Como exemplo de aplicação de tudo o que foi visto, veremos um tipo de espaço topológico compacto que aparece na área de sistemas dinâmicos, composto de números inteiros infinitos. Definimos o espaço de sequências de N digitos inteiros como

$$\Omega_N = \{\omega = (\cdots, \omega_{-1}, \omega_0, \omega_1, \dots) : \omega_i \in \{0, 1, \cdots, N-1\}, i \in \mathbb{Z}\} = 0, 1, \cdots, N-1^{\mathbb{Z}}$$

Além disso, é útil separar o espaço no seu lado direito, colocando

$$\Omega_N^R = \{\omega = (\omega_0, \omega_1, \dots) : \omega_i \in \{0, 1, \cdots, N-1\}, i \in \mathbb{Z}\} = 0, 1, \cdots, N-1^{\mathbb{N}}$$

Fixaremos $N = 2$ e a parte direita do espaço de sequências, ou seja, o conjunto

$$\Omega_2^R = \{\omega = (\omega_0, \omega_1, \dots) : \omega_i \in \{0, 1\}, i \in \mathbb{Z}\},$$

pois as versões mais gerais desses conjuntos requerem um rigor que vai além do escopo dessa apresentação.

A ideia por trás desse conjunto é que seus elementos tomam a forma $\omega = (1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, \cdots)$. Assim, pode-se pensar nele como o conjunto de resultados de um jogo de duas opções, por exemplo brincar de cara ou coroa ad infinitum, em que cada entrada de omega representa um resultado.

Nesse espaço, definimos uma topologia baseada no produto de $\{0, 1\}$ com ele mesmo, sendo cada espaço $\{0, 1\}$ munido da topologia discreta. Nessas condições, os abertos tomam a forma de cilindros, estruturas que funcionam como projeções das coordenadas de ω - estamos fixando um valor para uma entrada dele:

$$C_{\alpha_1, \cdots, \alpha_k}^{n_1, \cdots, n_k} := \{\omega \in \Omega_2^R : \omega_{n_i} = \alpha_i, \alpha_i \in \{0, 1\}\},$$

em que $n_1 < \cdots < n_k$ e $\alpha_1, \cdots, \alpha_k \in \{0, 1\}$ são fixos. Intuitivamente, estamos analisando as k primeiras jogadas da nossa partida infinita de cara ou coroa.

Além de uma topologia, definimos uma métrica neste espaço fixando $\lambda > 1$ e colocando

$$d_\lambda(\omega, \omega') = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{|\omega_n - \omega'_n|}{\lambda^{|n|}}.$$

Com isso, o espaço adquire as propriedades de ser perfeito e totalmente disconexo, fazendo dele homeomorfo ao conjunto de Cantor.

Agora que vimos um pouco sobre o espaço e suas propriedades, é hora de entender em quais contextos ele se prova necessário. Essa característica de ser definido por valores inteiros confere-o a classificação de discreto, ou seja, seus valores não são contínuos.

Isso faz do conjunto muito útil para descrever estados, uma aplicação que pode até mesmo ser vista na intuição aqui fornecida, com cada digito representando um estado da moeda no cara ou coroa. Assim, num contexto mais geral, essa área de dinâmica simbólica é útil descrevendo a evolução de sistemas, com cada valor representando um tempo diferente. Ele também aparece na descrição de estados quânticos, realizando um papel importante na definição das integrais de caminho de Feynman formais por meio dos cilindros definidos.

Outras aplicações que não serão tão detalhadas incluem a transmissão e recepção de dados e o armazenamento de informações.