



UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS E
COMPUTACIONAIS - ICMC

CONSTRUINDO OS REAIS \mathbb{R}

UMA INTRODUÇÃO AOS CORTES DE DEDEKIND

Renan Wenzel - 11169472

Pedro Magalhães Rios - prios@icmc.usp.br

22 de abril de 2022

1 Breve Introdução

O uso dos cortes de Dedekind tem como preceito a construção dos números reais a partir dos racionais, e se baseia em subconjuntos específicos que satisfazem o axioma do supremo. A forma que isso resulta nos números reais segue de um teorema (que assumiremos ser verdade aqui) que diz que o conjunto dos reais é o único corpo ordenado que satisfaz o axioma do Supremos, ou seja, mostrando que os cortes satisfazem ele, seu conjunto deve ser \mathbb{R} também.

Sem mais delongas, vamos definí-los a seguir e provar algumas propriedades antes de prosseguir com a construção dos reais em seguida.

2 Definição e Resultados básicos

Definição 1 (Cortes). *Um corte é um conjunto $\alpha \subset \mathbb{Q}$ tal que:*

- i) $\alpha \neq \emptyset$ e $\alpha \neq \mathbb{Q}$;
- ii) Se $p \in \alpha, q \in \mathbb{Q}$ e $q < p$, então $q \in \alpha$;
- iii) Se $p \in \alpha$, então existe $r \in \alpha$ tal que $p < r$.

Vale adicionar alguns comentários para esclarecer e entender essa definição. Em primeiro lugar, garantimos que um corte não será vazio e nem o conjunto todo, até porque iremos de alguma forma construir os reais a partir disso, então um corte não pode totalizar os racionais. A segunda propriedade garante que todo elemento racional à esquerda de um corte também pertencerá a ele. Por fim, a última propriedade afirma que um corte não possui um elemento maximal, visto que, dado qualquer número pertencente ao corte, é possível encontrar um maior que ele.

Antes de provarmos que há um axioma do supremo, é necessário definir uma relação de ordem entre os cortes. Utilizaremos como base as relações de pertinências entre conjuntos.

Definição 2. *Uma relação de ordem $<$ entre cortes é dada por: $\alpha < \beta \Rightarrow \alpha \subsetneq \beta$*

Verifiquemos, por fim, que essa relação é realmente uma ordem:

Prova: *No que segue, sejam α, β, γ cortes de Dedekind*

a) *Transitividade: Suponha que $\alpha < \beta, \beta < \gamma$. Explicitamente falando, isso significa que $\alpha \subsetneq \beta, \beta \subsetneq \gamma$. A partir disto, segue das propriedades de pertinência de conjuntos que:*

$$\alpha \subsetneq \beta \subsetneq \gamma \Rightarrow \alpha \subsetneq \gamma.$$

Logo, por definição, $\alpha < \gamma$.

b) *Tricotomia: Em primeiro lugar, suponha que $\alpha < \beta$. Então, $\alpha \subsetneq \beta$, ou seja, α está exclusivamente contido em β , do que segue que β não pode estar exclusivamente contido em α , isto é, $\beta \not\subsetneq \alpha$. A prova de que se $\beta < \alpha$, então $\alpha \not\subsetneq \beta$ é análoga. Por fim, caso $\alpha = \beta$, então $\alpha \subseteq \beta$ e $\beta \subseteq \alpha$, tal que a contenção não é restrita em nenhum dos casos. Destarte, apenas a igualdade pode ocorrer.*

Portanto, $<$ define uma ordem entre os cortes. ■

3 O Axioma do Supremo

Nesta seção, provaremos que o conjunto dos cortes munido da ordem definida satisfaz o axioma do supremo.