.

**Definição.** Uma função  $f : (X, d) \rightarrow (Y, d')$  é uniformemente contínua se para todo  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$d(x, y) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \epsilon.$$

Uma função  $f : (X, d) \rightarrow (Y, d')$  é Lipschitz se existe  $c > 0$  tal que

$$d'(f(x), f(y)) \leq cd(x, y)$$

**Teorema.** Seja  $f : (X, d) \rightarrow (Y, d')$  uma função. Então,

- i) Se  $X$  é compacto, então  $f(X)$  é compacto;
- ii) Se  $X$  é conexo, então  $f(X)$  é conexo. Adicionalmente, se  $Y = \mathbb{R}$ , então  $f(X)$  é um intervalo.

**Corolário.** Se  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua, então para todo  $K \subseteq X$  compacto, existem  $x_m, x_M \in K$  tais que

$$f(x_m) = \inf_{x \in K} \{f(x)\}, \quad f(x_M) = \sup_{x \in K} \{f(x)\}$$

**Corolário.** Nas mesmas condições, mas  $f$  uma função complexa, temos

$$|f(x_m)| = \inf_{x \in K} \{|f(x)|\}, \quad |f(x_M)| = \sup_{x \in K} \{|f(x)|\}$$

**Teorema.** Seja  $f : X \rightarrow Y$  contínua. Se  $X$  é compacto, então  $f$  é uniformemente contínua.

## 2.6 Convergência Uniforme

**Definição.** Uma sequência de funções  $\{f_n\}$  de  $X$  em  $Y$  converge pontualmente para  $f : X \rightarrow Y$  se

$$f_n(x) \rightarrow f(x), \quad n \rightarrow \infty, \forall x \in X$$

$\{f_n\}$  converge uniformemente para  $f$  se para todo  $\epsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$\sup_{x \in X} \{d'(f_n(x), f(x))\} < \epsilon, n \geq n_0$$

**Teorema.** Se  $\{f_n\}$  é uma sequência de funções contínuas e  $f_n \rightarrow f$  uniformemente, então  $f$  é contínua.

**Teorema.** Seja  $u_n : X \rightarrow \mathbb{C}$  uma sequência de funções satisfazendo

$$|u_n(x)| \leq c_n, n \in \mathbb{N}.$$

Se  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n < \infty$ , então  $\sum_{k=1}^n u_k \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} u_n$  uniformemente.

---

## 3 Aula 03 - 06/01/2023

### 3.1 Motivações

- i) Introdução às séries de potência e raio de convergência;
- ii) Funções analíticas e diferenciáveis em  $\mathbb{C}$ ;
- iii) Definição da exponencial complexa;
- iv) Ramos de funções inversas.

### 3.2 Séries de Potências

**Definição.** Considere  $\{a_n\}$  uma sequência em  $\mathbb{C}$ . A série de potência em  $\{a_n\}$ , denotada por  $\sum_{n=0}^{\infty}$ , é dita convergente se para todo  $\epsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $|\sum_{n=0}^k a_n - a|, k \geq n_0$ , para algum  $a \in \mathbb{C}$ . Denotamos isso por

$$a = \sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty,$$

A série  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  é absolutamente convergente se  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$ .

**Exercícios.** Mostre que se uma soma converge absolutamente, ela também converge normalmente.

**Definição.** Uma série de potências é uma série da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n, \quad z \in \mathbb{C},$$

em que  $\{a_n\}$  é uma sequência de  $\mathbb{C}$  e  $a$  é um número complexo.

**Exemplo 3.1.** No caso da série geométrica  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n, z \in \mathbb{C}$ , considere a soma parcial  $s_n = \sum_{k=0}^n z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}, z \neq 1$ .

Se  $|z| < 1$ , então  $z^{n+1} \rightarrow 0$  e  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}, |z| < 1$ . Caso  $|z| \geq 1$ , a série geométrica diverge.

Denotamos por  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \{b_n\}$  a expressão  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} \{b_k\}$ .

**Teorema.** Considere a série de potências  $\sum_{n=0}^{\infty} (z - a)^n$  e  $\frac{1}{R} := \limsup_{n \rightarrow \infty} \{\sqrt[n]{|a_n|}\}$ . Então,

- 1) A série converge absolutamente em  $B(a, R)$
- 2) A série diverge se  $|z - a| > R$
- 3) A série converge uniformemente em  $B(a, r)$  para  $0 < r < R$ .

**Prova.** Sem perda de generalidade, suponha  $a = 0$ . 1.) Seja  $z \in B(0, R)$ . Existe  $|z| < r < R$  e  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $|a_n^{\frac{1}{n}}| < \frac{1}{r}, n \geq n_0$ . Daí, temos

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} |a_k| |z|^k \leq \sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{|z|^k}{r^k} < \infty.$$

Como essa fração é menor que um, o resultado está provado.

- 2.) Seja  $|z| > R$  e  $r$  tal que  $|z| > r > R$ . Existe  $\{a_{n_k}\}_k$  tal que  $|a_{n_k}|^{\frac{1}{n_k}} > \frac{1}{r}, k = 0, 1, \dots$ . Assim, temos

$$|a_{n_k}| |z|^{n_k} > \left(\frac{|z|}{r}\right)^{n_k} \rightarrow \infty$$

---

Conforme  $k$  tende a infinito.

3.) Seja  $0 < r < R$  e  $r < \rho < R$ . Se  $z$  pertence a uma bola  $B(0, r)$ , então

$$|a_n||z|^n < \left(\frac{r}{\rho}\right)^n, \quad n \geq n_0, n_0 \in \mathbb{N}.$$

Como consequência do teste  $M$  de Weierstrass, já que  $\frac{r}{\rho}$  é um número, segue o resultado. ■

**Exercícios.** Mostre que o  $R$  do teorema acima é único.

**Exemplo 3.2.** Considere a série que define a exponencial de  $z$ :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, R = \infty. \quad e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, z \in \mathbb{C}.$$

Esta série é convergente pelo teste da razão. Com efeito,

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{(n+1)!}{n!} \right) = \infty.$$

Com isso, a série converge para todos os valores possíveis, pois seu raio de convergência é infinito.

**Proposição.** Nas notações da proposição anterior, se  $R < \infty$ , então

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

### 3.3 Funções Analíticas

**Definição.** Seja  $G$  um aberto de  $\mathbb{C}$  e  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  uma função. Dizemos que ela é diferenciável em  $z \in G$  se

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{w \rightarrow z} \frac{f(z) - f(w)}{z - w}$$

existe. Neste caso, o denotamos por  $f'(z)$ . Diremos que  $f$  é diferenciável se  $f'(z)$  existe para todo  $z$  de  $G$ .

**Definição.** Se  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  é diferenciável e  $f' : G \rightarrow \mathbb{C} (z \mapsto f'(z))$  é contínua, então dizemos que  $f$  é continuamente diferenciável.

Analogamente, se  $f' : G \rightarrow \mathbb{C}$  é diferenciável e  $f'' : G \rightarrow \mathbb{C} (f'' = (f')')$  é contínua, então  $f$  é duas vezes continuamente diferenciável. Nesta linha, diremos que uma função é analítica se ela é continuamente diferenciável em  $G$ .

**Proposição.** Seja  $G$  um aberto de  $\mathbb{C}$ . Então,

- i) Se  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  é diferenciável em  $a \in G$ , então  $f$  é contínua em  $a$ ;
- ii) Se  $f$  e  $g$  são analíticas em  $G$ , então  $f+g$  e  $f \cdot g$  são analíticas em  $G$ . Se  $G' = G - \{0\}$ , então  $f/g$  é analítica em  $G'$ . Valem as regras clássicas de derivação.
- iii) Sejam  $f$  e  $g$  analíticos em  $G_f, G_g$ , respectivamente, com  $f(G_f) \subseteq f(G_g)$ . Então,  $g \circ f$  é analítica em  $G_f$  e

$$(g \circ f)'(z) = g'(f(z))f'(z), \quad z \in G.$$

**Prova.** Exercício. ■

**Proposição.** Seja  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$  com raio de convergência  $R$ . Então,  $f$  é infinitamente diferenciável em  $B(a, R)$ . Além disso, a derivada de ordem  $k$  é

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n \frac{n!}{(n-k)!} (z-a)^{n-k}, k \in \mathbb{N}$$

com mesmo raio de convergência de  $f$ .

**Prova.** A última afirmação fica como exercício.  
Consideremos

$$s_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k(z-a)^k, \quad R_n(z) = f(z) - s_n(z),$$

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n(z-a)^{n-1}, \quad z \in B(a, R), n \in \mathbb{N}.$$

Seja  $\delta > 0$  tal que  $B(z, \delta) \subseteq B(a, r)$  com  $|z| < r < R$ . Assim, para  $w$  em  $B(z, \delta)$

$$\frac{f(z) - f(w)}{z - w} - g(z) = \frac{s_n(z) - s_n(w)}{z - w} + \frac{R_n(z) - R_n(w)}{z - w} - g(z) = \left[ \frac{s_n(z) - s_n(w)}{z - w} - s'_n(z) \right] + \left[ \frac{R_n(z) - R_n(w)}{z - w} \right] - (g(z) - s'_n(z)).$$

Note que

$$\left| \frac{R_n(z) - R_n(w)}{z - w} \right| = \left| \frac{1}{z - w} \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \frac{[(z-a)^k - (w-a)^k]}{(z-a) - (w-a)} \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \left( (z-a)^{k-1} + \dots + (w-a)^{k-1} \right) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| k r^{k-1} \rightarrow 0,$$

pois  $g(r) < \infty$ , em que  $n$  tende a infinito. Como as duas expressões em chaves tendem a 0 quando  $w$  tende a  $z$ , concluímos que

$$\lim_{z \rightarrow w} \frac{f(z) - f(w)}{z - w} = g(z)$$

e a afirmação segue. ■

**Corolário.** Nas notações e condições da proposição anterior,  $f$  é analítica em  $B(a, R)$  e

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, n \in \mathbb{N}$$

**Prova.** Exercício.

**Proposição.** Seja  $G$  aberto e conexo. Se  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  é tal que  $f'(z) = 0, z \in G$ , então  $f$  é constante.

**Prova.** Seja  $z_0 \in G$  e considere  $C = f^{-1}(\{f(z_0)\})$ , tal que  $C$  é não-vazio e fechado. Mostremos que  $C$  é, também, aberto. Seja  $z$  um elemento de  $C$  e  $r > 0$  tal que  $B(z, r) \subseteq G$ . Para todo  $w \in B(z, r)$ , definimos  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  por  $g(t) = f(tz + (1-t)w)$ . Neste caso,

$$g'(t) = f'(tz + (1-t)w)(z - w) = 0.$$

Como  $g$  é real, segue que ela é constante. Com isso, note que  $f(w) = g(0) = g(1) = f(z) = f(z_0)$ , tal que  $w \in C$ . ■

**Exemplo 3.3.**  $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, R = \infty$

Coloque  $g(z) = e^z e^{z-w}, w \in \mathbb{C}$  fixo. Temos  $g'(z) = (e^z)' e^{z-w} + e^z (e^{z-w})' = 0$ . Assim,  $g$  é constante e, como  $g(0) = e^w$ , concluímos que  $e^z = e^w e^{z-w}$  para todo  $z, w \in \mathbb{C}$ .

**Exercícios.** Prove que, para  $z, w \in \mathbb{C}$ ,:

- 1)  $e^{z+w} = e^z e^w$ ;
- 2)  $e^z e^{-z} = 1$ ;
- 3)  $e^{\bar{z}} = \overline{(e^z)}$ ;
- 4)  $|e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)}$ .

---

**Exemplo 3.4.** Defina, para  $z$  complexo,

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$
$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

**Exercícios.** Dado  $z$  complexo, mostre que

- i)  $(\sin(z))' = \cos(z), \quad (\cos(z))' = -\sin(z);$
- ii)  $\cos(z) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), \quad \sin(z) = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz});$
- iii)  $\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1;$
- iv)  $e^{iz} = \cos(z) + i\sin(z).$

### 3.4 Ramos de Funções Inversas

Seja  $z \in \mathbb{C}$ . Buscamos  $w \in \mathbb{C}$  tal que  $e^w = z, z \neq 0$ . Logo,  $w$  deve satisfazer  $|e^w| = e^{\operatorname{Re}(w)} = |z| \Rightarrow \operatorname{Re}(w) = \ln|z|$ . Se  $w = x + iy$ , então

$$e^w = e^x e^{iy} = e^x (\cos(y) + i \sin(y)) = z = |z| (\cos(\theta) + i \sin(\theta))$$

com  $\theta = \arg z$ . Assim,  $y = \theta + 2k\pi$  para algum  $k$ . Portanto,  $w = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$ .

**Definição.** Seja  $G$  um aberto conexo de  $\mathbb{C}$  e  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  contínua. Diremos que  $f$  é um ramo de logaritmo em  $G$  se  $e^{f(z)} = z, z \in G$ .

**Proposição.** Se  $G$  é um aberto conexo e  $f, g$  são ramos de logaritmos em  $G$ , então  $f(z) = g(z) + 2k\pi i$  para algum  $k \in \mathbb{Z}$ .

**Prova.** Seja  $z$  em  $G$ . Mostraremos que

$$\frac{f(z) - g(z)}{2\pi i} \in \mathbb{Z}.$$

Observe que  $e^{f(z)-g(z)} = \frac{e^{f(z)}}{e^{g(z)}} = \frac{z}{z} = 1$ . Daí,  $f(z) = g(z) + 2k\pi i$  para algum inteiro  $k$ , pois

$$f(z) - g(z) = \ln|1| + i(\arg 1 + 2k\pi)$$

Definimos  $h : G \rightarrow \mathbb{C}$  por

$$h(w) = \frac{f(w) - g(w)}{2\pi i}, \quad w \in G.$$

De forma análoga ao anterior, concluímos  $\operatorname{Im}(h) \subseteq \mathbb{Z}$  deve ser conexo, pois  $h$  é contínua. Assim,  $h$  é constante, pois os únicos conexos de  $\mathbb{Z}$  são o vazio e conjuntos unitários, provando o resultado. ■

**Proposição.** Sejam  $G, \Omega$  abertos e  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  e  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  contínuas com  $f(G) \subseteq \Omega$  e satisfazendo  $f(g(z)) = z, z \in G$ . Se  $g$  é diferenciável em  $z$  e  $g'(f(z)) \neq 0$ , então

$$f'(z) = \frac{1}{g'(f(z))}.$$

Caso  $g$  seja analítica,  $f$  também o é.

**Prova.** Exercício.

Considere  $G$  um aberto conexo. Chamamos a função  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  dada por

$$f(z) = \ln|z| + i\theta, \quad \theta = \arg(z) \in (-\pi, \pi)$$

de ramo principal do logaritmo.

---

## 4 Aula 04 - 09/01/2023

### 4.1 Motivações

- Equações de Cauchy-Riemann;
- Funções Harmônicas e suas Relações com as Analíticas.
- Funções Conformes e Transformações de Möbius

### 4.2 Equações de Cauchy-Riemann

**Definição.** Uma região  $G$  do plano complexo é um aberto conexo dele.

Considere uma função  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  analítica sobre a região  $G$  e defina

$$u(x, y) = \operatorname{Re}(f(z)), \quad v(x, y) = \operatorname{Im}(f(z)), \quad z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}$$

Assim,  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ,  $z = x + iy \in \mathbb{C}$ . Observe que

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{ih \rightarrow 0} \frac{f(z+ih) - f(z)}{ih} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{u(x+h, y) - u(x, y)}{h} + i \frac{v(x+h, y) - v(x, y)}{h} \right) \\ &= \frac{du}{dx}(x, y) + i \frac{dv}{dx}(x, y), \quad z = x + iy \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{ih \rightarrow 0} \left( \frac{u(x, y+h) - u(x, y)}{ih} + i \left( \frac{v(x, y+h) - v(x, y)}{ih} \right) \right) \\ &= \frac{1}{i} \frac{du}{dy}(x, y) + \frac{dv}{dy}(x, y) = \frac{dv}{dy}(x, y) - i \frac{du}{dy}(x, y). \end{aligned} \quad (2)$$

A partir de (1) e (2), derivamos as equações de Cauchy-Riemann:

$$\boxed{\frac{du}{dx} = \frac{dv}{dy} \quad \text{e} \quad \frac{dv}{dx} = -\frac{du}{dy}}$$

### 4.3 Funções Harmônicas

Além disso, se  $u$  e  $v$  possuem derivadas de segunda ordem, temos

$$\frac{d}{dy} \left( \frac{du}{dx} \right) = \frac{d^2 v}{dy^2}, \quad \frac{d}{dy} \left( \frac{dv}{dx} \right), \quad \frac{d^2 v}{dx^2} = -\frac{du}{dx dy}$$

de onde segue que

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} = 0$$

e, de forma análoga,  $u$  é harmônica. Nesta lógica, diremos que  $f$  é harmônica se  $\Delta f = \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{d^2 f}{dy^2} = 0$ .

Seja  $u : G \rightarrow \mathbb{R}$  harmônica, a busca por  $v : G \rightarrow \mathbb{R}$  harmônica satisfazendo Cauchy-Riemann é um questão. Um exercício é mostrar que a existência de  $v$  depende de  $G$  e que, em geral, não encontra-se  $v$  harmônica satisfazendo Cauchy-Riemann. (Por exemplo,  $G = G - \{0\}$ ,  $u(x, y) = \ln(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$ )

**Teorema.** Sejam  $u, v : G \rightarrow \mathbb{R}$  harmônicas de classe  $C^1$ . Então,  $f = u + iv$  é analítica se e só se  $u$  e  $v$  satisfazem Cauchy-Riemann.

**Prova.** Exercício.



Dada  $u : G \rightarrow \mathbb{R}$  harmônica, uma função  $v : G \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f = u + iv$  seja analítica é dita ser a função harmônica conjugada de  $u$ .

### **Exercícios.**

- 1) Seja  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  um ramo e  $n$  um natural. Então,  $z^n = e^{nf(z)}$ ,  $z \in G$ .
- 2) Mostre que  $\operatorname{Re}(z^{\frac{1}{2}}) > 0$ ;
- 3) tome  $G = \mathbb{C} - \{z : z \leq 0\}$ . Ache todas as funções analíticas tais que  $z = (f(z))^n$ .
- 4) Seja  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $G$  conexo e  $f$  analítica. Se, para todo  $z$  de  $G$ ,  $f(z)$  é real, então  $f$  é constante.

**Teorema.** Considere  $G = \mathbb{C}$  ou  $G = B(0, r)$ ,  $r > 0$ . Se  $u : G \rightarrow \mathbb{R}$ , então  $u$  admite harmônico conjugado.

**Prova.** Buscamos  $v : G \rightarrow \mathbb{R}$  satisfazendo Cauchy-Riemann. Coloque

$$v(x, y) = \int_0^y \frac{du}{dx}(x, t) dt + \phi(x)$$

em que  $\phi(x) = - \int_0^x \frac{du}{dy}(t, 0) dt$ .

Portanto,

$$f = u(x, y) + i \left( \int_0^y \frac{du}{dx}(x, t) dt - \int_0^x \frac{du}{dy}(t, 0) dt \right). \quad \blacksquare$$

## 4.4 Transformações Conformes

**Exercícios.** Mostre que  $e^z$  leva retas ortogonais em curvas ortogonais.

**Definição.** Uma  $\gamma$  é uma curva numa região  $G$  se  $\gamma : [a, b] \rightarrow G$  é contínua.

Sejam  $\gamma_1, \gamma_2$  curvas em  $G$  tais que  $\gamma_1'(t_1) \neq 0$ ,  $\gamma_2'(t_2) \neq 0$ ,  $\gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2) = z_0 \in G$ . O ângulo entre  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  em  $z_0$  é dado por

$$\arg(\gamma_1'(t_1)) - \arg(\gamma_2'(t_2)).$$

Observe que se  $\gamma$  é uma curva em  $G$  e  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  é analítica,  $\sigma = f \circ \gamma$  é uma curva em  $\mathbb{C}$ . Assumimos  $\gamma \in C^1$ . Neste caso,  $[a, b] = \operatorname{Dom}(\gamma)$ , ou seja, temos

$$\gamma'(t) = f'(\gamma(t))\gamma'(t), \quad t \in [a, b],$$

donde segue que

$$\arg(\gamma'(t)) = \arg(f'(\gamma(t))) + \arg(\gamma'(t))$$

**Teorema.** Seja  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  analítica. Então,  $f$  preserva ângulos para todo  $z$  em  $G$  tal que  $f'(z) \neq 0$ .

**Prova.** Seja  $z_0 \in G$  tal que  $f'(z_0) \neq 0$ . Considere curvas  $\gamma_1, \gamma_2$  tais que  $\gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2) = z_0$ . Se  $\theta$  é ângulo entre  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  em  $z_0$ , então

$$\theta = \arg(\gamma_1'(t_1)) - \arg(\gamma_2'(t_2))$$

Agora, note que o ângulo entre  $\sigma_1 = f \circ \gamma_1$  e  $\sigma_2 = f \circ \gamma_2$  em  $f(z_0)$  é

$$\arg \sigma_1'(t_1) - \arg \sigma_2'(t_2) = \theta.$$

Portanto,  $f$  preserva ângulos.  $\blacksquare$ .

Seja  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  que preserva ângulo e

$$\lim_{w \rightarrow z} \frac{|f(z) - f(w)|}{|z - w|}$$

existe. Então,  $f$  é dita aplicação conforme. Por exemplo,  $f(z) = e^z$  é injetora em qualquer faixa horizontal de largura menor que  $2\pi$ .

**Corolário.**  $e^G = \mathbb{C} - \{z : z \leq 0\}$ .

Se  $G$  é uma faixa aberta de comprimento  $2\pi$ , o ramo de  $\log$  faz o caminho inverso. Adicionalmente,  $\frac{1}{z}$  é a sua derivada.

---

## 5 Aula 05 - 10/01/2023

### 5.1 Motivações

- Transformações de Möbius elementares;
- Consequências Geométricas da Transformação de Möbius;

### 5.2 Transformações de Möbius

**Definição.** Uma fração linear é  $\frac{az+b}{cz+d}$ ,  $z \in \mathbb{C}$ ,  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  fixos.

**Definição.** Uma fração linear tal que  $ad - bc \neq 0$  define uma transformação

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad z \in \mathbb{C},$$

chamada transformação de Möbius.

Consideraremos a transformação como sendo  $T : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$  da seguinte maneira:

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad z \neq -\frac{d}{c}$$
$$T\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty \quad \text{e} \quad T(\infty) = \frac{a}{c}.$$

Neste caso,  $T^{-1}(z) = \frac{dz-b}{-cz+a}$ ,  $z \in \mathbb{C}_\infty$ . Note, também, que os coeficientes de uma Transformação de Möbius são unicamente determinados, pois

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{(\lambda a)z + (\lambda b)}{(\lambda c)z + (\lambda d)}, \quad \lambda \neq 0.$$

Denotaremos por TM a coleção de transformações de Möbius.

**Exemplo 5.1.** As TM's elementares, dado  $a \in \mathbb{C}$ , são

- Translação:  $T(z) = z + a$ ,  $z \in \mathbb{C}_\infty$ ,
- Rotação:  $R(z) = e^{i\theta}z$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$ ,
- Inversão:  $I(z) = \frac{1}{z}$ ,
- Homotetia:  $H(z) = az$ .

**Proposição.** Toda TM é composição de TM's elementares.

**Prova.** Seja  $T \in TM$  dada por  $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ .

Caso 1) Se  $c = 0$ , então  $T(z) = \frac{az}{d} + \frac{b}{d}$ . Neste caso,  $H(z) = \frac{a}{d}z$  e  $S(z) = z + \frac{b}{d}$ , tal que  $T(z) = S \circ H(z)$

Caso 2) Se  $c \neq 0$ , então tome

$$T_1(z) = z + \frac{d}{c}, I(z) = \frac{1}{z}, H(z) = \frac{(bc-ad)z}{c^2}, \text{ e } T_2(z) = z + \frac{a}{c}.$$

Com isso, temos

$$t_2 \circ H \circ I \circ T_1 = t. \quad \blacksquare$$

**Exercícios.** 1) Mostre que  $(TM, \circ)$  é um grupo.

2) Se  $T \in TM$  é tal que  $T(z_i) = z_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  $z_i \neq z_j$ ,  $i \neq j$ , então  $T = Id_{\mathbb{C}_\infty}$ .

---

**Proposição.** Sejam  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}_\infty$ , distintos. Existe uma única  $T \in TM$  tal que

$$T(z_1) = 1, T(z_2) = 0, T(z_3) = \infty.$$

**Prova.** *Unicidade:*

Se existem  $T, S \in TM$  satisfazendo a hipótese, então  $S^{-1}(T(z_i)) = z_i, i = 1, 2, 3$ . Logo,  $S^{-1} \circ T = Id_{\mathbb{C}_\infty}$  e  $S = T$ .

*Existência:* Defina  $T : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$  por

$$T(z) = \begin{cases} \frac{\frac{z-z_2}{z-z_3}}{\frac{z_1-z_2}{z_1-z_3}}, & z_i \in \mathbb{C}, i = 1, 2, 3; \\ \frac{\frac{z_1-z_3}{z-z_2}}{\frac{z_1-z_3}{z_1-z_3}}, & z_1 = \infty; \\ \frac{\frac{z-z_3}{z_1-z_3}}{\frac{z_1-z_3}{z_1-z_3}}, & z_2 = \infty; \\ \frac{\frac{z-z_3}{z-z_2}}{\frac{z_1-z_2}{z_1-z_3}}, & z_3 = \infty. \end{cases},$$

tal que  $T \in TM$  satisfazendo a hipótese. ■

**Corolário.** Dados  $z_1, z_2, z_3, w_1, w_2, w_3$  distintos em  $\mathbb{C}_\infty$ , existe uma única  $T \in TM$  tal que

$$T(z_i) = w_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

**Prova.** *Exercício.* ■

Observe que se  $z_i \in \mathbb{C}_\infty, i = 1, 2, 3$ , distintos e  $T \in TM$  é tal que a proposição seja satisfeita, denotaremos  $T(z)$  por  $T(z) := [z, z_1, z_2, z_3]$ .

**Exemplo 5.2.** Se  $[z, 1, 0, \infty] = z, z \in \mathbb{C}_\infty, z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}_\infty$  distintos, então

$$\begin{aligned} [z_1, z_1, z_2, z_3] &= 1; \\ [z_2, z_1, z_2, z_3] &= 0; \\ [z_3, z_1, z_2, z_3] &= \infty. \end{aligned}$$

**Proposição.** Sejam  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}_\infty$  distintos e  $S \in TM$ . Então,

$$[z, z_1, z_2, z_3] = [S(z), S(z_1), S(z_2), S(z_3)], \quad z \in \mathbb{C}_\infty.$$

**Prova.** Seja  $T(z) = [z, z_1, z_2, z_3]$  e tome  $M = T \circ S^{-1}$ . Note que

$$\begin{aligned} M(S(z_1)) &= 1, \\ M(S(z_2)) &= 0, \\ M(S(z_3)) &= \infty. \end{aligned}$$

Assim,

$$M(z) = [S(z), S(z_1), S(z_2), S(z_3)]$$

e  $T(z) = M(S(z)) = [S(z), S(z_1), S(z_2), S(z_3)]$ . ■

**Proposição.** Sejam  $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}_\infty$  distintos. Então,  $[z_1, z_2, z_3, z_4] \in \mathbb{R}$  se e só se  $z_i \in C$  para algum círculo.

**Prova.**  $\Rightarrow$ ) Se  $z_i \in C, i = 1, 2, 3, 4$ , então  $z_1 \in D$ , em que  $D$  é o único círculo determinado por  $z_2, z_3, z_4$ .

**Exercícios.** Mostre que  $[z_1, z_2, z_3, z_4] \in \mathbb{R}$

---

$\Leftarrow$ ) Definimos  $S(z) = [z, z_2, z_3, z_4], z \in \mathbb{C}_\infty$ . Mostraremos que  $S^{-1}(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$  e  $S^{-1}(\mathbb{R}_\infty)$  é um círculo.  
Caso 1: Seja  $w \in S^{-1}(\mathbb{R})$  e sejam  $a, b, c, d$  números complexos tais que

$$S(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

como  $S(w)$  pertence a  $\mathbb{R}$ , temos  $S(w) = \overline{S(w)}$ , donde segue que

$$\frac{aw + b}{cw + d} = \frac{\bar{a}\bar{w} + \bar{b}}{\bar{c}\bar{w} + \bar{d}},$$

o que implica em  $(cw + d)(\bar{a}\bar{w} + \bar{b}) = (aw + b)(\bar{c}\bar{w} + \bar{d})$ . Logo,

$$(c\bar{a} - a\bar{c})|w|^2 + (c\bar{b} - a\bar{d})w + (d\bar{a} - b\bar{c})\bar{w} + (d\bar{b} - b\bar{d}) = 2i\operatorname{Im}(a\bar{c}) + 2i(\operatorname{Im}(w(-\bar{b}c + a\bar{d})) + 2i\operatorname{Im}(b\bar{d})) = 0. \quad (3)$$

Caso 1.1:  $\operatorname{Im}(\bar{a}c) = 0$ , seja  $\alpha = bc - ad$ . Segue de 3 que

$$2i(\operatorname{Im}(w\alpha) + \operatorname{Im}(d\bar{b})) = 0.$$

Logo,  $\operatorname{Im}(\alpha w + \beta) = 0, \beta = \operatorname{Im}(d\bar{b})$ . Assim,  $\alpha w + \beta \in \mathbb{R}$ , em que  $r : \frac{-\beta t}{\alpha}, t \in \mathbb{R}$ .

Caso 1.2:  $\rho = \operatorname{Im}(\bar{a}c) \neq 0$ . Seja  $\gamma = c\bar{b} - a\bar{d}$ . Então, dividindo 3 por  $2i\rho$ , temos

$$|w|^2 + \operatorname{Im}\left(\frac{\gamma}{\rho}\right)w + \operatorname{Im}\left(\frac{d\bar{b}}{\rho}\right) = 0$$

$$|w - \gamma|^2 = (|\gamma|^2 - \beta)^{\frac{1}{2}} = r > 0.$$

---

## 6 Aula 06 - 12/01/2023

### 6.1 Motivações

- Transformações de Möbius e Harmônicos Conjugados;
- Simetrias e Orientação no Plano  $\mathbb{C}$ ;
- Integração Complexa.

### 6.2 Exercícios de Hoje

#### 6.2.1 Jéssica

- a)  $(7 + i, 1, 0, \infty)$
- b)  $(2, 1 - i, 1, 1 + i)$
- c)  $(0, 1, i, -1)$
- d)  $(i - 1, \infty, 1 + i, 0)$

Utilizaremos os seguintes casos: Se  $z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$ , então  $S(z) = \frac{\frac{z-z_3}{z-z_4}}{\frac{z_2-z_3}{z_2-z_4}}$ . Caso  $z_3 = \infty$ ,  $S(z) = \frac{z-z_3}{z-z_4}$ . Por fim, se  $z_4 = \infty$ ,  $S(z) = \frac{z-z_3}{z_2-z_3}$ . Assim, vamos às contas.

a)

$$S(7+i) = \frac{7+i}{1} = 7+i;$$

b)

$$S(2) = \frac{\frac{2-1}{2-1-i}}{\frac{1-i-1}{1-i-1-i}} = \frac{\frac{1}{1-i}}{\frac{i}{2i}} = \frac{2}{1-i} \frac{1+i}{1+i} = \frac{2}{2}(1+i) = 1+i$$

c)

$$S(0) = \frac{\frac{0-i}{0+1}}{\frac{1-i}{2}} = \frac{-2i}{1-i} \frac{1+i}{1+i} = \frac{-2i}{2}(1+i) = 1-i;$$

d)

$$S(1i) = \frac{i-1-1-i}{i-1-0} = \frac{-2}{i-1} \frac{1+i}{1+i} = \frac{-2}{-2}1+i = 1+i.$$

#### 6.2.2 Tiago

Vamos mostrar que  $T(\mathbb{R}_\infty) = \mathbb{R}_\infty \iff a, b, c, d \in \mathbb{R}$ .  $\Rightarrow$ ) Suponha que  $T(\mathbb{R}_\infty) = \mathbb{R}_\infty, T(z_0) = 0, z_0 \in \mathbb{R}_\infty$ . Então,

$$\frac{az_0 + b}{cz_0 + d} = 0 \Rightarrow az_0 + b = 0 \Rightarrow z_0 = \frac{-b}{a} \in \mathbb{R}_\infty.$$

No caso de  $z_\infty \in \mathbb{R}_\infty = \infty$ , então

$$\frac{az_\infty + b}{cz_\infty + d} = \infty \Rightarrow \frac{cz_\infty + d}{az_\infty + b} = 0 \Rightarrow cz_\infty + d = 0 \Rightarrow z_\infty = \frac{-d}{c} \in \mathbb{R}_\infty.$$

Agora, para  $z_1 \in \mathbb{R}_\infty, T(z_1) = 1$ , tal que

$$\frac{az_1 + b}{cz_1 + d} = 1 \Rightarrow az_1 + b = cz_1 + d \Rightarrow z_1(a - c) = db \Rightarrow az_1 \left(1 - \frac{c}{a}\right) = db \Rightarrow z_1 \left(1 - \frac{c}{a}\right) = \frac{db}{a}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{z_1}{c} - \frac{z_1}{a} = \frac{\frac{d}{a}}{c} - \frac{\frac{b}{a}}{c} &\Rightarrow \frac{z_1}{c} - \frac{z_1}{a} = \frac{r_2}{a} - \frac{r_1}{c} \Rightarrow \frac{z_1 + r_1}{c} = \frac{r_2 + z_1}{a} \Rightarrow \frac{z_1 + r}{z_1 + r_2} = \frac{c}{a} \\ &\Rightarrow \frac{d}{a} = \frac{d}{c} \frac{c}{a} \in \mathbb{R}_\infty = r_2 r_3 \end{aligned}$$

Logo, colocando  $r_1 = \frac{b}{a}, r_2 = \frac{d}{c}, r_3 = \frac{c}{a}$ , encontramos os coeficientes

$$Tz = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c} \frac{z + \frac{b}{a}}{z \frac{c}{a} + \frac{d}{a}} = \frac{z + r_1}{r_3 z + r_2 r_3}.$$

$\Leftarrow$ ) Para provar esse lado, considere  $z \in \mathbb{R}_\infty$ . Então,  $T(z) = \frac{az+b}{cz+d} \in \mathbb{R}_\infty$ . Portanto,  $T(\mathbb{R}_\infty) = \mathbb{R}_\infty$ . ■

### 6.3 Final de Transformações de Möbius.

A continuação da prova da proposição é exercício.

**Teorema.** *Transformações de Möbius levam círculos em círculos.*

**Prova.** *Exercício.*

### 6.4 Simetria e Orientação.

Dada uma circunferência  $\Omega$  e  $z_1, z_2, z_3 \in \Omega$  distintos, diremos que  $z$  e  $z^*$  são simétricos se  $[z^*, z_1, z_2, z_3] = [\bar{z}, z_1, z_2, z_3]$

**Exemplo 6.1.** *Um ponto é simétrico a si mesmo se  $z \in C$  com  $C$  o círculo determinado por  $z_1, z_2, z_3$ .*

**Exercícios.** *Mostre que a definição de simetria não depende da escolha dos  $z'_i$ s.*

A ideia geométrica por trás desse conceito é a seguinte: Considere  $\gamma$  uma reta e  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  e coloque  $z_3 = \infty$ . Dizer que  $z$  e  $z^*$  são simétricos equivale a

$$[z^*, z_1, z_2, \infty] = [\bar{z}, z_1, z_2, z_3] \iff \frac{z^* - z_2}{z_1 - z_2} = \overline{\left( \frac{z - z_2}{z_1 - z_2} \right)} = \left( \frac{\bar{z} - \bar{z}_2}{\bar{z}_1 - \bar{z}_2} \right).$$

Assim, obtemos

$$\frac{z^* - z_2}{z_1 - z_2} = \frac{\bar{z} - \bar{z}_2}{\bar{z}_1 - \bar{z}_2}$$

o que implica

$$\frac{z^* - z_2}{z_1 - z_2} = \bar{z} - \bar{z}_2 \quad (\text{Exercício: } |z^* - z_2| = |z - z_2|)$$

para qualquer  $z_2$  em  $r$ . Logo,  $d(z^*, r) = d(z, r)$ . Além disso,  $[z^*, z] \perp r$ .

A seguir, vamos lidar com o conceito de simetria com relação a um círculo de  $\mathbb{C}$ . De fato, tome

$$\begin{aligned} \Omega &= \{z : |z - a| = r\}, \quad r > 0. \\ [z^*, z_1, z_2, z_3] &= [\bar{z}, z_1, z_2, z_3] = \quad (\text{Aplicando translação, inversão, homotetia:}) \\ &= [\bar{z}, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3] = \left[ \frac{r^2}{\bar{z} - \bar{a}}, \frac{r^2}{\bar{z}_1 - \bar{a}}, \frac{r^2}{\bar{z}_2 - \bar{a}}, \frac{r^2}{\bar{z}_3 - \bar{a}} \right] \\ &= \left[ \frac{r^2 + a}{\bar{z} - \bar{a}}, z_1 - a, z_2 - a, z_3 - a \right]. \end{aligned}$$

Decorre que

$$z^* = a + \frac{r^2}{\bar{z} - \bar{a}}$$

**Exercícios.**  $z^* \in l := \{a + t(z - a) : 0 < t < \infty\}$

---

## 7 Aula 07 - 13/01/2023

### 7.1 Motivações

- Simetrias e Transformações d Möbius;
- Orientação;
- Funções de Variação Limitada.

### 7.2 Exercícios de Hoje

#### 7.2.1 Ana Lúcia

Dado  $z$  em  $\mathbb{C}$ , temos  $\bar{z}$  em  $\mathbb{C}$  também, tal que  $|z|^2 = z\bar{z} = 1$ . Como queremos  $T(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ ,  $|T(z)| = 1$  e  $T(z)\overline{T(z)} = 1 \forall z \in \mathbb{C}$ . Note que

$$\begin{aligned} T(z)\overline{T(z)} = 1 &\iff \frac{az + b}{cz + d} \frac{\overline{a\bar{z} + \bar{b}}}{\overline{c\bar{z} + \bar{d}}} = 1 \iff \\ 0 &= z\bar{z}(a\bar{a} - c\bar{c}) + \bar{z}(b\bar{a} - d\bar{c}) + z(\bar{b}a - \bar{d}c) + \bar{b}\bar{b} - \bar{d}\bar{d}. \end{aligned}$$

Como  $z\bar{z} - 1 = 0$ , temos

$$\begin{cases} a\bar{a} - c\bar{c} = 1 \\ b\bar{a} - d\bar{c} = 0 \\ a\bar{b} - c\bar{d} = 0 \\ b\bar{b} - d\bar{d} = -1 \end{cases}$$

Daí,

$$|a|^2 - |c|^2 = 1, |b|^2 - |d|^2 = -1 \Rightarrow |a|^2 - |c|^2 = -|b|^2 + |d|^2 \Rightarrow |a|^2 + |b|^2 = |c|^2 + |d|^2.$$

Assim, as condições suficientes para o sistema são

$$a\bar{b} - c\bar{d} = 0, \quad \text{e } |a|^2 + |b|^2 = |c|^2 + |d|^2.$$

Para a condição necessária, suponha  $c = \lambda\bar{b}$ . Então,

$$a\bar{b} - \lambda\bar{b}\bar{d} = 0 \Rightarrow (a - \lambda\bar{d})\bar{b} = 0 \Rightarrow a = \lambda\bar{d} \iff d = \frac{\bar{a}}{\lambda}$$

#### 7.2.2 João Vitor Occhiucci

Do Teorema 3.14, sabemos transformações de Möbius levam círculos em círculos, portanto  $T(\mathbb{R}_\infty) = \mathbb{R}_\infty$  é equivalente a  $Tz = (z, z_2, z_3, z_4)$  com  $z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{R}_\infty$  distintos. Ademais, do exercício 3.7, temos

$$\begin{aligned} z_2 &= \frac{d-b}{a-c} \\ z_3 &= -\frac{b}{a} \\ z_4 &= -\frac{d}{c} \end{aligned}$$

Portanto, é imediato que se existirem  $a, b, c$  e  $d$  reais para  $T$ , então  $z_2, z_3, z_4$  estarão em  $\mathbb{R}_\infty$  e, consequentemente,  $T(\mathbb{R}_\infty) = \mathbb{R}_\infty$ . Por outro lado, se tivermos uma transformação de Möbius  $T$ , tal que  $T(\mathbb{R}_\infty) = \mathbb{R}_\infty$ , então  $T(z) = (z, z_2, z_3, z_4)$  com  $z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{R}_\infty$  distintos. Daí, tome

$$a = \frac{1}{z_2 - z_3}, b = \frac{z_3}{z_2 - z_3}, c = \frac{1}{z_2 - z_4} \text{ e } d = \frac{z_4}{z_2 - z_4}$$

e

$$Uz = \frac{az + b}{cz + d}$$

Veja que  $Uz_2 = 1, Uz_3 = 0$  e  $Uz_4 = \infty$ , portanto, pela proposição 3.9,  $U = T$ , ou seja, podemos escolher  $a, b, c$  e  $d$  reais tais que  $Tz = \frac{az + b}{cz + d}$ .

### 7.3 Continuando Simetrias

**Proposição.** Transformações de Möbius levam pontos simétricos em pontos simétricos.

**Prova.** Seja  $l$  uma circunferência e  $z$  e  $z^*$  simétricos com relação à  $\Omega$ . Devemos mostrar que  $T(z), T(z^*)$  são simétricos com relação a  $T(\Omega)$ . Em outras palavras, queremos

$$[T(z), T(z_1), T(z_2), T(z_3)] = \overline{[T(z^*), T(z_1), T(z_2), T(z_3)]}.$$

(Fica como exercício mostrar que  $[T(z), T(z_1), T(z_2), T(z_3)] = [\bar{z}, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3]$ ).

**Definição.** Dada uma circunferência  $\Omega$  e uma tripla  $z_i \in \Omega, i = 1, 2, 3$ , dizemos que esta tripla é uma orientação. Definimos o conjunto

$$D_l = \{z : \text{Im}[z, z_1, z_2, z_3] > 0\}$$

como o lado direito de  $l$ . O lado esquerdo, por outro lado, é

$$E_l = \{z : \text{Im}[z, z_1, z_2, z_3] < 0\}.$$

**Exemplo 7.1.** Um circuito passando por  $\infty < z_1, z_2, z_3$  em  $\mathbb{R}_\infty$ . Seja  $T(z) = [z, z_1, z_2, z_3], z \in \mathbb{R}_\infty$ . Neste caso,  $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}, a, b, c, d \in \mathbb{R}_\infty$ . Assim,

$$\frac{az + b}{cz + d} \frac{c\bar{z} + d}{c\bar{z} + d} = \frac{ac|z|^2 + adz + cb\bar{z} + bd}{|cz + d|^2}.$$

Logo,  $\text{Im}(T(z)) > 0 \iff \text{Im}\left[(ad - bc)z\right] > 0$ . Portanto, se  $\Omega$  é o círculo,

$$D_\Omega = \{z : (ad - bc)\text{Im}(z) > 0\}$$

**Proposição.** Sejam  $\Omega_1, \Omega_2$  circunferências em  $\mathbb{C}_\infty$  e  $T$  uma TM com  $T(\Omega_1) = \Omega_2$ . Então,  $T$  preserva orientação.

**Prova.** Exercício.

**Exemplo 7.2.** Seja  $D = \{z : \text{Re}z > 0\}, D^U = \{z : |z| < 1\}$ . Seja  $\Omega_1$  o círculo e  $\Omega_2$  dados por

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= \{z : z = iy, y \in \mathbb{R}\} \\ \Omega_2 &= \{e^{iy}, y \in \mathbb{R}\}\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}D_{\Omega_1} &= \{z : \text{Im}[z, -i, 0, i] > 0\} = \{z : \text{Im}(iz) > 0\} = \{z : \text{Re}(z) > 0\}. \\ D_{\Omega_2} &= \{z : \text{Im}[z, -i, -1, i] > 0\} = \{z : |z| < 1\}.\end{aligned}$$

A TM que leva  $\Omega_1$  em  $\Omega_2$  é dada por

$$T(z) = \frac{z - 1}{z + 1},$$

e  $M(z) = \frac{e^z - 1}{e^z + 1}$  é tal que  $M(D) = D^U$ .



---

## 7.4 Integração Complexa

### 7.4.1 Funções de Variação Limitada (BV - Bounded Variation)

**Definição.** Seja  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  uma função. Diremos que  $\gamma$  tem variação limitada se

$$\sum_{k=1}^n |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k+1})| < M, \quad M > 0,$$

com  $P = \{a = t_0, t_1, \dots, t_n = b\}$  partição de  $[a, b]$ . Se  $\gamma$  é BV, a quantia

$$V(\gamma) = \sup_P v(\gamma, P)$$

é chamada variação de  $\gamma$ .

**Exercícios.** Se  $P \subseteq Q$ , então  $V(\gamma, P) \leq V(\gamma, Q)$ . Se  $\gamma_1, \gamma_2$  são BV, então  $\alpha\gamma_1 + \beta\gamma_2$  é BV para  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ . Além disso,

$$V(\alpha\gamma_1 + \beta\gamma_2) \leq |\alpha|V(\gamma_1) + |\beta|V(\gamma_2)$$

**Exercícios.** Se  $\gamma$  é BV, então ela é limitada, mas a recíproca não vale.

**Exemplo 7.3.** Tome  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\text{Im}(\gamma) = 0$  e  $\gamma$  crescente. Neste caso,  $\gamma$  é BV. Com efeito, para toda partição  $P$  de  $[a, b]$ , temos

$$v(\gamma, P) = \sum_{k=1}^n |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k+1})| = \gamma(b) - \gamma(a)$$

De fato, dada uma  $\gamma$  com as duas características acima, ela é BV se, e só se,  $\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$ , com  $\gamma_1, \gamma_2$  monótonas crescentes.

**Exercícios.**

$$\gamma(t) = \begin{cases} t \sin\left(\frac{1}{t}\right), & t \in [0, 2\pi] \\ 0, & t = 0 \end{cases}$$

não é bv, apesar de ser contínua.

Dica: Tome  $t_n = \frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2}} \Rightarrow \gamma(t_n) = \frac{(-1)^n}{n\pi + \frac{\pi}{2}} \Rightarrow v(\gamma, P) \geq c \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ .

Dada  $\gamma$  BV em  $[a, b]$ , considere

$$\gamma_t : [a, t] \rightarrow \mathbb{R}$$

a restrição de  $\gamma$ . Então, considerando a aplicação  $v(\gamma_t), t \in [a, b]$ , crescente e BV, defina  $g(t) = \gamma(t) + v(\gamma_t)$ , de modo que

$$\gamma(t) = -g(t)_v(\gamma_t).$$

---

## 8 Aula 08 - 16/01/2023

### 8.1 Motivações

- Integração Complexa em Curvas;