Complex Analysis

Renan Wenzel

10 de janeiro de 2023

Conteúdo

1 Aula 01 - 03/01/2023

1.1 Motivações

- Definir o corpos dos complexos
- Definir a topologia no corpo dos complexos
- Esfera de Riemann

1.2 Definições Básicas

Definição. *Um corpo f é um conjunto não vazio em que definem-se duas operações* $+ : F \times F \to F, \cdot : F \times F \to F$ *satisfazendo:*

i) $w + z = z + w$

ii) $w + (z + u) = (w + z) + u$

iii) Existe 0 em F tal que $w + 0 = w$

iv) Para cada $w \in F$*, existe* $-w \in F$ *tal que* $w + (-w) = 0$

v) $w \cdot z = z \cdot w$

vi) $w \cdot (z \cdot u) = (w \cdot z) \cdot u$

vii) Existe $e \in \mathbb{F}$ *tal que* $w \cdot e = w$

viii) Para cada $w \in F - \{0\}$*, existe* $w^{-1} \in F$ *tal que* $w \cdot w^{-1} = e$

ix) $(w + z) \cdot u = w \cdot u + z \cdot u$,

em que w, z, u pertencem a F.

Considere F um corpo contendo $\mathbb{R}$ e tal que

$$x^2 + 1 = 0$$

tenha solução. Seja i esta solução. Segue que -i é solução dela também, -1.z = z e 0.z = 0 para z em F. Definimos

$$\mathbb{C} := \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}$$

de maneira que os elementos de $\mathbb{C}$ são unicmaente determinados, $\mathbb{C}$ é subcorpo de F e a estrutura algébrica de $\mathbb{C}$ não depende de F. Além disso, este corpo existe.

Com efeito,

1.2.1 Unicidade

Sejam a, b, c, d $\in \mathbb{R}$ tais que

$$a + bi = c + di.$$

Assim, $a - c = i(d - b) \Rightarrow (a - c)^2 = (d - b)^2$, donde segue a unicidade a = c e d = b

1.2.2 Subcorpo

Exercício.

1.2.3 Estrutura Algébrica Independe de F

Seja F outro corpo contendo $\mathbb{R}$ em que $x^2 + 1 = 0$ possui solução. Considere $\mathbb{C}' = \mathbb{R} + j\mathbb{R}$, em que j é a solução da equação em F'. Definimos $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}'$ por

$$T(a + bi) = a + bj$$

e, neste caso, T(z + w) = T(z) + T(w), T(zw) = T(z)T(w) para todos $z, w \in \mathbb{C}$. (Exercício.)

1.2.4 Existência

Seja $F = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ munido das operações $+ : F \times F \to F, \cdot : F \times F \to F$ dadas por

$$+((a, b), (c, d)) = (a + c, b + d)$$
$$\cdot((a, b), (c, d)) = (ac - bd, ad + bc).$$

Note que $(0, 1)^2 = (-1, 0)$. Assim, (F, +, .) é um corpo contendo $\mathbb{R}$. (Exercício).

Algumas propriedades(Exercícios):

a) $Re(z) \leq |z|$ e $Im(z) \leq |z|$

b) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$ e $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$

c) $\overline{\frac{1}{z}} = \frac{1}{\overline{z}}$

d) $|z| = |\overline{z}|$ e $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$

e) $z + \overline{z} = 2Re(z), z - \overline{z} = 2iIm(z)$ e $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$

1.3 Representação Polar de $\mathbb{C}$

Dado $z \in \mathbb{C}$, temos

$$z = |z|(\cos\theta + i \sin\theta), \quad \theta = \arg z.$$

Neste caso, temos, para z não-nulo,

$$z^{-1} = |z|^{-1}(\cos -\theta + i \sin -\theta) = |z|^{-1}(\cos\theta - i \sin -\theta)$$

Para $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, temos

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2))$$

com $\theta_1 = \arg z_1, \theta_2 = z_2$. Mais geralmente,

$$\prod_{k=1}^{n} z_k = \prod_{k=1}^{n} |z_k|(\cos(\sum_{k=1}^{n} \theta_k) + i \sin(\sum_{k=1}^{n} \theta_k)),$$

com $\theta_k = \arg z_k$. Em particular,

$$z^n = |z|^n(\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Buscando w tal que $w^n = z$ para dado z não-nulo,

$$w = |z|^{\frac{1}{2}}(\cos(\frac{\theta + 2k\pi}{n}) + i \sin(\frac{\theta + 2k\pi}{n})), \quad k = 0, 1, \cdots, n.$$

1.4 A Esfera de Riemann

Considere $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ a esfera

$$\mathbb{S}^2 := \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}.$$

Chame N={0, 0, 1} de polo norte. Fazemos uma associação entre $\mathbb{S}^2 - \{N\}$ e o plano z=0 de $\mathbb{R}^3$, chamada de projeção estereográfica. Nessa associação, o ponto $z(= x + iy) \in \mathbb{C}$ é associado a (x, y, 0), e definimos uma reta por N e z como r: N + t(x, y, -1), $t \in \mathbb{R}$. Assim,

$$r \cap \mathbb{S}^2 \Rightarrow S_z = \left(\frac{2x}{|z|^2 + 1}, \frac{2y}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right) \in \mathbb{S}^2$$

Reciprocramente, o ponto (x, y, z) de $\mathbb{S}^2$ pode ser associado ao considerar a reta r: N + t(x, y, s-1), em que s é um número real. Com isso, a intersecção $r \cap \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\} \Rightarrow t = \frac{1}{1-s}$ mostra que $z = \left(\frac{x}{1-s}, \frac{y}{1-s}, 0 \right)$ corresponde ao ponto z de $\mathbb{C}$.

Associando N ao infinito, obtemos o plano estendido $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, chamado de Esfera de Riemann. Se $\phi : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{S}^2$ é dada por $\phi(\infty) = N$ e, para $z \neq \infty$,

$$\phi(z) = (\frac{z + \overline{z}}{|z|^2 + 1}, \frac{z - \overline{z}}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}),$$

então dados $z, w \in \mathbb{C}_\infty$, definimos a métrica

$$d(z, w) = \begin{cases} ||\phi(z) - \phi(w)||, & z, w \neq \infty \\ 0, & z = w = \infty \\ \infty, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Exemplo 1.1. *Se $z, w \neq \infty$, então*

$$d(z, w) = d(\phi(z), \phi(w)) = \frac{2|z - w|}{[(1 + |z|^2)(1 + |w|^2)]^{\frac{1}{2}}}$$

e, se $z \neq \infty$,

$$d(z, \infty) = ||\phi(z) - N|| = \frac{2}{(1 + |z|^2)^{\frac{1}{2}}}$$

1.5 Topologia de $\mathbb{C}$

Definição. *Sejam X um conjunto e $d : X \times X \to X$ uma função. Dizemos que d é uma métrica se*

i) $d(x, y) \geq 0, d(x, y) = 0 \iff x = y$

ii) $d(x, y) = d(y, x)$

iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$,

em que x, y, z pertencem a X. Neste caso, chamamos a terna (X, d) de espaço métrico.

Considere (X, d) um espaço métrico. Dado x em X e $r > 0$,

$$B(x, r) := \{y \in X : d(x, y) < r\}$$

é a bola aberta, seu fecho é

$$B_c(x, r) := \{y \in X : d(x, y) = r\}$$

e a bola fechada é a união deles, ou seja,

$$\overline{B(x, r)} := \{y \in X : d(x, y) \leq r\}$$

Exemplo 1.2. *Considere X não-nulo e d(x, y) = $\delta_{x,y}$. (X, d) é metrico e*

$$B\left(x, \frac{1}{2}\right) = \{x\} = \overline{B\left(x, \frac{1}{2}\right)} = B\left(x, \frac{1}{333}\right), x \in X$$
$$B(x, 2) = X = B(x, 1001), x \in X$$

Utilizando bolas, definimos que um conjunto $A \subset X$ é aberto se para todo x em A, existe $r > 0$ tal que B(x, r) está contido em A. Por outro lado, um conjunto é fechado se seu complemenetar é aberto. A união infinita de abertos é aberta e, pelas Leis de DeMorgan, a intersecção infinita de fechados é fechada. Além disso, intersecções finitas de abertos é aberta e união finita de fechados é fechado.

Definimos, também, o interior de A como $A^\circ := \cup_B\{B \subset A : B \text{ aberto}\}$, o fecho de A como $\overline{A} = \cap_F\{A \subseteq F : F \text{ fechado}\}$ e o bordo de A como $\partial A = \overline{A} \cap \overline{A^c}$. Diremos que A é denso quando $\overline{A} = X$.

Proposição. *Seja (X, d) um espaço métrico e A um subconjunto. Então,*

i) A é aberto se, e só se, $A = A^\circ$

ii) A é fechado se, e só se, $A = \overline{A}$

iii) Se x pertence a A°, então existe $\epsilon > 0$ tal que $B(x, \epsilon) \subseteq A$.

iv) Se x pertence a $\overline{A}$, então para todo $\epsilon > 0$ tal que $B(x, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$.

Um espaço métrico (X, d) é conexo se os únicos subconjuntos abertos e fechados de X são X e vazio. Caso contrário, X é dito ser desconexo, ou seja, existem abertos disjunto não-vazios cuja união dá o espaço todo. Um exercício é mostrar mostrar que um conjunto é conexo se, e só se, ele é um intervalo.

Dados z, w em $\mathbb{C}$, o segmento [z, w] é o conjunto

$$[z, w] := \{tw + (1-t)z : t \in [0, 1]\}$$

Além disso, dados $z_1, \cdots, z_n$, a poligonal com esses vértices é

$$[z_1, \cdots, z_n] = \bigcup_{k=1}^{n-1} [z_k, z_{k+1}]$$

Proposição. *Seja G um subconjunto de $\mathbb{C}$ aberto. Então, G é conexo se, e só se para todo z, w em G, existe uma poligonal $[z, z_1, \cdots, z_n, w] \subseteq G$.*

Prova. $\Leftarrow$) *Assumindo que G satisfaz a propriedade da poligonal, suponha também que G não é conexo. Assim, podemos escrever $G = B \cup C$ com $B \cap C = \emptyset$ e B, C não-vazios. Pela propriedade de G, existe $[b, z_1, \cdots, z_n, c] \subseteq G$. Neste caso, existe k tal que $z_k \in B$ e $z_{k+1} \in C$. Agora, considere os conjuntos*

$$B' = \{t \in [0, 1] : tz_k + (1-t)z_{k+1} \in B\}$$
$$C' = \{t \in [0, 1] : tz_k + (1-t)z_{k+1} \in C\}$$

e note que $B' \neq \emptyset$ pois $z_k \in B$ e $1 \in B'$. Analogamente, C' é não-vazio. No entanto, isso é um absurdo, pois [0, 1] seria conexo e $B' \cup C'$ seria uma cisão não trivial

$\Rightarrow$) *Suponha, agora, que G é conexo e seja z um elemento dele. Defina*

$$C = \{w \in G : \text{Existe } [z, z_1, \cdots, z_n, w] \subseteq G\}$$

Observe que C é não-vazio, z pertence a G e [z] é subconjunto de G. Mostremos que C é aberto e fechado (pois implicará em C = G). Com efeito, se $w \in C \subseteq G$, existe $r > 0$ tal que B(w, r) está contigo em G, pois G é aberto. Assim, para todo $s \in B(w, r)$, temos $[s, w] \subseteq B(w, r)$ e, com isso, existe uma poligonal ligando s a z com $s \in C$, mostrando que C é aberto.

Mostrar que o complementar de C é aberto é análogo. Com efeito, se $C^c = \emptyset$, o resultado está provado. Por outro lado, se $C^c \neq \emptyset$, seja $w \in C^c$ = G - C. Logo, existe $r > 0$ tal que $B(w, r) \subseteq G$. Afirmamos que $B(w, r) \subseteq G - C$. Caso contrário, existe s em B(w, r) contido, também, em C. Neste caso, existe uma poligonal ligando s a z e s a w, uma contradição, pois isso conectaria w a z, mesmo com w no complementar de z. Portanto, o complementar é aberto e C é aberto e fechado. ■

2 Aula 02 - 05/01/2023

2.1 Motivações

- Sequências e suas convergências;
- Teorema de Cantor para espaços completos;
- Compacidade e Heine-Borel;
- Continuidade e convergência de funções.

2.2 Fim de Conexos

Teorema. *Seja $G \subseteq \mathbb{C}$ um aberto e conexo, então existe uma poligonal ligando qualquer z, w em G cujos segmentos sejam paralelos ao eixo real ou imaginário.*

Definição. *Um subconjunto de um espaço métrico (M, d) é uma componente conexa se é um conexo maximal*

Exemplo 2.1. *Coloque $A = \{1, 2, 3\}$.$\{1\}$ é componente conexa de A, mas $\{1, 2\}$ não é.*

Teorema. *Seja (M, d) um espaço métrico. Então,*

1) *Para x em M, existe C_x uma componente conexa de M com x em C_x;*

2) *As componentes são disjuntas.*

Prova. *1)*
Seja x em M e tomemos

$$C_x = \bigcup_{D \subseteq M} \{D : D \text{ conexos com } x \in D\}$$

Mostremos que C_x é conexo, pois a maximalidade segue da definição dada a ele. Note que $C_x \neq \emptyset$, visto que qualquer conjunto unitário é conexo. Seja $A \subseteq C_x$ aberto, fechado e não-nulo. Existe $D_x \in C_x$ tal que $D_x \cap A \neq \emptyset$, o que implica que $D_x \subseteq A$.

Finalmente, considere $D \in C_x$, de modo que $D_x \cup D$ é conexo e $(D_x \cup D) \cap A \neq \emptyset$ o que garante que $D \subseteq A$. Assim, $A = C_x$. ■.

Exercícios. *1) Prove a segunda afirmação do teorema;*

2) Se D e conexo e $D \subseteq A \subseteq \overline{D}$, então A é conexo.

Teorema. *Seja G um subconjunto aberto de $\mathbb{C}$. As componentes conexas são abertas e há no máximo uma quantidade enumerável delas.*

Prova. *Seja D uma componente conexa de G. Tome $x \in D$, tal que existe $r > 0$ com $B(x, r) \subseteq G$, já que G é aberto. Suponha que $B(x, r) \nsubseteq D$. Neste caso, $B(x, r) \cup D$ seria um conexo contendo D propriamente. Logo, $B(x, r) \subseteq D$ e D é aberto.*

Para a segunda afirmação, considere

$$\Omega = \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}(\overline{\Omega} = \mathbb{C})$$

Para cada componente conexa C de G, como G é aberto, existe $z \in \Omega \cap C$, o que é suficiente para garantir a enumerabilidade das componentes de G. ■.

2.3 Sequências e Completude

Definição. *Seja (M, d) um espaço métrico. Uma sequência* $\{x_n\}$ *de M é convergente se existe x em M tal que para todo* $\epsilon > 0$, *existe* n_0 *natural tal que*

$$d(x_n, x) < \epsilon, \quad n \geq n_0.$$

Escrevemos, neste caso, $x_n \to x$. *Dizemos que uma sequência é de Cauchy se para todo* $\epsilon > 0$, *existe* n_0 *natural satisfazendo*

$$d(x_n, x_m) < \epsilon, \quad n, m \geq n_0.$$

Exercícios. *i) Se* $\{x_n\}$ *é convergente, então* $\{x_n\}$ *é de Cauchy, mas a recíproca é só válida quando a sequência possui uma subsequência convergente.*

ii) Se $\{x_n\}$ *é de Cauchy, então* x_n *é limitada.*

iii) $F \subseteq M$ *é fechado se e só se toda* x_n *de F com* $x_n \to x$ *é tal que x pertence a F.*

Dizemos que um espaço métrico é completo se toda sequência de Cauchy for convergente.

Exercícios. *i) Mostre que* $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ *são espaços métricos completos;*

ii) Se (M,d) é um espaço métrico e $S \subseteq M$, *mostre que se (S,d) for completo, ele é fechado em M. Mostre e recíproca no caso em que (M, d) é completo.*

O resultado a seguir é conhecido como Teorema de Cantor.

Teorema. *Um espaço métrico é completo se e só se toda cadeia descendente de fechado* $\{F_n\}$ *satisfazendo*

$$diam F_n \to 0, \quad n \to \infty$$

é tal que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ *é unitário. Aqui,* $diam A := sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$.

Prova. *Suponha que M é um espaço métrico completo. Se* $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F \neq \emptyset$, *então ele é unitário. De fato, se* $x, y \in \cap_n F$,

$$d(x, y) \leq diam F_n (diam F_{n+1} \leq diam F_n),$$

mas $diam F_n \to 0$ *e d(x, y) = 0, de modo que x = y.*

Agora, seja $x_n \in F_n, n \in \mathbb{N}$ *e observe que*

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq diam F_n,$$

pois $F_{n+1} \subseteq F_n$. *Isto garante que* $\{x_n\}$ *é de Cauchy e, como M é completo, existe x com* $x_n \to x$. *Neste caso,* $x \in F_n$ *para todo n e* $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \{x\}$.

Reciprocramente, seja $\{a_n\}$ *de Cauchy em M. Construímos*

$$F_n = \overline{\{a_k : k \geq n\}}$$

que são fechados satisfazendo $F_{n+1} \subseteq F_n$. *Assim,* $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n = \{x\}$ *para algum x de M. Como*

$$d(x, a_n) \leq diam F_n \to 0,$$

temos, portanto, $a_n \to x$. ■

Um exercício que fica é mostrar que se $\{a_n\}$ é de Cauchy, então $diam F_n \to 0$

2.4 Compactos

Definição. *Seja (M, d) um espaço métrico. Um subconjunto $S \subseteq M$ é compacto se para toda coleção $\mathcal{A}$ de abertos de M cobrindo S existe $A_1, \cdots, A_n \in \mathcal{A}$ tal que*

$$S \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} A_k$$

Dado um espaço métrico (M, d), M é dito sequencialmente completo se todas as sequências de M possuem subse quência convergente. Também diremos que ele é totalmente limitado se para todo $\epsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}, x_1, \cdots, x_n \in M$ com

$$M = \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \epsilon).$$

Um conjunto A é dito limitado se seu diametro é finito.

Exercícios. *i) Se A é totalmente limitado, então A é limitado, mas a recíproca não é necessariamente verdade.*

ii) Se A é compacto, então A é limitado, mas a recíproca não é necessariamente verdade.

Proposição. *Seja (M, d) um espaço métrico e K um subconjutno de M. Então, K é compacto se esó se toda família de fechados com PIF tem interseção não-vazia.*

A PIF é a Propriedade da Intersecção Finita, que afirma que dados conjuntos $F_1, \cdots, F_n \Rightarrow \bigcap_{k=1}^{n} F_k \neq \emptyset$

Teorema. *Seja (M, d) um espaço métrico. As seugintes afirmações são equivalentes:*

i) M é compacto;

ii) Para todo conjunto ininito S de M, existe x em S tal que para todo $\epsilon > 0, B(x, \epsilon) \cap S - \{x\} \neq \emptyset$;

iii) M é sequencialmente compacto;

iv) M é completo e totalmente limitado.

Teorema. *Um conjunto K de $\mathbb{R}^n$ é compacto se e só se ele é fechado e limitado.*

Segue um esboço da prova.

Prova. *Se K é compacto, ele é completo (logo, fechado) e totalmente limitado (logo, limitado). Por outro lado, se K é fechado e limitado, então K é completo porque $\mathbb{R}^n$ é completo. Além disso, pela propriedade Arquimediana da reta, para todo $\epsilon > 0$, existem $x_1, \cdots, n_n \in K$ com*

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \epsilon)$$

2.5 Continuidade

Definição. *Sejam (X, d), (Y, d') espaços métricos. $f : X \to Y$ é contínua em x de X se para todo $\epsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que*

$$d(x, y) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \epsilon$$

f é dita contínua se isso ocorre para todos os pontos de M.

Exercícios. *Mostre que equivalem à definição de contínua:*

i) $f^{-1}(B(x, \epsilon))$ contém uma bola aberta centrada em x, para todo $\epsilon > 0$;

ii) $x_n \to x$ implica $f(x_n) \to f(x)$

iii) $F^{-1}(A)$ é aberta em X para todo aberto A com $x \in A$

Proposição. *Sejam $f, g : X \to \mathbb{C}$ funções contínuas. Então,*

1) *$\alpha f + \beta g$ é contínua, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$;*
2) *fg é conínua;*
3) *Se $x \neq 0$, então f/g é contínua em x;*
4) *Se $h : Y \to X$ é contínua, então $f \circ h : Y \to \mathbb{C}$ é contínua.*

Definição. *Uma função $f : (X, d) \to (Y, d')$ é uniformemente contínua se para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que*

$$d(x, y) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \epsilon.$$

Uma função $f : (X, d) \to (Y, d')$ é Lipschitz se existe $c > 0$ tal que

$$d'(f(x), f(y)) \leq cd(x, y)$$

Teorema. *Seja $f : (X, d) \to (Y, d')$ uma função. Então,*

i) *Se X é compacto, então f(X) é compacto;*
ii) *Se X é conexo, então f(X) é conexo. Adicionalmente, se $Y = \mathbb{R}$, então f(X) é um intervalo.*

Corolário. *Se $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua, então para todo $K \subseteq X$ compacto, existem $x_m, x_M \in K$ tais que*

$$f(x_m) = \inf_{x \in K}\{f(x)\}, \quad f(x_M) = \sup_{x \in K}\{f(x)\}$$

Corolário. *Nas mesmas condições, mas f uma função complexa, temos*

$$|f(x_m)| = \inf_{x \in K}\{|f(x)|\}, \quad |f(x_M)| = \sup_{x \in K}\{|f(x)|\}$$

Teorema. *Seja $f : X \to Y$ contínua. Se X é compacto, então f é uniformemente contínua.*

2.6 Convergência Uniforme

Definição. *Uma sequência de funções $\{f_n\}$ de X em Y converge pontualmente para $f : X \to Y$ se*

$$f_n(x) \to f(x), \quad n \to \infty, \forall x \in X$$

$\{f_n\}$ converge uniformemente para f se para todo $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sup_{x \in X}\{d'(f_n(x), f(x))\} < \epsilon, n \geq n_0$$

Teorema. *Se $\{f_n\}$ é uma sequência de funções contínuas e $f_n \to f$ uniformemente, então f é contínua.*

Teorema. *Seja $u_n : X \to \mathbb{C}$ uma sequência de funções satisfazendo*

$$|u_n(x)| \leq c_n, n \in \mathbb{N}.$$

Se $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n < \infty$, então $\sum\limits_{k=1}^{n} u_k \to \sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ uniformemente.

3 Aula 03 - 06/01/2023

3.1 Motivações

i) Introdução às séries de potência e raio de convergência;
ii) Funções analíticas e diferenciáveis em $\mathbb{C}$;
iii) Definição da exponencial complexa;
iv) Ramos de funções inversas.

3.2 Séries de Potências

Definição. *Considere* $\{a_n\}$ *uma sequência em* $\mathbb{C}$. *A série de potência em* $\{a_n\}$, *denotada por* $\sum_{n=0}^{\infty}$, *é dita convergente se para todo* $\epsilon > 0$, *existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $|\sum_{n=0}^{k} - a|, k \geq n_0$, *para algum* $a \in \mathbb{C}$. *Denotamos isso por*

$$a = \sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty,$$

A série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *é absolutamente convergente se* $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$.

Exercícios. *Mostre que se uma soma converge absolutamente, ela também converge normalmente.*

Definição. *Uma série de potências é uma série da forma*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n, \quad z \in \mathbb{C},$$

em que $\{a_n\}$ *é uma sequência de* $\mathbb{C}$ *e a é um número complexo.*

Exemplo 3.1. *No caso da série geométrica* $\sum_{n=0}^{\infty} z^n, z \in \mathbb{C}$, *considere a soma parcial* $s_n = \sum_{k=0}^{n} = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}, z \neq 1$. *Se* $|z| < 1$, *então* $z^{n+1} \to 0$ *e* $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}, |z| < 1$. *Caso* $|z| \geq 1$, *a série geométrica diverge.*

Denotamos por $\limsup_{n\to\infty}\{b_n\}$ a expressão $\lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n}\{b_k\}$.

Teorema. *Considere a série de potências* $\sum_{n=0}^{\infty} (z-a)^n$ *e* $\frac{1}{R} := \limsup_{n\to\infty}\{\sqrt[n]{|a_n|}\}$. *Então,*

1) *A série converge absolutamente em B(a, R)*

2) *A série diverge se* $|z-a| > R$

3) *A série converge uniformemente em B(a, r) para* $0 < r < R$.

Prova. *Sem perda de generalidade, suponha a = 0. 1.) Seja* $z \in B(0,R)$. *Existe* $|z| < r < R$ *e* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $|a_n^{\frac{1}{n}}| < \frac{1}{r}, n \geq n_0$. *Daí, temos*

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} |a_n||z^n| \leq \sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{|z^n|}{r^n} < \infty.$$

Como essa fração é menor que um, o resultado está provado.

2.) Seja $|z| > R$ *e r tal que* $|z| > r > R$. *Existe* $\{a_{n_k}\}_k$ *tal que* $|a_{n_k}|^{\frac{1}{n_k}} > \frac{1}{r}, k = 0, 1, \cdots$. *Assim, temos*

$$|a_{n_k}||z|^{n_k} > \left(\frac{|z|}{r}\right)^{n_k} \to \infty$$

Conforme k tende a infinito.

3.) Seja $0 < r < R$ *e* $r < \rho < R$. *Se z pertence a uma bola B(0, r), então*

$$|a_n||z|^n < \left(\frac{r}{\rho}\right)^n, \quad n \geq n_0, n_0 \in \mathbb{N}.$$

Como consequência do teste M de Weierstrass, já que $\frac{r}{\rho}$ *é um número, segue o resultado.* ■

Exercícios. *Mostre que o R do teorema acima é único.*

Exemplo 3.2. *Considere a série que define a exponencial de z:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, R = \infty. \quad e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, z \in \mathbb{C}.$$

Este série é convergente pelo teste da razão. Com efeito,

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)!}{n!} \right) = \infty.$$

Com isso, a série converge para todos os valores possíveis, pois seu raio de convergência é infinito.

Proposição. *Nas notações da proposição anterior, se $R < \infty$, então*

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

3.3 Funções Analíticas

Definição. *Seja G um aberto de $\mathbb{C}$ e $f : G \to \mathbb{C}$ uma função. Dizemos que ela é diferenciável em $z \in G$ se*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{w\to z} \frac{f(z) - f(w)}{z - w}$$

existe. Neste caso, o denotamos por f'(z). Diremos que f é diferenciável se f'(z) existe para todo z de G.

Definição. *Se $f : G \to \mathbb{C}$ é diferenciável e $f' : G \to \mathbb{C}(z \mapsto f'(z))$ é contínua, então dizemos que f é continuamente diferenciável.*

Analogamente, se $f' : G \to \mathbb{C}$ é diferenciável e $f'' : G \to \mathbb{C}$ (f" = (f')') é contínua, então f é duas vezes continuamente diferenciável. Nesta linha, diremos que uma função é analítica se ela é continuamente diferenciável em G.

Proposição. *Seja G um aberto de $\mathbb{C}$. Então,*

i) *Se $f : G \to \mathbb{C}$ é diferenciável em $a \in G$, então f é contínua em a;*

ii) *Se f e g são analíticas em G, então f+g e f.g são analíticas em G. Se $G' = G - \{0\}$, então f/g é analítica em G'. Valem as regras clássicas de derivação.*

iii) *Sejam f e g analíticos em G_f, G_g, respectivamente, com $f(G_f) \subseteq f(G_g)$. Então, $g \circ f$ é analítica em G_f e*

$$(g \circ f)'(z) = g'(f(z))f'(z), \quad z \in G.$$

4 Aula 04 - 09/01/2023

4.1 Motivações

- Equações de Cauchy-Riemann;
- Funções Harmônicas e suas Relações com as Analíticas.
- Funções Conformes e Transformações de Möbius

4.2 Equações de Cauchy-Riemann

Definição. *Uma região G do plano complexo é um aberto conexo dele.*

Considere uma função $f : G \to \mathbb{C}$ analítica sobre a região G e defina

$$u(x,y) = Re(f(z)), \quad v(x,y) = Im(f(z)), \quad z = x+iy, x, y \in \mathbb{R}$$

Assim, $f(z) = u(x,y) + iv(x,y), z = x+iy \in \mathbb{C}$. Observe que

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \lim_{ih\to 0} \frac{f(z+ih)-f(z)}{ih} \\ &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{u(x+h,y)-u(x,y)}{h} + i\frac{v(x+h,y)-v(x,y)}{h}\right) \\ &= \frac{du}{dx}(x,y) + i\frac{dv}{dx}(x,y), \quad z = x+iy \qquad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{ih\to 0}\left(\frac{u(x,y+h)-u(x,y)}{ih} + i\left(\frac{v(x,y+h)-v(x,y)}{ih}\right)\right) \\ &= \frac{1}{i}\frac{du}{dy}(x,y) + \frac{dv}{dy}(x,y) = \frac{dv}{dy}(x,y) - i\frac{du}{dy}(x,y). \qquad (2) \end{aligned}$$

A partir de (1) e (2), derivamos as equações de Cauchy-Riemann:

$$\boxed{\frac{du}{dx} = \frac{dv}{dy} \quad \text{e} \quad \frac{dv}{dx} = -\frac{du}{dy}}$$

4.3 Funções Harmônicas

Além disso, se u e v possuem derivadas de segunda ordem, temos

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{du}{dx}\right) = \frac{d^2v}{dy^2}, \quad \frac{d}{dy}\left(\frac{dv}{dx}\right), \quad \frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{dy}{dxdy}$$

de onde segue que

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} = 0$$

e, de forma análoga, u é harmônica. Nesta lógica, diremos que f é harmônica se $\Delta f = \frac{d^2f}{dx^2} + \frac{d^2f}{dy^2} = 0$.

Seja $u : G \to \mathbb{R}$ harmônica, a busca por $v : G \to \mathbb{R}$ harmônica satisfazendo Cauchy-Riemman é um questão. Um exercício é mostrar que a existência de v depende de G e que, em geral, não encontra-se v harmônica satisfazendo Cauchy-Riemann. (Por exemplo, $G = G - \{0\}, \quad u(x,y) = \ln{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}$)

Teorema. *Sejam $u, v : G \to \mathbb{R}$ harmônicas de classe C^1. Então, $f = u + iv$ é analítica se e só se u e v satisfazem Cauchy-Riemann.*

Prova. *Exercício.*

Dada $u : G \to \mathbb{R}$ harmônica, uma função $v : G \to \mathbb{R}$ tal que f = u + iv seja analítica é dita ser a função harmônica conjugada de u.

Exercícios.

1) Seja $f : G \to \mathbb{C}$ um ramo e n um natural. Então, $z^n = e^{nf(z)}, z \in G$.

2) Mostre que $Re(z^{\frac{1}{2}}) > 0$;

3) tome $G = \mathbb{C} - \{z : z \leq 0\}$. Ache todos as funções analíticas tais que $z = (f(z))^n$.

4) Seja $f : G \to \mathbb{C}$, G conexo e f anaítica. Se, para todo z de G, f(z) é real, então f é constante.

Teorema. *Considere $G = \mathbb{C}$ ou $G = B(0, r), r > 0$. Se $u : G \to \mathbb{R}$, então u admite harmônico conjugado.*

Prova. *Buscamos $v : G \to \mathbb{R}$ satisfazendo Cauchy-Riemann. Coloque*

$$v(x, y) = \int_0^y \frac{du}{dx}(x, t)dt + \phi(x)$$

em que $\phi(x) = -\int\limits_0^x \frac{du}{dy}(t, 0)dt$.

Portanto,

$$f = u(x, y) + i\left(\int_0^y \frac{du}{dx}(x, t)dt - \int_0^x \frac{du}{dy}(t, 0)dt.\right). \quad \blacksquare$$

4.4 Transformações Conformes

Exercícios. *Mostre que e^z leva retas ortogonais em curvas ortogonais.*

Definição. *Uma γ é uma curva numa região G se $\gamma : [a, b] \to G$ é contínua.*

Sejam γ_1, γ_2 curvas em G tais que $\gamma_1'(t_1) \neq 0, \gamma_2'(t_2) \neq 0, \gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2) = z_0 \in G$. O ângulo entre γ_1 e γ_2 em z_0 é dado por

$$\arg(\gamma_1'(t_1)) - \arg(\gamma_2'(t_2)).$$

Observe que se γ é uma curva em G e $f : G \to \mathbb{C}$ é analítica, $\sigma = f \circ \gamma$ é uma curva em $\mathbb{C}$. Assumimos $\gamma \in C^1$. Neste caso, $[a, b] = Dom(\gamma)$, ou seja, temos

$$\gamma'(t) = f'(\gamma(t))\gamma'(t), \quad t \in [a, b],$$

donde segue que

$$\arg(\gamma'(t)) = \arg(f'(\gamma(t))) + \arg(\gamma'(t))$$

Teorema. *Seja $f : G \to \mathbb{C}$ analítica. Então, f preserva ângulos para todo z em G tal que $f'(z) \neq 0$.*

Prova. *Seja $z_0 \in G$ tal que $f'(z_0) \neq 0$. Considere curvas γ_1, γ_2 tais que $\gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2) = z_0$. Se θ é ângulo entre γ_1 e γ_2 em z_0, então*

$$\theta = \arg(\gamma_1'(t_1)) - \arg(\gamma_2'(t_2))$$

Agora, note que o ângulo entre $\sigma_1 = f \circ \gamma_1$ e $\sigma_2 = f \circ \gamma_2$ em $f(z_0)$ é

$$\arg \sigma_1'(t_1) - \arg \sigma_2'(t_2) = \theta.$$

Portanto, f preserva ângulos. $\blacksquare$.

Seja $f : G \to \mathbb{C}$ que preserva ângulo e

$$\lim_{w \to z} \frac{|f(z) - f(w)|}{|z - w|}$$

existe. Então, f é dita aplicação conforme. Por exemplo, $f(z) = e^z$ é injetora em qualquer faixa horizontal de largura menor que 2π.

Corolário. $e^G = \mathbb{C} - \{z : z \leq 0\}$.

Se G é uma faixa aberta de comprimento 2π, o ramo de log faz o caminho inverso. Adicionalmente, $\frac{1}{z}$ é a sua derivada.

5 Aula 05 - 10/01/2023

5.1 Motivações

- Transformações de Möbius elementares;
- aaaaaaaaa

5.2 Transformações de Möbius

Definição. *Uma fração linear é* $\frac{az+b}{cz+d}, z \in \mathbb{C}, a, b, c, d \in \mathbb{C}$ *fixos.*

Definição. *Uma fração linear tal que* $ad - bc \neq 0$ *define uma transformação*

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad z \in \mathbb{C},$$

chamada tranformação de Möbius.

Consideraremos a tranformação como sendo $T : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_{infty}$ da seguinte maneira:

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad z \neq -\frac{d}{c}$$
$$T(-\frac{d}{c}) = \infty \quad \text{e} \quad T(\infty) = \frac{a}{c}.$$

Neste caso, $T^{-1}(z) = \frac{dz-b}{-cz+a}, \quad z \in \mathbb{C}_\infty$. Note, também, que os coeficientes de uma Transformação de Möbius são unicamente determinados, pois

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{(\lambda a)z + (\lambda b)}{(\lambda c)z + (\lambda d)}, \quad \lambda \neq 0.$$

Denotaremos por TM a coleção de transformações de Möbuis.

Exemplo 5.1. *As TM's elementares, dado* $a \in \mathbb{C}$*, são*

- *Translação:* $T(z) = z + a, z \in \mathbb{C}_\infty$,
- *Rotação:* $R(z) = e^{i\theta} z, \theta \in \mathbb{R}$,
- *Inversão:* $I(z) = \frac{1}{z}$,
- *Homotetia:* $H(z) = az$.

Proposição. *Toda TM é composição de TM's elementares.*

Prova. *Seja* $T \in TM$ *dada por* $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$.
Caso 1) Se $c = 0$*, então* $T(z) = \frac{az}{d} + \frac{b}{d}$*. Neste caso,* $H(z) = \frac{a}{d}z$ *e* $S(z) = z + \frac{b}{d}$*, tal que* $T(z) = S \circ H(z)$
Caso 2) Se $c \neq 0$*, então tome*

$$T_1(z) = z + \frac{d}{c}, I(z) = \frac{1}{z}, H(z) = \frac{(bc-ad)z}{c^2}, \text{ e } T_2(z) = z + \frac{a}{c}.$$

Com isso, temos

$$t_2 \circ H \circ I \circ T_1 = t. \quad \blacksquare$$

Exercícios. *1) Mostre que* $(TM, \circ)$ *é um grupo.*

2) Se $T \in TM$ *é tal que* $T(z_i) = z_i, i = 1, 2, 3, z_i \neq z_j, i \neq j$*, então* $T = Id_{\mathbb{C}_\infty}$.

Proposição. *Sejam* $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}_\infty$*, distintos. Existe uma única* $T \in TM$ *tal que*

$$T(z_1) = 1, T(z_2) = 0, T(z_3) = \infty.$$

Prova. *Unicidade:*
Se existem $T, S \in TM$ *satisfazendo a hipótese, então* $S^{-1}(T(z_i)) = z_i, i = 1, 2, 3$*. Logo,* $S^{-1} \circ T = Id_{\mathbb{C}_\infty}$ *e* $S = T$.
Existência: Defina $T : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ *por*

$$T(z) = \begin{cases} \frac{\frac{z-z_2}{z-z_3}}{\frac{z_1-z_2}{z_1-z_3}}, & z_i \in \mathbb{C}, i = 1, 2, 3; \\ \frac{z-z_2}{z-z_3}, & z_1 = \infty; \\ \frac{z_1-z_3}{z-z_3}, & z_2 = \infty; \\ \frac{z-z_2}{z_1-z_2}, & z_3 = \infty. \end{cases} ,$$

tal que $T \in TM$ *satisfazendo a hipótese.* $\blacksquare$

Corolário. *Dados $z_1, z_2, z_3, w_1, w_2, w_3$ distintos em $\mathbb{C}_\infty$, existe uma única $T \in TM$ tal que*

$$T(z_i) = w_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Prova. *Exercício.* ■

Observe que se $z_i \in \mathbb{C}_\infty, i = 1, 2, 3$, distintos e $T \in TM$ é tal que a proposição seja satisfeita, denotaremos T(z) por $T(z) := [z, z_1, z_2, z_3]$.

Exemplo 5.2. *Se $[z, 1, 0, \infty] = z, z \in \mathbb{C}_\infty, z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}_\infty$ distintos, então*

$$[z_1, z_1, z_2, z_3] = 1;$$
$$[z_2, z_1, z_2, z_3] = 0;$$
$$[z_3, z_1, z_2, z_3] = \infty.$$

Proposição. *Sejam $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}_\infty$ distintos e $S \in TM$. Então,*

$$[z, z_1, z_2, z_3] = [S(z), S(z_1), S(z_2), S(z_3)], \quad z \in \mathbb{C}_\infty.$$

Prova. *Seja $T(z) = [z, z_1, z_2, z_3]$ e tome $M = T \circ S^{-1}$. Note que*

$$M(S(z_1)) = 1,$$
$$M(S(z_2)) = 0,$$
$$M(S(z_3)) = \infty.$$

Assim,

$$M(z) = [S(z), S(z_1), S(z_2), S(z_3)]$$

e $T(z) = M(S(z)) = [S(z), S(z_1), S(z_2), S(z_3)]$. ■

Proposição. *Sejam $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}_\infty$ distintos. Então, $[z_1, z_2, z_3, z_4] \in \mathbb{R}$ se e só se $z_i \in C$ para algum círculo.*

Prova. $\Rightarrow$) *Se $z_i \in C, i = 1, 2, 3, 4$, então $z_1 \in D$, em que D é o único círculo determinado por z_2, z_3, z_4.*

Exercícios. *Mostre que $[z_1, z_2, z_3, z_4] \in \mathbb{R}$*

$\Leftarrow$) *Definimos $S(z) = [z, z_2, z_3, z_4], z \in \mathbb{C}_\infty$. Mostraremos que $S^{-1}(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$ e $S^{-1}(\mathbb{R}_\infty)$ é um círculo.* *Caso 1: Seja $w \in S^{-1}(\mathbb{R})$ e sejam a, b, c, d números complexos tais que*

$$S(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

como S(w) pertence a $\mathbb{R}$, temos $S(w) = \overline{S(w)}$, donde segue que

$$\frac{aw + b}{cw + d} = \frac{\bar{a}\bar{w} + \bar{b}}{\bar{c}\bar{w} + \bar{d}},$$

o que implica em $(cw + d)(\bar{a}\bar{w} + \bar{b}) = (aw + b)(\bar{c}\bar{w} + \bar{d})$. Logo,

$$(c\bar{a} - a\bar{c})|w|^2 + (c\bar{b} - a\bar{d})w + (d\bar{a} - b\bar{c})\bar{w} + (d\bar{b} - b\bar{d}) = Im(\bar{a}c) + 2i(Im(w(bc - ad)) + Im(d\bar{b})) = 0. \quad (3)$$

Caso 1.1: $Im(\bar{a}c) = 0$, seja $\alpha = bc - ad$. Segue de 3 que

$$2i(Im(w\alpha) + Im(d\bar{b})) = 0.$$

Logo, $Im(\alpha w + \beta) = 0, \beta = Im(d\bar{b})$. Assim, $\alpha w + \beta \in r$, em que $r : \frac{-\beta z t}{\alpha}, t \in \mathbb{R}$.

Caso 1.2: $\rho = Im(\bar{a}c) \neq 0$. Seja $\gamma = c\bar{b} - a\bar{d}$. Então, dividindo 3 por $2i\rho$, temos

$$|w|^2 + Im(w\frac{\gamma}{\rho}) + Im(\frac{d\bar{b}}{\rho}) = 0$$
$$\left(|w + \frac{\gamma}{\rho}|^2 + |\frac{\gamma}{\rho}|^2\right) = -Im(\frac{d\bar{b}}{\rho})$$
$$|w - (-\frac{\gamma}{\rho})|^2 = -Im(\frac{d\bar{b}}{\rho}) + |\frac{\gamma}{\rho}|^2 > 0 \text{ (Exercício).}$$