UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS E COMPUTACIONAIS - ICMC

Notas de Espaços Métricos

Renan Wenzel - 11169472

Professora - Thaís Jordão E-mail: tjordao@icmc.usp.br

8 de agosto de 2023

Conteúdo

0 Informações (Possivelmente) Úteis **3**

0.1 Datas das Provas: 3

0.2 Bibliografia 3

1 Aula 01 - 08/08/2023 **4**

1.1 Motivações 4

2 Aula 02 - 10/08/2023 **5**

2.1 Motivações 5

0 Informações (Possivelmente) Úteis

0.1 Datas das Provas:

P1) 31/08 - Peso 1;

P2) 03/10 - Peso 2;

P3) 31/10 - Peso 2;

P4) 23/11 - Peso 3;

P5) 14/12 - Peso 3.

0.2 Bibliografia

- LIMA, E. L. "Espaços Métricos", Rio de Janeiro: Projeto Euclides, 2005.
- DOMINGUES, H. H. "Espaços Métricos e Introdução à Topologia", Atual Editora, 1982.

Monitoria

A ser definido.

1 Aula 01 - 08/08/2023

1.1 Motivações

- Introdução ao Material do Curso.

O que é um espaço métrico?

Ao longo deste curso, trabalharemos com um conjunto M não-vazio.

Definição. *Uma função $d : M \times M \to \mathbb{R}$ é dita ser uma métrica em M se:*

i) $d(x, y) \geq 0, x, y \in M$;

ii) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y, x, y \in M$;

iii) $d(x, y) = d(y, x), x, y \in M$;

iv) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), x, y, z \in M$.

Neste caso, o par (M, d) é chamado espaço métrico.

Exemplo 1. *1) $(\mathbb{R}, d)$, em que $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0, \infty)$ é dado por d(x, y) = $|x - y|$. É claro que, olhando para $d(x, y)$, vale para quaisquer x, y reais que*

$$d(x, y) = |x - y| = | - 1(y - x)| = 1|y - x| = d(y, x).$$

Assim, resta verificarmos os itens dois e quatro da definição de métrica. Para o item (ii),

$$|x - y| = 0 \Longleftrightarrow x = y.$$

Com relação ao último item, observe que

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

De fato, como $|a| \geq a$ para todo número real a,

$$|x + y|^2 = (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \leq x^2 + 2|x||y| + y^2 = (|x| + |y|)^2.$$

Logo, tomando a raíz dos dois lados, segue a afirmação:

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

Com isso, temos

$$d(x, y) = |x - y| = |x - z + z - y| = |(x - z) - (y - z)| \leq |x - z| + |y - z|.$$

Portanto, $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, o que torna $(\mathbb{R}, d)$ um espaço métrico.

2) Seja X um conjunto não-vazio. Definimos

$$d : X \times X \to [0, \infty)$$

por

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y. \end{cases}$$

Esta métrica é conhecida como métrica discreta. Verifiquemos as propriedades dela.

Com efeito, como a imagem dela pode ser apenas 0 ou 1, o item 1 é trivial. Por definição, a métrica vale 0 se, e somente se, x e y são iguais, tal que o item (ii) está feito. O item (iii) segue automaticamente se x e y são iguais. Caso eles sejam diferentes, temos $d(x, y) = 1, d(y, x) = 1$, ou seja, o item (iii) é válido para todos os casos. Por fim, a desigualdade triangular fica como exercício.

2 Aula 02 - 10/08/2023

2.1 Motivações

- a