Resumo Teórico - Derivadas e Integrais

Renan Wenzel

18 de julho de 2022

Conteúdo

1 Derivadas

1.1 Definições e Propriedades

Definição. *Dada uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua em x_0, dizemos que ela é derivável em x_0 se existe o limite:*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f^{'}(x_0) = \frac{d}{dx} f(x_0).$$

Note que escrevendo $h = x - x_0$, a definição acima equivale ao limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f^{'}(x_0) = \frac{d}{dx} f(x_0).$$

Propriedades:. *A derivada satisfaz as seguintes propriedades:*

Propriedade I)

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

Propriedade II)

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + g'(x_0)f(x_0).$$

Propriedade III)

$$(cf)'(x_0) = cf'(x_0), \quad c \in \mathbb{R}.$$

Propriedade IV)

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0)}{(g(x))^2}.$$

Propriedade V)

$$f(g(x_0))' = f'(g(x_0))g'(x_0).$$

Propriedade VI)

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x, \quad \frac{d}{dx} ln(x) = \frac{1}{x}.$$

Propriedade VII)

$$\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}.$$

Propriedade VIII)

$$(\sin)'(x_0) = (\cos)(x_0), \quad (\cos)'(x_0) = -\sin(x_0).$$

Propriedade IX)

$$(f^{-1})'(x_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))}.$$

Resuminho: A derivada pode ser vista como a taxa de mudança de uma função, além de ser super útil no estudo do gráfico das funções, como veremos posteriormente. Por agora, familiarize-se com as propriedades e tente prová-las, é um bom treino.

Definição. *Se a derivada de uma função for contínua num ponto x_0 e o limite*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f^{'}(x) - f^{'}(x_0)}{x - x_0} = f^{''}(x_0) = \frac{d^2}{dx^2} f(x_0)$$

existir, chamamos este valor de segunda derivada de f em x_0.

Este processo pode ser repetido "infinitamente", contanto que os limites continuem existindo.

Definição. *Seja I um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função. Diremos que $x_0 \in I$ é um ponto de máximo local de f, se existir $\delta > 0$ tal que $f(x) \le f(x_0)$ para todo $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap I$. Neste caso, diremos que $f(x_0)$ é um máximo local. Se o que ocorrer for $f(x) \ge f(x_0)$, então diremos que $f(x_0)$ é um mínimo local. Em qualquer dos casos, $x_0 \in I$ será chamado de ponto extremo local.*

Definição. *Seja I um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função. Diremos que $x_0 \in I$ é um ponto de máximo global de f, se $f(x) \le f(x_0)$ para todo $x \in I$. Neste caso, diremos que $f(x_0)$ é um máximo global. Se o que ocorrer for $f(x) \ge f(x_0)$, então diremos que $f(x_0)$ é um mínimo local. Em qualquer dos casos, $x_0 \in I$ será chamado de ponto extremo global.*

Definição. *Um ponto crítico de uma função f é um ponto c em que $f'(x) = 0$ ou $f'(c)$ não existe.*

1.1.1 Resultados Importantes

Começamos com o teorema de Rolle, que afirma que se uma função for contínua e diferenciável num intervalo em que os valores do ponto inicial e final coincidem, então essa função assume seu máximo ou mínimo em um ponto deste intervalo.

Teorema:. *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b). Se f(a) = f(b), então existirá $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.*

Com o teorema de Rolle como base, vamos ao Teorema do Valor Médio, um dos, se não o mais importante resultado do curso:

Teorema:. *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b). Então, existe $c \in (a, b)$ tal que*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a),$$

equivalente a

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Tendo estas duas ferramentas, é possível estudar a fundo pontos de máximo, mínimo e comportamento de funções quanto ao seu crescimento ou decrescimento, além da concavidade delas.

Teorema:. *Sejam $f : D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e c um ponto crítico de f.*
Se o sinal de f' mudar de positivo para negativo em c, então f terá um máximo local em c.
Se o sinal de f' mudar de negativo para positivo em c, então f terá um mínimo local em c.

Teorema:. *Seja f uma função contínua num intervalo $[a, b]$ e diferenciável em (a, b).*
Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, então f será estritamente crescente em $[a, b]$.
Se $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$, então f será estritamente decrescente em $[a, b]$.
Se $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$, então f será constante em $[a, b]$.

Teorema:. *Seja f uma função diferenciável em (a, b).*
Se $f''(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, então f terá concavidade para cima em (a, b).
Se $f''(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$, então f terá concavidade para baixo em (a, b).

A seguir, veremos a Regra de L'Hopital, que permite calcular um limite a partir dos limites das derivadas das funções, o que normalmente simplifica a conta.

Teorema:. *Sejam f e g funções deriváveis num intervalo com $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. Então, se $\lim_{x \to p} f(x) = \lim_{x \to p} g(x) = 0$ ou $\lim_{x \to p} f(x) = \lim_{x \to p} g(x) = \infty$ e se*

$$\lim_{x \to p} \left(\frac{f'(x)}{g'(x)} \right) = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

segue que

$$\lim_{x \to p} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \lambda.$$

Por fim, as expansões de Taylor permitem estudar funções contínuas e diferenciáveis como polinômios, que são muito mais simples:

Teorema:. *A série de Taylor de uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ infinitamente diferenciável (ou seja, todas as derivadas existem) no ponto x_0 é dada por:*

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)(x_0)}}{i!}(x - x_0)^i.$$

Também pode-se definir o polinômio de Taylor de grau n como

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)(x_0)}}{i!}(x - x_0)^i.$$

Da definição acima, segue que a série de Taylor da função é o limite de n indo pra infinito do polinômio de Taylor.

Segue abaixo um algorítmo para analisar o gráfico de uma função:
Determine, se possível, os pontos em que f se anula e os intervalos em que ela é positiva ou negativo.
Em seguida, encontre as assíntotas verticais e horizontais de f e os pontos críticos de f.
A seguir, estude o sinal de f' para determinar o crescimento de f.
Calcular f" para dizer a concavidade da função em cadaintervalo.

2 Integração

2.1 Definições e Propriedades

Definição. *Uma antiderivada de uma função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função derivável F definida em $[a,b]$ tal que*

$$\frac{d}{dx}(F(x)+k) = f(x), \quad k \in \mathbb{R}$$

Denotamos a família de primitivas de f por:

$$\int f(x)dx = F(x) + k, \quad k \in \mathbb{R},$$

também chamada integral indefinida de f com respeito a x.

Propriedades:. *Assim como a derivada, a integral satisfaz algumas propriedades:*

Propriedade I)

$$\int f(x) + g(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

Propriedade II)

$$\int cf(x)dx = c\int f(x)dx.$$

Propriedade IV)

$$|\int f(x)dx| \leq \int |f(x)dx.$$

A ideia da integral indefinida por si não apresenta muito significado e, para isso, é preciso introduzir as integrais definidas, responsáveis por grande parte das aplicações das integrais. Antes, no entanto, introduz-se a base das integrais definidas, as somas de Riemann e as partições.

Definição. *Uma partição de um intervalo fechado $[a,b]$ é um subconjunto $P : a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b$. Dada uma partição e uma função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, a soma inferior e a soma superior são:*

$$s(f,P) := \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta t_i, \quad S(f,P) := \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta t_i,$$

em que $m_i = \inf\{f(x) : x \in (t_{i-1}, t_i)\}$ e $M_i = \sup\{f(x) : x \in (t_{i-1}, t_i)\}$ e $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$.

Propriedades:. *As somas superiores e inferiores satisfazem as seguintes propriedades: Sejam $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada, $P : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ e $Q : a = q_0 < q_1 < \cdots < q_n = b$ partições de $[a,b]$.*

Propriedade I)

$$m(b-a) \leq s(f,P) \leq S(f,P) \leq M(b-a), \quad m = \inf\{f(x) : x \in [a,b]\}, \quad M = \sup\{f(x) : x \in [a,b]\}.$$

Propriedade II)

$$s(f,P) \leq s(f, P \cup Q) \leq S(f, P \cup Q) \leq S(f,Q).$$

Definição. *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Escrevemos:*

$$\int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx := \lim_{\Delta t \to 0} s(f,P) = \sup_P \{s(f,P)\}$$

e

$$\int_{a}^{\bar{b}} f(x)dx := \lim_{\Delta t \to 0} S(f,P) = \inf_P \{S(f,P)\}$$

para a integral definida inferior e superior de f com respeito a x, respectivamente. No caso em que $\int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{\overline{b}} f(x)dx$*, dizemos que f é integrável em* $[a, b]$ *e escrevemos simplesmente*

$$\int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{\overline{b}} f(x)dx = \int_{a}^{b} f(x)dx.$$

Propriedades:. *As integrais definidas satisfazem:*

Propriedade I)

$$m(b-a) \leq s(f,P) \leq S(f,P) \leq M(b-a), \quad m = \inf\{f(x) : x \in [a,b]\}, \quad M = \sup\{f(x) : x \in [a,b]\}.$$

Propriedade II)

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{b} f(x)dx, \quad c \in (a,b) \textit{(válido para todas)}$$

Propriedade III)

$$\int_{a}^{\overline{b}} f(x) + g(x)dx \leq \int_{a}^{\overline{b}} f(x)dx + \int_{a}^{\overline{b}} g(x)dx, \quad g \textit{ limitada.}$$

Propriedade IV)

$$\int_{a}^{b} f(x)dx \leq \int_{a}^{b} g(x)dx, \quad f(x) \leq g(x) \textit{(válido para todas).}$$

Propriedade V)

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = -\int_{b}^{a} f(x)dx, \quad \int_{a}^{a} f(x)dx = 0.$$

2.2 Resultados

Para encontrar as integrais indefinidas, existem técnicas que podemos utilizar para facilitar o processo. A primeira delas é a substituição de variável, baseada em alterar "o dx para outra variável mais simples du", o equivalente à regra da cadeia para integrais:

Propriedades:. *Sejam f e g tais que* $\mathrm{Im}(g) \subset D_f$ *e suponha que F é uma primitiva de f. Então,* $f(g(x))g'(x)$ *tem como primitiva F(g(x)). Escrevendo F' como f e g(x) = u, segue a Regra da Substituição:*

$$\int F'(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du.$$

A outra é análoga à regra da derivada do produto, mas para as integrais, também conhecida como Integração por Partes:

Propriedades:. *Sejam* $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *deriváveis em* (a,b)*. Então, vale:*

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx.$$

Observação:(Também tem a substituição trigonométrica, mas eu não sei comentar muito sobre ela, peço desculpas.)

Com relação a uma função ser integrável, temos os seguintes resultados:

Teorema:. *Toda função* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *contínua é integrável.*

Teorema:. *Toda função* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *contínua possui primitiva.*

Com base nesses dois, chegamos no Teorema Fundamental do Cálculo, que disputa com o Teorema do Valor Médio como o mais importante do curso.

Teorema:. *Seja* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *integrável. Se F é uma primitiva de f, então*

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = F(x)\Big|_{a}^{b} = F(b) - F(a).$$