



UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS E
COMPUTACIONAIS - ICMC

EXERCÍCIOS DE CÁLCULO

Renan Wenzel - 11169472

Thaís Jordão - tjordao@icmc.usp.br

3 de abril de 2022

Conteúdo

1	Números Reais, Funções e Introdução a Limites	3
1.1	Exercícios de Funções e Panorama Geral	3
1.1.1	Exercício 1	3
1.1.2	Exercício 2	4
1.1.3	Exercício 3	6
1.2	Um Panorama Geral	7
1.2.1	Exercício 4	7
2	Propriedades dos Limites, Limites Laterais, Limites de Determinadas Funções, Funções Contínuas e Suas Propriedades	8
3	Reta Tangente, Derivada, Derivada de Algumas funções, Regra da Cadeia	9
4	Teorema do Valor Médio e Suas Consequências, Derivadas de Ordem Superior	10
5	Antiderivada, Integral, Teorema Fundamental do Cálculo, Métodos, Integrais Impróprias	11

1 Números Reais, Funções e Introdução a Limites

1.1 Exercícios de Funções e Panorama Geral

1.1.1 Exercício 1

Parte 1 - Se considerarmos

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x - 1}, x \neq 1,$$

então a que classe de funções ela pertence? Note que se efetuarmos a divisão polinomial, concluiremos que

$$\frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x - 1} = x^2 + 2x + 1.$$

Isto significa que f é uma função polinomial de grau 2? Justifique e faça o passo-a-passo.

Prova:. Considere a função

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x - 1}, x \neq 1,$$

e $p(x) = x^3 + x^2 - x - 1, q(x) = x - 1$, em que $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $q(x)\mathbb{R}/\{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ são polinômios. Segue que:

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x - 1} = \frac{p(x)}{q(x)}, x \neq 1.$$

Por definição, uma função na forma de quociente de polinômios, em que o denominador é um polinômio com o domínio tal que ele nunca é nulo, é conhecida como uma função racional.

No entanto, é melhor lidar com frações de polinômios simplificados, ou seja, é preciso encontrar o fator comum entre ambos. Observe que, em $x = 1$,

$$p(x) = 1^3 + 1^2 - 1 - 1 = 1 + 1 - 1 - 1 = 0$$

e

$$q(x) = 1 - 1 = 0,$$

então $(x-1)$ é um fator comum entre ambos, isto é, ele pode ser fatorado após manipular o polinômio $p(x)$. Assim, note que, somando e subtraindo fatores para que possamos fatorar $(x-1)$ de $p(x)$, chegamos em:

$$p(x) = x^3 + x^2 - x - 1 = x^3 + (2x^2 - x^2) + (x - 2x) - 1 = (x - 1)(x^2 + 2x^2 + 1) = q(x)(x^2 + 2x^2 + 1),$$

de forma que:

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x - 1} = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{q(x)(x^2 + 2x^2 + 1)}{q(x)} = x^2 + 2x^2 + 1, x \neq 1.$$

Logo, após efetivada a divisão, obtemos que f é uma função polinomial de grau 2. ■

Parte 2 - Verifique as seguintes identidades:

a) $x^2 - a^2 = (x - a)(x + a)$

b) $x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + ax + a^2)$

c) $x^4 - a^4 = (x - a)(x^3 + ax^2 + a^2x + a^3)$

d) $x^5 - a^5 = (x - a)(x^4 + ax^3 + a^2x^2 + a^3x + a^4)$

e) $x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \dots + a^{n-2}x + a^{n-1})$ em que $n \neq 0$ é um natural.

Prova: Antes da formalização da prova, um bom começo é analisar a imagem cuidadosamente. De fato, ao fazer isso, observe a repetição do termo $(x - a)$ à direita de cada igualdade. Outro ponto notável é que, para cada n , ocorre uma expansão de $\sum_{i=0}^n a^i x^{n-i-1}$ ao lado de $(x - a)$, em que $n \in \mathbb{N}$. Em outras palavras, isso está indicando fortemente a presença de uma hipótese indutiva para demonstrar o resultado.

Com efeito, provemos o caso base do item a, ou seja, $n = 2$. Considere o produto $(x-a)(x+a)$:

$$(x - a)(x + a) = x^2 + xa - ax - a^2 = x^2 + ax - ax - a^2 = x^2 - a^2.$$

Destarte, obtivemos o caso base como verdadeiro. Nessa linha de raciocínio, a hipótese indutiva afirma que, dado uma base verdadeira, o resultado será provado se, assumindo o caso $n-1$ como verdade, o caso n também será (pois assim, o caso 1 sendo verdadeiro implica que o 2 também é, consequentemente o 3, o 4, etc.). Suponha que o resultado vale para $n - 1$, isto é, para $n \neq 0$

$$x^{n-1} - a^{n-1} = (x - a) \left(\sum_{i=0}^{n-2} a^i x^{n-i-1} \right)$$

Então, temos

$$\sum_{i=0}^{n-1} a^i x^{n-i-1} = x^{n-1} + \left(\sum_{i=1}^{n-2} a^i x^{n-i-1} \right) + a^{n-1}.$$

Multiplicando ambos os lados por $(x-a)$, chegamos em:

$$\begin{aligned} (x-a) \left(\sum_{i=0}^{n-1} a^i x^{n-i-1} \right) &= (x-a) \left(x^{n-1} + \left(\sum_{i=1}^{n-2} a^i x^{n-i-1} \right) + a^{n-1} \right) = (x^n - ax^{n-1}) + (x^{n-1} - a^{n-1} - (x-a)^2 x^{n-1}) + (xa^{n-1} - a^n) = \\ &= x^n - ax^{n-1} + x^{n-1} - a^{n-1} + xa^{n-1} - a^n = . \end{aligned}$$

■

1.1.2 Exercício 2

Parte 1 - Fazendo todos os detalhes e explicando todos os passos, explicita o domínio de cada uma das funções abaixo e calcule os produtos $f \cdot g$, $g \cdot h$ e $h \cdot i$, em que:

$$f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3, \quad g(x) = 3x^2 - x + 2, \quad h(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 3} \quad \& \quad i(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 + 1}$$

Solução: A priori, analisemos os domínios de cada uma das funções. Começando por f , levando em conta que, quando não explicitado, o domínio de uma função é o maior subconjunto de \mathbb{R} em que faz sentido defini-la, temos $D_f = \mathbb{R}$, pois a função não possui pontos problemáticos (com isso, queremos dizer um ponto em que, por exemplo, teríamos $\frac{1}{0}$ ou $\sqrt{-x}$, $x > 0$ e $x \in \mathbb{R}$.) Analogamente, segue que o domínio de g também é $D_g = \mathbb{R}$.

Contudo, ao lidarmos com os domínios de h e i , é necessário ter cautela, já que são definidas por frações. No caso de h , seu domínio é o conjunto dos reais tais que $x - 3$ não é nulo, ou seja,

$$D_h = \{x \in \mathbb{R} : x - 3 \neq 0\} = \mathbb{R}/\{3\}.$$

Em primeira vista, o caso da função i pode parecer o mesmo, ou seja, que vai ser definido como o conjunto dos reais a menos de um conjunto finito de pontos. No entanto, note que, para isso, seria preciso que $x^2 + 1 = 0, x \in \mathbb{R}$, o que nunca acontece (nos reais!). Portanto, i está definido em $D_i = \mathbb{R}$.

Ademais, a forma de realizar produtos entre funções deve ser esclarecida: O produto entre duas funções f e g , definido ponto-a-ponto, é dado por

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x).$$

Com isso em mente, vamos aos cálculos:

i.) $f \cdot g$ (produto de f com g)

$$\begin{aligned}(f \cdot g)(x) &= f(x) \cdot g(x) = (2x^3 - 5x^2 + 3) \cdot (3x^2 - x + 2) = 2x^3(3x^2 - x + 2) - 5x^2(3x^2 - x + 2) + 3(3x^2 - x + 2) = \\ &= 6x^5 - 2x^4 + 4x^3 - 15x^4 + 5x^3 - 10x^2 + 9x^2 - 3x + 6 = 6x^5 - 17x^4 + 9x^3 - x^2 + 6\end{aligned}$$

ii.) $g \cdot h$ (produto de g com h)

$$\begin{aligned}(g \cdot h)(x) &= g(x) \cdot h(x) = (3x^2 - x + 2) \cdot \left(\frac{x^2 - 1}{x - 3}\right) = \left(\frac{(3x^2 - x + 2)(x^2 - 1)}{x - 3}\right) = \\ &= \left(\frac{3x^4 - 3x^2 - x^3 + x + 2x^2 - 2}{x - 3}\right) = \left(\frac{3x^4 - x^2 - x^3 + x - 2}{x - 3}\right)\end{aligned}$$

iii.) $h \cdot i$ (produto de h com i)

$$\begin{aligned}(h \cdot i)(x) &= h(x) \cdot i(x) = \left(\frac{x^2 - 1}{x - 3}\right) \left(\frac{x^3 - 1}{x^2 + 1}\right) = \left(\frac{(x^2 - 1)(x^3 - 1)}{(x - 3)(x^2 + 1)}\right) \\ &= \left(\frac{x^5 - x^2 - x^3 + 1}{x^3 + x - 3x^2 - 3}\right)\end{aligned}$$

■

Parte 2 - Sabendo que $\sin x$ não é uma função racional, mostre que a função $\tan x$ não pode ser uma função racional.

Prova: A priori, sabemos que, para uma função ser racional, ela deve ser o quociente de dois polinômios. Analogamente, se uma função não é racional, ela não pode ser escrita como o quociente de dois polinômios.

A posteriori, suponha que $\sin x$ não é uma função racional. Defina

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

Desta forma, segue de cara que $\tan(x)$ não é uma função racional, pois um de seus componentes, no caso, $\sin(x)$, não pode ser escrito como o quociente de dois polinômios, de forma que, mesmo se $\cos(x)$ fosse racional, ainda assim seria impossível escrevê-la como o quociente desejado. Portanto, a tangente $\tan(x)$ não pode ser uma função racional. ■

1.1.3 Exercício 3

Parte 1 - Defina os conceitos de injetividade e sobrejetividade.

Solução:. Antes de defini-los explicitamente, é importante conhecer um pouco de suas utilidades. O primeiro deles, a injetividade, lida com a questão da unicidade na imagem da função, tanto é que também é conhecido como função 1-1, enquanto a sobrejetividade lida com o “alcance” da função. Se ambos os casos ocorrem, chamamos a função de bijeção, uma classe muito importante pois ela relaciona cada elemento de cada um dos conjuntos (o domínio e o contra-domínio) unicamente, de forma que há um inverso pra função, mas isso é outro tópico.

Destarte, definamos ambas matematicamente. Dados dois conjuntos A e B não-vazios, seja $f : A \rightarrow B$ uma função entre os dois conjuntos. Dizemos que:

a) f é uma função injetora se, para $a_1, a_2 \in A$, $f(a_1) = f(a_2)$ implica que $a_1 = a_2$.

b) f é uma função sobrejetora se, dado $b \in B$, existe (pelo menos) um elemento $a \in A$ tal que $f(a) = b$.

Com essas definições em mente, retomemos o primeiro parágrafo. A unicidade mencionada segue pois, para uma aplicação qualquer de A em B ser uma função, ela precisa que, dados $a_1, a_2 \in A$, caso $a_1 = a_2$, $f(a_1) = f(a_2)$. A injetividade diz o oposto, ou seja, se $f(a_1) = f(a_2)$, $a_1 = a_2$. Juntando os dois, uma função injetora obedece $f(a_1) = f(a_2)$ se, e somente se, $a_1 = a_2$, dados $a_1, a_2 \in A$, tal que cada elemento de um conjunto define unicamente um elemento no outro. Quanto à sobrejetividade, ela define quando uma função tem alcance máximo, pois como cada $b \in B$ pode ser escrito como a função aplicada a algum elemento de A , segue que $B \subset f(A)$, tal que, como por definição $f(A) \subset B$, temos $f(A) = B$, ou seja, a imagem da função é o contra-domínio inteiro. ■

Parte 2 - Mostre que a função $f(x) = \sin(x)$, $x \in [0, \pi]$ não é injetora, mas para $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ela é.

Prova:. Vamos mostrar uma contradição engraçada. Suponha que, de fato, $f(x) = \sin(x)$ é injetora no intervalo $[0, \pi]$. Em particular, temos:

$$\sin(0) = 0 = \sin(\pi) \Rightarrow 0 = \pi.$$

Se isso fosse verdade, alguns desastres aconteceriam. Dentre eles, não existiriam círculos, pois todos eles poderiam ser vistos como pontos, já que sua área, $\pi \cdot r^2 = 0$ para todo r , ou seja, também não existiria engenharia e, quem sabe, nem mesmo o universo. Isso está obviamente errado. Logo, $\sin(x)$ não pode ser injetora em $[0, \pi]$.

De lado com os cataclismas e fins do mundo, considere, agora, o intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$. Sabemos que a função seno é estritamente crescente nesse intervalo, que é o primeiro quadrante. Assim, temos, para $x, y \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

$$\sin(x) < \sin(y), x < y \text{ ou } \sin(x) > \sin(y), x > y.$$

Assim, a única forma de $\sin(x) = \sin(y)$ é quando $x = y$, que é a exata definição de uma função injetora. ■

Parte 3 - Faça as seguintes composições: $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ h$ e $h \circ f$, em que:

$$f(x) = -3x + 2, \quad g(x) = 3x^2 - x + 2, \quad \text{e} \quad h(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 3}.$$

Solução:. Antes de dar início às contas propriamente ditas, note que, ao compor h com f , ou f com h , o domínio de f mudará de $D_f = \mathbb{R}$ para $D_f = \mathbb{R}/\{3\}$. Feita essa observação, sigamos em frente:

i)

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x^2 - x + 2) = -3(3x^2 - x + 2) + 2 = -9x^2 + 3x - 6 + 2 = -9x^2 + 3x - 4.$$

ii) $(g \circ f)(x)$

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(-3x + 2) = 3(-3x + 2)^2 + (-3x + 2) + 2 = \\ &= 3(9x^2 - 12x + 4) - 3x + 2 + 2 = 27x^2 - 36x + 12 - 3x + 4 = 27x^2 - 39x + 16. \end{aligned}$$

iii) $(f \circ h)(x)$

$$\begin{aligned}(f \circ h)(x) &= f(h(x)) = f\left(\frac{x^2 - 1}{x - 3}\right) = -3\left(\frac{x^2 - 1}{x - 3}\right) + 2 = \\ &= \frac{-3x^2 + 3}{x - 3} + 2 = \frac{-3x^2 + 3 + 2x - 6}{x - 3} = \frac{-3x^2 + 2x - 3}{x - 3}.\end{aligned}$$

iv) $(h \circ f)(x)$

$$(h \circ f)(x) = h(f(x)) = h(-3x + 2) = \frac{(-3x + 2)^2 - 1}{-3x + 2 - 3} = \frac{9x^2 - 12x + 4 - 1}{-3x - 1} = -\frac{3(3x^2 - 4x + 1)}{3x + 1}$$

■

1.2 Um Panorama Geral

1.2.1 Exercício 4

Parte 1 - Quais são os dois principais problemas a que se refere o Cálculo diferencial e integral?

Solução:. O cálculo pode ser visto como o estudo de “infinitos”, então, partindo desse princípio, é possível iluminar a mente com relação à resposta para essa pergunta. Nessa linha de raciocínio, o cálculo diferencial é apresentado, normalmente, com o problema de motivação da reta tangente e do passo de uma função. Explicitamente falando, a busca do ponto único para cada reta tangente e o que acontece com a fração $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ quando Δx fica cada vez menor, ou seja, como uma mudança até a vizinhança mediata de x afeta sua função $f(x)$. Em essência, ambos os problemas são os mesmos, pois lidam com a taxa de variação de x em níveis infinitesimais, daí que vem a parte do cálculo diferencial que estuda infinitos, mas são as coisas infinitamente pequenas.

Tratando-se do cálculo integral, diferente da busca pela taxa de variação, ele lida com as áreas de gráficos de funções, isto é, como calcular a área de um gráfico arbitrário. Para isso, a noção de infinito como mencionada previamente aparece em forma de aproximações cada vez mais finas por meio de retângulos que possuem tamanhos maiores ou menores para uma dada secção do gráfico. Quanto mais retângulos forem usados, ou seja, quando menor forem seus tamanhos, mas maiores forem seus números, melhor será a aproximação da área de dada função, tal que, quando alcançados infinitos retângulos, a área da figura formada pelo gráfico é exata. Essa formação de retângulos cada vez menores também pode ser compreendida como uma divisão do intervalo da reta que representa o domínio da função em partes iguais cada vez menores, tal que quanto maior o número de partes, melhor a aproximação, até que, novamente, com infinitas partes, chega-se no valor exato da área da função. ■

Parte 2 - Utilize a construção da secante ao gráfico para obter a tangente, em que $f(x) = x^5$, explicitando a reta tangente no ponto $(a, f(a))$ e deixando claro como obteve o coeficiente angular desta reta.

Solução:. ■

Parte 3 - Calcule a área de $f(x) = x^3$ dividindo o intervalo $[0, 1]$ em 7 parte iguais. Qual o valor aproximado da área a que se chega? Dividindo-se o intervalo em mais partes, digamos $\lfloor \pi \rfloor \cdot 10^{36}$, espera-se que esta aproximação do valor real da área melhore ou piore?

Solução:. ■

2 Propriedades dos Limites, Limites Laterais, Limites de Determinadas Funções, Funções Contínuas e Suas Propriedades

3 Reta Tangente, Derivada, Derivada de Algumas funções, Regra da Cadeia

4 Teorema do Valor Médio e Suas Consequências, Derivadas de Ordem Superior

5 Antiderivada, Integral, Teorema Fundamental do Cálculo, Métodos, Integrais Impróprias