UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS E COMPUTACIONAIS - ICMC

Notas de Aula de Análise

Renan Wenzel - 11169472

Alexandre Nolasco de Carvalho - andcarva@icmc.usp.br

22 de maio de 2023

Conteúdo

1 Aula 01 - 13/03/2023

1.1 Motivação

- Relembrar sistemas básicos da matemática;
- Relembrar propriedades básicas das principais estruturas $(\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q})$.

1.2 Os Números Naturais

Os números naturais são os que utilizamos para contar objetos, e são caracterizados pelos Axiomas de Peano:

1) Todo número natural tem um único sucessor;
2) Números naturais diferentes têm sucessores diferentes;
3) Existe um único número natural, zero (0), que não é sucessor de nenhum número natural.
4) Seja $X \subseteq \mathbb{N}$ tal que $0 \in X$ e, se n pertence a X, seu sucessor n+1 também pertence a X. Então, X = $\mathbb{N}$. (Propriedade de Indução).

Definição. *Definimos a adição por:* $n + 0 = n, n \in \mathbb{N}$, *e* $n + (p + 1) = (n + p) + 1, p \in \mathbb{N}$. *Além disso, a multiplicação é dada por:* $n.0 = 0, n.(p + 1) = n.p + n, n, p \in \mathbb{N}$. *Ou seja, sabendo somar ou multiplicar um número, sabemos somar e multiplicar seu sucessor.*

Com relação ao quarto axioma, ele leva este nome porque um dos métodos de demonstração, conhecido como prova por indução. Nele, mostramos um caso base, o caso 0, e utilizamos a segunda parte para provar que, se um resultado vale para o caso n, ele vale para n+1, portanto sendo verdadeiro para todos os naturais.

Lema. *Para todo n natural, 1 + n = n + 1.*

Prova. *Note que o resultado é verdadeiro para n = 0. Suponha que o resultado seja válido para n = k e mostremos que vale também para n = k+1. Com efeito, segue pela propriedade de indução e pela definição de soma que*

$$1 + (k + 1) = (1 + k) + 1 = (k + 1) + 1.$$

Segue que o resultado vale para todo n natural. ■

A seguir, mostramos a associatividade e a comutatividade, respectivamente, das operações nos naturais.

Lema. *Para todo n, p, r naturais, (n + p) + r = n + (p + r).*

Prova. *Note que o resultado é válido trivialmente para r = 0 e r = 1. Suponha que o resultado seja válido para r = k e mostremos que vale também para r = k + 1. Com efeito, pela hipótese de indução e definição de adição,*

$$n + (p + (k + 1)) = n + ((p + k) + 1) = (n + (p + k)) + 1 = ((n + p) + k) + 1 = (n + p) + (k + 1).$$

Segue o resultado por indução. ■

Lema. *Para todo n, p naturais, n + p = p + n.*

Prova. *Observe que já mostramos o caso em que p = 1. Suponha que o resultado vale para p = k e vamos mostrar o caso p = k + 1. De fato, pela hipótese de indução e definição de adição, junto do lema de associatividade, temos*

$$n + (k + 1) = (n + k) + 1 = (k + n) + 1 = 1 + (k + n) = (1 + k) + n = (k + 1) + n.$$

Por indução, segue que isso vale para todo natural n. ■

Definição. *Definimos uma ordem em* $\mathbb{N}$ *colocando que* $m \leq n$ *se existe p natural tal que* $n = m + p$.□

A relação de ordem possui as seguintes propriedades:

i) Reflexiva: Para todo n natural, $n \leq n$;

ii) Antissimétrica: Se $m \leq n$ e $n \leq m$, então $m = n$;

iii) Transitiva: Se $m \leq n$ e $n \leq p$, então $m \leq p$;

i Dados m, n naturais, temos ou $m \leq n$, ou $n \leq m$;

v Se $m \leq n$ e p é um natural, então $n + p \leq n$ e $mp \leq np$

1.3 Números Inteiros e Racionais

Usualmente, construimos os inteiros a partir dos naturais tomando os pares ordenados de números naturais com a seguinte identificação (a, b) $\sim$ (c, d) se a + d = b + c. Assim, podemos representar

$$\mathbb{N} = \{(0,0),(1,0),(2,0),(3,0),\ldots\}, \quad -\mathbb{N}^* = \{\cdots,(0,3),(0,2),(0,1)\}.$$

Tomar o sucessor será somar 1 à primeira coordenada e, para os inteiros negativos, voltar a identificar (1, n) com (0, n-1).

Os números racionais são construídos tomando o conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ e identificando os pares $(a,b)\sim(c,d)$ para os quais ad = bc. Representamos um par (a, b) neste conjunto por $\dfrac{a}{b}$. A soma e o produto em $\mathbb{Q}$ são dados, respectivamente, por:

$$\begin{aligned}
&\frac{a}{b} + \frac{c}{d} := \frac{ad + bc}{bd} \\
&\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} := \frac{ac}{bd}.
\end{aligned}$$

Chamamos a adição a operação que a cada par $(x,y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ associa sua soma $x + y \in \mathbb{Q}$ e chamamos multiplicação a operação que a cada par $(x,y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ associa seu produto $x.y \in \mathbb{Q}$. A terna $(\mathbb{Q},+,\cdot)$ satisfaz as propriedades de um corpo, i.e.,

$$\begin{aligned}
&(A1)(x + y) + z = x + (y + z), \quad \forall x,y,z \in \mathbb{Q} \\
&(A2)x + y = y + x, \quad \forall x,y \in \mathbb{Q} \\
&(A3)\exists 0 \in \mathbb{Q} : x + 0 = x, \quad \forall x \in \mathbb{Q} \\
&(A4)\forall x \in \mathbb{Q}, \exists y \in \mathbb{Q}(y = -x) : x + y = 0 \\
&(M1)(xy)z = x(yz), \quad \forall x,y,z \in \mathbb{Q} \\
&(M2)xy = yx, \quad x,y \in \mathbb{Q} \\
&(M3)\exists 1 \in \mathbb{Q} : 1.x = x.1 = x, \quad \forall x \in \mathbb{Q} \\
&(M4)\forall x \in \mathbb{Q}^*, \exists y = \frac{1}{x} \in \mathbb{Q} : x.y = 1 \\
&(D)x(y + z) = xy + xz, \quad \forall x,y,z \in \mathbb{Q}.
\end{aligned}$$

2 Aula 02 - 15/03/2023

2.1 Motivações

- Propriedades básicas dos racionais;
- Construção do corpo dos reais a partir dos racionais;
- Cortes de Dedekind.

2.2 Propriedades de $\mathbb{Q}$ e sua Ordem

Com as 9 propriedades de corpo, conseguimos obter novas regras nos racionais, como a famosa lei do cancelamento:

Proposição. *Em $\mathbb{Q}$, vale*

$$x + z = y + z \Rightarrow x = y$$

e, se $z \neq 0$,

$$xz = yz \Rightarrow x = y$$

Prova.

$$x = x + 0 = x + (z + (-z)) = (x + z) + (-z) = (y + z) + (-z) = y + (z + (-z)) = y + 0 = y$$
$$x = x.1 = x(z.\frac{1}{z}) = (xz)\frac{1}{z} = (yz)\frac{1}{z} = y(z\frac{1}{z}) = y.1 = y. \blacksquare$$

Proposição. *Os elementos neutros da adição e multiplicação são únicos. Os elementos oposto e inverso também o são.*

Proposição. *Para todo x racional, x.0 = 0.*

Proposição. *Para todo x racional, -x = (-1)x.*

A maioria desses resultados acima seguem diretamente da lei do cancelamento. Suas demonstrações ficam como exercício.

Definição. *Diremos que*

$$\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} = \begin{cases} \textit{não-negativo}, & ab \in \mathbb{N} \\ \textit{positivo}, & ab \in \mathbb{N}, a \neq 0 \end{cases}$$

e diremos que

$$\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} = \begin{cases} \textit{não-positivo}, & \frac{a}{b} \textit{ não for postivo} \\ \textit{negativo}, & \frac{a}{b} \textit{ não for não-negativo.} \end{cases} \quad \square$$

Definição. *Sejam x, y racionais. Diremos que x é menor e que y e escrevemos "$x < y$" se existir t racional positivo tal que*

$$y = x + t.$$

Neste mesmo caso, podemos dizer que y é maior que x, escrevendo "$x > y$". Em particular, temos $x > 0$ se x for positivo e $x < 0$ se x for negativo.

Ademais, se $x < y$ ou $x = y$, escrevemos "$x \leq y$" se existir racional t não-negativo tal que

$$y = x + t$$

e, se $x > y$ ou $x = y$, escrevemos "$x \geq y$" caso exista racional t não-positivo com

$$y = x + t.\square$$

A quádrupla $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ satisfaz as propriedades de um corpo ordenado, i.e.,

$$(O1) x \leq x \forall x \in \mathbb{Q};$$
$$(O2) x \leq y \text{ e } y \leq x \Rightarrow x = y \forall x, y \in \mathbb{Q};$$
$$(O3) x \leq y, y \leq z \Rightarrow x \leq z \forall x, y, z \in \mathbb{Q};$$
$$(O4) \forall x, y \in \mathbb{Q}, x \leq y \text{ ou } y \leq x;$$
$$(OA) x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z;$$
$$(OM) x \leq y \text{ e } z \geq 0 \Rightarrow xz \leq yz.$$

Proposição. *Para quaisquer x, y, z, w no corpo ordenado dos racionais, valem*

$$i.) x < y \iff x + z < y + z$$
$$ii.) z > 0 \iff \frac{1}{z} > 0$$
$$iii.) z > 0 \iff -z < 0$$
$$iv.) z > 0 \Rightarrow x < y \iff xz < yz$$
$$v.) z < 0 \Rightarrow x < y \iff xz > yz$$
$$vi.) xz < yw \iff \begin{cases} 0 \leq x < y \\ 0 \leq z < w \end{cases}$$
$$vii.) 0 < x < y \iff 0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$$
$$viii.) x < y \text{ ou } x = y \text{ ou } x > y$$
$$ix.) xy = 0 \iff x = 0 \text{ ou } y = 0.$$
$$x.) \left.\begin{array}{c} x \leq y \\ z \leq w \end{array}\right\} \Rightarrow x + z \leq y + w$$
$$xi.) \left.\begin{array}{c} 0 \leq x \leq y \\ 0 \leq z \leq w \end{array}\right\} \Rightarrow xz \leq yw.$$

2.3 Incompletude de $\mathbb{Q}$

Os números racionais podem ser representados por pontos em uma reta horizontal ordenada, chamada reta real. Se P for a representação de um número racional x, diremos que x é a abscissa de P. Note que nem todo ponto da reta real é racional. Para isso, considere um quadrado de lado 1 e diagonal d. Pelo Teorema de Pitágoras, $d^2 = 1^2 + 1^2 = 2$. Agora, seja P a intersecção do eixo x com a circunferência de centro em 0 e raio d. Mostremos que P é um ponto da reta com abscissa $x \notin \mathbb{Q}$.

Proposição. *Seja a um inteiro. Então, se a for ímpar, seu quadrado também será. Além disso, se a for par, seu quadrado também é par.*

Proposição. *A equação $x^2 = 2$ não admite solução racional.*

A ideia da prova é escrever um x na forma de fração e chegar na contradição de que tanto o numerador quanto o denominador serão números pares. Com isso, conclui-se que não existe racional irredutível com quadrado igual a 2, portanto não existe racional satisfazendo a equação.

Essa discussão mostra que existem vãos na "reta" dos racionais, requerindo a adoção de um novo corpo. Essa é a principal motivação por trás dos números reais, "preencher"os buracos deixados pelos racionais.

Proposição. *(Exercício.) Sejam $p_1, \ldots, p_n$ números primos distintos. Então, a equação $x^2 = p_1 p_2 \cdots p_n$ não tem solução racional.*

Vimos que os números racionais com a sua adição, multiplicação e relação de ordem é um corpo ordenado. Nos interessamos, também, pelo corpo dos reais e dos racionais $(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. De forma abstrata, um corpo é um conjunto não-vazio $\mathbb{F}$ em que estão definidas duas operações binárias

$$+ : \mathbb{F} \times \mathbb{F} \to \mathbb{F}, \quad (x, y) \mapsto x + y$$

e

$$\cdot : \mathbb{F} \times \mathbb{F} \to \mathbb{F}, \quad (x, y) \mapsto xy$$

em que valem as oito propriedades vistas previamente para a definição das operações em $\mathbb{Q}$ Se, ainda por cima, no corpo $\mathbb{F}$ está definida uma ordem com propriedades análogas às vistas para a quádrupla $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$, diremos que $(\mathbb{F}, +, \cdot, \leq)$ é um corpo ordenado.

Definição. *Diremos que um subconjunto A de um corpo $\mathbb{F}$ ordenado é limitado superiormente se existe um L neste corpo tal que $a \leq L$ para todo a de A.*

Definimos para um subconjunto limitado superiormente um número $\sup(A) \in \mathbb{F}$ como o menor limitante superior de A, i.e., se $a \leq \sup(A)$ para todo a de A e se existe $f \in \mathbb{F}$ com $f < \sup(A)$, então existe um a em A com $f < a$.

Por fim, diremos que um corpo ordenado é completo se todo subconjunto limitado superiormente possui supremo. $\square$

Nem todo subconjunto limitado superiormente de $\mathbb{Q}$ tem supremo, ou seja, $\mathbb{Q}$ não é completo.

2.4 Os Números Reais ($\mathbb{R}$)

A ideia que iremos usar para construir o conjunto dos reais é que o conjunto dos números reais preenche toda a reta real. Os Elementos de $\mathbb{R}$ serão os subconjuntos de $\mathbb{Q}$ à esquerda de um ponto da reta real e serão chamados de cortes.

Definição. *Um corte é um subconjunto $\alpha \subsetneq \mathbb{Q}$ com as seguintes propriedades:*

i) $\alpha \neq \emptyset$ *e* $\alpha \neq \mathbb{Q}$;

ii) Se $p \in \alpha$ e q é um racional com $q < p$, então $q \in \alpha$ (todos os racionais à esquerda de um elemento de α estão em α);

iii) Se $p \in \alpha$, existe um $r \in \alpha$ com $p < r$ (α não tem um maior elemento). $\square$

Essa ideia foi proposta inicialmente por Julius Wilhelm Richard Dedekind, um matemático alemão, em 1872, com o objetivo de encontrar uma explicação e construção elementar para os números reais.

Exemplo 1. *Se q é um racional, definimos $q^* = \{r \in \mathbb{Q} : r < q\}$.Então, q^* é um corte que chamamos de racional. Os cortes que não são desse tipo se chamam cortes irracionais.*

Exemplo 2. $\sqrt{2} = \{q \in \mathbb{Q} : q^2 < 2\} \cup \{q \in \mathbb{Q} : q < 0\}$ *é um corte irracional.*

Observe que se α é um corte, p é um ponto dele e q não é, então $p < q$. Além disso, se r pertence a α e $r < s$, então s não pertence ao corte.

Definição. *Diremos que $\alpha < \beta$, em que α e β são cortes, se $\alpha \subsetneq \beta$.*$\square$

Proposição. *Se α, β, γ são cortes,*

i) $\alpha < \beta$ *e* $\beta < \gamma$ *implica que* $\alpha < \gamma$;

ii) Exatamente uma das seguintes relações é válida: $\alpha < \beta$ ou $\alpha = \beta$ ou $\beta < \alpha$

iii) Todo subconjunto não-vazio e limitado superiormente de $\mathbb{R}$ tem supremo.

3 Aula 03 - 17/03/2023

3.1 Motivações

- Finalizar a construção de $\mathbb{R}$ por cortes;
- Definir um corpo ordenado com base nos cortes;

3.2 Cortes - Soma e Ordem

Coloquemos, para fins de conveniência, $\mathbb{R}$ como a união de todos os cortes.

Vamos mostrar que os cortes racionais são, de fato, cortes. Considere, dado um racional q, $q^* = \{p \in \mathbb{Q} : p < q\}$. Ele não pode completar todos os racionais, pois q + 1 não pertence a q^*. Além disso, ele é não vazio, visto que q-1 pertence a ele, mostrando a primeira propriedade dos cortes.

Ademais, se r pertence a q^* e p é um racional menor que r, segue da transitividade da ordem que p é menor que q, já que r também é. Assim, p pertence a q^*, mostrando a segunda propriedade dos cortes.

Por fim, dado um r em q^*, seja $s = \dfrac{r+q}{2}$. Então,

$$r - \frac{r+q}{2} = \frac{r-q}{2} < 0,$$

tal que s é menor que r e, logo, pertence a q^*. Portanto, q^* forma um corte.

Daremos continuidade às atividades da aula anterior demonstrando a última proposição vista.

Proposição. *Se α, β, γ são cortes,*

i) $\alpha < \beta$ e $\beta < \gamma$ implica que $\alpha < \gamma$;

ii) Exatamente uma das seguintes relações é válida: $\alpha < \beta$ ou $\alpha = \beta$ ou $\beta < \alpha$

iii) Todo subconjunto não-vazio e limitado superiormente de $\mathbb{R}$ tem supremo.

Prova. *As duas primeiras partes seguem automaticamente da forma que definimos a ordem $\leq$ para os cortes. Resta mostrar a última.*

Vamos exibir o supremo explicitamente. Com efeito, seja $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}$ um coleção de cortes limitada superiormente, i.e., existe um l em $\mathbb{R}$ tal que $\alpha \leq l$ para todo α em $\mathcal{A}$. Defina $\mathcal{S} = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} \alpha$. Mostremos que $\mathcal{S}$ é um corte. Com efeito, que $\mathcal{S}$ é não-vazio e diferente de $\mathbb{Q}$ é automático. Além disso, dado q em $\mathcal{S}$ e $r < q$, segue que $r \in \alpha_0$ para algum α_0 em $\mathcal{A}$.

Para ver que $\mathcal{S}$ é o supremo, suponha que $\mathcal{S}' < \mathcal{S}$. Então, existe r em $\mathcal{S}/\mathcal{S}'$. Como r pertence a $\mathcal{S}$, r pertence a α_0 para algum $\alpha_0 \in \mathcal{A}$. Logo, $\alpha_0 > \mathcal{S}'$. Portanto, $\mathcal{S}$ é o menor limitante superior de $\mathcal{A}$, ou seja, seu supremo. ■

Definição. *Se α, β são cortes, definimos $\alpha + \beta$ como o conjunto de todos os racionais da forma $r + s$, com r em α e s em β. Ademais, tome $0^* = \{s \in \mathbb{Q} : s < 0\}$.*□

Vamos conferir a definição, i.e., que $\alpha + \beta$ é um corte. Com efeito, $\alpha + \beta \neq \emptyset$, pois $\alpha \neq \emptyset$ e $\beta \neq \emptyset$. Além disso, se p não pertence a α e q não pertence a β, mas r pertence a α e s a β, então $r + s < p + q$, tal que $p + q$ não pertence a $\alpha + \beta$.

Além disso, tome $r + s$ em $\alpha + \beta$ e $p < r + s$. Escreva $p = r' + s' = \underbrace{p - r}_{\in \beta} + \underbrace{r}_{\in \alpha}$. Assim, p pertence a $\alpha + \beta$.

Por fim, tome $r + s$ em $\alpha + \beta$ e seja $r' > r$ (ambos em α). Logo, $\underbrace{r' + s}_{\in \alpha + \beta} > r + s$. Portanto, $\alpha + \beta$ é um corte.

Fica de exercício mostrar que 0^* é um corte. Agora, mostremos os axiomas de corpo.

A comutatividade e associatividade da adição são triviais. Além disso, dado r em α e s em 0^*,

$$r + s < r + 0 = r \Rightarrow r + s \in \alpha.$$

Logo, $\alpha + 0^* \subseteq \alpha$. Por outro lado, dado r em α, existe r' em α tal que $r' > r$. Assim, $r = \underbrace{r'}_{\alpha} + \underbrace{(r - r')}_{\in 0^*}$, pois $r - r' < 0$. Portanto, $\alpha \subseteq \alpha + 0^*$ e $\alpha = \alpha + 0^*$.

Proposição. *Dado um corte α, existe um único corte β tal que $\alpha + \beta = 0^*$, em que*

$$\beta = \{-p \in \mathbb{Q} : p - r \notin \alpha \text{ para algum } r \in \mathbb{Q}, r > 0\}$$

e é denotado por $-\alpha$.

Prova. *Começamos mostrando que β é um corte. Feito isso, vamos mostrar que $\beta + \alpha = 0^*$.*

Com efeito, dado -p em β, segue que p não pertence a β. Caso $s = p + r$, -s pertence a β, tal que β é não-vazio. Ademais, se $p \in \alpha, -p \notin \beta$, tal que β é diferente de $\mathbb{Q}$.

Além disso, se $-q < -p$ e $-p \in \beta$, então $-q \in \beta$. Por fim, se -p pertencer a β, $-p + \frac{r}{2} \in \beta$. Portanto, β é um corte.

Agora, vamos conferir o outro item. De fato, se r pertence a α e s a $-\alpha$, então $-s \notin \alpha$ e $r < -s$, i.e., $r + s < 0$. Segue que $\alpha + (-\alpha) \subseteq 0^*$. Por outro lado, se $-2r \in 0^*$ com $r > 0$, existe um inteiro n tal que $nr \in \alpha$ e $(n+1)r \notin \alpha$. Escolha $p = -(n+2)r \in -\alpha$ e escreva $-2r = nr + p$. Portanto, $0^* \subseteq \alpha + (-\alpha)$ e os conjuntos são iguais. ■

4 Aula 04 - 20/02/2023

4.1 Motivações

- Definir multiplicação de cortes;
- Definir conceito de distância entre números de $\mathbb{R}$

4.2 Cortes - Multiplicação

Definição. *Se α, β são cortes,*

$$\alpha\beta = \begin{cases} \alpha 0^*, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \\ \{p \in \mathbb{Q} : \exists 0 < r \in \alpha \text{ e } 0 < s \in \alpha : p \leq rs\}, \quad \alpha, \beta > 0^* \\ (-\alpha)(-\beta), \quad \alpha, \beta < 0^* \\ -[(-\alpha)\beta], \quad \alpha < 0^* e \beta > 0^* \\ -[\alpha(-\beta)], \quad \alpha > 0^* e \beta < 0^* \end{cases}$$

Definimos, também, $1^* \{s \in \mathbb{Q} : s < 1\}$.

4.3 $\mathbb{R}$ Como Corpo Ordenado Completo

Temos $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ e diremos que todo número que não é real é irracional.

Teorema. *A quádrupla $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ satisfaz as condições de corpo ordenado, de corpo e é completo.*

Definição. *Seja $x \in \mathbb{R}$. O módulo, ou valor absoluto de x, é dado por*

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$$

Disto segue que $|x| \geq 0$ e $-|x| \leq x \leq |x|$ para todo x real.

Exemplo 3. *Mostre que $|x|^2 = x^2$, ou seja, o quadrado de um número real não muda quando se troca seu sinal.*

Exemplo 4. *A equação $|x| = r$, com r maior que 0, tem como soluções apenas r e -r.*

Sejam P e Q dois pontos da reta real de abscissas x e y. Então, a distância de P a Q é definida por $|x-y|$. Assim, $|x-y|$ é a medida do segmento PQ. Em particular, como $|x| = |x-0|, |x|$ é a distância de x a 0.

Exemplo 5. *Seja r maior que 0. Então, $|x| < r$ se, e somente se, $-r < x < r$. Logo, o intervalo (-r, r) é o conjunto dos pontos reais cuja disância de 0 é menor que r.*

Exemplo 6. *Para quaisquer x, y reais, vale*

$$|xy| = |x||y|.$$

Exemplo 7. *Para quaisquer x, y reais, temos*

$$|x+y| \leq |x| + |y|.$$

Com efeito, somando $-|x| \leq x \leq |x|$ e $-|y| \leq y \leq |y|$, obtemos $-|x| - |y| \leq x + y \leq |x| + |y|$.■

Definição. *Um intervalo em $\mathbb{R}$ é um subconjunto de $\mathbb{R}$ que tem uma das seguintes formas:*

$$\begin{aligned}
&[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}, \quad \textit{(Intervalo fechado.)} \\
&(a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}, \quad \textit{(Intervalo aberto.)} \\
&[a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} \\
&(a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} \\
&(-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\} \\
&(-\infty,b) = \{x \in \mathbb{R} : x > b\} \\
&[a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\} \\
&(a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\} \\
&(-\infty,+\infty) = \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Definição. *Um conjunto A de $\mathbb{R}$ é dito limitado se existir L positivo tal que $|x| \leq L$ para todo x em A.*

Proposição. *Um conjunto A de $\mathbb{R}$ é limitado se, e só se, existir L positivo, tal que A está contido em $[-L, L]$*

Exemplo 8. *a) $A = [0,1]$ é limitado;*

b) $\mathbb{N}$ não é limitado;

c) $B = \left\{ \dfrac{2^n - 1}{2^n} : n \in \mathbb{N} \right\}$ é limitado;

d) $C = \left\{ \dfrac{2^n - 1}{2^n} : n \in \mathbb{N}^* \right\}$ é limitado.

Definição. *Seja $A \subseteq \mathbb{R}$.*

- *A será dito limitado superiormente se existir um L real tal que $x \leq L$ para todo x de A. Diremos que L é o limitante superior de A.;*
- *A será dito limitado inferiormente se existir um L real tal que $x \geq L$ para todo x de A. Diremos que L é o limitante inferior de A.;*

Caso ambos ocorram, diremos que A é limitado.

Definição. *Seja A um subconjunto dos reais limitado superiormente e não-vazio. Diremos que $\overline{L}$ é o supremo de A se for um limitante superior e para qualquer outro limitante superior L de A, tivermos $\overline{L} \leq L$. Quando o supremo pertencer ao conjunto, chamaremos ele de máximo.*

Vimos que todo subconjunto não-vazio e limitado superiormente de $\mathbb{R}$ tem supremo.

Definição. *Seja A um subconjunto dos reais limitado inferiormente e não-vazio. Diremos que $\overline{l}$ é o ínfimo de A se for um limitante inferior e para qualquer outro limitante inferior l de A, tivermos $\overline{l} \geq l$. Quando o ínfimo pertencer ao conjunto, chamaremos ele de mínimo.*

Proposição. *Dado um subconjunto A dos reais não-vazio e limitado superiormente, $L = \sup A$ se, e somente se,*

a) L for limitante superior de A;

b) para todo $\epsilon > 0$, existe $a \in A$ tal que $a > L - \epsilon$.

Teorema. *O conjunto $A = \{nx : n \in \mathbb{N}\}$ será ilimitado para todo x não-nulo.*

Prova. *Se $x > 0$, suponhamos, por absurdo, que A seja limitado e seja L seu supremo. Como $x > 0$, deve existir um natural m tal que*

$$L - x < mx \quad \text{ e } L = \sup A < (m+1)x.$$

Mas isso é uma contradição.

A prova para $x < 0$ é análoga e será deixada como exercício. ■

Exemplo 9. *a) Considere $A = [0, 1)$. Então, -2 e 0 são limitantes inferiores de A enquanto $1, \pi, 101$ são limitantes superiores de A.*

b) $\mathbb{N}$ não é limitado, mas é limitado inferiormente por 0, visto que $0 \leq x$ para todo x natural.

c) $B = \{x \in \mathbb{Q} : x \leq \sqrt{2}\}$ não é limitado, mas é limitado superiormente por L, em que $L \geq 2$. ■

Corolário. *Para todo $\epsilon > 0$, existe um n natural tal que*

$$\frac{1}{n} < \epsilon, \quad \frac{1}{n\sqrt{2}} < \epsilon, \quad 2^{-n} < \epsilon.$$

Já sabemos, por construção, que entre dois números reais distintos existe um número racional. O mesmo vale para irracionais. De fato, sejam a e b números reais distintos. Se $a < b$ e $\epsilon = b - a > 0$, do corolário, tome um natural n tal que $\dfrac{1}{n\sqrt{2}} < \dfrac{1}{n} < \epsilon$. Se a é racional, $r = a + \dfrac{1}{n\sqrt{2}}$ é irracional e $a < r < b$. Por outro lado, se a é irracional, $r = a + \dfrac{1}{n}$ também é, tal que $a < r < b$. Portanto, dados dois números reais quaisquer, existe um número irracional.

Corolário. *Qualquer intervalo aberto e não-vazio contém infinitos números racionais e infinitos irracionais.*

Corolário. *Se $A = \left\{\dfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\right\}$, então $\inf A = 0$.*

Exemplo 10.

(*a*) *Seja* $A = (0, 1]$. *Então,* $\inf A = 0, \max A = 1$;

(*b*)$\sqrt{2} = \{r \in \mathbb{Q} : r \leq 0\} \cup \{r \in \mathbb{Q} : r^2 < 2\}$ *é um corte.* (*c*)$C = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\} \Rightarrow \sqrt{2} = \sup C$ *e* $\inf C = -\sqrt{2}$.

Vamos analisar mais cautelosamente o item b e prová-lo. De fato, se $0 < r \in \mathbb{Q}$ *e* $r^2 < 2$, *existe n natural tal que* $[2r + 1]\frac{1}{n} < 2 - r^2$ *e* $(r + \frac{1}{n})^2 < 2$. *As outras propriedades de cortes são triviais.*

Olhando também para o item C, como todos seus elementos são racionais saitsfazendo $x^2 < 2, \sqrt{2}$*é um limitante superior de C. Agora, se* $0 < L < \sqrt{2}$, *existe um racional* $r \in (L, \sqrt{2})$ *e* $L^2 < r^2 < 2$. *Logo, r pertence a C e L não é limitante superior para C, provando o resultado.*

Proposição. *Se A é um subconjunto não-vazio e limitado inferiormente, então* $-A = \{-x : x \in A\}$ *será limitado superiormente e* $\inf A = -\sup(-A)$. *Analogamente, se for limitado superiormente, o conjunto -A será limitado inferiormente, e* $\sup A = -\inf(-A)$

Prova. *Se A for limitado inferiormente,* $\inf(A) \leq x$ *para todo x de A e, dado* $\epsilon > 0$, *deve existir a em A tal que* $a < \inf(A) + \epsilon$, *ou, trocando o sinal,* $-\inf(A) \geq -x$ *para todo -x de -A e, dado* $\epsilon > 0$, *deve existir* $b = -a$ *em -A tal que* $-a > -\inf(A) - \epsilon$.

Com isso, segue que -A será limitado superiormente, e $\sup(-A) = -\inf(A)$. *A outra prova fica como exercício.* ■

Corolário. *Todo conjunto A não-vazio e limitado inferiormente de* $\mathbb{R}$ *tem ínfimo.*

Corolário. *Todo conjunto A não-vazio e limitado de* $\mathbb{R}$ *tem ínfimo e supremo.*

Definição. *Uma vizinhança de um número real a é qualquer intervalo aberto da reta contendo a.*

Exemplo 11. *Se* $\delta > 0, V_\delta(a) := (a - \delta, a + \delta)$ *é uma vizinhança de a que será chamada de* $\delta-$*vizinhança de a.*

Definição. *Sejam A um subconjunto de* $\mathbb{R}$ *e b um número real. Se, para todo* $\delta > 0$, *existir* $a \in V_\delta(b) \cap A, a \neq b$, *então b será dito um ponto de acumulação de A.*

Exemplo 12. *a) O conjunto dos pontos de acumulação de (a, b) é [a, b];*

b) Seja $B = \mathbb{Z}$. *Então, B não tem pontos de acumulação;*

c) Subconjuntos finitos de $\mathbb{R}$ *não têm pontos de acumulação;*

d) O conjunto dos pontos de acumulação de $\mathbb{Q}$ *é* $\mathbb{R}$.

Definição. *Seja* $B \subseteq \mathbb{R}$. *Um ponto b de B será dito um ponto isolado de B, se existir* $\delta > 0$ *tal que* $V_\delta(b)$ *não contém pontos de B distintos de b.* □

Exemplo 13. *Seja* $B = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots\}$. *Então, o conjunto dos pontos de acumulação de B é* $\{0\}$ *e o conjunto dos pontos isolados de B é o próprio conjunto B.*

Observe que existem conjuntos infinitos sem pontos de acumulação, tal como $\mathbb{Z}$. Por outro lado, todo conjunto infinito e limitado possui pelo menos um ponto de acumulação.

Teorema. *Se A é um subconjunto infinito e limitado de* $\mathbb{R}$, *então A possui pelo menos um ponto de acumulação.*

Prova. *Se* $A \subseteq [-L, L]$ *e* $[a_n, b_n], n \in \mathbb{N}$ *são escolhidos tais que* $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n], b_0 = -a_0 = L, b_n - a_n = \frac{2L}{2^n}, n \in \mathbb{N}^*$ *e* $[a_n, b_n]$ *contém infinitos elementos de A. Seja* $a = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Note que $[a_n, b_n] \subseteq a_j, b_j, j \leq n$ *e* $[a_j, b_j] \subseteq [a_n, b_n], j > n$. *Em qualquer um dos casos,* $a_n \leq b_j$ *para todo* $j \in \mathbb{N}$. *Logo,* $a \leq b_j, j \in \mathbb{N}$. *Segue que* $a_n \leq a = \sup\{s_n : n \in \mathbb{N}\} \leq b_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *e* $a \in \bigcap_{n \geq 1} [a_n, b_n]$.

Dado $\delta > 0$, *escolha* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $\frac{2L}{2^n} < \delta$. *Segue que* $a \in [a_n, b_n] \subseteq (a - \delta, a + \delta) = V_\delta(a)$ *e a é ponto de acumulação de A.* ■

5 Aula 05 - 22/03/2023

5.1 Motivações

- Sequências de Números Reais;
- Convergência de Sequências;

5.2 Sequências de Números Reais

Definição. *Uma sequência é uma função definida no conjunto dos números reais que, para cada n natural, associa um número real a_n.*

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$$
$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$
$$n \mapsto a_n.$$

Denotamos a função por $\{a_n\}$ $\square$

Exemplo 14. *Sendo $a_n = \frac{f1}{n+1}$ para todo n natural, temos a sequência $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots\}$.*

Exemplo 15. *Sendo $a_n = 6$ para todo n natural, temos a sequência constante*

$$\{6, 6, 6, \cdots\}.$$

Exemplo 16. *Coloque $a_{2n+1} = 7, a_{2n} = 4$ para todo n natural. Temos*

$$\{4, 7, 4, 7, \cdots\}$$

Consideremos as sequências

$$\alpha_n = n, \quad \beta_n = (-1)^n, \quad \text{ e } \gamma_n = \frac{1}{n}.$$

Como funções, elas podem ter os gráficos traçados, mas não são muito significativos, visto que consistem em coletâneas de pontos discretos. Ademais, note que a sequência (α_n) "diverge" para infinito, a sequência (β_n) "oscila" e a sequência (γ_n) "converge para 0". Precisamente,

Definição. *A sequência $\{a_n\}$ é dita convergente com limite l se, para todo $\epsilon > 0$, existe um natural N dependendo de $\epsilon(N = N(\epsilon) \in \mathbb{N})$ tal que $n > N$ implica em $|a_n - l| < \epsilon$. Ou seja, a partir de um certo N, os a_n estão no intervalo $(l - \epsilon, l + \epsilon)$ e, como ϵ é arbitrário, os a_n se juntam em torno de l. Disto, segue que a condição exigida equivale a*

$$l - \epsilon < a_n < l + \epsilon, \quad n \geq N.$$

Denotamos esse fenômeno por $\lim_{n\to\infty} a_n = l$, ou $a_n \to l$, ou $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$.$\square$.

Exemplo 17. $\circ \frac{1}{n} \to 0, n \to \infty$. *De fato, dado $\epsilon > 0$, da propriedade arquimediana, segue que existe um N natural tal que $N\epsilon > 1$. Logo, para todo $n \geq N$, temos*

$$0 - \epsilon < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < 0 + \epsilon.$$

$\circ \frac{n}{n+1} \to 1, n \to \infty$. *Com efeito, dado $\epsilon > 0$, queremos encontrar N natural não-nulo tal que se n é maior que N, temos*

$$\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \epsilon.$$

No entanto, $|\frac{n}{n+1} - 1| = \frac{1}{n+1}$ e, da propriedade Archimediana, existe N em $\mathbb{N}^\times$ tal que $(N + 1)\epsilon > 1$. Logo, se $n \geq N$,

$$1 - \epsilon < \frac{n}{n+1} < 1 + \epsilon.$$

Definição. *Uma sequência $\{a_n\}$ será divergente quando ela não for convergente.*

I) *Sequência divergente para $+\infty$: Este caso ocorre se dado $K > 0$, existe N natural tal que se $n > N, a_n > K$.*

II) *Sequência divergente para $-\infty$: Acontece quando dado $K > 0$, existe N natural tal que se $n > N, a_n < -K$.*

III) *Sequência oscilante: Por fim, ocorre quando a sequência diverge, mas nem para $+\infty$ e nem para $-\infty$.*$\square$

Note que, como sequências são funções, podemos multiplicá-las por constante, somar, dividir e multiplicar por outras sequência. De fato,

Definição. *Dadas sequências $\{a_n\}, \{b_n\}$ e um número real c, deifnimos*

$$\begin{aligned}
&i)\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\} \\
&ii)c\{a_n\} = \{c \cdot a_n\} \\
&iii)\{a_n\}\{b_n\} = \{a_n b_n\} \\
&iv)\ \text{Se } b_n \neq 0 \forall n \in \mathbb{N}, \frac{\{a_n\}}{\{b_n\}} = \left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}\square
\end{aligned}$$

Definição. *Seja $\{a_n\}$ uma sequência de número reais. Diremos que $\{a_n\}$ é limitada se sua imagem for um subconjunto limitado de $\mathbb{R}$.*$\square$

Teorema. *Seja $\{a_n\}$ uma sequência de números reais.*

a) *$a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$ se, e somente, toda vizinhança de a contém todo, exceto uma possível quantidade finita de a_n's.*

b) *O limite é único.*

c) *Se $\{a_n\}$ é convergente, então $\{a_n\}$ é limitada*

d) *Se $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$, exite N natural tal que $a_n > 0$ para todo $n \geq N$.*

e) *Se $A \subseteq \mathbb{R}$ e a é um ponto de acumulação de A, então existe uma sequência $\{a_n\}$ de elementos de A que converge para a.*

Prova. *O item a é trivial. Mostremos a unicidade do limite: Suponha que a_n converge para a e para b, com a diferente de b. Então, dado $\epsilon > 0$, existem naturais N_1, N_2 tais que se $n \geq N_1, |a_n - a| < \epsilon$ e se $n \geq N_2, |a_n - b| < \epsilon$. Tome $N = \min N_1, N_2$ e suponha que $n \geq N$. Então, temos*

$$|b - a| \leq |b - a_n| + |a_n - a| = |b - a_n| + |a - a_n| < 2\epsilon.$$

(P.S.: pode ser boa prática tomar $\frac{\epsilon}{2}$ ao invés de ϵ, pois assim obtemos $|b - a| < \frac{2\epsilon}{2} = \epsilon$.)

Como ϵ é abritrário, podemos selecionar ϵ infinitamente próximo de 0. Portanto, $b = a$.

Para o item c, suponha que a_n converge para a, isto é, dado $\epsilon > 0, \epsilon = 1$ em particular, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N, |a_n - a| < 1$. Logo, $a_n \in (a - 1, a + 1)$ para n maior que N suficientemente grande. Restam os N-1 primeiros elementos da sequência. Assim, tome $R = \max\left\{|a_1|, \cdots, |a_{N-1}|, |a + 1|, |a - 1|\right\}$. Deste modo, $a_n \in [-R, R]$ para todo n natural.

Com relação ao item d, basta tomar $\epsilon = \frac{a}{2} > 0$.

Por fim, quanto ao item e, suponha o que é dito no enunciado. Como a é ponto de acumulação, dado $\epsilon > 0$, existe $a' \in A, a' \neq a$ tal que

$$a' \in V_\epsilon(a) = (a - \epsilon, a + \epsilon).$$

Logo, tomadno $\epsilon = \frac{1}{n}$, podemos encontrar $a_n \in A, a_n \neq a$ tal que $a_n \in \left(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right)$. A sequência $\{a_n\}$ converge para a. De fato, dado $\epsilon > 0$, tome N natural tal que $N\epsilon > 1$. Assim, se $n \geq N, a_n \in (a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}) \subseteq a - \epsilon, a + \epsilon)$. Portanto, $a_n \to a$. $\blacksquare$

Teorema. *Seja* $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a, b_n \overset{n\to\infty}{\to} b$ *e* c *um número real. Então,*

$$a) a_n + b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a + b.$$
$$b) ca_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} ca$$
$$c) a_n b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} ab$$
$$d) Se b \neq 0, b_n \neq 0 \forall n \in \mathbb{N}, \frac{a_n}{b_n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{a}{b}.$$

Prova. *Item c). Suponha* $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a, b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} b$. *Note que*

$$|a_n b_n - ab| = a_n b_n - a_n b + a_n b - ab \leq |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a|$$

Como $\{a_n\}$ *é convergente, ela é limitada pelo teorema anterior. Assim, existe* $M > 0$ *tal que* $|a_n| \leq M$ *para todo* n *natural, tal que Assim,*

$$|a_n b_n - ab| \leq |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a| \leq M|b_n - b| + (|b| + 1)|a_n - a|.$$

Agora, dado $\epsilon > 0$, *existem naturais* N_1, N_2 *tais que*

$$|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2(|b| + 1)}, \quad \forall n \geq N_1$$
$$|b_n - b| < \frac{\epsilon}{2M}, \quad \forall n \geq N_2.$$

Logo, tomando $N = \max\{N_1, N_2\}$, *se* $n \geq N$,

$$|a_n b_n - ab| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Portanto, $a_n b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} ab$. ■

Definição. *Seja* $\{a_n\}$ *uma sequência. Diremos que* $\{b_n\}$ *é uma subsequência de* $\{a_n\}$ *se existir uma função estritamente crescente* $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *tal que* $b_k = a_{s(k)}$ *para todo* k *natural.* □

Definição. *Seja* $\{a_n\}$ *uma sequência. Diremos que* $\{a_n\}$ *é de Cauchy se, dado* $\epsilon > 0$, *existe um natural* $N = N(\epsilon)$ *tal que* $|a_n - a_m| < \epsilon$ *para todo* $n, m \geq N$.□

Teorema. *a) Uma sequência é convergente se, e somente se, toda subsequência dela converge para o mesmo limite.*

b) Toda sequência convergente é de Cauchy;

c) Toda sequência limitada tem subsequência convergente;

d) Toda sequência de Cauchy é limitada;

e) Toda sequência de Cauchy que tem subsequência convergente é convergente.

f) Toda sequência de Cauchy é convergente;

g) Toda sequência crescente e limitada é convergente;

h) Toda sequência decrescente e limitada é convergente.

6 Aula 06 - 24/03/2023

6.1 Motivações

- Provar o teorema da aula anterior;
- Exemplos.

6.2 Propriedades de Sequências

Recapitulemos o teorema da aula anterior:

Teorema. *a) Uma sequência é convergente se, e somente se, toda subsequência dela converge para o mesmo limite.*

b) Toda sequência convergente é de Cauchy;

c) Toda sequência limitada tem subsequência convergente;

d) Toda sequência de Cauchy é limitada;

e) Toda sequência de Cauchy que tem subsequência convergente é convergente.

f) Toda sequência de Cauchy é convergente;

g) Toda sequência crescente e limitada é convergente;

h) Toda sequência decrescente e limitada é convergente.

Prova. *a.) $\Leftarrow$) Se toda subsequência de $\{a_n\}$ converge, então $\{a_n\}$ converge, pois ela é uma subsequência de si mesma (basta tomar $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, s(n) = n$.)'*

$\Rightarrow$) Suponha que $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} l$ e $\{b_n\}$ é uma subsequência de $\{a_n\}$, existe $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estritamente crescente tal que $b_k = a_{s(k)}$. Dado $\epsilon > 0$, seja N o natural tal que $|a_n - l| < \epsilon$ para todo $n \geq N$. Note que $s(n) \geq n$, tal que se $n \geq N$, então $s(n) \geq N$, de forma que $|a_{s(n)} - l| < \epsilon$. Portanto, qualquer subsequência de $\{a_n\}$ é convergente.

b.) Se $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} l$, então dado $\epsilon > 0$, existe N natural tal que

$$|a_n - l| < \frac{\epsilon}{2}, \quad \forall n \geq N.$$

Logo, $|a_n - a_m| = |a_n - l + l - a_m| \leq |a_n - l| + |l - a_m| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$ para todo $n, m \geq N$.

c.) Suponha que $\{a_n\}$ é uma sequência limitada. Recorde que, do teorema de Bolzano-Weierstrass, todo conjunto inifinito e limitado possui um ponto de acumulação. Segue que a imagem I da sequência é finita ou infinita.

No primeiro caso, se I é finito, um dos valores pertencentes a I é tal que $a_n = a$ para infinitos índices. Construiremos a sequência como segue - Coloque s(0) como o menor elemento do conjunto dos n's para os quais $a_n = a$, i.e., $\{n \in \mathbb{N} : a_n = a\} = A$. Além disso, tome s(1) como o menor elemento de A, com exceção do s(0). Repetindo esse processo, obtemos uma subsequência constante até que se obtenha s(n) = a, ou seja, ela será convergente.

Agora, se I é infinito, segue de Bolzano-Weierstrass que I tem um ponto de acumulação, nomeie-o de a. Dado $\epsilon > 0, (a - \epsilon, a + \epsilon)$ tem infinitos elementos do conjunto I. Analogamente ao anterior, coloque $N = s(0)$ como o menor elemento de $\{n \in \mathbb{N} : a_n \neq a, a_n \in (a - \epsilon, a + \epsilon)\}$ e coloque, também, $\epsilon_1 = |a - a_{s(0)}|$. Em seguida, tome $s(1) = \{n \in \mathbb{N} : a_n \neq a, a_n \in (a - \frac{\epsilon}{2}, a + \frac{\epsilon}{2})\}$. Indutivamente, $b = a_{s(n)}$ é convergente para a.

d.) Dado $\epsilon = 1$, seja N um número natural tal que

$$|a_n - a_m| < 1, \quad \forall n \geq N.$$

Considere $M = \{|a_0|, |a_1|, \cdots, |a_{N-1}|, |a_N + 1|, |a_N - 1|\}$. Assim, $a_n \in [-M, M]$ para todo n natural.

e.) Seja $\{a_n\}$ de Cauchy e $\{a_{s(n)}\}$ convergente para l. Dado $\epsilon > 0$, existe um natural N_1 tal que

$$|a_n - a_m| < \frac{\epsilon}{2}, \quad \forall n \geq N_1.$$

Além disso, existe N_2 natural tal que

$$|a_{s(n)} - l| < \frac{\epsilon}{2}, \quad \forall s(n) \geq N_2.$$

Seja $N = \max\{s(N_2), N_1\}$ e tome $n \geq N$.

$$|a_n - l| = |a_n - a_{s(N_2)} + a_{s(N_2)} - l| \leq |a_n - a_{s(N_2)}| + |a_{s(N_2)} - l| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

f.) Segue os itens (e), (d) e (c), visto que toda subsequência de Cauchy terá subsequência convergente pelos itens (d) e (c).

g.) Seja $\{a_n\}$ limitada e crescente, $l = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Então, para todo $n \geq N$, em que N é tal que $a_N \in (l - \epsilon, l)$

$$l - \epsilon < a_N \leq a_n \leq l.$$

h.) Análoga ao g.

Exemplo 18. *Mostre que*

i) $\{a, a, a, \cdots\}, a \in \mathbb{R}$ *é convergente;*

ii) $\{0, 1, 0, 1\}$ *não é convergente;*

iii) $\{n\}$ *não é convergente.*

Exemplo 19. *Se a é um número real mais ou igual a zero, então a sequência $\{a^n\}$ é convergente se $0 \leq a \leq 1$ e divergente se $a > 1$. Com efeito, se $a > 1, a = 1 + h, h > 0$. Então,*

$$a^n = (1+h)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} h^k = 1 + nh + \cdots > 1 + nh.$$

Mas, segue da Archimediana que $1 + nh$ sempre forma um conjunto ilimitado para n natural, ou seja, a_n é ilimitada. Logo, a sequência diverge.

Por outro lado, suponha que a pertence a (0, 1). Então, $a^{n+1} = aa^n < a^n$, ou seja, é uma sequência decrescente e limitada inferiormente. Portanto $\{a_n\}$ é convergente.

Exemplo 20. *Mostre que, se a é diferente de 1,*

$$\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$$

e que a sequência $\left\{\frac{1-a^{n+1}}{1-a}\right\}$ é convergente se $0 \leq a < 1$ e divergente se $a > 1$.

Exemplo 21. *Mostre que a sequência $\{a_n\}$, com $a_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}$ é convergente para todo n natural. (Crescente e limitada por 3.)*

Exemplo 22. *Mostre que as sequências $\left\{(1 + \frac{1}{n}^n)\right\}, \{n^{\frac{1}{n}}\}$ e $\{a^{\frac{1}{n}}\}$ com $a > 0$, são convergentes.*

$$\circ\, (1 + \frac{1}{n})^n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}(1 - \frac{1}{n}) + \cdots + \frac{1}{n!}(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) \cdots (1 - \frac{n-1}{n})$$

$$\circ\, n^{\frac{1}{n}} > (n+1)^{\frac{1}{n+1}} \Longleftrightarrow n^{n+1} > (n+1)^n \Longleftrightarrow n > (1 + \frac{1}{n})^n$$

$$\circ\, x = a^n < 1 \Rightarrow x < 1, x^n = a, x^{n+1} = a^{\frac{n+1}{n}}, \text{ e } y^{n+1} = a \Rightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} = a^{\frac{1}{n}}.$$

7 Aula 07 - 27/03/2023

7.1 Motivações

- Exemplos de Sequências;
- Teorema da Comparação e do Sanduíche;
- Limites superior e inferior.

7.2 Exemplos de Sequências

Revisemos os exemplos da última aula, com um extra ao final.

Exemplo 23. *Mostre que*

i) $\{a, a, a, \cdots\}, a \in \mathbb{R}$ *é convergente;*

ii) $\{0, 1, 0, 1\}$ *não é convergente;*

iii) $\{n\}$ *não é convergente.*

Exemplo 24. *Se a é um número real mais ou igual a zero, então a sequência* $\{a^n\}$ *é convergente se* $0 \leq a \leq 1$ *e divergente se* $a > 1$. *Com efeito, se* $a > 1, a = 1 + h, h > 0$. *Então,*

$$a^n = (1+h)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} h^k = 1 + nh + \cdots > 1 + nh.$$

Mas, segue da Archimediana que $1 + nh$ *sempre forma um conjunto ilimitado para n natural, ou seja,* a_n *é ilimitada. Logo, a sequência diverge.*

Por outro lado, suponha que a pertence a (0, 1). Então, $a^{n+1} = aa^n < a^n$, *ou seja, é uma sequência decrescente e limitada inferiormente. Portanto* $\{a_n\}$ *é convergente.*

Exemplo 25. *Mostre que, se a é diferente de 1,*

$$\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$$

e que a sequência $\left\{\frac{1-a^{n+1}}{1-a}\right\}$ *é convergente se* $0 \leq a < 1$ *e divergente se* $a > 1$.

Exemplo 26. *Mostre que a sequência* $\{a_n\}$, *com* $a_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}$ *é convergente para todo n natural. (Crescente e limitada por 3.)*

De fato, é claro que $\{a_n\}$ *é crescente e que* $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$, *para* $n \geq 2$. *Logo,*

$$a_n \leq 1 + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} < 3.$$

Portanto, $\{a_n\}$ *é convergente, e denotamos seu limite por e.*

Exemplo 27. *Mostre que as sequências* $\left\{(1 + \frac{1}{n}^n)\right\}, \{n^{\frac{1}{n}}\}$ *e* $\{a^{\frac{1}{n}}\}$ *com* $a > 0$, *são convergentes.*

$$\circ\, (1 + \frac{1}{n})^n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}(1 - \frac{1}{n}) + \cdots + \frac{1}{n!}(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) \cdots (1 - \frac{n-1}{n})$$

$$\circ\, n^{\frac{1}{n}} > (n+1)^{\frac{1}{n+1}} \iff n^{n+1} > (n+1)^n \iff n > (1 + \frac{1}{n})^n$$

$$\circ\, x = a^n < 1 \Rightarrow x < 1, x^n = a, x^{n+1} = a^{\frac{n+1}{n}}, \text{ e } y^{n+1} = a \Rightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} = a^{\frac{1}{n}}.$$

Ainda mais, uma delas têm como limite o número e definido no exemplo anterior. Para observar isso, considere o primeiro exemplo. Note que

$$\begin{aligned}
b_n &= 1 + \binom{n}{1} n^{-1} + \binom{n}{2} n^{-2} + \cdots + \binom{n}{n-1} n^{-n+1} + \binom{n}{n} n^{-n} \\
&= 1 + 1 + \frac{1}{2!}(1 - \frac{1}{n}) + \cdots + \frac{1}{n!}(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) \cdots (1 - \frac{n-1}{n}) \\
&\leq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} = a_n < e
\end{aligned}$$

Como cada termo da soma que define b_n é crescente, obtemos que b_n é crescente, tal que ela converge com limite $l = \sup\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Com relação ao último item, resta elaborar como ele converge para 1. Lembre-se que $a^{\frac{1}{n}}$ é o único número real positivo x tal que $x^n = a$. Logo, se $x = a^n$ e $y = a^{\frac{1}{n+1}}$, temos $x^{n+1} = y^{n+1}x$ e, deste modo,

$$(a) 0 < a < 1 \Rightarrow x < 1 \ e \ \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} = x < 1 \ e, \ assim, \ x < y.$$

$$(b) a > 1 \Rightarrow x > 1 \ e \ \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} = x > 1 \ tal \ que \ x > y.$$

Logo, se $a < 1, \{a^{\frac{1}{n}}\}$ é crescente e limitada superiormente por 1, mostrando que ela é convergente. Além disto, se $a > 1, \{a^{\frac{1}{n}}\}$ é descrescente e limitada inferiormente por 1, também sendo convergente. Por fim, segue de $a^{\frac{1}{n(n+1)}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{a^{\frac{1}{n+1}}}$. Portanto, do item (a) do teorema junto com a regra para quociente de sequências, segue que $l = 1$ é o limite dela.

<u>Exemplo</u> 28. *Mostre que a sequência $\{c_n\}, c_0 = 1, c_n = n^{\frac{1}{n}}, n \geq 1$, é convergente. Com efeito, lembre-se que, para $n \geq 3, n > b_n = (1 + \frac{1}{n})^n$. Logo, para $n \geq 3, n^{n+1} > (n+1)^n$ e, consequentemente, $n^{\frac{1}{n}} > (n+1)^{\frac{1}{n+1}}$. Disto segue de $\{n^{\frac{1}{n}}\}$ é limitada e, por (h), que $\{c_n\}$ é convergente com limite $l \geq 1$. Ainda mais, $(2n)^{\frac{1}{2n}}(2n)^{\frac{1}{2n}} = (2n)^{\frac{1}{n}} = 2^{\frac{1}{n}} n^{\frac{1}{n}}$ e, portanto, usamos (a) e o exemplo da última aula para mostrar que $l^2 = l = 1$.*■

7.3 Teoremas da Comparação e do Sanduíche

Notação: Se uma sequência tem limite 0, ela é chamada infinitésima.

<u>Teorema</u>. *Se $\{a_n\}$ é limitada e $\{b_n\}$ é infinitésima, então $\{a_n \cdot b_n\}$ é infinitésima.*

<u>Prova</u>. *Como $\{a_n\}$ é limitada, seja $M > 0$ tal que $|a_n| \leq M$ para todo n natural. Como $\{b_n\}$ é infinitésima, dado $\epsilon > 0$, seja N outro natural tal que $|b_n| < \frac{\epsilon}{M}$ para todo $n \geq N$. Segue que*

$$|a_n b_n| \leq M|b_n| < M\frac{\epsilon}{M} = \epsilon, \quad \forall n \geq N.$$

Portanto, $\{a_n b_n\} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.■

<u>Exemplo</u> 29. *Mostre que $\left\{\frac{n+\cos(n)}{n+1}\right\}$ converge.*

Os resultados a seguir são os dois mencionados previamente, o teorema da comparação e o do sanduíche, respectivamente.

<u>Teorema</u>. *Se $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a, b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} b$ e existe N natural tal que, para todo $n \geq N, a_n \leq b_n$, então $a \leq b$.*

<u>Prova</u>. *Dado $\epsilon > 0$, existe $N_1 \leq N$ tal que, para todo $n \geq N_1$,*

$$a - \epsilon < a_n < a + \epsilon \quad \text{e} \quad b - \epsilon < b_n < b + \epsilon.$$

Logo, para todo $n \geq N$,

$$a - \epsilon < a_n \leq b_n < b + \epsilon.$$

Desta forma, $a - b < \epsilon$ para todo $\epsilon > 0$ e, portanto, $a - b \leq 0$.■

Teorema. *Se* $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} l, c_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} l$ *e existe um* N *natural tal que, para todo* $n \geq N, a_n \leq b_n \leq c_n$*, então* $b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} l$.

Prova. *Dado* $\epsilon > 0$*, existe* $N_1 \geq N$ *tal que, para todo* $n \geq N_1$,

$$l - \epsilon < a_n < l + \epsilon \quad e \quad l - \epsilon < c_n < l + \epsilon.$$

Logo, para todo $n \geq N_1$,

$$l - \epsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < l + \epsilon.$$

Disto segue que $|b_n - l| < \epsilon$ *para todo* $n \geq N_1$ *e que, portanto,* $\{b_n\}$ *é convergente para* l. $\blacksquare$

Exemplo 30. *Vamos mostrar que*

$$e = \lim_{n\to\infty} \overbrace{(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!})}^{a_n} = \lim_{n\to\infty} \overbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}^{b_n} = l.$$

De fato, como $a_n \geq b_n$ *para todo* n *natural, segue do Teorema da Comparação que* $e \geq l$*. Por outro lado, se* $n \geq p \geq 2$,

$$b_n > 1 + 1 + \frac{1}{2!}(1 - \frac{1}{n}) + \cdots + \frac{1}{p!}(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) \cdots (1 - \frac{p-1}{n}).$$

Agora, novamente pelo Teorema da Comparação, $l = \lim_{n\to\infty} b_n \geq a_p$ *para todo natural* p*. Portanto,* $l = \lim_{n\to\infty} b_n \geq \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = \lim_{n\to\infty} a_n = e$. $\blacksquare$

Definição. *Seja* $\{a_n\}$ *uma sequência. Um número real* a *é um valor de aderência de* $\{a_n\}$ *se a sequência* $\{a_n\}$ *possui uma subsequência convergente para* a. $\square$

Definição. *Seja* $\{a_n\}$ *uma sequência limitada. Definimos o limite superior* $\limsup_{n\to\infty} a_n$(*inferior* $\liminf_{n\to\infty} a_n$) *da sequência* $\{a_n\}$ *por*

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} a_k$$
$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} a_k \quad \square$$

Uma consequência direta do Teorema do Confronto que utiliza os conceitos acima nos permite dizer se uma sequência converge apenas utilizando as ideias de limite superior e inferior:

Teorema. *Se* a *é um valor de aderência da sequência* $\{a_n\}$*, então*

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leq a \leq \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

Além disso, uma sequência é convergente se, e somente se, $\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$.

8 Aula 08 - 29/03/2023

- Relação entre limite superior (e inferior), limites normais e valores de aderência;
- Aproximações sucessivas de valores.

8.1 Limite Superior e Inferior

Definição. *Seja $\{a_n\}$ uma sequência. Um número real a é um valor de aderência de $\{a_n\}$ se a sequência $\{a_n\}$ possui uma subsequência convergente para a.* $\square$

Definição. *Seja $\{a_n\}$ uma sequência limitada. Definimos o limite superior $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$(inferior $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$) da sequência $\{a_n\}$ por*

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} a_k = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} a_k$$
$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} a_k = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq n} a_k \quad \square$$

Uma consequência direta do Teorema do Confronto que utiliza os conceitos acima nos permite dizer se uma sequência converge apenas utilizando as ideias de limite superior e inferior:

Teorema. *Se $\{a_n\}$ é uma sequência limitada, então $a = \liminf_{n\to\infty} a_n$ e $b = \limsup_{n\to\infty} a_n$ são valores de aderência de $\{a_n\}$*

Prova. *A prova se baseia em verificar que, dada uma vizinhança V_a de a, temos $a_n \in V_a$ para infinitos índices n. Dado $\epsilon > 0$, existe N natural tal que, colocando $a = \liminf\limits_{n\to\infty} = \lim\limits_{n\to\infty} \inf\limits_{k\geq n} a_k = \lim\limits_{n\to\infty} i_n$,*

$$a - \epsilon < i_n < a + \epsilon \quad \forall n \geq N.$$

Assim, existe um $a_{\overline{k}}, \overline{k} \geq N$ em $(a-\epsilon, a+\epsilon)$. Assim, existe $\overline{n} > \overline{k}$ tal que

$$a - \epsilon < i_{\overline{n}} < a + \epsilon.$$

Repetindo o raciocício, existe $a_{\overline{\overline{k}}}, \overline{\overline{k}} \geq \overline{n} > k$ em $(a-\epsilon, a+\epsilon)$. Dando continuidade a este raciocínio ad infinitum, o teorema está provado. $\blacksquare$

Teorema. *Se a é um valor de aderência da sequência $\{a_n\}$, então*

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leq a \leq \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

Além disso, uma sequência é convergente se, e somente se, $\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$.

Prova. *Defina $i_n = \inf_{k\geq n} a_k$. Segue que $i_{s(n)} \leq a_{s(n)} \overset{\to}{\longrightarrow} a$, pois o conjunto $\{a_k : k \geq s(n)\}$ contém $a_{s(n)}$. Logo, como $i_{s(n)}$ converge para $\liminf_{n\to\infty} a_n$, segue do Teorema da comparação que*

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} a_{s(n)} = a.$$

Analogamente, como $a_{s(n)} \leq \sup_{k\geq s(n)}(a_k) = s_{s(n)}$ e $\sup_{k\geq s(n)}(a_k) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a_n$, pelo teorema da comparação, chegamos novamente em

$$\lim_{n\to\infty} a_{s(n)} = a \leq \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

Portanto, juntando ambos, segue o resultado. $\blacksquare$

A seguir, mostraremos um método para aproximar números por meio de sequências de Cauchy.

Teorema. *Se $\kappa \in [0,1), \{a_n\}$ é uma sequência tal que, para todo $n \in \mathbb{N}, |a_{n+2} - a_{n+1}| \leq \lambda |a_{n+1} - a_n|$, então $\{a_n\}$ é de Cauchy.*

Prova. *Se $m > n$ são naturais, $m = n + p$ para algum natural não-nulo p. Assim, como*

$$|a_{n+p} - a_n| = |a_{n+p} - a_{n+p-1} + a_{n+p-1} + \cdots + a_{n+1} - a_n|,$$

segue da desigualdade triangular que

$$\begin{aligned}
|a_{n+p} - a_n| &\leq \kappa|a_{n+p-1} - a_{n+p-2}| + \kappa|a_{n+p-2} - a_{n+p-3}| + \cdots + \kappa|a_n - a_{n-1}| \\
&\leq \kappa^{n+p-1}|a_{n+p} - a_{n+p-1}| + \cdots + \kappa^n|a_p - a_{p-1}| \\
&= \kappa^n\left[\kappa^{p-1} + \cdots + 1\right]|a_1 - a_0| < \frac{\kappa^n}{1-\kappa}|a_1 - a_0|.
\end{aligned}$$

Dado $\epsilon > 0$, escolha N natural tal que $\dfrac{\kappa^n}{1-\kappa}|a_1 - a_0| < \epsilon$. Assim, segue que, se $m, n \geq N, |a_m - a_n| < \epsilon$ e $\{a_n\}$ é de Cauchy. ■

Exemplo 31. *Seja $a > 0$ e $\{a_n\}$ a sequência definida por $a_0 = c > 0$ e $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{a}{a_n}\right)$. Mostre que $\{a_n\}$ é convergente com limite $\sqrt{a}$.*

Com efeito, observe que

$$a_{n+2} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_{n+1} - a_n) + \frac{a}{2}\left(\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}\right) = \left(\frac{1}{2} - \frac{a}{2a_na_{n+1}}\right)(a_{n+1} - a_n)$$

e note que, para todo $t > 0, \frac{1}{2}(t + \frac{a}{t}) > \sqrt{\frac{a}{2}}$. Logo, $a_n > \sqrt{\frac{a}{2}}$ para todo n maior ou igual que 1. Disto segue que $2a_na_{n+1} > a$ e que

$$\left|\frac{1}{2} - \frac{a}{2a_na_{n+1}}\right| < \frac{1}{2}.$$

Portanto, segue do método das aproximações sucessivas que $\{a_n\}$ é convergente e seu limite l deve satisfazer $l = \frac{1}{2}(l + \frac{a}{l})$, ou seja, $l^2 = a$. ■

9 Aula 09 - 31/03/2023

9.1 Motivações

- Limites Infinitos;
- Sequências divergentes.

9.2 Pontos de Aderência e Limites Superiores/Inferiores.

Definição. *Seja $\{a_n\}$ uma sequência. Um número real a é um valor de aderência de $\{a_n\}$ se a sequência $\{a_n\}$ possui uma subsequência convergente para a.* $\square$

Definição. *Seja $\{a_n\}$ uma sequência limitada. Definimos o limite superior $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$(inferior $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$) da sequência $\{a_n\}$ por*

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} a_k = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} a_k$$
$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} a_k = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq n} a_k \quad \square$$

Uma consequência direta do Teorema do Confronto que utiliza os conceitos acima nos permite dizer se uma sequência converge apenas utilizando as ideias de limite superior e inferior:

Teorema. *Se $\{a_n\}$ é uma sequência limitada, então $a = \liminf_{n\to\infty} a_n$ e $b = \limsup_{n\to\infty} a_n$ são valores de aderência de $\{a_n\}$*

Prova. *A prova se baseia em verificar que, dada uma vizinhança V_a de a, temos $a_n \in V_a$ para infinitos índices n. Dado $\epsilon > 0$, existe N natural tal que, colocando $a = \liminf\limits_{n\to\infty} = \lim\limits_{n\to\infty} \inf\limits_{k\geq n} a_k = \lim\limits_{n\to\infty} i_n$,*

$$a - \epsilon < i_n < a + \epsilon \quad \forall n \geq N.$$

Assim, existe um $a_{\overline{k}}, \overline{k} \geq N$ em $(a-\epsilon, a+\epsilon)$. Assim, existe $\overline{n} > \overline{k}$ tal que

$$a - \epsilon < i_{\overline{n}} < a + \epsilon.$$

Repetindo o raciocício, existe $a_{\overline{\overline{k}}}, \overline{\overline{k}} \geq \overline{n} > k$ em $(a-\epsilon, a+\epsilon)$. Dando continuidade a este raciocínio ad infinitum, segue que V_a contém a_n para infinitos indíces n, tal que o teorema está provado. $\blacksquare$

Corolário. *(Exercício) Nas condições do teorema, a é um valor de aderência de $\{a_n\}$ e $b = \limsup_{n\to\infty} a_n$ também é um valor de aderência de $\{a_n\}$*

Teorema. *Se a é um valor de aderência da sequência $\{a_n\}$, então*

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leq a \leq \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

Além disso, uma sequência é convergente se, e somente se, $\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$.

Prova. *Defina $i_n = \inf_{k\geq n} a_k$. Segue que $i_{s(n)} \leq a_{s(n)} \overset{\to}{\longrightarrow} a$, pois o conjunto $\{a_k : k \geq s(n)\}$ contém $a_{s(n)}$. Logo, como $i_{s(n)}$ converge para $\liminf_{n\to\infty} a_n$, segue do Teorema da comparação que*

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} a_{s(n)} = a.$$

Analogamente, como $a_{s(n)} \leq \sup_{k\geq s(n)}(a_k) = s_{s(n)}$ e $\sup_{k\geq s(n)}(a_k) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a_n$, pelo teorema da comparação, chegamos novamente em

$$\lim_{n\to\infty} a_{s(n)} = a \leq \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

Portanto, juntando ambos, segue o resultado. $\blacksquare$

9.3 Sequências Divergente para $\pm\infty$.

Recorde-se que

Definição. *Diremos que uma sequência* $\{a_n\}$ *diverge para* $+\infty(-\infty)$ *se, dado* $M > 0$, *existe um natural* N *tal que* $a_n \geq M(a_n \leq -M)$ *para todo* $n \geq N$. *Escreveremos* $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty(-\infty)$, *ou* $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty(-\infty)\square$.

Definição. *Diremos que a sequência* $\{a_n\}$ *é eventualmente positiva (negativa) se existe um natural* N *tal que* $a_n > 0(a_n < 0)$ *para todo* $n \geq N.\square$

Vejamos a seguir algumas das propriedades dessas sequências.

Teorema. *a) Se* $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ *e* $\{b_n\}$ *é limitada inferiormente, então* $a_n + b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$.

b) Se $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ *e* $\liminf_{n\to\infty} b_n > 0$, *então* $\lim_{n\to\infty} a_n b_m = +\infty$

c) Seja $\{a_n\}$ *uma sequência com* $a_n \neq 0$ *para todo* n *natural.* $\{a_n\}$ *é eventualmente negativa e* $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ *se, e somente se,* $\dfrac{1}{a_n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$.

d) Sejam $\{a_n\}, \{b_n\}$ *sequências eventualmente positivas,* $b_n \neq 0$ *para todo* n *natural.*

d.1) Se $\liminf_{n\to\infty} a_n > 0$ *e* $b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, *então* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = +\infty$.

d.2) Se $\{a_n\}$ *é limitada e* $b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, *então* $\dfrac{a_n}{b_n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Prova. *(a)* $\Rightarrow$) *Como* $\{b_n\}$ *é limitada inferiormente, existe um número real* $l > 0$ *tal que* $b_n \geq -l$ *para todo* n *natural. Como* $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, *dado* M *positivo, existe* N *natural tal que* $a_n \geq M + l$ *para todo* $n \geq N$. *Logo,*

$$a_n + b_n \geq M + l - l = M, \quad \forall n \geq N.$$

Portanto, $a_n + b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$.

(b) $\Rightarrow$) *Como* $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ *e* $\liminf_{n\to\infty} b_n = r > 0$, *existe* N_1 *natural tal que* $\liminf_{k\geq n} a_n \geq \frac{r}{2}$ *para todo* $n \geq N_1$. *Como* $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, *dado* M *positivo, existe* N_2 *natural tal que* $a_n > \frac{2M}{r}$ *para todo* $n \geq N_2$. *Disto segue que, para* $n \geq N = \max\{N_1, N_2\}$,

$$a_n b_n \geq \frac{2M}{r}\frac{r}{2} = M, \quad \forall n \geq N.$$

donde segue o que queríamos.

(c) $\Rightarrow$) *Se* $\{a_n\}$ *é infintésima e eventualmente positiva, dado* M *positivo, seja* N *natural tal que* $0 < a_n < \frac{1}{M}$ *para quaisquer* $n \geq N$. *Logo,* $\frac{1}{a_n} > M$ *para todos os* $n \geq N$, *mostrando que* $\frac{1}{a_n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$.

Reciprocamente, se $\frac{1}{a_n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, *dado* $\epsilon > 0$, *seja* N *natural tal que* $\frac{1}{a_n} > \frac{1}{\epsilon}$ *para todo* $n \geq N$. *Desta forma,* $0 < a_n < \epsilon$ *para todo* $n \geq N$, *provando o resultado.*

(d.1) $\Rightarrow$) *De fato, se* $\liminf_{n\to\infty} a_n = r > 0$, *existe* N_1 *natural tal que* $a_n \geq \frac{r}{2}$ *para todo* $n \geq N_1$. *Dado* M *positivo, seja* N_2 *outro natural tal que* $0 < a_n < \frac{r}{2M}$ *para todo* $n \geq N_2$. *Logo,* $\frac{a_n}{b_n} > \frac{r}{2}\frac{2M}{r} = M$ *para todo* $n \geq N = \max\{N_1, N_2\}$, *tal que* $\frac{a_n}{b_n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$.

(d.2) $\Rightarrow$) *Seja* $L > 0$ *tal que* $|a_n| \leq L$ *para todo* n *natural. Como* $b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, *dado* $\epsilon > 0$, *existe* N *natural tal que* $b_n > \frac{L}{\epsilon}(\frac{1}{b_n} < \frac{\epsilon}{L})$ *para todo* $n \geq N$. *Logo,*

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - 0\right| < L \cdot \frac{\epsilon}{L} = \epsilon, \quad \forall n \geq N,$$

mostrando que $\frac{a_n}{b_n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.\blacksquare$

É importante notar que, se $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ e $b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$, nada podemos afirmar de $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n)$. Neste caso, tudo pode ocorrer! $\{a_n + b_n\}$ pode convergir para qualquer número real, divergir para $+\infty, -\infty$ ou pode oscilar. Vamos ilustrar a situação.

Exemplo 32. *Se $a_n = \sqrt{n+1}, b_n = -\sqrt{n}$, para todo n natural, é fácil de ver que $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ e $b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$. Para ver o que ocorre com a sequência $\{a_n + b_n\}$, observe que*

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

Segue de (d.2) que $\{a_n + b_n\}$ é infinitésima.

Exemplo 33. *Se $a > 1$, então a sequência $\{a_n\}$ dada por $a_n = \frac{a^n}{n}$ diverge para $+\infty$. De fato, basta ver que $a = 1 + h$, com h positivo, e escrever*

$$\frac{a^n}{n} = \frac{(1+h)^n}{n} = \frac{1}{n} + h + (n-1)\frac{h^2}{2!} + s_n.$$

O resultado segue aplicando (a).

Exemplo 34. *Se $a > 1$, então a sequência $\{a_n\}$ com $a_n = \frac{n!}{a^n}$ diverge para $+\infty$. Com efeito, basta escolher n_0 tal que $\frac{n_0}{a} > 2$ e escrever, para $n \geq n_0, a_n = \frac{n_0!}{a^{n_0}} \frac{n!}{n_0!} \frac{1}{a^{n-n_0}}$. Se $r = \frac{n_0!}{a^{n_0}} \frac{n!}{n_0!}$, temos*

$$a_n = r\frac{n(n-1)\cdots(n_0+1)}{a^{n-n_0}} = r2^{n-n_0} + s_n = r(n+1-n_0) + \tilde{s}_n$$

Novamente, o resultado segue aplicando (a).

Por fim, algumas outras propriedades que não foram inclusas no teorema são deixadas como exercício ao leitor.

a) Se $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$ e $\{b_n\}$ é limitada superiormente, então $a_n + b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

b) Se $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$ e $\liminf_{n\to\infty} b_n > 0$, então $\lim_{n\to\infty} a_n b_m = -\infty$.

c) Seja $\{a_n\}$ uma sequência com $a_n \neq 0$ para todo n natural. $\{a_n\}$ é eventualmente negativa e $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ se, e somente se, $\frac{1}{a_n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

d) Sejam $\{a_n\}, \{b_n\}$ duas sequências eventualmente negativas com $b_n \neq 0$ para todo n natural.

d.1) Se $\liminf_{n\to\infty} a_n < 0$ e $b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, então $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$.

d.2) Se $\{a_n\}$ é limitada e $b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$, então $\frac{a_n}{b_n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

e) No item (d), analise a situação em que $\{a_n\}$ é eventualmente positiva e $\{b_n\}$ é eventualmente negativa.

10 Aula 10 - 10/04/2023

10.1 Motivações

- Séries;
- Séries de números positivos;
- Testes da raíz e da razão.

10.2 Séries de Números Reais

Séries são tipos particulares de sequências que possuem suas próprias propriedades extras. Vamos começar com um exemplo, chamado série harmônica (nome derivado da média harmônica).

Exemplo 35. *Considere* $s_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$. *Provemos que* $\{s_n\} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$. *Com efeito, como* $\{s_n\}$ *é crescente, basta mostrar que ela é ilimitada:*

$$\begin{aligned}
&s_1 = 1\\
&s_2 = 1+\frac{1}{2} = 3\frac{1}{2}\\
&s_3 = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\\
&s_4 = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4} > 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 4\frac{1}{2}\\
&s_8 = 1+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}_{>\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}_{4\frac{1}{8}} > 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 5\frac{1}{2}\\
&s_{16} = s_8+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{16} > 5\frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 6\frac{1}{2}.\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Analisando o padrão de repetição desta série, chegamos em

$$s_{2^n} > (n+2)\frac{1}{2} \Rightarrow s_{2^{n+1}} > s_{2^n} + \frac{1}{2^n+1}+\cdots+\frac{1}{2^n+2^n} > (n+2)\frac{1}{2}+\frac{2^n}{2^{n+1}} = ((n+1)+2)\frac{1}{2}.$$

Logo, por indução, $s_{2^k} > (k+2)\frac{1}{2}$ *para todo k natural, mostrando que* $\{s_n\}$ *não é limitada superiormente. Portanto,* $\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$. ■

Consideremos a sequência $\{a_n\}$. A partir da sequência $\{a_n\}$, vamos construir a sequência das somas parciais da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
&s_1 = a_1\\
&s_2 = a_1+a_2\\
&s_3 = a_1+a_2+a_3\\
&\vdots\\
&s_n = a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n\\
&\cdots.
\end{aligned}$$

Definição. *A sequência* $\{s_n\}$ *das somas paricais é chamada série associada a* $\{a_n\}$. *Cada* s_n *é chamado soma parcial da série, e cada* a_n *leva o nome de termo da série. As notações são:*

$$\sum_{n\geq 1} a_n, \quad \sum a_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \text{ou } a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots.$$

Observe que, às vezes, consideraremos séries que comecem em algum termo n_0 ao invés do termo 1. Neste caso, escreveremos $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$.

Exemplo 36.

$$\begin{aligned}
&\{a_n\} = \{(-1)^{n+1}\}. \text{ A sequência das somas parciais será:}\\
&s_1 = a_1 = 1\\
&s_2 = a_1 + a_2 = 1 - 1 = 0\\
&\vdots\\
&s_n = 0 \text{ ou } 1.
\end{aligned}$$

Exemplo 37. *Construimos a série* $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ *no exemplo anterior.*

Exemplo 38. $\{a_n\} = \left\{\frac{6}{10^n}\right\}$ *é uma série que, quando construída, converge para* $\frac{2}{3}$.

Definição. *Diremos que uma série é convergente se a sequência das somas parciais é convergente. Caso contrário, será dita divergente. Se a sequência* $\{s_n\}$ *é convergente para S, dizemos que a série* $\sum_{1}^{\infty} a_n$ *é convergente com soma S.* □

A soma, multiplicação, etc. De séries é definida como no caso das sequências. Denotaremos séries convergentes por

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)$$

Exemplo 39. *A série telescópica é dada por*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

Observe que

$$\begin{aligned}
s_n &= \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}\\
&= (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \cdots + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})\\
&= 1 - \frac{1}{n+1}.
\end{aligned}$$

Portanto, $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}(1 - \frac{1}{n+1}) = 1 - 0 = 1.$ ■

Exemplo 40. *i)* $\sum_{1}^{\infty}(-1)^n$ *é divergente, visto que, para termos ímpares da soma parcial, ela vale 0, mas para termos pares, ela vale 1.*

ii) $\sum_{1}^{\infty} 2^n$ *diverge, pois a soma parcial dos termos dela não é limitada.*

iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *diverge, e recebe o nome de série harmônica. Aqui,* $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$.

Algumas séries são importantes, pois podem ser utilizadas para obter informações sobre outras através da comparação, tais como a série telescópica e a harmônica. Outra importante é a série geométrica:

Exemplo 41. *Definimos ela como* $\sum\limits_{n\geq 1} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots$. *Afirmamos que ela é convergente se, e só se,* $|r| < 1$, *convergindo para* $\frac{a}{1-r}$. *Assim,*

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n + \cdots = \frac{a}{1-r}, \quad |r| < 1.$$

Com efeito, se r = 1, então $s_n = a + a + a + \cdots + a = na$, *que tende a infinito ou menos infinito, dependendo do sinal de a, mostrando sua divergência. Agora, se r for diferente de 1, temos:*

$$s_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}, \quad rs_n = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots ar^n.$$

Subtraindo membro a membro, obtemos

$$s_n(1-r) = a - ar^n = a(1-r^n).$$

Portanto, $s_n = a\frac{1-r^n}{1-r} = \frac{a}{1-r} - \frac{a}{1-r}r^n$. *Se* $|r| < 1$, *já vimos anteriormente que* $r^n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, *tal que*

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{1-r} - \frac{a}{1-r}r^n\right) = \frac{a}{1-r}.$$

Caso $|r| > 1$, *ou r = -1, vimos anteriormente que* r^n *é divergente, provando o que queríamos.* ■

Teorema. *Se* $\sum a_n$ *é uma série convergente, então* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. *A recíproca é falsa.*

Prova. *Note que, se* $\{s_n\}$ *a sequência das somas parciais dos an's é convergente, temos*

$$a_n = s_n - s_{n-1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} s - s = 0,$$

provando o resultado. Um contraexemplo da volta é a série harmônica. ■

Exemplo 42. *Exercício:* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *é uma série convergente se, e somente se,* $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ *é convergente.*

Teorema. *Se* $a_n \geq 0$ *para todo n natural,* $\sum a_n$ *é uma série convergente se, e somente se, a sequência das somas paricais é limitada.*

Teorema. *Sejam* $\sum a_n, \sum b_n$ *séries de termos positivos. Se existem c positivo e* n_0 *natural tais que* $a_n \leq cb_n$ *para todo* $n \geq n_0$, *então*

i) Se $\sum b_n$ *é convergente, então* $\sum a_n$ *é convergente.*

ii) Se $\sum a_n$ *é divergente, então* $\sum b_n$ *é divergente.*

Exemplo 43. *Se* $r > 1, \sum \frac{1}{n^r}$ *é convergente. De fato, note que*

$$\begin{aligned}
s_{2^n-1} &< 1 + \left(\frac{1}{2^r} + \frac{1}{3^r}\right) + \left(\frac{1}{4^r} + \frac{1}{5^r} + \frac{1}{6^r} + \frac{1}{7^r}\right) + \cdots \\
&+ \left(\frac{1}{2^n - 2^{n-1}} + \cdots + \frac{1}{(2^n-2)^r} + \frac{1}{(2^n-1)^r}\right) \\
&< 1 + \frac{2}{2^r} + \frac{4}{4^r} + \cdots + \frac{2^{n-1}}{2^{(n-1)r}} \\
&= 1 + \frac{1}{2^{r-1}} + \frac{1}{4^{r-1}} + \cdots + \frac{1}{2^{(n-1)(r-1)}} \leq \frac{1}{1-2^{-r+1}}.
\end{aligned}$$

Como uma sequência convergente é equivalente a uma de Cauchy, vale o seguinte resultado:

Teorema. *A série $\sum a_n$ é convergente se, e somente se, dado $\epsilon > 0$, existe um natural N tal que*

$$|s_{n+p} - s_n| = |a_n + \cdots + a_{n+p}| < \epsilon$$

para todo $n \geq N$ e todo natural p.

Definição. *Uma série $\sum a_n$ é absolutamente convergente quando $\sum |a_n|$ é convergente.* $\square$.

Segue do critério de Cauchy que

Teorema. *Se $\sum a_n$ é absolutamente convergente, então $\sum a_n$ é convergente. A volta não vale.*

Com relação a volta, considere a série $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ não é absolutamente convergente, mas converge. De fato, note que

$$s_2 = 1 - \frac{1}{2}, s_4 = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}), s_6 = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} - \frac{1}{6}), \cdots$$

Assim, $s_2 < s_4 < \cdots < s_{2n} < \cdots$ e $\{s_{2n}\}$ é crescente e limitada por 1, tal que ela converge. Por outro lado,

$$s_1 = 1, s_3 = 1 + (-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}), s_5 = 1 + (-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) + (-\frac{1}{4} + \frac{1}{5}), \cdots$$

Deste forma, $s_1 > s_3 > s_5 > \cdots > s_{2(n-1)} > \cdots$, ou seja, $\{s_{2(n-1)}\}$ é decrescente limitada, portanto convergente.

Por outro lado, $s_{2n+1} - s_n = \frac{1}{2n+1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, mostrando a convergência da série.

Exemplo 44. *Exercício: Seja $\{a_n\}$ uma sequência infinitésima de termos não negativos que é decrescente. Mostre que $\sum (-1)^n a_n$ é convergente.*

Exemplo 45. *Exercícios: Seja $\sum b_n$ uma série convergente de termos não-negativos. Se existem k positivo e n_0 natural tais que $|a_n| \leq k b_n$ para todo $n \geq n_0$, então a série $\sum a_n$ é absolutamente convergente.*

Se existem $c \in (0, 1), k > 0$ e n_0 natural tais que $|a_n| \leq kc^n$ para todo $n \geq n_0$, então a série $\sum a_n$ é absolutamente convergente.

10.3 Testes da Razão e da Raíz

Teorema. *Se $\{a_n\}$ é uma sequência limitada e $\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = c < 1$, então $\sum a_n$ é absolutamente convergente.*

Prova. *Existe N natural tal que $\sup_{k \geq n} |a_k|^{\frac{1}{k}} < r = \frac{c+1}{2} < 1$ para todo natural n. Logo, $|a_n| < r^n$ para todo $n \geq N$. Segue do Teorema da Comparação que $\sum |a_n|$ é convergente, ou seja, $\sum a_n$ é absolutamente convergente.* ■

Exemplo 46. *Se p é natural, então $\sum n^p a^n$ é convergente para $|a| < 1$ e divergente para $|a_n| \geq 1$. De fato, basta ver que $\limsup_{n\to\infty} |n^p a^n|^{\frac{1}{n}} = |a| < 1$ e aplicar o teste da raíz. Para ver que a série é divergente quando o módulo de a é maior ou igual a 1, basta notar que a sequência dos termos da série não converge para zero neste caso.* ■

11 Aula 11 - 12/04/2023

11.1 Motivações

- Teste da Razão;
- Teoremas de Dirichlet, Abel e Leibniz;
- Séries Rearranjadas.

11.2 Teste da Raíz e da Razão.

Comecemos revisitando o Teste da Raíz.

Teorema. *Se* $\{a_n\}$ *é uma sequência limitada e* $\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = c < 1$, *então* $\sum a_n$ *é absolutamente convergente.*

Prova. *Existe* N *natural tal que* $\sup_{k\geq n} |a_k|^{\frac{1}{k}} < r = \frac{c+1}{2} < 1$ *para todo natural* n. *Logo,* $|a_n| < r^n$ *para todo* $n \geq N$. *Segue do Teorema da Comparação que* $\sum |a_n|$ *é convergente, ou seja,* $\sum a_n$ *é absolutamente convergente.* ■

Exemplo 47. *Se* p *é natural, então* $\sum n^p a^n$ *é convergente para* $|a| < 1$ *e divergente para* $|a_n| \geq 1$. *De fato, basta ver que* $\limsup_{n\to\infty} |n^p a^n|^{\frac{1}{n}} = |a| < 1$ *e aplicar o teste da raíz. Para ver que a série é divergente quando o módulo de a é maior ou igual a 1, basta notar que a sequência dos termos da série não converge para zero neste caso.* ■

Como esperado, o resultado seguinte é o que conhecemos como Teste da Razão, e costuma ser mais simples de aplicar na maioria dos casos.

Teorema. *Se* $\sum b_n$ *é uma série convergente de termos positivos e* $\sum a_n$ *é uma série de termos não-nulos tais que existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *satisfazendo*

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}, \quad \forall n \geq n_0,$$

então $\sum a_n$ *converge absolutamente. Em particular, se* $\limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = c < 1$, *também vale que* $\sum a_n$ *é absolutamente convergente.*

Prova. *De fato, segue que*

$$\frac{|a_{n_0+1}|}{|a_{n_0}|} \leq \frac{b_{n_0+1}}{b_{n_0}}, \frac{|a_{n_0+2}|}{|a_{n_0+1}|} \leq \frac{b_{n_0+2}}{b_{n_0+1}}, \cdots$$

Logo, $\frac{|a_{n_0+p}|}{|a_{n_0}|} \leq \frac{b_{n_0+p}}{b_{n_0}}$ *e o resultado segue usando o Teorema da Comparação. Por fim, o caso particular segue tomando* $b_n = c^n$. ■

Exemplo 48. *Provemos que* $\sum \frac{n!}{n^n} a^n$ *é convergente para* $|a| < e$. *Com efeito, note que, para a não-nulo,*

$$\frac{\left|\frac{(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}} a^{(n+1)}\right|}{|\frac{n!}{n^n} a^n|} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} |a| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{|a|}{e}.$$

O resultado agora segue do Teste da Razão.

Exemplo 49. *Considere a série* $\sum a_n$ *com* $a_{2n} = 2a^{n-1}, a_{2n-1} = a^{2(n-1)}$. *Vamos aplicar o critério da raíz e o critério da razão para esta série. Caso* $n = 2k$, *temos*

$$\frac{|a_{2k+1}|}{|a_{2k}|} = \frac{|a^{2k}|}{2|a^{2k-1}|} = \frac{|a|}{2}.$$

Agora, se n = 2k-1,

$$\frac{|a_{2k}|}{|a_{2k-1}|} = \frac{2|a^{2k-1}|}{|a^{2(k-1)}|} = 2|a|.$$

Segue que $\limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 2|a|$. *Por outro lado,* $\sqrt[n]{a_n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} |a|$. *Desta forma, o teste da raíz nos dá convergência para* $|a| < 1$, *enquanto que o teste da razão nos dá convergência apenas para* $|a| < \frac{1}{2}$.

O exemplo anterior indica uma diferença no nível de eficácia dos testes. De fato, o Teste da Raíz é mais eficiente do que o teste da razão, como segue

Teorema. *Seja* $\{a_n\}$ *uma sequência limitada de números reais não-nulos. Então,*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq \liminf_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} \leq \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}.$$

Prova. *Mostremos primeiramente que* $\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$. *Se não, seja* $c > 0$ *com* $\limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < c < \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$. *Logo, existe um natural N tal que*

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < c, \quad \forall n \geq N.$$

Disto segue que $|a_{N+p}| < |a_N| c^{-N} c^{N+p}$ *para todo p natural não-nulo. Sendo assim,* $c < \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} \leq c$, *uma contradição.*

Para ver que $\liminf_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq \liminf_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$, *procedemos de modo similar. Comece supondo que existe um* $c > 0$ *tal que* $\liminf_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > c > \liminf_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$. *Logo, existe N natural tal que* $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > c$ *para todo* $n \geq N$, *e* $|a_{N+p}| > |a_N| c^{-N} c^{N+p}$ *para todo* $p \in \mathbb{N}^*$. *Portanto, temos uma contradição, pois* $c > \liminf_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} \geq c$. ■

Corolário. *Seja* $\{a_n\}$ *uma sequência limitada de números reais não-nulos. Se existe o limite* $\lim_{\to} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$, *então o limite* $\lim_{\to} |a_n|^{\frac{1}{n}}$ *também existe e ambos têm o mesmo valor.*

Exemplo 50. *Vamos mostrar que*

$$\lim_{\to} \frac{n}{(n!)^{\frac{1}{n}}} = e.$$

De fato, seja $a_n = \frac{n^n}{n!}$ *e note que* $(a_n)^{\frac{1}{n}} = \frac{n}{(n!)^{\frac{1}{n}}}$. *Note também que*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = (1+\frac{1}{n})^n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} e.$$

A seguir, apresentaremos três resultados, o Teorema de Dirichlet sobre o produto de séries, o de Abel sobre o produto de uma série por uma sequência não-crescente, e o de Leibniz.

Teorema. *Seja* $\sum a_n$ *uma série e* $s_n = a_1 + \cdots + a_n$, *sendo n um natural, as suas somas parciais. Se* $\{s_n\}$ *é limitada e* $\{b_n\}$ *é uma sequência de números reais positivos que é não-crescente e infinitésima, então* $\sum a_n b_n$ *é convergente.*

Prova. *Segue por indução que, se* $s_n = a_1 + \cdots + a_n$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} a_k b_k &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n \\ &= s_1(b_1 - b_2) + s_2(b_2 - b_3) + \cdots + s_{n-1}(b_{n-1} - b_n) + s_n b_n \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} s_k(b_k - b_{k+1}) + s_n b_n.\end{aligned}$$

Seja $M = \sup\{|s_n| : n \in \mathbb{N}\}$. Como $\sum(b_n - b_{n+1})$ é uma série convergente de número reais não-negativos e $s_n b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, temos

$$|s_k(b_k - b_{k+1})| \leq M(b_k - b_{k+1}),$$

segue que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} s_n(b_n - b_{n+1})$ é convergente e que $\sum a_n b_n$ é convergente. ■

Exemplo 51. *Para cada número real x que não é múltiplo inteiro de 2π, as séries $\sum \frac{\cos(nx)}{n}$ e $\sum \frac{\sin(nx)}{n}$ são convergentes. De fato, vamos utilizar um resultado dos números complexos, que afirma que*

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta), \quad i \text{ é tal que} i^2 = -1.$$

Sendo assim, para ver que $\{\sum\limits_{k=1}^{n} \cos(nx)\}$(ou $\{\sum\limits_{k=1}^{n} \sin(nx)\}$ é limitada utilizamos que

$$1 + e^{ix} + e^{i2x} + \cdots + e^{inx} = \frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}},$$

e tomamos parte real e a parte imaginária. O resultado agora segue do Teorema de Dirichlet. ■

Teorema. *Seja $\sum a_n$ uma série convergente e $\{b_n\}$ uma sequência não crescente de números positivos (não necessariamente infinitésima). Então, a série $\sum a_n b_n$ é convergente.*

Prova. *Seja $c = \lim_{n\to\infty} b_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} b_n$ e $s_n = a_1 + \cdots + a_n$. Note que*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} a_k(b_k - c) + c\sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Agora, pelo Teorema de Dirichlet, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(b_n - c)$ é convergente com soma s. Portanto,

$$\sum a_n b_n = s + c\sum a_n. \quad \blacksquare$$

Teorema. *Seja $\{b_n\}$ uma sequência não crescente e infinitésima. Então, a série $\sum(-1)^n b_n$ é convergente.*

Prova. *Observe que, no caso em que $a_n = (-1)^n$ e $s_n = a_1 + \cdots + a_n$, então $\{s_n\}$ é limitada. Com isso, utilizando o Teorema de Dirichlet, $\sum(-1)^n b_n$ é, portanto, convergente.* ■

12 Aula 12 - 14/04/2023

12.1 Motivações

- Entender séries de potências;
- Estudar séries rearranjadas.

12.2 Testes da Razão e Raíz Modificados.

Começamos, antes, com outros exemplos com relação à última aula. O primeiro é

Teorema. *Seja $\{a_n\}$ uma sequência não-crescente de números reais não-negativos. A Série $\sum a_n$ converge se, e somente se, a série $\sum 2^k a_{2^k}$ é convergente.*

Prova. *Sejam $\{s_n\}, \{s_n^*\}$ as sequências das somas parciais de $\sum a_n$ e $\sum 2^k a_{2^k}$. Então, para todo n natural,*

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq s_{2^n-1} = a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \cdots + (a_{2^{n-1}} + \cdots + a_{2^n-1}) \quad \leq s_{n-1}^* \leq s_n^*.$$

Logo, se $\{s_n^*\}$ é limitada, segue que $\{s_n\}$ é limitada.

Agora, note que, para todo n natural,

$$\begin{aligned} s_{2^n} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{2^n} &\geq \frac{a_1}{2} + a_2 + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) + \cdots + (a_{2^{n-1}+1} + \cdots + a_{2^n}) \\ &\geq \frac{a_1}{2} + a_2 + 2a_4 + 4a_8 + \cdots + 2^{n-1}a_{2^n} = \frac{1}{2}s_n^*. \end{aligned}$$

Portanto, se $\{s_n\}$ é limitada, segue que $\{s_n^*\}$ é limitada. ■

Exemplo 52. *Do resultado anterior, a série $\sum \frac{1}{n^p}$ é convergente se, e só se, a série $\sum \frac{2^n}{2^{np}} = \sum 2^{(1-p)n}$ é se, somente se, $p > 1$.*

Exemplo 53. *A série $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log(n))}^p$ é convergente se, e somente se, $p > 1$. Com efeito, segue do resultado anterior que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^n(\log(2^n))^p} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log 2n^p}$$

é convergente se, e somente se, $p > 1$.

Exemplo 54. *Vamos provar que e não é racional. De fato, seja $s_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$. Assim,*

$$\begin{aligned} 0 < e - s_n &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \cdots \\ &< \frac{1}{(n+1)!}[1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \cdots] \qquad = \frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}} = \frac{1}{nn!}. \end{aligned}$$

Agora, suponha que existem inteiros postivios p e q tais que $e = \frac{p}{q}$. Temos

$$0 < q!(e - s_q) < \frac{1}{q} \leq 1.$$

Por hipótese, $q!e$ é um inteiro e, como $q!s_q$ também é inteiro, segue que $q!(e - s_q)$ é inteiro em $(0,1)$ e temos uma contradição.

O exemplo a seguir ilustra um caso em que o teste da razão não se aplica, mas o teste da raíz indica convergência.

Exemplo 55. *Considere a série* $\{a_n\}$ *com* $a_{2n} = \frac{1}{2^n}$ *e* $a_{2n-1} = \frac{1}{3^n}$. *Note que*

$$\frac{a_{2n}}{a_{2n-1}} = \left(\frac{3}{2}\right)^n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty \quad e \quad \frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

No entanto, fazendo o teste da raíz,

$$\sqrt[2n]{a_{2n}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{2}} \quad e \quad \sqrt[2n-1]{a_{2n-1}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n}{2n-1}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Portanto, $\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = +\infty$ *e* $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. *Em outras palavras, o teste da raíz se indica convergência, mas o teste da razão é inconclusivo.* ■

Agora, vamos tornar o teste da raíz mais completo.

Teorema. *Se* $\{a_n\}$ *é uma sequência limitada e* $\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = c < 1$, *então* $\sum a_n$ *é absolutamente convergente. Se* $\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = c > 1$, *então* $\sum a_n$ *é divergente. Se c = 1, nada podemos concluir.*

Prova. *Existe N natural tal que* $\sup_{k\geq n} |a_k|^{\frac{1}{k}} < r = \frac{c+1}{2} < 1$ *para todo natural n. Logo,* $|a_n| < r^n$ *para todo* $n \geq N$. *Segue do Teorema da Comparação que* $\sum |a_n|$ *é convergente, ou seja,* $\sum a_n$ *é absolutamente convergente.* ■

Para mostrar que, se $\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = c > 1$, *a série diverge, considere a função* $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *estritamente crescente tal que* $\{|a_{\varphi(n)}|^{\frac{1}{\varphi(n)}}\}$ *converge para* $c > 1$, *tal que* $\{|a_{\varphi(n)}|\}$ *não converge para zero. Para ver que nada pode ser dito quando c = 1, tome as séries* $\sum \frac{1}{n}, \sum \frac{1}{n^2}$.

Teorema. *Se* $\sum a_n$ *é uma série de termos não-nulos e* $\limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = c < 1$, *então* $\sum a_n$ *é absolutamente convergente. Porém, se* $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \geq 1$ *para todo* $n \geq n_0, n_0$ *algum natural, então a série diverge.*

12.3 Séries de Potências.

Definição. *Dada uma sequência* $\{a_n\}$ *de números reais, a série*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

é chamada de Série de Potência. Os números a_n *são chamados de coeficientes da séries e x é um número real.*

Dependendo da escolha de x, a série pode convergir ou divergir, como indica o reusltado a seguir.

Teorema. *Ddada a série de potências* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, *seja* $\alpha = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ *e defina*

$$R = \frac{1}{\alpha} \text{ se } 0 < \alpha < \infty$$
$$R = 0 \text{ se } \alpha = \infty$$
$$R = \infty \text{ se } \alpha = 0.$$

Então, $\sum\limits_{n-0}^{\infty} a_n x^n$ converge se $|x| < R$, diverge se $|x| > R$ e nada podemos afirmar de $|x| = R$.

Prova. *Basta notar que* $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = |x|\alpha$ *e aplicar o teste da raíz.* ■

Vamos analisar a convergência das séries de potências.

Exemplo 56.

- $\sum n^n x^n, R = 0.$
- $\sum \frac{n^n}{n!} x^n, R = e^{-1}$. *Com efeito, segue de*

$$\sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} = \frac{n}{\sqrt{n!}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} e.$$

- $\sum \frac{x^n}{n!}, R = \infty.$
- $\sum x^n, R = 1.$
- $\sum \frac{x^n}{n^p}, p > 0, R = 1.$

12.4 Séries Rearranjadas

Seja $\sum a_n$ uma série. Defina as sequências

+) $\{a_n^+\}$ com $a_n^+ = a_n$ se $a_n > 0$ e $a_n^+ = 0$ se $a_n \leq 0$.

-) $\{a_n^-\}$ com $a_n^- = -a_n$ se $a_n < 0$ e $a_n^- = 0$ se $a_n \geq 0$.

As sequências $\{a_n^+\}$ e $\{a_n^-\}$ serão chamadas de parte positiva e parte negativa de $\{a_n\}$. Sendo assim, $|a_n| = a_n^+ + a_n^-, a_n = a_n^+ - a_n^-$ e $|a_n| = a_n + 2a_n^-$.

Note que, se $\sum a_n$ converge absolutamente, então $\sum a_n^+$ e $\sum a_n^-$ são convergentes. A recíproca também vale.

Além disso, se $\sum a_n$ é convergente, mas não absolutamente, segue que ambas $\sum a_n^+$ e $\sum a_n^-$ divergem.

Definição. *Seja $\{a_n\}$ a sequência dos termos da série $\sum a_n, \xi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ uma bijeção e $b_n = a_{\xi(n)}$. A série $\sum b_n$ é chamada uma série rearranjada de $\sum a_n$.*

Exemplo 57. *Considere a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. Mostraremos que esta série converge. Se s é a sua soma, temos*

$$\begin{aligned}
s &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \cdots \\
\frac{1}{2}s &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n} = 0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + 0 + \cdots \\
\frac{3}{2}s &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 + 0 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + 0 + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + 0 + \cdots
\end{aligned}$$

Logo, uma série rearranjada pode ter soma distinta da série original.

Teorema. *Toda série rearranjada de uma série absolutamente convergente é convergente com mesma soma.*

Prova. *Se $a_n \geq 0$, então para todo n natural, $\xi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é uma bijeção e $b_n = a_{\xi(n)}$. Dado n natural, seja $m_n = \max\{\xi(1), \cdots, \xi(n)\}$, então*

$$\sum_{k=1}^{n} b_k \leq \sum_{k=1}^{m_n} a_k \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

e $\sum b_n$ *é convergente com* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n$*. Por outro lado, dado um natural m, seja* $n_m = \max\{\xi^{-1}(1), \cdots, \xi^{-1}(m)\}$. *Sendo assim,*

$$\sum_{k=1}^{m} a_k \leq \sum_{k=1}^{n_m} b_k \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_k$$

e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n$*. Para o caso geral, note que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$$

de forma que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} b_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Portanto, a série rearranjada converge para a soma da série original. ■

Teorema. *Se* $\sum a_n$ *é convergente e não é absolutamente convergente, então*

i) Dado c real, existe bijeção $\xi^c : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *tal que* $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\xi^c(n)} = c$

ii) Existem bijeções ξ_+ *e* ξ_- *tais que* $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\xi_+(n)}$ *diverge para* $+\infty$ *e* $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\xi_-(n)}$ *diverge para* $-\infty$.

Prova. *Seja* $\{p_n\}$ *a sequência dos termos positivos de* $\{a_n\}$ *na ordem em que eles aparecem e* $\{q_n\}$ *a sequência dos termos não positivos de* $\{a_n\}$ *na ordem em que eles aparecem. Sabemos que* $\sum p_n$ *e* $\sum q_n$ *divergem. Dado c real, seja* n_1 *o primeiro inteiro tal que*

$$\sum_{n=1}^{n_1} p_n > c.$$

Em seguida escolha n_2 *o menor inteiro tal que*

$$\sum_{n=1}^{n_1} p_n + \sum_{n=1}^{n_2} q_n < c$$

e prossiga com este processo. Desta forma, para todo $k > 1$,

$$0 < \sum_{n=1}^{n_1} p_n - \sum_{n=1}^{n_2} q_n + \cdots - \sum_{n=1}^{n_{2k-2}} q_n + \sum_{n=1}^{n_{2k-1}} p_n - c \leq p_{n_{2k-1}}$$

e

$$q_{n_{2k}} \leq \sum_{n-1}^{n_1} pn - \sum_{n=1}^{n_2} q_n + \cdots + \sum_{n=1}^{n_{2k-1}} p_n - \sum_{n=1}^{n_{2k}} q_n - c < 0.$$

Agora, como $q_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ *e* $p_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, *o resultado segue. Por fim, um processo análogo prova a segunta parte do resultado.* ■

13 Aula 13 - 17/04/2023

13.1 Motivações

- Limites e Continuidade de Funções;
- Limites laterais.

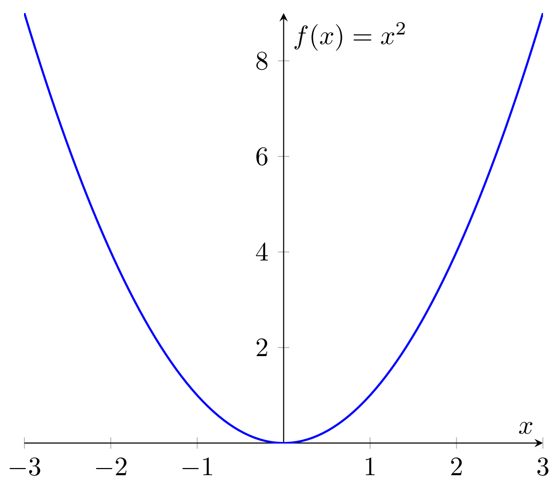
13.2 Intuição e Exemplos Iniciais

Entender continuidade e limites é fundamental no cálculo. Aqui estão alguns exemplos que podem ajudar a esclarecer esses conceitos:

1. Continuidade:
   Uma função é contínua em um ponto se o seu valor nesse ponto é igual ao limite da função quando se aproxima desse ponto. Em outras palavras, não há quebras ou saltos no gráfico da função. Um exemplo clássico de uma função contínua é a função quadrática:

$$f(x) = x^2$$

   Essa função é contínua para todos os números reais, pois não há quebras ou saltos no gráfico.



2. Limites:
   Um limite é o valor que uma função se aproxima quando a entrada (valor x) se aproxima de um determinado valor. O conceito de limites nos ajuda a entender o comportamento das funções próximas aos pontos onde elas não são definidas ou não são contínuas.

   Exemplo 1: Limite simples
   Considere a função:

$$g(x) = 3x + 2$$

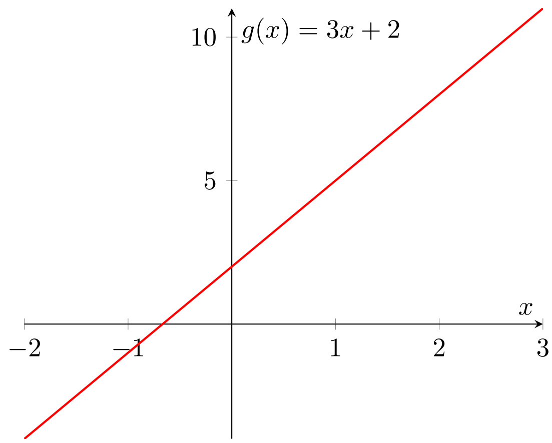
   Encontre o limite quando x se aproxima de 1:

$$\lim_{x \to 1} (3x + 2)$$

   Como essa é uma função linear e contínua em todos os lugares, o limite é o mesmo que o valor da função no ponto:

$$g(1) = 3(1) + 2$$
$$= 5$$

Portanto, $\lim_{x\to 1}(3x + 2) = 5$.



Exemplo 2: Limite de uma função com descontinuidade
Considere a função:

$$h(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

Essa função não é definida para x = 1, mas ainda podemos encontrar o limite quando x se aproxima de 1:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

Observe que $(x^2 - 1)$ pode ser fatorado como $(x + 1)(x - 1)$. Então, obtemos:

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x + 1)(x - 1)}{x - 1}$$

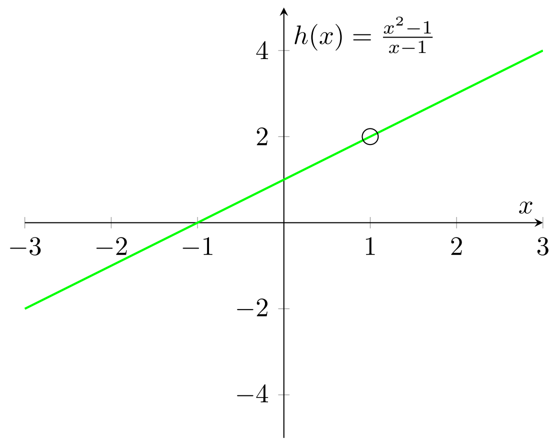
Agora, podemos cancelar os termos $(x - 1)$:

$$\lim_{x\to 1}(x + 1)$$

Neste ponto, podemos substituir x = 1:

$$1 + 1 = 2$$

Portanto, $\lim_{x\to 1}(h(x)) = 2$, embora a função em si não seja definida para x = 1.



Esses exemplos demonstram como a continuidade e os limites nos ajudam a analisar e entender o comportamento das funções, mesmo em pontos onde elas podem não ser definidas. A seguir, formalizaremos essas ideias e provaremos algumas propriedades.

13.3 Limites de Funções

Definição. *Seja D um subconjunto de* $\mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ *uma função e p um ponto de acumulação de D. Diremos que o limite de f(x) quando x tende a p é L se, dado* $\varepsilon > 0$*, existe um* $\delta > 0$ *tal que*

$$x \in D \text{ e } 0 < |x - p| < \delta, \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Em outras palavras, dado $\varepsilon > 0$*, existe* $\delta = \delta(\varepsilon, p) > 0$ *tal que*

$$f(D \cap (p - \delta, p + \delta)/a) \subseteq (L - \varepsilon, L + \varepsilon).\square$$

Note que, se não existe um número real L tal que $\lim_{x\to p} = L$, então diremos que o limite nõa existe. Além disso, o ponto p não precisa ser um ponto do domínio D e, mesmo que pertença, o valor de f em p não é importante para a definição. Apenas os valores de f em pontos arbitrariamente próximos a p são importantes para a definição.

Teorema. *Seja* $f : D \to \mathbb{R}$ *uma função e p um ponto de acumulação de D. O limite de f(x) quando x tende a p, caso existe, é único, e será dneotado por*

$$\lim_{x\to p} f(x) = L.$$

Prova. *De fato, se L e L' são limites de f(x) quando x tende a p, dado* $\varepsilon > 0$*, existe* $\delta > 0$ *tal que*

$$x \in D, 0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon, |f(x) - L'| < \varepsilon.$$

Logo, dado $\varepsilon > 0$*, com a escolha de* δ *acima e x em D satisfazendo* $0 < |x - p| < \delta$*, temos*

$$|L - L'| = |L - f(x) + f(x) - L'| \leq |L - f(x)| + |f(x) - L'| < 2\varepsilon.$$

Portanto, como ε *é arbitrário, L = L'.* ■

Quando nos referimos a uma função, fica implícito que ela tem um domínio especificado. Dada a função $f : D \to \mathbb{R}$ e $D' \subseteq D$, denotaremos por $f_{|_{D'}} : D' \to \mathbb{R}$ a função definida por $f_{|_{D'}}(x) = f(x)$ para x em D'. Segue dessa definição que

Teorema. *Seja D um subconjunto dos reais,* $f : D \to \mathbb{R}$ *uma função, D' um subconjunto de D e p um ponto de aucmulação de D'. Se* $\lim_{x\to p} f(x) = L$*, então* $\lim_{x\to p} f_{|_{D'}}(x) = L$.

Teorema. *Seja* $f : D \to \mathbb{R}$ *uma função, D' e D" subconjuntos de D e p um número real que é ponto de acumulação de D' e de D".*

i) *Se um dos limites* $\lim_{x\to p} f_{|_{D'}}(x)$ *ou* $\lim_{x\to p} f_{|_{D''}}(x)$ *não existe, ou ambos existem, mas são diferentes, então o limite* $\lim_{x\to p} f(x)$ *não existe.*

ii) *Se* $(D'\cup D'')/\{p\} = D/\{p\}$*, o limite* $\lim_{x\to p} f(x)$ *existe se, e somente se,* $\lim_{x\to p} f_{|_{D'}}(x)$ *e* $\lim_{x\to p} f_{|_{D''}}(x)$ *existem e têm o mesmo valor.*

Prova. *A prova da primeira parte segue direto. Para a segunda, existe* $\lim_{x\to p} f(x) = L$ *se, e somente se, dado* $\varepsilon > 0$*, existe* $\delta > 0$ *tal que*

$$x \in D, 0 < |x-p| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon,$$

o que equivale a dizer que, dado $\varepsilon > 0$*, existe* $\delta > 0$ *tal que*

$$x \in D', 0 < |x-p| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \Rightarrow |f(x)_{|_{D'}}| < \varepsilon$$

e

$$x \in D'', 0 < |x-p| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \Rightarrow |f(x)_{|_{D''}}| < \varepsilon$$

Portanto, $\lim_{x\to p} f_{|_{D''}}(x) = \lim_{x\to p} f_{|_{D'}}(x)$. ■

Definição. *Se* D *é um subconjunto de* $\mathbb{R}$*, diremos que* p *real é um ponto de acumulação à direita de* D *se é um ponto de acumulação de* $D_p^+ = D \cap (p, \infty)$*. Seja* $f : D \to \mathbb{R}$ *uma função e* p *um ponto de acumulação à direita de* D*. O limite de f(x) quando x tende a p pela direita é*

$$\lim_{x\to p^+} f(x) := \lim_{x\to p} f_{|_{D_p^+}}(x).$$

Define-se analogamente limite de f(x) quando x tende a pela esquerda e ponto de acumulação à esquerda.

Corolário. *Seja* $f : D \to \mathbb{R}$ *uma função e* p *um ponto de acumulação à direita e à esquerda de* D*. Então,*

$$\lim_{x\to p} f(x)$$

existe se, e somente se, os limites laterais existem e são iguais.

Teorema. *Seja* D *subconjunto real e* $f : D \to \mathbb{R}$ *uma função. Tome* p *como um ponto de acumulação de* D*. Se existe* $\lim_{x\to p} f(x) - L$*, então* f *é limitada em uma vizinhaça de* p*, i.e., existem* $M > 0$ *e* $\delta > 0$ *tais que se* x *pertence a* D *e* $0 < |x-p| < \delta$*, então* $|f(x)| < M$

Prova. *Existem* $\delta > 0$ *tal que se* x *pertence a* D *e* $0 < |x-p| < \delta$*, então* $|f(x) - L| < 1$*. Logo,*

$$|f(x)| \leq |f(x) - L| + |L| \leq 1 + |L| = M,$$

Teorema. *Seja* $D \subseteq \mathbb{R}, f, g, h : D \to \mathbb{R}$ *funções e* p *um ponto de acumulação de* D*. Se para todo* x *em* D *diferente de* p*,* $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ *e* $\lim_{x\to p} f(x) = \lim_{x\to p} h(x) = L$*, então* $\lim_{x\to p} g(x) = L$*.*

Prova. *Com efeito, dado* $\varepsilon > 0$*, existe* $\delta > 0$ *tal que se* x *pertence a* D *e* $0 < |x-p| < \delta$*, então* $|f(x) - L| < \varepsilon, |h(x) - L| < \varepsilon$*. Logo,*

$$L - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < L + \varepsilon, \quad \forall x \in D, 0 < |x-p| < \delta.$$

Segue que $L - \varepsilon < g(x) < L + \varepsilon$*, para todo* x *em* D *que satisfaça a condição. Em outras palavras,*

$$|g(x) - L| < \varepsilon, \quad \forall x \in D, 0 < |x-p| < \delta. \blacksquare$$

Teorema. *Seja* D *subconjunto de* $\mathbb{R}, f : D \to \mathbb{R}$ *e* p *um ponto de acumulação de* D*. Se* $\lim_{x\to p} f(x) = L > 0$*, então existe* $\delta > 0$ *tal que* $f(x) > 0$ *para todo* x *em* D *com* $0 < |x-p| < \delta$*.*

Prova. *Dado* $\varepsilon = \frac{L}{2}$ *tal que*

$$-\frac{L}{2} < f(x) - L < \frac{L}{2}$$

para todo x *em* D*,* $0 < |x-p| < \delta$*. Logo,* $0 < \frac{L}{2} < f(x)$ *para todo* x *em* D *com* $0 < |x-p| < \delta$*.* ■

Teorema. *Seja $D \subseteq \mathbb{R}, f, g : D \to \mathbb{R} <$ uma função e p um ponto de acumulação de D. Se existe $\delta > 0$ tal que $f(x) \leq g(x)$ para todo x em D com $0 < |x-p| < \delta$ e existe $\lim_{x\to p} f(x) = L_g$, então $L_f \leq L_g$.*

Prova. *De fato, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que x pertence a D e satisfaz a propriedade, então*

$$L_f - \frac{\varepsilon}{2} \leq f(x) \leq g(x) \leq L_g + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Portanto, $L_f - L_g \leq \varepsilon$ e, como $\varepsilon > 0$ é abritrário, o resultado segue. ■

Teorema. *Seja D subconjunto real, $f : D \to \mathbb{R}$ e p ponto de acumulação. O limite $\lim_{x\to p} f(x) = L$ se, e só se, $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ existe para toda sequência $\{x_n\}$ em $D/\{p\}$ que converge para p.*

Prova. *Se $\lim_{x\to p} f(x) = L$ e $\{x_n\}$ é uma sequência em $D/\{p\}$ com $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} p$, dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ para quaisquer $x \in D, 0 < |x-p| < \delta$.*

Seja N natural tal que $|x_n - p| < \delta$ para todo $n \geq N$. Logo, $|f(x_n) - L| < \varepsilon$ para todo $n \geq N$. Portanto, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$.

Por outro lado, note que, se $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ existe para toda sequência $\{x_n\}$ em $D/\{p\}$ que converge para p, todas as sequências $\{f(x_n)\}$ têm o mesmo limite, visto que se elas não tivessem, construiríamos uma sequência $\{x'_n\}$ em $D/\{p\}$ que converge para p, mas $\{f(x'_n)\}$ não convergiria.

Agora, se $\lim_{x\to p} f(x)$ não é L, existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo n natural não nulo, $x_n \in D, 0 < |x_n - p| < \frac{1}{n}$ tal que $|f(x_n) - L| \geq \varepsilon$. Logo, $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ não é L.■

Teorema. *Seja $D \subseteq \mathbb{R}, f, g : D \to \mathbb{R}$ funções e p um ponto de acumulação de D e $\lambda \in \mathbb{R}$.*

i) Se existem M e δ positivos tais que $|f(x)| \leq M$ para todo x em D, $0 < |x-p| < \delta$ e $\lim_{x\to p} g(x) = 0$, então $\lim_{x\to p}(f \cdot g)(x) = 0$.

ii) Se $\lim_{x\to p} f(x) = L_f$ e $\lim_{x\to p} g(x) = L_g$, então $\lim_{x\to p}(f + \lambda g)(x) = L_f + \lambda L_g$. e $\lim_{x\to p}(f \cdot g)(x) = L_f L_g$,. Além disso, se $L_g \neq 0$, então $\lim_{x\to p} \frac{f}{g}(x) = \frac{L_f}{L_g}$.

Teorema. *Seja $D \subseteq \mathbb{R}, f, g : D \to \mathbb{R}$ funções e p um ponto de acumulação de D. O limite $\lim_{x\to p} f(x)$ existe se, e somente se, f é de Cauchy em p, i.e., dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para x, y em D, $0 < |x-p| < \delta$ e $0 < |y-p| < \delta$ implica em $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.*

Prova. *É claro que se $\lim_{x\to p} f(x) = L$, então f é de Cauchy em p. De fato, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se x é um elemento de D para o qual $0 < |x-p| < \delta$, então $|f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$. Assim, dados x, y em D satisfazendo $0 < |x-p| < \delta, 0 < |y-p| < \delta$, então*

$$|f(x) - f(y)| = |f(x) - L + L - f(y)| \leq |f(x) - L| + |f(y) - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Reciprocamente, se f é de Cauchy em p e $\{x_n\}$ é uma sequência em $D/\{p\}$ que converge para p, $\{f(x_n)\}$ é de Cauchy e portanto convergente. Detalhando, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se x, y são elementos de D, $0 < |x-p| < \delta$ e $0 < |x-p| < \delta$ implicar em $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$, seja $\{x_n\}$ uma sequência em $D/\{p\}, x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} p$. Dado $\varepsilon > 0$ tome δ da definição de "f é de Cauchy em p" e N tal que $0 < |x_n - p| < \delta$ para todo $n \geq N$. Então,

$$|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon \quad \forall n, m \geq N.$$

Portanto, $\{f(x_n)\}$ converge. ■

Definição. *Seja D um subconjunto ilimitado superiormente de $\mathbb{R}$ e $f : D \to \mathbb{R}$ uma função. Diremos que o limite de f(x) quando x tende para infinito é L em $\mathbb{R}$ se, dado $\varepsilon > 0$, existe $M = M(\varepsilon) > 0$ tal que*

$$x \in D, x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Escreveremos

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L.$$

Analogamente, quando D é ilimitado inferiormente, definimos

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L.\square$$

O limite da sequência é um caso particular de limite infinito, especificamente o caso $D = \mathbb{N}$.

Definição. *Seja D um subconjunto de $\mathbb{R}$ e $f : D \to \mathbb{R}$ uma função. Se p é um ponto de acumulação de D, diremos que f diverge para $+\infty$ quando x tende para p se, dado M positivo, existe $\varepsilon = \varepsilon(M) > 0$ tal que*

$$x \in D, 0 < |x-p| < \varepsilon \Rightarrow f(x) > M.$$

Escreveremos $\lim_{x\to p} f(x) = +\infty$. Analogamente, define-se $\lim_{x\to p} f(x) = -\infty$.

Se D é ilimitado superiormente(inferiormente), definimos também

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty \quad (\lim_{x\to-\infty} f(x) = \pm\infty.).\square$$

Definição. *Seja D um subconjunto real e $f : D \to \mathbb{R}$. Se p é um ponto de acumulação de D, suponha que existe $\delta_0 > 0$ tal que*

$$\sup\{f(x) : x \in D, 0 < |x-p| < \delta_0\} < \infty.$$

Então, existe (ou diverge para $-\infty$) o limite

$$\limsup_{x\to p} f(x) \coloneqq \lim_{\delta\to 0} \sup\{f(x) : x \in D, 0 < |x-p| < \delta\}.$$

Escrevemos $\limsup_{x\to p} f(x) = +\infty$ quando f não é limitada superiormente em nenhuma vizinhança de p.

De maneira análoga, se

$$\inf\{f(x) : x \in D, 0 < |x-p| < \delta\} > -\infty,$$

definimos (podendo ser $+\infty$)

$$\liminf_{x\to p} f(x) \coloneqq \lim_{\delta\to 0} \inf\{f(x) : x \in D, 0 < |x-p| < \delta\}.$$

Escrevemos $\liminf_{x\to p} f(x) = -\infty$ quando f não for limitada inferiormente em uma vizinhança de p. $\square$

14 Aula 14 - 19/04/2023

14.1 Motivações

- Valor de aderência - valores para os quais alguma sequência converge sob a imagem de uma função
- Continuidade;
- Resultados sobre Continuidade.

14.2 Limites Superior e Inferior

Definição. *Dizemos que um número real y é um valor de aderência de f no ponto p se existe uma sequência $\{x_n\}$ em $D/\{p\}, x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} p$ e $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = y$.*$\square$

Teorema. *Seja $D \subseteq \mathbb{R}, f : D \to \mathbb{R}$ uma função e p um ponto de acumulação de D.*

1) *Se l é um valor de aderência de f em p, então $\liminf_{x\to p} f(x) \leq l \leq \limsup_{x\to p} f(x)$*
2) *Se f é limitada em uma em uma vizinhança de p, então $\limsup_{x\to p} f(x)$ e $\liminf_{x\to p} f(x)$ são valores de aderência de f.*
3) *$\lim_{x\to p} f(x)$ existe se, e somente se, f é limitada em uma vizinhança de p e o conjunto dos valores de aderência de f em p é unitário.*
4) *Se f é limitada em uma vizinhança de p, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\liminf_{x\to p} f(x) - \varepsilon < f(x) < \limsup_{x\to p} +\varepsilon$ para todo x em D com $0 < |x - p| < \delta$.*

Antes de prová-lo, observe que, se $L_\delta = \sup\{f(x) : x \in D, 0 < |x - p| < \delta\}$, então

$$L = \limsup_{x\to p} f(x) = \lim_{\delta\to 0^+} L_\delta.$$

Assim, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta_\varepsilon > 0$ tal que $0 < \delta < \delta_\varepsilon$ implica

$$|L_\delta - L| < \varepsilon.$$

Isso funciona para provar que um valor é o lim sup de uma função.

Prova. *Prova de 1): Se $\liminf_{x\to p} f(x) = l$ e $\limsup_{x\to p} f(x) = L$, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta_\varepsilon > 0$ tal que*

$$l - \varepsilon < \inf\{f(x) : x \in D, 0 < |x - p| < \delta\} < l + \varepsilon$$

e

$$L - \varepsilon < \sup\{f(x) : x \in D, 0 < |x - p| < \delta\} < L + \varepsilon.$$

Para todo $0 < \delta < \delta_\varepsilon$. Escolha $\delta_0 < \delta_\varepsilon$. Se r é um valor de aderência de f em p, existe $x_n \in D/\{p\}, x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} p$, com $f(x_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} l$ Seja N natural tal que $|x_n - p| < \delta_0$ para todo $n \geq N$. Logo, para todo $n \geq N$,

$$\begin{aligned} l - \varepsilon &< \inf\{f(x) : x \in D, 0 < |x - p| < \delta_0\} \\ &\leq f(x_n) \leq \sup\{f(x) : x \in D, 0 < |x - p| < \delta_0\} < \varepsilon \end{aligned}$$

Segue que $l - \varepsilon \leq r \leq L + \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$. Portanto, $l \leq r \leq L$.

Prova de 2): Note que, para algum $\delta_0 > 0$, temos

$$-\infty < \inf\{f(x) : x \in D, 0 < |x - p| < \delta_0\} \leq \sup\{f(x) : x \in D, 0 < |x - p| < \delta_0\} < \infty.$$

Como

- $(0, \delta_0) \ni \delta \mapsto \inf\{f(x) : x \in D, 0 < |x - p| < \delta\}$ *é não-decrescente e*

- $(0, \delta_0) \ni \delta \mapsto \sup\{f(x) : x \in D, 0 < |x-p| < \delta\}$ *é não-crescente,*

existem os limites

$$\lim_{\delta \to 0^+} \inf\{f(x) : x \in D, 0 < |x-p| < \delta\} = l, \quad \lim_{\delta \to 0^+} \sup\{f(x) : x \in D, 0 < |x-p| < \delta\} = L$$

Como p é um ponto de acumulação de D, seja $\{x_n'\}$ *e* $\{x_n^L\}$ *sequências em D tais que* $0 < \max\{|x_n' - p|, |x_n^L - p|\} < \frac{\delta_0}{n}$ *e*

$$\inf\{f(x) : x \in D, 0 < |x-p| < \frac{\delta_0}{n}\} \leq f(x_n') \leq \inf\{f(x) : x \in D, 0 < |x-p| < \frac{\delta_0}{n}\} + \frac{1}{n}$$

e

$$\sup\{f(x) : x \in D, 0 < |x-p| < \frac{\delta_0}{n}\} - \frac{\delta_0}{n} \leq f(x_n^L) \leq \sup\{f(x) : x \in D, 0 < |x-p| < \frac{\delta_0}{n}\} + \frac{1}{n}.$$

O resultado agora segue tomando o limite nas expressões acima.

Prova de 3): Se o limite existe, f é limitada em uma vizinhança de p e todos os valores de aderência coincidem e, em particular, o $\limsup_{x \to p} f(x) = \liminf_{x \to p} f(x)$*. Por outro lado, se f é limitada em uma vizinhança de um ponto p, e o conjunto dos valores de aderência é unitário,* $\liminf_{x \to p} f(x) = \limsup_{x \to p} f(x)$ *e todos os valores de aderência coincidem. Portanto, o limite existe*

Prova de 4): Se $\liminf_{x \to p} f(x) = l$ *e* $\limsup_{x \to p} f(x) = L$*, dado* $\varepsilon > 0$*, existe* $\delta_\varepsilon > 0$ *tal que*

$$l - \varepsilon < \inf\{f(x) : x \in D, 0 < |x-p| < \delta\} < l + \varepsilon$$

e

$$L - \varepsilon < \sup\{f(x) : x \in D, 0 < |x-p| < \delta\} < L + \varepsilon.$$

Para todo $0 < \delta < \delta_\varepsilon$*. Logo, para todo* $\delta < \delta_\varepsilon$ *e x em D,*$0 < |x-p| < \delta$

$$\begin{aligned} l - \varepsilon &< \inf\{f(x) : x \in D, 0 < |x-p| < \delta_0\} \\ &\leq f(x_n) \leq \sup\{f(x) : x \in D, 0 < |x-p| < \delta_0\} < \varepsilon \end{aligned}$$

Segue que $l - \varepsilon \leq r \leq L + \varepsilon$ *para todo* $\varepsilon > 0$*. Portanto,* $l \leq r \leq L$*.*

14.3 Funções Contínuas

Definição. *Seja* $f : D_f \to \mathbb{R}$ *uma função e p um ponto de* D_f*. Diremos que* $f(x)$ *é contínua em p se, dado* $\varepsilon > 0$*, existe um* $\delta > 0$ *tal que*

$$x \in D_f, |x-p| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(p)| < \varepsilon.$$

Se isto ocorre para todos os pontos p em D_f*, diremos apenas que f é contínua.* □

Note que, se p é um ponto de D_f que é de acumulação, então f é contínua em p se, e somente se, $\lim_{x \to p} f(x) = f(p)$ e, se p é um ponto isolado de D_f, então f é contínua em p.

Exemplo 58. *As seguintes funções são contínuas em x=p para todo p real:*

i) $f(x) = k$

ii) $f(x) = x$

iii) $f(x) = x + 1$

iv) $f(x) = x^2$

No entanto, a função

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

não é contínua em x=1, pois $\lim_{x \to 1} f(x) = 2 \neq 0 = f(1)$. As funções contínuas têm a seguinte propriedade:

Teorema. *Sejam $f_i : d_i \to \mathbb{R}, i = 1, 2$ funções. Suponha que p seja um ponto de acumulação de $D_{f_1} \cap D_{f_2}$ e que $\lim_{x\to p} f_i(x) = f_i(p), i = 1, 2$. Então,*

$$
\begin{aligned}
&1) \lim_{x\to p}(f_1 + f_2)(x) = \lim_{x\to p} f_1(x) + \lim_{x\to p} f_2(x) = f_1(p) + f_2(p)\\
&2) \lim_{x\to p} kf_1(x) = kf_1(p)\\
&3) \lim_{x\to p} f_1(x)f_2(x) = \lim_{x\to p} f_1(x) \lim_{x\to p} f_2(x) = f_1(p)f_2(p)\\
&4) Se\ f_2(x) \neq 0, \lim_{x\to p} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{f_1(p)}{f_2(p)}.
\end{aligned}
$$

Teorema. *Se p é um ponto de $D_f \cap D_g$ e $f(x) \leq g(x)$ sempre que $x \in (D_f \cap D_g)$ e os limites de f e quando x tendem a p existem, então*

$$\lim_{x\to p} f(x) = f(p) \leq g(p) = \lim_{x\to p} g(x).$$

Vale também a análoga do Teorema do Confronto, mas para funções contínuas. O resultado a seguir precisava de continuidade para ser provado:

Teorema. *Sejam $f : D_f \to \mathbb{R}, g : D_g \to \mathbb{R}$ funções tais que a imagem de g está contida no domínio de f e $L \in D_f$. Se p é um ponto de acumulação de $D_g, \lim_{x\to p} g(x) = L$ e f é contínua em L, então*

$$\lim_{x\to p} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to p} g(x)\right) = f(L).$$

Prova. *Como f é contínua em L, dado $\varepsilon > 0$, exsite $\delta_f > 0$ tal que*

$$y \in D_f, \quad |y - L| < \delta_f \Rightarrow |f(y) - f(L)| < \varepsilon.$$

Como $\lim_{x\to p} g(x) = L$, dado $\delta_f > 0$, existe $\delta_g > 0$ tal que

$$x \in D_g, \quad 0 < |x - p| < \delta_g \Rightarrow |g(x) - L| < \delta_f.$$

Deta forma, como $Im(g) \subseteq D_f, D_{f\circ g} = D_g$ e

$$x \in D_g = D_{f\circ g}, \quad 0 < |x - p| < \delta_g \Rightarrow |g(x) - L| < \delta_f \Rightarrow |f(g(x)) - L| < \varepsilon.$$

Portanto, $\lim_{x\to p} f(g(x)) = f(L)$. ■

Em suma, a soma, a multiplicação, a divisão e a composta de funções contínuas é uma função contínua. Funções racionais e trigonométricas são contínuas.

14.4 Resultados Avançados de Continuidade - Parte 1.

Começamos apresentando o resultado conhecido como Teorema da Conservação do Sinal

Teorema. *Seja $f : D_f \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $\overline{x} \in D_f$ tal que $f(\overline{x}) > 0$. Então, existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in D_f$ e $x \in (\overline{x} - \delta, \overline{x} + \delta)$.*

Prova. *Como f é contínua em $\overline{x}$, dado $\varepsilon = f(\overline{x}) > 0$, exsite $\delta > 0$ tal que*

$$x \in D_f, x \in (\overline{x} - \delta, \overline{x} + \delta) \Rightarrow f(x) \in (f(\overline{x}) - \varepsilon, f(\overline{x}) + \varepsilon)) = (0, 2f(\overline{x})).$$

Isto prova o resultado. ■

O próximo é o Teorema do Anulamento.

Teorema. *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua e $f(a) < 0 < f(b)$, então existe $\overline{x} \in (a, b)$ tal que $f(\overline{x}) = 0$.*

Prova. *Faremos apenas o caso* $f(a) < 0 < g(b)$. *Seja*

$$A = \{x \in [a,b] : f(s) > 0 \forall s \in [x,b].\}$$

Note que $A \neq \emptyset$ *e* $A \subseteq [a,b]$. *Seja* $z = \inf A$. *Pelo Teorema da Conservação de Sinal,* $z \in (a,b)$ *e* $z \notin A$. *Destarte,* $f(z) \leq 0$. *Por outro lado, do Teorema da Comparação,* $f(z) = \lim_{x \to z^+} f(x) \geq 0$, *pois como* $x > z$, x *é um elemento de* A, *o que torna* $f(x) > 0$. *Portanto, f(z)=0.*

A seguir, veremos o Teorema do Valor Intermediário.

Teorema. *Seja* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua e tal que* $f(a) < f(b)$. *Se* $f(a) < k < f(b)$, *então existe* $\overline{x} \in (a,b)$ *tal que* $f(\overline{x}) = k$.

Prova. *Considere a função* $g(x) = f(x) - k$. *Então,* $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *é contínua,* $g(a) < 0, g(b) > 0$ *e do Teorema do Anulamento, existe* $\overline{x} \in [a,b]$ *tal que* $g(\overline{x}) = 0$. *Portanto,* $f(\overline{x}) = k$.■

Todos eles possuem versões para trocas de sinais.

15 Aula 15 - 24/04/2023

15.1 O que esperar

- O Teorema de Weierstrass;
- Topologia da Reta;
- Teorema de Borel-Lebesgue.

15.2 Resultados Avançados de Continuidade - Parte 2.

Um resultado que vale ser mencionado é a caracterização de continuidade via limites:

Teorema. *Seja D um subconjunto dos reais, $f : D \to \mathbb{R}$ e p um ponto de D. A função f é contínua em p se, e somente se, para toda sequência $\{x_n\}$ em D com $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} p$, existe o limite $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$.*

Corolário. *Seja D um subconjunto de $\mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ e p um ponto de D. A função f é contínua se, e somente se, para toda sequência $\{x_n\}$ em D com $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} p$ temos $f(x_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(p)$.*

Vamos relembrar os resultados vistos na aula anterior.

Teorema. *Seja $f : D_f \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $\overline{x} \in D_f$ tal que $f(\overline{x}) > 0$. Então, existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in D_f$ e $x \in (\overline{x} - \delta, \overline{x} + \delta)$.*

Prova. *Como f é contínua em $\overline{x}$, dado $\varepsilon = f(\overline{x}) > 0$, exsite $\delta > 0$ tal que*

$$x \in D_f, x \in (\overline{x} - \delta, \overline{x} + \delta) \Rightarrow f(x) \in (f(\overline{x}) - \varepsilon, f(\overline{x}) + \varepsilon) = (0, 2f(\overline{x})).$$

Isto prova o resultado. ■

O próximo é o Teorema do Anulamento.

Teorema. *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua e $f(a) < 0 < f(b)$, então existe $\overline{x} \in (a, b)$ tal que $f(\overline{x}) = 0$.*

Prova. *Faremos apenas o caso $f(a) < 0 < g(b)$. Seja*

$$A = \{x \in [a, b] : f(s) > 0 \forall s \in [x, b].\}$$

Note que $A \neq \emptyset$ e $A \subseteq [a, b]$. Seja $z = \inf A$. Pelo Teorema da Conservação de Sinal, $z \in (a, b)$ e $z \notin A$. Destarte, $f(z) \leq 0$. Por outro lado, do Teorema da Comparação, $f(z) = \lim_{x\to z^+} f(x) \geq 0$, pois como $x > z$, x é um elemento de A, o que torna $f(x) > 0$. Portanto, f(z)=0.

A seguir, veremos o Teorema do Valor Intermediário.

Teorema. *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e tal que $f(a) < f(b)$. Se $f(a) < k < f(b)$, então existe $\overline{x} \in (a, b)$ tal que $f(\overline{x}) = k$.*

Prova. *Considere a função $g(x) = f(x) - k$. Então, $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua, $g(a) < 0, g(b) > 0$ e do Teorema do Anulamento, existe $\overline{x} \in [a, b]$ tal que $g(\overline{x}) = 0$. Portanto, $f(\overline{x}) = k$.*■

As versões análogas ficam como exercício para o estudante. A seguir, um dos resultados fundamentais da análise é apresentado, o Teorema de Weierstrass

Teorema. *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ for contínua, existirão p, q em $[a, b]$ tais que*

$$f(p) \leq f(x) \leq f(q), \quad \forall x \in [a, b]$$

Prova. *Vamos mostrar que a imagem da f é limitada, incialmente. Se ela não fosse limitada, dado n natural, existiria* $x_n \in [a,b]$ *tal que para* $x_0 \in [a,b]$ *e* $|f(x_n)| > \max\{n, |f(x_{n-1})|\}, n \in \mathbb{N}^{\times}$. *Seja* $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. *Com aquele* x_0, *obtemos* $x_1 \in [a,b]$ *tal que* $|f(x_1)| > 1 + |f(x_0)|, |f(x_2)| > 1 + |f(x_1)| > 2 + |f(x_0)|$. *Indutivamente,* $|f(x_n)| > n + |f(x_0)|$. *Segue que* $A \subseteq [a,b]$ *tem um ponto de acumulação* $r \in [a,b]$.

Como f é con?inua em r, existe $\delta > 0 talque$,

$$x \in (r-\delta, r+\delta) \cap [a,b] = B \Rightarrow |f(x) - f(r)| < 1.$$

Obtemos que f(B) é limitado e contém infinitos pontos de f(A), uma contradição. Logo, a imagem de f Im(f) é limitada.

Seja $m = \inf\{f(x) : x \in [a,b]\}$. *Então,* $f(x) \geq m$ *para todo x em* $[a,b]$. *Se f não é constante, m será ponto de acumulação do conjunto* $\{y \in Im(f) : y > m\}$. *Tome* $x_0 \in [a,b]$ *tal que* $0 < f(x_0) - m$ *e* $x_k \in [a,b]$ *tal que* $0 < f(x_0) - m < \min\{\frac{1}{k}, f(x_{k-1}) - m\}$ *para k em* $\mathbb{N}^{\times}$.

O conjunto $A = \{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ *é infinito e limitado, portanto A tem um ponto de acumulação p. Como f é contínua em p, para cada n em* $\mathbb{N}^{\times}$, *existe* $\delta_n > 0$ *tal que*

$$x \in [a,b], |x-p| < \delta_n \Rightarrow |f(x) - f(p)| < \frac{1}{n}.$$

Em particular, escolha x_k *em A com* $k > n$ *e tal que* $|x_k - p| < \delta_n$,

$$m - \frac{1}{n} < f(x_k) - \frac{1}{n} < f(p) < f(x_k) + \frac{1}{n} < m + \frac{1}{n} + \frac{1}{k} < m + \frac{2}{n}.$$

Assim, f(p) = m. A afirmativa segue de $-\inf\{Im(-f)\} = \sup\{Im(f)\}$ ■

Corolário. *Seja* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *contínua. Se*

$$m = \min\{f(x) : x \in [a,b]\}, \quad M = \max\{f(x) : x \in [a,b]\},$$

então

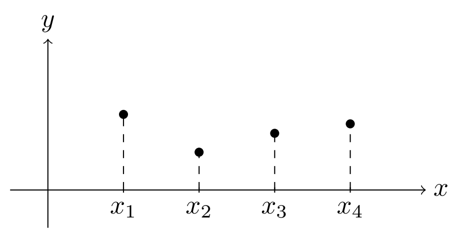
$$Im(f) = f([a,b]) = [m, M].$$

15.3 Topologia da Reta

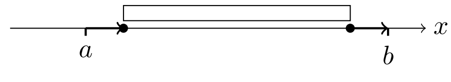
15.3.1 Texto de Motivação

A topologia da reta estuda a estrutura dos conjuntos de pontos na reta real, analisando as propriedades topológicas dos mesmos. A reta real é um espaço topológico particularmente interessante devido à sua simplicidade e conexão com outras áreas da matemática, como análise e álgebra.

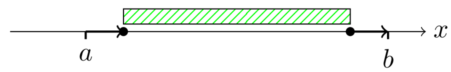
Considere a sucessão de números reais (x_n). Quando é que podemos dizer que essa sucessão converge para um número real x? A topologia da reta nos ajuda a entender a convergência e a continuidade de funções reais.



A topologia da reta também lida com conceitos como limites e fronteiras de conjuntos. Por exemplo, qual é o limite superior de um conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$? E qual é a fronteira de um conjunto aberto? Uma ilustração de conjunto aberto é o intervalo (a, b):



Um espaço topológico é um conjunto X juntamente com uma coleção de subconjuntos τ que satisfazem certas propriedades. Estes subconjuntos são chamados de conjuntos abertos. Na reta real, podemos definir a topologia usual usando intervalos abertos. Aqui está o código representando um conjunto aberto da reta real, tal como seus pontos de fronteira. A barra representa o lugar em que os pontos estão, as setas saindo de a e b indicam que os pontos não estão inclusos no conjunto, tornando-o aberto.



Na reta real, um conjunto é aberto se, para cada ponto x no conjunto, existe um intervalo aberto contendo x e inteiramente contido no conjunto. Já um conjunto fechado é aquele cujo complementar é aberto. Outras ideias importantes são de conectividade e compacidade.

Um conjunto é dito conexo se não puder ser dividido em dois conjuntos abertos disjuntos. Na reta real, intervalos são exemplos de conjuntos conexos.

Um conjunto é compacto se todo subconjunto aberto que o cobre possui um subconjunto finito que também o cobre. Na reta real, intervalos fechados e limitados são exemplos de conjuntos compactos. O Teorema de Bolzano-Weierstrass afirma que toda sequência infinita de pontos em um conjunto compacto possui uma subsequência convergente. Como esperado, ele possui aplicações diretas na convergência de sequências e funções juntando com os resultados que vimos.

Suponha que você tenha uma sequência infinita de pontos dentro de um intervalo fechado e limitado na reta real. O Teorema de Bolzano-Weierstrass garante que sempre é possível encontrar uma subsequência desses pontos que converge para algum ponto dentro desse intervalo. Isso significa que, por mais "espalhados"que esses pontos possam estar, sempre haverá algum padrão de convergência.

Portanto, a topologia da reta fornece uma base sólida para o estudo de propriedades topológicas e estruturas dos conjuntos de pontos na reta real. Aprofundemo-nos em seu estudo.

15.3.2 Abertos, Fechados, Compactos e Conexos

Definição. *Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}$.*

1) Um ponto a de A é dito interior a A se existe um r positivo tal que $(a - r, a + r) \subseteq A$.

2) O conjunto A é aberto se todos os seus pontos são interiores.

3) O conjunto A é fechado em $\mathbb{R}$ se seu complementar é aberto.

4) O interior de A, A°, é o conjunto dos pontos interiores a A.

5) O fecho $\overline{A}$ de A é a interseção de todos os fechados que contém A.

É possível mostrar que intervalos abertos são conjuntos abertos (tome $r = \min\{b - x, x - a\}, x \in (a, b)$), intervalos fechados são conjuntos fechados, etc.

Teorema. *Seja Λ um conjunto e $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ uma família de conjuntos.*

1) Se cada A_λ é aberto, $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ é aberto.

2) Se cada A_λ é aberto e Λ é finito, $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ é aberto.

3) Se cada A_λ é fechado, $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ é fechado.

4) Se cada A_λ é fechado e Λ é um conjunto finito, $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ é fechado.

(1) Como cada A_λ é composto de todos os pontos interiores, $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ também tem todos os seus pontos como pontos interiores. Portanto, $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ é aberto.

(2) Tome x em $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$. Então, existe um r_λ tal que $(x - r_\lambda, x + r_\lambda) \subseteq A_\lambda$. Como temos um número finito de abertos, tome $r := \min\{r_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$. Então,

$$(x - r, x + r) \subseteq (x - r_\lambda, x + r_\lambda) \subseteq A.$$

Portanto, $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ é aberto.

Os itens (3) e (4) seguem utilizando os itens (1) e (2) e as leis de De Morgan (complementar da união é a interseção dos complementares, etc.). ■

Exemplo 59. *Mostramos que intervalos abertos são abertos. Não apenas isso, mas o interior de [a, b] é (a, b).*

Exemplo 60. *O interior A° de A é o maior aberto que contém A. O fecho $\overline{A}$ de A é o menor fechado que contém A.*

Teorema. *Todo subconjunto aberto A de $\mathbb{R}$ se exprime, de maneira única, como união enumerável de intervalos abertos disjuntos.*

Prova. *Primeiramente, note que se Λ é um conjunto, para cada $\lambda, I_\lambda = (a_\lambda, b_\lambda)$ é um intervalo e $p \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$, então $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda = (a,b)$, sendo $a = \inf_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda, b = \sup_{\lambda\in\Lambda} b_\lambda$. De fato, é claro que $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda \subseteq (a,b)$. Para provar a outra inclusão, note que $p \in (a,b)$ e se $x \in (a,b), x \leq p ou x > p$. Agora,*

$$\begin{aligned}
&(1)\ \text{Se } x \leq p, a = \inf_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda < x \Rightarrow \exists \mu_1 \in \Lambda : a_{\mu_1} < x \leq p < b_{\mu_1}\\
&(2)\ \text{Se } x > p, b = \sup_{\lambda\in\Lambda} b_\lambda < x \Rightarrow \exists \mu_2 \in \Lambda : a_{\mu_2} < p < x < b_{\mu_2}.
\end{aligned}$$

Em qualquer caso, $x \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$.

Para terminar, dado x em A, seja I_x a união de todos os abertos contidos em A que contém x. Segue que

1) $I_x = (a_x, b_x) \subseteq A$;

2) Se x, y são pontos de A, ou $I_x \cap I_y = I_x = I_y$, ou $I_x \cap I_y = \emptyset$;

3) $\bigcup_{x\in A} I_x = A$.

Tomando para cada intervalo da decomposição um único racional, vemos que A pode ser escrito como união enumerável de intervalos disjuntos. Para ver que esta decomposição é única, basta notar que cada intervalo aberto de uma tal decomposição está contido em algum dos I_x e não pode ser distinto de I_x. ■

Corolário. *Se I é um intervalo aberto e $I = A \cup B$, em que A e B são conjuntos abertos e disjuntos, então um desses conjuntos é vazio.*

16 Aula 16 - 03/05/2023

16.1 O que esperar

- Continuação de Topologia da Reta - Compactos e Conexos.

16.2 Topologia da Reta - Parte II

Para ver que a intersecção infinita de intervalos abertos não é necessariamente um conjunto aberto, note que

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}^\times}(a-\frac{1}{n},b+\frac{1}{n})=[a,b].$$

No caso da união infinita de conjuntos fechados, observe o seguinte:

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}^\times}[a+\frac{1}{n},b-\frac{1}{n}]=(a,b)$$

Retomemos o teorema passado.

Teorema. *Todo subconjunto aberto A de $\mathbb{R}$ se exprime, de maneira única, como união enumerável de intervalos abertos disjuntos.*

Prova. *Primeiramente, note que se Λ é um conjunto, para cada $\lambda, I_\lambda=(a_\lambda,b_\lambda)$ é um intervalo e $p\in\bigcap_{\lambda\in\Lambda}I_\lambda$, então $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}I_\lambda=(a,b)$, sendo $a=\inf_{\lambda\in\Lambda}a_\lambda, b=\sup_{\lambda\in\Lambda}b_\lambda$. De fato, é claro que $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}I_\lambda\subseteq(a,b)$. Para provar a outra inclusão, note que $p\in(a,b)$ e se $x\in(a,b), x\leq p$ ou $x>p$. Agora,*

$$(1)\ \text{Se } x\leq p, a=\inf_{\lambda\in\Lambda}a_\lambda<x\Rightarrow\exists\mu_1\in\Lambda: a_{\mu_1}<x\leq p<b_{\mu_1}$$
$$(2)\ \text{Se } x>p, b=\sup_{\lambda\in\Lambda}b_\lambda<x\Rightarrow\exists\mu_2\in\Lambda: a_{\mu_2}<p<x<b_{\mu_2}.$$

Em qualquer caso, $x\in\bigcup_{\lambda\in\Lambda}I_\lambda$.

Para terminar, dado x em A, seja I_x a união de todos os abertos contidos em A que contém x. Segue que

1) $I_x=(a_x,b_x)\subseteq A$;

2) Se x, y são pontos de A, ou $I_x\cap I_y=I_x=I_y$, ou $I_x\cap I_y=\emptyset$;

3) $\bigcup_{x\in A}I_x=A$.

Tomando para cada intervalo da decomposição um único racional, vemos que A pode ser escrito como união enumerável de intervalos disjuntos. Para ver que esta decomposição é única, basta notar que cada intervalo aberto de uma tal decomposição está contido em algum dos I_x e não pode ser distinto de I_x. ■

Corolário. *Se I é um intervalo aberto e $I=A\cup B$, em que A e B são conjuntos abertos e disjuntos, então um desses conjuntos é vazio.*

Definição. *Um conjunto I em $\mathbb{R}$ é dito conexo se ele só "tem um pedaço", ou seja, não existem conjuntos abertos e disjuntos A, B não-vazios tais que $I=A\cup B$.*□

Definição. *Seja $A\subseteq\mathbb{R}$. Um ponto p real é aderente a A se existir uma sequência $\{x_n\}$ em A tal que $x_n\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}p$.*□

Sabemos que se p é um ponto de acumulação de A, então p é aderente a A. Se p é aderente a A e p não é ponto de acumulação de A, então p pertence a A. Todo ponto interior a A é aderente a A e é um ponto de acumulação de A.

Teorema. *Um ponto p real é aderente a A se, e só se, $A\cap(p-\varepsilon,p+\varepsilon)\neq\emptyset$ para todo $\varepsilon>0$.*

Corolário. *Se $A \subseteq \mathbb{R}$ é limitado superiormente(inferiormente), entõ* $\sup A(\inf A)$ *é aderente a* A.

Teorema. *O fecho A^- de $A \subseteq \mathbb{R}$ é o conjunto A' dos pontos aderentes de A.*

Prova. *De fato, se $x \notin A'$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. Segue que A' é fechado e $A^- \subseteq A'$. Se $x \notin A^-$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap A = \emptyset$ e $x \notin A'$.* ■

Definição. *Sejam A e B subconjuntos de $\mathbb{R}$ com $A \subseteq B$. Diremos que A é denso em B se $B \subseteq A^-$*$\square$.

Teorema. *Sejam A e B subconjuntos de $\mathbb{R}$ com $A \subseteq B$. São equivalentes:*

- *Todo ponto de B é aderente a A.*
- *Todo ponto de B é limite de uma sequência de pontos de A.*
- *Para todo $\varepsilon > 0$ e b de B, $(b-\varepsilon, b+\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.*

Teorema. *Todo subconjunto B de $\mathbb{R}$ contém um subconjunto A que é enumerável e denso em B.*

Prova. *Dado $n \in \mathbb{N}^\times$, temos $\mathbb{R} = \displaystyle\bigcup_{p \in \mathbb{Z}} \left[\frac{p}{n}, \frac{p+1}{n}\right)$. Para cada p inteiro e $n \in \mathbb{N}^\times$, escolha $x_{np} \in \left[\frac{p}{n}, \frac{p+1}{n}\right) \cap B$ quando esta intersecção for não-vazia. O conjunto A desses pontos é denso em B, já que, para cada $n \in \mathbb{N}^\times$ e b em B, existe a em A tal que $|a-b| < \frac{1}{n}$. Além disso, A é enumerável, visto que a coleção de intervalos $\left\{\left[\frac{p}{n}, \frac{p+1}{n}\right) : p \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^\times\right\}$ é enumerável.*■

Teorema. *Seja $F \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto fechado, não-vazio e sem pontos isolados. Então F é não enumerável.*

Prova. *Sejam x, y em F pontos distintos. Coloque $r = \frac{|x-y|}{2}$ e $F_y^\sim = F \cap (x-r, x+r)$. Segue que $F_y^\sim$ é não-vazio e não contém pontos isolados. Seja F_y a união de $F_y^\sim$ com os pontos de acumulação de $F_y^\sim$ no conjunto $\{x-r, x+r\}$. Note que F_y é claramente fechado e não tem pontos isolados, é limitado e $y \notin F$.*

Se $\{y_1, y_2, \cdots\}$, seja F_{y_1}. Tendo escolhido $F_{y_1}, \cdots, F_{y_{n-1}}$, então caso $y_n \notin F_{y_{n-1}}$, escolhemos $F_{y_n} = F_{y_{n-1}}$. Se $y_n \in F_{y_{n-1}}$, escolhemos F_{y_n} fechado e sem pontos isolados tal que $y_n \notin F_{y_n} \subseteq F_{y_{n-1}}$. Para cada n natural, seja $x_n \in F_{y_n}$. A sequência $\{x_n\}$ é limitada e portanto tem uma subsequência $\{x_{\varphi(n)}\}$ convergente com limite $\overline{x}$. Observe que $\overline{x} \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_{y_n}$ e $\overline{x} \neq y_n$ para todo natural n. Portanto, F é não-enumerável, pois a sequência "não enche F" (Não abrange todos os pontos de F). ■

17 Aula 17 - 05/04/2023

17.1 O que esperar?

- Coberturas e Teorema de Borel-Lebesgue;
- Compactos da Reta;
- Continuidade Uniforme.

17.2 Motivações

Um subconjunto de $\mathbb{R}$ é dito compacto se satisfaz uma das condições abaixo - a caracterização por coberturas, por sequências, ou por fechados.

Um conjunto K é compacto se, para toda cobertura aberta do conjunto, existe uma subcobertura finita que ainda cobre o conjunto. Ou seja, se temos um conjunto de intervalos abertos que cobrem todo o conjunto, sempre podemos encontrar um número finito desses intervalos que ainda cobrem o conjunto.

Um conjunto K é compacto se toda sequência de pontos do conjunto tem uma subsequência que converge para um ponto ainda dentro do conjunto. Ou seja, se pegarmos uma lista infinita de pontos no conjunto, sempre poderemos encontrar uma "sublista"infinita desses pontos que se aproxima cada vez mais de um único ponto no conjunto.

Um conjunto K é fechado se contém todos os seus pontos de acumulação, e é limitado se existe um número real que é maior que todos os elementos do conjunto.

Além dos compactos, estaremos abordando outro tipo de continuidade. A continuidade uniforme é uma noção mais forte do que a continuidade regular. Seja $f : X \to Y$ uma função entre espaços métricos. Uma função é dita continua se, para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que, para todos $x, y \in X$, se $|x - y| < \delta$ então $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

A continuidade uniforme fortalece essa condição ao exigir que a escolha de δ não dependa de x. Em outras palavras, para toda $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que, para todos $x, y \in X$, se $|x-y| < \delta$ então $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$. Isso implica que podemos encontrar um único "tamanho de passo"δ que funciona para todo o domínio da função, em vez de precisar de um passo diferente para cada ponto. Isso tem implicações importantes quando estamos trabalhando com conjuntos compactos, pois toda função contínua em um conjunto compacto é uniformemente contínua. Isso é útil porque as funções uniformemente contínuas têm propriedades muito agradáveis, como a capacidade de serem estendidas de um modo contínuo a partir de um conjunto denso.

A diferença entre continuidade e continuidade uniforme é sutil. No entanto, essa diferença é importante em muitos contextos. Por exemplo, a função $f(x) = \frac{1}{x}$ é contínua em todos os pontos do seu domínio (todos os números reais não nulos), mas não é uniformemente contínua. Isso ocorre porque, conforme nos aproximamos de zero, precisamos escolher δ cada vez menor para garantir que $d(f(x), f(x')) < \varepsilon$ para um ε fixo. Não podemos encontrar um único δ que funcione para todos os pontos do domínio.

Outro fato importante é que toda função contínua em um conjunto compacto é uniformemente contínua. Isso se deve às propriedades dos conjuntos compactos, que garantem que podemos encontrar um δ que funcione para todo o conjunto. Isso é uma propriedade muito útil, pois a continuidade uniforme garante algumas propriedades agradáveis para as funções, como a capacidade de serem estendidas de maneira contínua a partir de um conjunto denso.

A seguir, vamos elaborar cada um destes conceitos, a fim de obter um entendimento mais profundo sobre o estudo de funções e da topologia da reta.

17.3 Compactos e Coberturas

Definição. *Seja $A \subseteq \mathbb{R}$ e Λ um conjunto. Uma coleção $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ de conjuntos é chamada uma cobertura de A se $A \subseteq \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$.*$\square$

Definição. *Se $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ é uma cobertura, $\Lambda' \subseteq \Lambda$ e $A \subseteq \bigcup_{\lambda'\in\Lambda'} A_{\lambda'}, \{A_{\lambda'}\}_{\lambda'\in\Lambda'}$ é dita uma subcobertura da cobertura $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$. Se os conjuntos da cobertura são todos abertos, ela é dita uma cobertura aberta.* $\square$

Teorema. *Este resultado é conhecido como Teorema de Borel-Lebesgue. Dada uma cobertura $\{I_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ de [a, b] em que cada I_λ é um intervalo aberto, existe $\Lambda' \subseteq \Lambda$ finito tal que $[a, b] \subseteq \bigcup_{\lambda'\in\Lambda'} I_{\lambda'}$.*

Prova. *Seja* $A = \{x \in [a,b] : \exists \Lambda' \subseteq \Lambda$ *finito* $\&[a,x] \subseteq \bigcup_{\lambda' \in \Lambda'} I_{\lambda'}\}$. *Note que* $A \neq \emptyset$. *Seja* $s = \sup A$. *Segue que* $s \in [a,b]$ *e que existe* λ_s *tal que* $s \in I_{\lambda_s}$. *Como* I_{λ_s} *é aberto,* $I_{\lambda_s} \cap A \neq \emptyset$. *Portanto,* $s = b$ *e* $[a,b]$ *está contido em uma união finita de* $I'_\lambda s$. ■

Corolário. *Dada uma cobertura aberta* $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ *de [a, b], existe* $\Lambda' \subseteq \Lambda$ *finito tal que* $[a,b] \subseteq \bigcup_{\lambda' \in \Lambda'} A_{\lambda'}$.

Basta lembrar que cada aberto da cobertura pode ser escrito como a união enumerável de intervalos abertos disjuntos.

Corolário. *Dada uma cobertura aberta* $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ *de um conjunto fechado e limitado* F *existe* $\Lambda' \subseteq \Lambda$ *finito tal que* $F \subseteq \bigcup_{\lambda' \in \Lambda'} A_{\lambda'}$

Prova. *Como* F *é fechado e limitado,* $F \subseteq [a,b]$. *Como* $A = [a,b]^c$ *é aberto e* $[a,b] \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \cup A$, *temos a existência de* $\Lambda' \subseteq \Lambda$ *finito tal que*

$$[a,b] \subseteq \bigcup_{\lambda' \in \Lambda'} A_{\lambda'} \cup A.$$

Portanto, $F \subseteq \bigcup_{\lambda' \in \Lambda'} A_{\lambda'}$. ■

Teorema. *Dado* $K \subseteq \mathbb{R}$ *são equivalente:*

1) *K é fechado e limitado;*

2) *Toda cobertura aberta de K possui uma subcobertura finita;*

3) *Todo subconjunto infinito de K possui um ponto de acumulação pertencente a K;*

4) *Toda sequência de pontos de K possui uma subsequência que converge para um ponto de K.*

Prova. $1) \Rightarrow 2)$: *Segue diretamente do corolário anterior.*

$2) \Rightarrow 3)$: *Se* $A \subseteq K$ *é infinito e não tem pontos de acumulação em* K, *para cada* k *em* K *existe* $I_k = r_k > 0$ *tal que* $(k - r_k, k + r_k) \cap A = \{k\}$ *ou* $I_k \cap A = \emptyset$. *Segue que* $\bigcup_{k \in K} I_a \supseteq K$ *é uma cobertura aberta sem subcobertura finita.*

$3) \Rightarrow 4)$: *Dada uma sequência de pontos* $\{k_n\}$ *em* K, *ela pode ter um número finito ou infinito de valores. Em qualquer um dos casos, possui uma subsequência convergente.*

$4) \Rightarrow 1)$: *É claro que* K *é limitado, visto que, caso contrário, existiria uma sequência* $\{x_n\}$ *em* K *com* $x_0 \in K$ *e* $|x_n| \geq |x_{n-1}| + 1$ *e esta não teria subsequência convergente. Para ver que* K *é fechado, basta notar que, se* $x \in K^-$, *existe sequência* $x_n \in K$ *tal que* $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$. *Portanto, pela hipótese de 4,* $x \in K$.■

Definição. *Um conjunto é compacto se satisfaz qualquer uma das condições do teorema anterior.* □

Como corolário do teorema passado, temos o Teorema de Bolzano-Weierstrass!

Corolário. *Todo conjunto infinito e limitado de número reais possui um ponto de acumulação.*

Corolário. *Toda sequência decrescente de compactos não vazio têm interseção não vazia.*

Definição. *Seja* $A \subseteq \mathbb{R}$ *e* $B \subseteq A$, *diremos que* B *é aberto em* A *se, para cada* $b \in B$, *existe um* $r_b > 0$ *tal que* $A \cap (b - r_b, b + r_b) \subseteq B$.□

Note que todo conjunto é aberto nele mesmo. Além disso, se $A \subseteq \mathbb{R}$ e $B \subseteq A$, então B é aberto em A se, e somente se, existe um aberto $\mathcal{O}_B$ de $\mathbb{R}$ tal que $B = \mathcal{O}_B \cap A$. Além disso, se B é aberto, $A \subseteq B$ é aberto em B se, e somente se, B é aberto em $\mathbb{R}$.

Lembre-se que, se $f : D \to \mathbb{R}$ é uma função, $f^{-1}(\mathcal{O}) = \{d \in D : f(d) \in \mathcal{O}\}$.

Teorema. *Seja* $D \subseteq \mathbb{R}$ *e* $f : D \to \mathbb{R}$. *A função* f *é contínua se, e somente se, para todo* $\mathcal{O}$ *de* $\mathbb{R}, f^{-1}(\mathcal{O})$ *é aberto em* D.

Prova. *Se $f : D \to \mathbb{R}$ é contínua, $\mathcal{O}$ é um aberto de $\mathbb{R}$ e $d \in f^{-1}(\mathcal{O})$, então $f(d) \in \mathcal{O}$ e dado $\varepsilon > 0$ tal que $(f(d)-\varepsilon, f(d)+\varepsilon) \subseteq \mathcal{O}$, existe $\delta > 0$ tal que $f((d-\delta, d+\delta) \cap D) \subseteq (f(d)-\varepsilon, f(d)+\varepsilon)$. Isot mostra que $(d-\delta, d+\delta) \cap D \subseteq f^{-1}(\mathcal{O})$ e que $f^{-1}(\mathcal{O})$ é aberto em D.*

Por outro lado, de $f^{-1}(\mathcal{O})$ ser aberto em D para cada $\mathcal{O}$ aberto em $\mathbb{R}$, se d é um elemento de D, dado $\varepsilon > 0$, seja $\mathcal{O} = (f(d)-\varepsilon, f(d)+\varepsilon)$. Como $d \in f^{-1}((f(d)-\varepsilon, f(d)+\varepsilon))$ é aberto em D, existe $\delta > 0$ tal que $(d-\lambda, d+\delta) \cap D \subseteq f^{-1}((f(d)-\varepsilon, f(d)+\varepsilon))$, ou seja,

$$x \in D, |x-d| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(d)| < \varepsilon$$

e f é contínua em d. ■

Teorema. *Se $I \subseteq \mathbb{R}$ é um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, então f(I) é um intervalo.*

Prova. *Basta notar que, dados dois pontos $f(a) \neq f(b)$ em f(I) com $a < b$, tomando a restrição de f ao intervalo [a, b], segue do teorema do valor intermediário que, para todo k entre f(a) e f(b), existe um c em (a, b) tal que f(c) = k. Portanto, f(I) é um intervalo.* ■

Teorema. *Se $K \subseteq \mathbb{R}$ é um conjunto compacto e $f : K \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, então f(K) é compacto.*

Prova. *Seja $\{\mathcal{O}_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ uma cobertura aberta de f(K). Como, para cada $\lambda \in \Lambda, f^{-1}(\mathcal{O}_\lambda)$ é aberto em K, existe U_λ aberto em $\mathbb{R}$ tal que $U_\lambda \cap K = f^{-1}(\mathcal{O}_\lambda)$. Assim, $\{U_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ é uma cobertura aberta de K. Como K é compacto, existe $\lambda' \subseteq \Lambda$ finito tal que $\bigcup_{\lambda' \in \Lambda'} U_{\lambda'} \supseteq K$. Segue que $\{\mathcal{O}_{\lambda'} : \lambda' \in \Lambda'\}$ é uma subcobertura finita da cobertura $\{\mathcal{O}_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ de f(K). Portanto, f(K) é compacto.* ■

Prova. *Uma prova alternativa faz uso de sequências: Seja $\{y_n\}$ uma sequência em f(K). Então, existe uma sequência $\{x_n\}$ em K tal que $y_n = f(x_n)$. Como K é compacto, $\{x_n\}$ tem uma subsequência $\{x_{\varphi(n)}\}(\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estritamente crescente) convergente com limite $\overline{x} \in K$. Como $x_{\varphi(n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \overline{x}, y_{\varphi(n)} = f(x_{\varphi(n)}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$ e $\{y_n\}$ tem uma subsequência convergente com limite em f(K). Portanto, f(K) é compacto.* ■

Teorema. *Se $K \subseteq \mathbb{R}$ é um conjunto compacto e $f : K \to \mathbb{R}$ é contínua, existem $x_1, x_2 \in K$ tal que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ para todo x em K.*

Prova. *Como f(K) é compacto, $L = \sup\{y : y \in f(K)\}$ e $l = \inf\{y : y \in f(K)\}$ pertencem a f(K). Portanto, existem $x_1, x_2 \in K$ tais que $f(x_1) = l \leq f(x) \leq L = f(x_2)$ para todo x de K.* ■

18 Aula 18 - 10/05/2023

18.1 O que esperar?

- Semicontinuidades;
- Diferenciabilidade.

18.2 Semicontinuidade

Definição. *Se $D \subseteq \mathbb{R}$, c é um ponto de acumulação de D e $f : D \to \mathbb{R}$ é uma função que é limitada em uma vizinhança de c em $\mathbb{R}$, definimos*

$$\limsup_{x\to c} f(x) \limsup_{r\to 0^+}\{f(x) : x \in D, 0 < |x-c| < r\} \quad e \liminf_{x\to c} f(x) = \liminf_{r\to 0^+} f(x) : x \in D, 0 < |x-c| < r.$$

Definimos os análogos para pontos em $c \in D^-$ como

$$\overline{Lim}_{x\to p} f(x) \coloneqq \limsup_{x\to p} f(x) \coloneqq \limsup_{r\to 0^+}\{f(x) : x \in D, |x-p| < r\} \quad e\ \underline{Lim}_{x\to p} f(x) \coloneqq \liminf_{r\to 0^+}\{f(x) : x \in D, |x-p| < r||\} square$$

Definição. *Seja $f : D \to \mathbb{R}$ e c um ponto de D. Então, f é semicontínua superiormente em c se*

$$f(c) = \overline{Lim}_{x\to c} f(x) \quad (f(c) \geq \limsup_{x\to p} f(x))$$

e semicontínua inferiormente se

$$f(c) = \underline{Lim}_{x\to c} f(x) \quad (f(c) \leq \liminf_{x\to p} f(x))$$

Se f é semicontínua superiormente (inferiormente) em todos os pontos de D, dizemos que f é semicontínua superiormente (inferiormente). □

Teorema. *Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função semicontínua superiormente (inferiormente). Se k é um número real, então existe um aberto O_k de $\mathbb{R}$ tal que*

$$O_k \cap D = \underbrace{\{x \in D : f(x) < k\}}_{f^{-1}((-\infty,k))} \quad (O_k \cap D = \underbrace{\{x \in D : f(x) > k\}}_{f^{-1}((k,\infty))})$$

Prova. *Para c em D com $f(c) < k$,, da definição de semicontinuidade, segue que existe $r_c > 0$ tal que $f(x) < k$ para todo x em D, $|x - c| < r_c$. Seja $I_c = (c - r_c, c + r_c)$ e defina*

$$O_k = \bigcup_{c\in f^{-1}((-\infty,k))} I_c.$$

De fato, se c pertence a esta interseção, então $f(c) < k$. Com isso,

$$k > f(c) = \overline{Lim}_{x\to c} f(x) = \limsup_{r\to 0^+} \{f(s) : s \in D, |s - c| < r\}$$

Logo, existe r_c tal que $\sup\{f(s) : s \in D, |s-c| < r_c\} < k$. Assim, $f(s) < k$ para todo s em $(c-r_c, c+r_c)$ e em D. Finalmente, por conta disso, $c \in D\cap(c-r_c, c+r_c) \subseteq f^{-1}((-\infty, k))$ e $\bigcup_{c\in f^{-1}((-\infty,k))} D \cap (c - r_c, c + r_c) = f^{-1}(-\infty, k)$ É claro que, para todo x em $O_i \cap D = f^{-1}((-\infty, k))$.

18.3 Motivação para Diferenciabilidade

A diferenciabilidade é um conceito fundamental na análise matemática, que estende o conceito de derivada de uma função em um ponto. Uma função é dita diferenciável em um ponto se existe um número que pode ser interpretado como a inclinação da reta tangente à curva representativa da função naquele ponto.

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que f é diferenciável em $x_0 \in \mathbb{R}$ se o seguinte limite existe:

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{1}$$

O número $f'(x_0)$ é chamado de derivada de f em x_0.

A diferenciabilidade tem diversas aplicações em matemática e ciências. Ela permite, por exemplo, calcular a taxa de variação de uma quantidade, otimizar funções e resolver equações diferenciais. Alguns exemplos incluem

18.3.1 Função Linear

Considere a função linear $f(x) = mx + b$, onde m e b são constantes. A derivada de f em qualquer ponto x_0 é $f'(x_0) = m$, que é a inclinação da reta.

18.3.2 Função Quadrática

Considere a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde a, b e c são constantes. A derivada de f em qualquer ponto x_0 é $f'(x_0) = 2ax_0 + b$.

Pense na diferenciabilidade como uma maneira de medir o quão ”suave”é uma função. Se você pode desenhar a curva de uma função sem levantar a caneta do papel, então a função é provavelmente diferenciável. A derivada em um ponto é simplesmente a inclinação da reta que melhor se ajusta à curva naquele ponto. Vamos entrar mais a fundo nessas ideias

18.4 Derivadas

Definição. *Seja $f : D_f \to \mathbb{R}$ uma função e $p \in D_f$ um ponto de acumulação de D_f. Se existir o limite*

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = L \in \mathbb{R},$$

diremos que L é a derivada de f em p e escrevemos

$$f'(p) = L = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{h \to 0} \frac{f(p + h) - f(p)}{h}.\square$$

Se $f : D \to \mathbb{R}$ possui derivada num ponto d de D que é também um ponto de acumulação de D, para $h \in \mathbb{R}$ tal que d+h pertence a D, escrevemos

$$r(h) = f(d + h) - f(d) - f'(d)h.$$

Nesses pontos, definimos $r : \{h \in \mathbb{R} : d + h \in D_f\} \to \mathbb{R}$ e escrevemos $f(d + h) = f(d) + f'(d)h + r(h)$ e, fazendo $\sigma(h) = \frac{r(h)}{h}, h \neq 0$, temos $\lim_{h \to 0} \sigma(h) = 0$.

Note que f é diferenciável em d se, e somente se, existe função σ com $\lim_{h \to 0} \sigma(h) = 0$ tal que $f(d + h) = f(d) + [f'(d) + \sigma(h)]h$.

Definição. *Sejam $f : D_f \to \mathbb{R}$ uma função e $p \in D_f$ um ponto de acumulação à direita de D_f. Se existir o limite*

$$\lim_{x \to p^+} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = L^+ \in \mathbb{R},$$

diremos que L^+ é a derivada à direita de f em p e escrevemos

$$f'(p^+) = L^+ = \lim_{x \to p^+} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(p + h) - f(p)}{h}$$

Analogamente, define-se derivada à esquerda. $\square$

Já definimos a derivada de $f : D_f \to \mathbb{R}$ em pontos p de D_f que também são pontos de acumulação de D_f. Sendo assim, se

$$D_{f'} = \left\{ x \in D_f : x \text{ é um ponto de acumulação de } D_f \text{ e } \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \text{ existe.} \right\} \subseteq D_f,$$

definimos a função $f' : D_{f'} \to \mathbb{R}$ por

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}, \quad x \in D_{f'}.$$

A função f' é dita a função derivada ou apenas derivada de f.

Teorema. *Se f for diferenciável em p de D_f, então f será contínua em p.*

Prova. *Recorde que $p \in D_f$ é um ponto de acumulação de D_f. Vamos mostrar que $\lim_{x \to p} f(x) = f(p)$ ou que $\lim_{x \to p}(f(x) - f(p)) = 0$. Escrevemos*

$$f(x) - f(p) = \frac{f(x) - f(p)}{x - p}(x - p).$$

Assim,

$$\lim_{x \to p}(f(x) - f(p)) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \lim_{x \to p}(x - p) = f'(p) \cdot 0 = 0.$$

Portanto, f é contínua em p.

Note que a recíproca não vale. A função $f(x) = |x|$ é contínua em x, mas não é diferenciável em x=0.

Exemplo 61. *Se f não é contínua em p, então f não é diferenciável em p.*

Exemplo 62. *A função*

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 2 \\ 2, & x \leq 2 \end{cases}$$

não é contínua, logo não diferenciável.

Definição. *Seja f derivável em $D_{f'}$. A função $f' : D_{f'} \to \mathbb{R}$ é dita derivada de f ou derivada primeira de f. Definimos a derivada segunda de f como*

$$(f')'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f'(x)}{h}$$

quando o limite existe. Escrevemos $f'' = f^{(2)} = (f')'$ para denotá-la.

Para $n \in \mathbb{N}^{\times}$, podemos definir a derivada n-ésima analogamente. $\square$.

Teorema. *Se $k \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}^{\times}$, valem as propriedades de derivada vistas em cálculo I. Além disso, valem as regras da derivada do produto, quociente, soma e multiplicação por constante.*

Lembrando:

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g(x)^2}$$

Teorema. *Sejam $f : D_f \to \mathbb{R}, g : D_g \to \mathbb{R}$ diferenciáveis com $Im(g) \subseteq D_f$. Se g é diferenciável em p, g(p) é ponto de acumulação de D_f, f é diferenciável em g(p) e $h = f \circ g$, então h é diferenciável em p e*

$$h'(p) = f'(g(p))g'(p).$$

Prova. *Faça q = g(p). Sejam σ_g e σ_f definidas em vizinhanças de 0 com $\lim_{h \to 0} \sigma_g(h) = 0$ e $\lim_{k \to 0} \sigma_f(k) = 0$ tais que*

$$\begin{aligned} g(p+h) &= g(p) + [g'(p) + \sigma_g(h)]h \\ f(q+k) &= f(q) + [f'(q) + \sigma_f(k)]k. \end{aligned}$$

Fazendo $k = g(p+h) - g(p) = [g'(p) + \sigma_g(h)]h$, temos $g(p+h) = q + k$ e

$$\begin{aligned} f(g(p+h)) = f(q+k) &= f(q) + [f'(q) + \sigma_f(k)]k \\ &= f(q) + [f'(q) + \sigma_f(k)][g'(p) + \sigma_g(h)]h \\ &= f(g(p)) + f'(f(p))g'(p)h + [\sigma_f(g(p+h) - g(p))[g'(p) + \sigma_g(h)] + f'(q)\sigma_g(h)]h. \end{aligned}$$

Agora, se $\sigma_{f \circ g}(h) = [\sigma_f(g(p+h) - g(p))[g'(p) + \sigma_g(h)] + f'(q)\sigma_g(h)]h$, temos $\lim_{h \to 0} \sigma_{f \circ g}(h) = 0$. $\blacksquare$

Seja $f : D_f \to \mathbb{R}$ uma função que tem inversa, $D_{f^{-1}} = Im(f)$ e $f^{-1} : D_{f^{-1}} \to \mathbb{R}$. Então, para todo x em $D_{f^{-1}}$,

$$f(f^{-1}(x)) = x.$$

Vimos que se f é contínua em um compacto, f^{-1} é contínua. Se, além disso, f e f^{-1} forem deriváveis, pela Regra da Cadeia,

$$f'(f^{-1}(x))(f^{-1})'(x) = x' = 1.$$

Logo, $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$ e

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Esse estudo sobre a inversa é sumarizado no próximo resultado:

Teorema. *Seja f injetiva, p um ponto de acumulação de Im(f). Se f for diferenciável em $q = f^{-1}(p)$ e f^{-1} é contínua em p, então f^{-1} é diferenciável em p se, e somente se, $f'(f^{-1}(p)) \neq 0$. Neste caso,*

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Prova. *Se* $f'(f^{-1}(p)) \neq 0$, *como* f^{-1} *é contínua em* p, $\lim_{h\to 0} f^{-1}(p+h) = f^{-1}(p)$. *Usando* $f(f^{-1}(x)), x \in D_{f^{-1}}$, *temos*

$$\begin{aligned}(f^{-1})'(p) &= \lim_{h\to 0} \frac{f^{-1}(p+h) - f^{-1}(p)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\frac{h}{f^{-1}(p+h)-f^{-1}(p)}} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\frac{f(f^{-1}(p+h))-f(f^{-1}(p))}{f^{-1}(p+h)-f^{-1}(p)}} = \frac{1}{f'(f^{-1}(p))}\end{aligned}$$

Por outro lado, se f^{-1} *é diferenciável em* p, *da regra da cadeia aplicada a* $f \circ f^{-1}$, *temos* $f'(f^{-1}(p)) \cdot (f^{-1})'(p) = 1$ *e* $f'(f^{-1}(p)) \neq 0$.

Exemplo 63. *Se* $g(x) = x^{\frac{1}{n}}$, *então* $g'(x) = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}, 2 \leq n \in \mathbb{N}$. *Lembre-se que,* $x > 0$ *se* n *for par e* $x \neq 0$ *se* n *for ímpar.*

Com efeito, note que $g(x) = x^{\frac{1}{n}} = f^{-1}(x)$, *em que* $f(u) = u^n$. *Então,*

$$g'(x) = (f^{-1})(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{n(x^{\frac{1}{n}})^{n-1}} = \frac{1}{n(x^{\frac{n-1}{n}})} = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}.$$

19 Aula 19 - 12/05/2023

19.1 O que esperar?

- Funções Deriváveis em Intervalos;
- Teorema de Darboux;
- Descontinuidades da Derivada.

19.2 Funções Deriváveis em Intervalos

Exemplo 64. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3$. Já sabemos que f é contínua. Como*

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) &= (x-y)(x^2+xy+y^2) \\ &= (x-y)((x+\frac{y}{2})^2+\frac{3}{4}y^2) \\ &= (x-y)((\frac{x}{2}+y)^2+\frac{3}{4}x^2). \end{aligned}$$

Segue que $x \neq y$ implica $f(x) \neq f(y)$ e f é injetora. Além disso, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$e, pelo teorema do valor intermediário, f é uma bijeção de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Além disso, $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua pois ela é contínua em qualquer intervalo compacto. A inversa de f é denotada $f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$. Do teorema sobre a derivada da inversa e do fato que $f'(x) = 3x^2$ deduzimos que $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é diferenciável se, e somente se, $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ e, para estes valores de x.

$$\overbrace{(\sqrt[3]{x})'}^{(f^{-1})'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2} = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}.$$

Definição. *Seja $f : D \to \mathbb{R}$. Dizemos que f tem um máximo (mínimo) local no ponto de em D se existe $\delta > 0$ tal que $f(x) \leq f(d)(f(x) \geq f(d))$ para todo x em D com $|x-d| < \delta$. Quando a desigualdade é estrita, dizemos que f tem um máximo (mínimo) local estrito. Os máximos e mínimos locais serão chamados de valores extremos e os pontos em que a função assume valores máximos ou mínimos são chamados de pontos de máximo ou de mínimo.* □

Pela definição de derivada (à direita), segue que

1. Se $f : D \to \mathbb{R}$ é não-decrescente (não-crescente) e é diferenciável em um ponto d de D, então $f'(d) \geq 0(f'(d) \leq 0)$. Vale o mesmo para funções diferenciáveis à direita.
2. Se $f : D \to \mathbb{R}$ é derivável à direita (esquerda) em um ponto $d \in D$ e $f'(d^+) > 0(f'(d^-) > 0)$ então existe $\delta > 0$ tal que $x \in D, x \in (d, d+\delta)(x \in (d-\delta, d)$ implica $f(x) > f(d)(f(x) < f(d))$.
3. Se $f : D \to \mathbb{R}$ é derivável à direita (esquerda) em um ponto $d \in D$ e $f(d^-) < 0(f'(d^-) < 0)$, então existe $\delta > 0$ tal que $x \in D, x \in (d, d+\delta)(x \in (d-\delta, d))$ implica $f(x) < f(d)(f(x) > f(d))$.
4. Se $f : D \to \mathbb{R}$ é derivável em um ponto $d \in D$, d sendo ponto de acumulação à direita e à esquerda e $f'(d) > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $x \in D, d-\delta < x < d < y < d+\delta$ implica $f(x) < f(d) < f(y)$.
5. $f : D \to \mathbb{R}$ é derivável em um ponto d em D, d é um ponto de acumulação à direita e à esquerda e f tem um valor extremo local em d, então $f'(d) = 0$.

Definição. *Seja I um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Se $f' : I \to \mathbb{R}$ for contínua diremos que f é continuamente diferenciável em I, ou simplesmente f é de classe C^1 em I.*

Note que existe função diferenciável em um intervalo I que não é continuamente diferenciável.

Exemplo 65. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ f(0) = 0. \end{cases}$$

Então, f é diferenciável, mas f' não é contínua em x = 0.

Teorema. *Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é diferenciável com $f'(a) \neq f'(b)$, então, para todo C entre $f'(a)$ e $f'(b)$, existe $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = C$.*

Prova. *Suponha que $f'(a) < 0 < f'(b)$. Segue que, para x próximo a a em $[a,b], f(x) < f(a)$ e, para x próximo a b em $[a,b], f(x) < f(b)$. Logo, o ponto de mínimo (que existe pelo Teorema de Weierstrass c de f ocorre em (a,b) e portanto $f'(c) = 0$. Para o caso geral, consideramos*

- *Se $f'(a) < C < f'(b), g(x) = f(x) - C \cdot x$*
- *Se $f'(a) > C > f'(b), g(x) = C \cdot x - f(x)$.*

Teorema. *Se I é um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ é diferenciável, então f' não tem descontinuidades de primeira espécie.*

Prova. *Se a é um ponto de acumulação à direita de I e $L^+ = \lim_{x\to a^+} f(x)$ existe, mostremos que $L^+ = f'(a)$.*

De modo análogo (exercício), se a é um ponto de acumulação à esquerda de I e $L^- = \lim_{x\to a^-} f'(x)$ existe, mostre que $f'(a) = L^-$.

Se $L^+ > f'(a)$ e $C \in (f'(a), L^+)$, existe $\delta > 0$ tal que $f'(x) > C$ para todo $x \in (a, a-\delta)$. Escolhendo $b \in (a, a+\delta)$, temos $f'(b) > C > f'(a)$, uma contradição com o Teorema de Darboux, pois este implica a existência de $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = C$. Logo, $f'(a) \geq L^+$.

Se $f'(a) > L^+$ e $C \in (L^+, f'(a))$, existe $\delta > 0$ tal que $f'(x) < C$ para todo x em $(a, a+\delta)$. Escolhendo b em $(a, a+\delta)$, temos $f'(b) < C < f'(a)$, novamente contradizendo o Teorema de Darboux, visto que ele implica que deve existir c em (a,b) tal que $f'(c) = C$. Assim, $f'(a) \leq L^+$. Portanto, $L^+ = f'(a)$. ■

Teorema. *Se $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ é contínua e diferenciável à direita com derivada à direita, $D^+f : [a,b) \to \mathbb{R}$. Se $D^+f(x) \leq 0(D^+f(x) \geq 0)$ para todo x em $[a,b)$ e $f(a) = 0$, então $f(x) \leq 0(f(x) \geq 0)$ em $[a,b)$.*

Prova. *Suponha primeiramente que $D^+f(x) < 0$ para todo $x \in [a,b)$. Se o resultado é falso, existe ao menos um $x \in (a,b)$ tal que $f(x) > 0$. Seja $x_0 = \inf\{x \in (a,b) : f(x) > 0\}$.*

Da continuidade de f, $f(x_0) = 0$ e da definição de x_0 existe uma sequência $x_n \in (x_0, b)$ tal que $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_0$. Assim,

$$D^+f(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \geq 0,$$

uma contradição. Logo, $f(x) \leq 0$ para todo x em $[a,b)$.

Agora, consideramos o caso geral $D^+f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a,b)$. Neste caso, consideramos a função auxiliar $f_\varepsilon(x) = f(x) - \varepsilon(x-a)$ e temos $f_\varepsilon(x) \leq 0$ para todo $x \in [a,b)$ e $\varepsilon > 0$. Disto segue que, para todo $x \in [a,b), f(x) \leq 0$. O outro caso será deixado como exercício. ■

Exemplo 66. *Encontre uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que é diferenciável à direita, tal que $D^+f(x) < 0$ para todo $x \neq 0, D^+f(0) = 0$, f é positiva para $x > 0$ e negativa para $x < 0(f(x) \overset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} \pm\infty$.)*

Corolário. *Se $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ é contínua e diferenciável à direita com derivada à direita $D^+f : [a,b) \to \mathbb{R}$. Se $D^+f(x) \leq 0$ para todo x em $[a,b)$, então f é não-crescente em $[a,b)$.*

Prova. *Se $a \leq c < d < b$, seja $g : [c,b) \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = f(x) - f(x)$ e $D^+g(x) \leq 0$ para todo x em $[c,b)$. Segue do teorema que $g(x) \leq 0$ para todo x em $[c,b)$. Em particular, $g(d) = f(d) - f(c) \leq 0$.* ■

Corolário. *Se $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ é contínua e diferenciável à direita com derivada à direita $D^+f : [a,b) \to \mathbb{R}$. Se $D^+f(x) \geq 0$ para todo x em $[a,b)$, então f é não-decrescente em $[a,b)$.*

A prova deste exercício é deixada como exercício. Além disso, como exercício, enuncie e prove resultados semelhantes aos anteriores para a derivada à esquerda.

20 Aula 20 - 15/05/2023

20.1 O que esperar?

- Teorema do Valor Médio;
- Consequências do TVM;
- Regra de L'Hospital;
- Teorema de Taylor.

20.2 Teorema do Valor Médio

O resultado a seguir não pode ser completado até o futuro, no entanto, pode ser útil já afirmá-lo.

Corolário. *Se $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ é contínua e diferenciável à direita com derivada à direita $D^+ f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua, então f é de classe C^1.*

Prova. *Seja $g = D^+ f$ e defina*

$$h(t) = f(a) + \int_a^t g(\tau) d\tau.$$

A função h é continuamente diferenciável em $[a,b)$. Se $\varphi(t) = h(t) - f(t)$, então $\varphi(a) = 0$ e $D^+\varphi(t) = 0$ em [a, b). Do teorema anterior, $\varphi(t) \leq 0$ em $[a,b)$.

Como $-\varphi(t)$ também satisfaz as hipóteses do teorema anterior, $\varphi(t) \geq 0$. Portanto, $\varphi = 0$, ou seja, $f = h$ em $[a,b)$. ■

O Teorema do Valor Médio é um dos teoremas fundamentais da análise. Segue sua formulação segundo Cauchy

Teorema. *Se $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ são funções contínuas que são diferenciáveis em (a,b), existe c em (a,b) tal que*

$$[f(b) - f(a)]g'(c) = [g(b) - g(a)]f'(c).$$

Um de seus corolários é o teorema de Rolle

Corolário. *Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua em $[a,b]$ e diferenciável em (a,b) e $f(a) = f(b)$, então existe um c em (a, b) tal que $f'(c) = 0$.*

Prova. *Segue fazendo $g(x) = 1$ no teorema anterior.* ■

Outro corolário é o Teorema do Valor Médio em sua versão mais simplificada e mais usada

Corolário. *Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua em $[a,b]$ e diferenciável em (a,b), então existe $c \in (a,b)$ tla que*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a),$$

ou seja,

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Prova. *Basta tomar $g(x) = x$ no teorema anterior.* ■

Vamos provar o teorema do valor médio de Cauchy.

Prova. *Se*

$$h(x) = [f(b) - f(a)]g(x) - [g(b) - g(a)]f(x), \quad (a \leq x \leq b),$$

então h é contínua em $[a,b]$, diferenciável em (a,b) e

$$h(a) = f(b)g(a) - f(a)g(b) = h(b). \quad \textit{(para verificar isso, basta abrir as contas)}$$

Para provar o teorema, basta mostrarmos que $h'(c) = 0$ para algum c em (a, b).

Se h é constante, isto vale para todo c em (a, b). Se$h(x) > h(a)$ para algum $x \in (a, b)$, seja c um ponto de $[a, b]$ no qual h atinge seu máximo. Como $h(a) = h(b)$, segue que c pertence a (a, b) e $h'(c) = 0$.

Se $h(x) < h(a)$ para algum x em (a, b), escolhemos c em $[a, b]$ para o qual h atinge seu mínimo. Portanto, assim como antes, $c \in (a, b)$ e $f'(c) = 0$. ■

Algumas outras consequências do TVM são:

Corolário. *a) Se $f'(x) \geq 0$, então f é não-decrescente em (a, b);*

b) Se $f'(x) > 0$, então f é crescente em (a, b)

c) Se $f'(x) = 0$, então f é constante em (a, b)

d) Se $f'(x) \leq 0$, então f é não-crescente em (a, b)

e) Se $f'(x) \leq 0$, então f é decrescente em (a, b)

Uma observação, também, é o Teorema da Função Inversa

Teorema. *Se $I \subseteq \mathbb{R}$ é um intervalo aberto, x_0 um ponto de I, $f : I \to \mathbb{R}$ uma função C^1 e $f'(x_0) \neq 0$, então existe $\delta > 0$ tal que $f : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \to \mathbb{R}$ é injetora, $f((x_0 - \delta, x_0 + \delta)) = J$ é um intervalo e $f^{-1} : J \to I$ é continuamente diferenciável com*

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

O resultado a seguir é conhecido como Regra de L'Hospital, um dos resultados mais úteis no cálculo de limites indeterminados de funções.

Teorema. *Sejam f, g diferenciáveis em (a, b) e $g'(x) \neq 0$ para todo x em (a, b), em que $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ e*

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \overset{x \to a}{\longrightarrow} A.$$

Se

$$f(x) \overset{x \to a}{\longrightarrow} 0 \text{ e } g(x) \overset{x \to a}{\longrightarrow} 0$$

ou se

$$g(x) \overset{x \to a}{\longrightarrow} +\infty,$$

então

$$\frac{f(x)}{g(x)} \overset{x \to a}{\longrightarrow} A.$$

O resultado permanece válido se $x \longrightarrow b$, ou se $g(x) \longrightarrow +\infty$.

Prova. *Primeiramente, consideramos o caso $-\infty \leq A < +\infty$. Se $q > r > A$, existe c em (a, b) tal que, se $a < x < c$, então*

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} < r.$$

Se $a < x < y < c$, do Teorema do Valor Médio de Cauchy, existe $t \in (x, y)$ tal que

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(t)}{g'(t)} < r,$$

visto que, se $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$, fazendo $q > r > A, q \in \mathbb{R}$, deve existir $c > a$ tal que, para todo x em (a, c),

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} < r.$$

Se a primeira condição vale, então, fazendo $x \to a$ na desigualdade acima,

$$\frac{f(y)}{g(y)} \leq r < q \quad (a < y < c),$$

Caso a segunda condição seja verdadeira, mantendo y fixado na equação em que aplicamos o TVM de Cauchy anterior, podemos escolher $c_1 \in (a, y)$ tal que $g(x) > g(y)$ e $g(x) > 0$ se $a < x < c_1$. Multiplicando ela por $\frac{g(x)-g(y)}{g(x)}$, obtemos

$$\frac{f(x)}{g(x)} < r - r\frac{g(y)}{g(x)} + \frac{f(y)}{g(x)} \quad (a < x < c_1)$$

Fazendo x tender para a nesta desigualdade, segue que existe $c_2 \in (a, c_1)$ tal que

$$\frac{f(x)}{g(x)} < q \quad (a < x < c_2).$$

Assim, temos para qualquer $q > A$, existe c_2 tal que $\frac{f(x)}{g(x)} < q$ se $a < x < c_2$.

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} \leq q \quad \forall q > A.$$

Do mesmo modo, se $-\infty < A \leq +\infty$ e $p < A$, podemos encontrar c_3 tal que

$$p < \frac{f(x)}{g(x)} \quad (a < x < c_3).$$

Disto segue o resultado. ■

O próximo resultado é conhecido como Teorema de Taylor, e permite-nos quebrar uma função com várias derivadas em um polinômio com derivadas mais simples. Ele pode ser visto como uma generalização do TVM.

Teorema. *Se $n \in \mathbb{N}^{\times}, f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função n-1 vezes diferenciável em $[a, b]$ e n-vezes diferenciável em (a, b) com $f^{(n-1)} : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua. Sejam $\alpha, \beta \in [a, b]$ diferentes e*

$$P(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}(t - \alpha)^k.$$

Então, existe ξ entre α e β tal que

$$f(\beta) = P(\beta) + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(\beta - \alpha)^n.$$

Para n=1, este é o TVM. Em geral, o teorema mostra como aproximar f por polinômios e fornece uma maneira de estimar o erro se conhecermos limitações para $|f^{(n)}(\xi)|$.

Prova. *Seja M o número definido por*

$$f(\beta) = P(\beta) + M(\beta - \alpha)^n.$$

Fazendo

$$g(t) = f(t) - P(t) - M(t - \alpha)^n \quad (a \leq t \leq b).$$

Precisamos mostrar que $n!M = f^{(n)}(\xi)$ para algum ξ entre α e β. Segue que

$$g^{(n)}(t) = f^{(n)}(t) - n!M \quad (a < t < b).$$

Resta mostrar que $g^{(n)}(\xi) = 0$ para algum $\alpha \leq \xi \leq \beta$. Como $P^{(k)}(\alpha) = f^{(k)}(\alpha), k = 0, \cdots, n-1$, temos

$$g(\alpha) = g'(\alpha) = \cdots = g^{(n-1)}(\alpha) = 0.$$

Nossa escolha de M implica que $g(\beta) = 0$ e, do Teorema do Valor Médio, $g'(x_1) = 0$ para algum x_1 entre α e β. Como $g'(\alpha) = 0$, de modo semelhante, $g''(x_2) = 0$ para algum x_2 entre α e x_1. Portanto, depois de n, chegamos à conclusão que $g^{(n)}(x_n) = 0$ para algum x_n entre α e x_{n-1}, isto é, entre α e β. ■

20.3 Funções Convexas

Definição. *Seja I um intervalo. Uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é convexa quando, dados $a < x < b$ em I, o ponto $(x, f(x))$ fica abaixo da reta que liga os pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.* $\square$

A equação da reta é

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) \text{ ou } y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - b) + f(b).$$

Logo, $f : I \to \mathbb{R}$ é convexa se uma das desigualdades

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x}$$

está sempre satisfeita sempre que $a < x < b$ em I.

Teorema. *Seja $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável. Então, f é convexa se, e somente se, $f''(x) \geq 0$ para todo x em I.*

21 Aula 21 - 17/05/2023

21.1 O que esperar?

- Funções convexas;
- Séries de Taylor;
- Funções analíticas;
- Funções de variação limitada.

21.2 Funções Convexas

Vamos relembrar o que foi visto na última aula sobre funções convexas antes de mais nada.

Definição. *Seja I um intervalo. Uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é convexa quando, dados $a < x < b$ em I, o ponto $(x, f(x))$ fica abaixo da reta que liga os pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.* $\square$

A equação da reta é

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) \text{ ou } y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - b) + f(b).$$

Logo, $f : I \to \mathbb{R}$ é convexa se uma das desigualdades

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x}$$

está sempre satisfeita sempre que $a < x < b$ em I.

Teorema. *Seja $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável. Então, f é convexa se, e somente se, $f''(x) \geq 0$ para todo x em I.*

Começamos agora por provar esse resultado.

Prova. *Se $f''(x) \geq 0$ para todo x em I, então dados a, $a+h$ em I, existe c entre a e $a+h$ tal que $f(a + h) = f(a) + f'(a) \cdot h + \frac{f''(c)}{2} \cdot h^2$. Como $f''(c) \geq 0, f(a + h) \geq f(a) + f'(a) \cdot h$. Disto segue que $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \leq f'(a)$ se $h < 0$ e $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \geq f'(a)$ se $h > 0$. Em outras palavras, se $a < x < b$ em I, então $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(b)-f(x)}{b-x}$ ou seja,*

$$(f(x) - f(a))(b - x) \leq (f(b) - f(x))(x - a).$$

Deste modo,

$$\begin{aligned}(f(x) - f(a))(b - a - (x - a)) \leq (f(b) - f(a) - (f(x) - f(a)))(x - a) \text{ e}\\ (f(x) - f(a))(b - a) \leq (f(b) - f(a))(x - a).\end{aligned}$$

Com isso, provamos a convexidade de f.

Reciprocamente, se f é convexa, dados $a < x < b$ em I, temos

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(x) - f(b)}{x - b}.$$

Fazendo $x \to a$ e $x \to b$,

$$f'(a) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq f'(b)$$

e f é não-decrescente em I. Portanto, $f''(x) \geq 0$ para todo x em I. $\blacksquare$

Observe que, se f é diferenciável, então f' é crescente se, e somente se, f é convexa. Além disso, podemos mostrar analogamente que, se $f''(x) > 0$ para todo x em I, então f é estritamente convexa em I. A recíproca é falsa, no entanto. Basta tomar $f(x) = x^4$, a qual é estritamente convexa em $\mathbb{R}$, mas $f''(0) = 0$.

Seja $f : I \to \mathbb{R}$ de classe C^∞. Se $a, x \in I^o$, então podemos escrever, para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$f(x) = f(a) - f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + r_n((x-a)),$$

em que $r_n((x-a)) = \frac{f^{(n)}((1-\theta_n)a+\theta_n x)}{n!}(x-a)^n$, com $0 < \theta_n < 1$. A série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

chama-se a série de Taylor da função f em torno do ponto a. Esta série pode ou não convergir e, mesmo que convirja, sua soma pode ser diferente de f(x).

Exemplo 67. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(0) = 0$ e $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ se $x \neq 0$. Mostre que f é C^∞, $f^{(n)}(0) = 0$ para todo n natural e portanto a série de Taylor de f em $x = 0$ é convergente para $f(0)$, mas não coincide com f para nenhum $x \neq 0$.*

Definição. *Se $I \subseteq \mathbb{R}$ é um intervalo aberto e $f : I \to \mathbb{R}$ é uma função, dizemos que f é analítica em I se, para cada $a \in I$, existe $\varepsilon > 0$ tal que a série de Taylor $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x-a)^n$ é convergente com soma $f(x)$ para todo x em $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$.*$\square$

É claro que a série de Taylor $\sum \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x-a)^n$ converge para f(x) se, e somente se, $\lim_{n\to a} r_n((x-a)) = 0$.

Exemplo 68. *A série de Taylor da função seno é dada por*

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

Veremos mais tarde que, se a série de potências $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-a)^n$ tem raio de convergência $R > 0$, então a função definida por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n, \quad x \in (a-R, a+R)$$

é analítica.

21.3 Funções de Variação Limitada (BV)

Se r é um número real, colocamos $r^+ = \max\{r, 0\}, r^- = \max\{-r, 0\}$.

Definição. *Uma coleção $\{a_0, \cdots, a_k\}$ de pontos em $[a, b]$ é chamada uma partição do intervalo $[a, b]$ se $a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_k = b$. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e $\{a_0, \cdots, a_k\}$ uma partição de $[a, b]$. Escrevemos*

$$p = \sum_{n=1}^{k} [f(a_i) - f(a_{i-1})]^+,$$
$$n = \sum_{i=1}^{k} [f(a_i) - f(a_{i-1})]^-,$$
$$t = \sum_{i-1}^{k} [f(a_i) - f(a_{i-1})] = p + n,$$
$$f(b) - f(a) = p - n.$$

Sejam

$P_a^b = \sup\{p : k \in \mathbb{N}, a = a_0 < a_1 < \cdots < a_k = b$ partição de [a, b]$\}$ $\quad N_a^b = \sup\{n : k \in \mathbb{N}, a = a_0 < a_1 < \cdots < a_k = b$ partição

Dizemos que P_a^b, N_a^b e T_a^b são as variações positiva, negativa e total de f. É claro que

$$\max\{P_a^b, N_a^b\} \leq T_a^b \leq P_a^b + N_a^b \quad \text{e } f(b) - f(a) = P_a^b - N_a^b.$$

Definição. *A função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é de variação limitada se $T_a^b < \infty$. Denotamos isso por $f \in BV([a,b])$.*□

Teorema. *1) Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é Lipschitz contínua, então $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é de variação limitada.*

2) Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é monótona, então $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é de variação limitada.

3) Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é de variação limitada, existem funções não-decrescente $g, h : [a,b] \to \mathbb{R}$ tais que $f(x) = g(x) - h(x)$.

Prova. 1. $\Rightarrow$) *Se f é Lipschitz,* $\max\{P_a^b, N_a^b \leq T_a^b \leq L(b-a) < \infty,\}$ *em que $L > 0$ é a constante de Lipschitz.*
2. $\Rightarrow$) *Se f é monótona, então $T_a^b = [f(b) - f(a)] < \infty$.*
3. $\Rightarrow$) *Se $T_a^b < \infty$, defina $g, h : [a,b] \to \mathbb{R}$ por $g(x) = f(a) + P_a^x$ e $h(x) = N_a^x$ para cada x de $[a,b]$. Portanto, g, h são não-decrescentes e $f(x) = g(x) - h(x)$.* ■

22 Aula 22 - 19/05/2023

22.1 O que esperar?

- Medida exterior;
- Continuidade Lipschitz;

22.2 Medida Exterior

Definição. *Se $I = (a, b)$, defina $l(I) = b - a$. Dado $A \subseteq \mathbb{R}$, existe uma família contável de intervalos abertos que cobrem A. Seja $\mathcal{U}_A$ a coleção de todas as coberturas contáveis de intervalos abertos de A. Então, definimos a medida exterior de A como*

$$m^*(A) = \inf\{\sum l(I_n) : \{I_n\} \in \mathcal{U}_A\}.\square$$

É claro que $m^*(\emptyset) = 0, m^*((a, b)) \leq b - a, m^*(\{x\}) = 0$ para todo x real e que, se $A \subseteq B, m^*(A) \leq m^*(B)$.

Lema. *Temos $m^*[a, b] = m^*(a, b] = m^*[a, b) = m^*(a, b) = b - a$.*

Prova. *Como $[a, b] \subseteq (a - \frac{\varepsilon}{2}, b + \frac{\varepsilon}{2})$, para todo $\varepsilon > 0$, temos $m^*([a, b]) \leq b - a$. Por outro lado, se $\{I_n\} \in \mathcal{U}_{[a,b]}$ existe uma subcoleção finita $\{I_{n_1}, \cdots, I_{n_k}\}$ de $\{I_n\}$ tal que $\bigcup_{i=1}^k I_{n_i} \supseteq [a, b]$ e*

$$\sum_{i=1}^{k} l(I_{n_i}) \leq \sum l(I_n).$$

Podemos tomar uma subcobertura de $\{I_{n_1}, \cdots, I_{n_k}\}$ de forma que $a \in I_{n_{j_1}} = (y_1, x_1)$ e, recursivamente, se $x_j \leq b, x_j \in I_{n_{i_{j+1}}} = (y_{j+1}, x_{j+1})$ parando para $j_0 \leq k$ tal que $I_{n_{i_{j_0}}} \ni b$. Assim, como $y_j < x_{j-1} < x_j$,

$$\sum_{j=1}^{j_0} l(I_{n_{i_j}}) = \sum (x_j - y_j) > x_{j_0} - y_1 > b - a$$

e $m^*([a, b]) = b - a$. ■

Lema. *Se $\{A_n\}$ é uma família contável de subconjuntos de $\mathbb{R}$, então*

$$m^*\left(\bigcup A_n\right) \leq \sum m^*(A_n).$$

Prova. *Só temos que considerar o caso em que $\sum m^*(A_n) < \infty$. Como $m^*(A_n)$ é finita, dado $\varepsilon > 0$, seja $\{I_{n,i}\}_i \in \mathcal{U}_{A_n}$ tal que $A_n \subseteq \bigcup_i I_{n,i}$ e $\sum\limits_i l(I_{n,i}) < m^*(A_n) + 2^{-n}\varepsilon$ Logo, $\{I_{n,i}\}_{n,i} \in \mathcal{U}_{\bigcup A_n}$ e*

$$m^*\left(\bigcup_n A_n\right) \leq \sum_{n,i} l(I_{n,i}) = \sum_n \sum_i l(I_{n,i}) < \sum_n (m^*(A_n) + \varepsilon 2^{-n}).$$

Portanto, $m^*\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum m^*(A_n) + \varepsilon$ e, como ε é arbitrário, o resultado segue.

Corolário. *1) Se $A \subseteq \mathbb{R}$ é enumerável, $m^*(A) = 0$.*

2) Se $\{A_n\}$ é uma família contável de subconjuntos de $\mathbb{R}$ e $m^*(A_n) = 0$ para todo n, então $m^*(\bigcup_n A_n = 0$.

Exemplo 69. *Seja $I_j = [a_j, b_j], 1 \leq j \leq n$ com $b_j < a_{j+1}, 1 \leq j \leq n - 1$. Mostre que*

$$m^*\left(\bigcup_{j=1}^{n} I_j\right) = \sum_{j=1}^{n} (b_j - a_j).$$

Dado um conjunto E, uma cobertura de Vitali dele é uma coleção de intervalos $\mathcal{I}$ tal que para todo x em E e $\varepsilon > 0$, existe $I \in \mathcal{I}$ tal que $x \in I$ e $m^*(I) < \varepsilon$.

Lema. *Seja $E \subseteq [a,b]$, tal que $m^*(E) \leq b-a$. Se $\mathcal{I}$ é uma cobertura de E por intervalos não degenerados (Não é um ponto só) e tal que, dados $x \in E$ e $\varepsilon > 0$, existe $I \in \mathcal{I}$ tal que $x \in I$ e $l(I) < \varepsilon$. Então, dado $\varepsilon > 0$, exsite uma coleção finita e disjunta $\{I_1, \cdots, I_N\} \subseteq \mathcal{I}$ tal que*

$$m^*\left(E \Big\backslash \bigcup_{n=1}^{N} I_n\right) < \varepsilon.$$

Prova. *Basta considerar o caso com cada intervalo de $\mathcal{I}$ fechado. Podemos assumir que $\mathcal{I} \ni I \subseteq \mathcal{O} = (b-1, b+1)$ e que $I \cap E \neq \emptyset$ para todo I de $\mathcal{I}$.*

Escolhemos uma sequência $\{I_n\}$ de intervalos disjuntos de $\mathcal{I}$ da seguinte forma: Seja $I_1 \in \mathcal{I}$ qualquer e se $I_1, \cdots, I_n$ já foram escolhidos, seja r_n o supremo dos comprimentos dos intervalos de $\mathcal{I}$ que não interseptam nenhum dos $I_1, \cdots, I_n$. Claramente, $r_n < l(\mathcal{O})$. Se $E \not\subseteq \bigcup_{i=1}^{n} I_i$, encontramos $I_{n+1} \in \mathcal{I}$ disjunto de $I_1, \cdots, I_n$ e tal que $l(I_{n+1} > \frac{1}{2} r_n$.

Assim, $\{I_n\}$ é uma sequência disjunta de intervalos em $\mathcal{I}$ e, como $\bigcup I_n \subseteq \mathcal{O}, \sum l(I_n) \leq l(\mathcal{O})$. Logo, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{N+1}^{\infty} l(I_n) < \frac{\varepsilon}{5}.$$

Seja

$$R = E \Big\backslash \bigcup_{n=1}^{N} I_n$$

Mostraremos que $m^*(R) < \varepsilon$. Se $x \in R$, como $F = \bigcup_{n=1}^{N} I_n$ é fechado e $x \notin F$, existe I em $\mathcal{I}, x \in I$ e $I \cap F = \emptyset$.

Agora, se $I \cap I_i = \emptyset$ para $i \leq \kappa$, temos $l(I) \leq r_\kappa < 2l(I_{\kappa+1}$. Como $\lim_{\kappa\to\infty} l(I_\kappa) = 0$, o intervalo I deve intersectar pelo menos um dos intervalos I_κ.

Seja n o menor inteiro tal que $I \cap I_n \neq \emptyset$. Claramente $n > N$, e $l(I) \leq r_{n-1} < 2l(I_n)$. Como $x \in I$ e $I \cap I_n \neq \emptyset$, a distância de x ao ponto médio de I_n é no máximo $l(I) + \frac{1}{2} l(I_n) < \frac{5}{2} l(I_n)$.

Logo, x pertence ao intervalo J_n tendo o mesmo ponto médio que I_n e o quíntuplo do comprimento. Desta forma,

$$R \subseteq \bigcup_{N+1}^{\infty} J_n$$

e, portanto,

$$m^*(R) \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} l(J_n) = 5 \sum_{n=N+1}^{\infty} l(I_n) < \frac{5\varepsilon}{5} = \varepsilon. \blacksquare$$

Lema. *Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é monótona, então f é diferenciável exceto possivelmente em um conjunto $E \subseteq [a,b]$ com $m^*(E) = 0$.*

Prova. *Faremos apenas o caso f não-decrescente. Considere*

$$\overline{d^+} f(x) = \limsup_{h\to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \text{ e } \overline{d^-} f(x) = \limsup_{h\to 0^+} \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$
$$\underline{d^+} f(x) = \liminf_{h\to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \text{ e } \underline{d^-} f(x) = \liminf_{h\to 0^+} \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

Provemos que o conjunto dos $x \in [a,b]$ tais que $\underline{d^-} f(x) < \overline{d^+} f(x)$ ou $\overline{d^-} f(x) < \underline{d^+} f(x)$ tem medida exterior nula.

23 Aula 23 - 22/05/2023

23.1 O que esperar?

- Continuando medida exterior;
- Relacionando medida e derivada;

23.2 Recobrimento de Vitali

Dado um conjunto E, uma cobertura de Vitali dele é uma coleção de intervalos $\mathcal{I}$ tal que para todo x em E e $\varepsilon > 0$, existe $I \in \mathcal{I}$ tal que $x \in I$ e $m^*(I) < \varepsilon$.

Lema. *Seja $E \subseteq [a,b]$, tal que $m^*(E) \leq b-a$. Se $\mathcal{I}$ é uma cobertura de E por intervalos não degenerados (Não é um ponto só) e tal que, dados $x \in E$ e $\varepsilon > 0$, existe $I \in \mathcal{I}$ tal que $x \in I$ e $l(I) < \varepsilon$. Então, dado $\varepsilon > 0$, exsite uma coleção finita e disjunta $\{I_1, \cdots, I_N\} \subseteq \mathcal{I}$ tal que*

$$m^*\left(E \Big\backslash \bigcup_{n=1}^{N} I_n\right) < \varepsilon.$$

Prova. *Basta considerar o caso com cada intervalo de $\mathcal{I}$ fechado. Podemos assumir que $\mathcal{I} \ni I \subseteq \mathcal{O} = (b-1, b+1)$ e que $I \cap E \neq \emptyset$ para todo I de $\mathcal{I}$.*

Escolhemos uma sequência $\{I_n\}$ de intervalos disjuntos de $\mathcal{I}$ da seguinte forma: Seja $I_1 \in \mathcal{I}$ qualquer e se $I_1, \cdots, I_n$ já foram escolhidos, seja r_n o supremo dos comprimentos dos intervalos de $\mathcal{I}$ que não interseptam nenhum dos $I_1, \cdots, I_n$. Claramente, $r_n < l(\mathcal{O})$. Se $E \not\subseteq \bigcup_{i=1}^{n} I_i$, encontramos $I_{n+1} \in \mathcal{I}$ disjunto de $I_1, \cdots, I_n$ e tal que $l(I_{n+1}) > \frac{1}{2} r_n$.

Assim, $\{I_n\}$ é uma sequência disjunta de intervalos em $\mathcal{I}$ e, como $\bigcup I_n \subseteq \mathcal{O}, \sum l(I_n) \leq l(\mathcal{O})$. Logo, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{N+1}^{\infty} l(I_n) < \frac{\varepsilon}{5}.$$

Seja

$$R = E \Big\backslash \bigcup_{n=1}^{N} I_n$$

Mostraremos que $m^*(R) < \varepsilon$. Se $x \in R$, como $F = \bigcup_{n=1}^{N} I_n$ é fechado e $x \notin F$, existe I em $\mathcal{I}, x \in I$ e $I \cap F = \emptyset$.

Agora, se $I \cap I_i = \emptyset$ para $i \leq \kappa$, temos $l(I) \leq r_\kappa < 2l(I_{\kappa+1}$. Como $\lim_{\kappa \to \infty} l(I_\kappa) = 0$, o intervalo I deve intersectar pelo menos um dos intervalos I_κ.

Seja n o menor inteiro tal que $I \cap I_n \neq \emptyset$. Claramente $n > N$, e $l(I) \leq r_{n-1} < 2l(I_n)$. Como $x \in I$ e $I \cap I_n \neq \emptyset$, a distância de x ao ponto médio de I_n é no máximo $l(I) + \frac{1}{2} l(I_n) < \frac{5}{2} l(I_n)$.

Logo, x pertence ao intervalo J_n tendo o mesmo ponto médio que I_n e o quíntuplo do comprimento. Desta forma,

$$R \subseteq \bigcup_{N+1}^{\infty} J_n$$

e, portanto,

$$m^*(R) \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} l(J_n) = 5 \sum_{n=N+1}^{\infty} l(I_n) < \frac{5\varepsilon}{5} = \varepsilon. \blacksquare$$

Lema. *Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é monótona, então f é diferenciável exceto possivelmente em um conjunto $E \subseteq [a,b]$ com $m^*(E) = 0$.*

Prova. *Faremos apenas o caso f não-decrescente. Considere*

$$\overline{d^+}f(x) = \limsup_{h\to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \ \ e\ \overline{d^-}f(x) = \limsup_{h\to 0^+} \frac{f(x)-f(x-h)}{h}$$
$$\underline{d^+}f(x) = \liminf_{h\to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \ \ e\ \underline{d^-}f(x) = \liminf_{h\to 0^+} \frac{f(x)-f(x-h)}{h}$$

Provemos que o conjunto dos $x \in [a,b]$ *tais que* $\underline{d^-}f(x) < \overline{d^+}f(x)$ *ou* $\overline{d^-}f(x) > \underline{d^+}f(x)$ *tem medida exterior nula. Vamos apenas considerar o conjunto E dos pontos* $x \in [a,b]$ *para os quais* $\overline{d^+}f(x) > \underline{d^-}f(x)$. *O conjunto E é a união dos conjunto*

$$E_{u,v} = \{x : \overline{d^+}f(x) > u > v > \underline{d^-}f(x)\}$$

para todos os racionais u e v. Logo, basta mostrar que $m^*(E_{u,v}) = 0$. *Seja* $s = m^*(E_{u,v})$ *e, escolhendo* $\varepsilon > 0, E_{u,v}$ *está contido em um aberto O tal que* $m^*(O) < s+\varepsilon$.

Para cada $x \in E_{u,v}$, *existe um intervalo* $[x-h, x]$ *contido em O tal que*

$$f(x) - f(x-h) < vh.$$

Do Lema de Vitali, escolhemos uma coleção $\{I_1, \cdots, I_N\}$ *disjunta desses intervalos cujos interiores cobre* $A \subseteq E_{u,v}$ *com* $m^*(A) > s - \varepsilon$. *Somando* $f(x) - f(x-h) < vh$ *para todos estes intervalos,*

$$\sum_{n=1}^{N} [f(x_n) - f(x_n - h_n)] < v \sum_{n=1}^{N} h_n < vm^*(O) < v(s+\varepsilon)$$

Agora, para cada y em A e k arbitrariamente pequeno, $[y, y+k] \subseteq I_n$ *e*

$$f(y+k) - f(y) > uk.$$

Novamente, usando o Lema de Vitali, temos uma coleção disjunta $\{J_1, \cdots, J_M\}$ *desses intervalos cuja união contém um subconjunto de A com medida exterior maior que* $s - 2\varepsilon$. *Assim, adicionando*

$$\sum_{n=1}^{N} [f(x_n) - f(x_n - h_n)] < v \sum_{n=1}^{N} h_n < vm^*(O) < v(s+\varepsilon)$$

para todos os invervalos, temos

$$\sum_{i=1}^{M} f(y_i - k_i) - f(y_i) > u \sum k_i > u(s - 2\varepsilon).$$

Cada intervalo J_i *está contido em algum intervalo* I_n *e, como f é crescente, se somarmos para todos os i para os quais* $J_i \subseteq I_n$, *temos*

$$\sum f(y_i + k_i) - f(y_i) \leq f(x_n) - f(x_n - h_n).$$

Logo,

$$\sum_{n=1}^{N} f(x_n) - f(x_n - h_n) \geq \sum_{i=1}^{M} f(y_i + k_i) - f(y_i)$$

e

$$v(s+\varepsilon) > u(s - 2\varepsilon).$$

Como isso vale para todo $\varepsilon > 0, vs \geq us$. *Além disso, já que* $u > v, s = 0$. *Portanto,*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

existe exceto possivelmente em um conjunto E com $m^*(E) = 0$. ■

Corolário. *Seja $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo aberto e $f : I \to \mathbb{R}$ Lipschitz contínua em I. Então, f é diferenciável exceto possivelmente em um conjunto E com $m^*(E) = 0$.*

Corolário. *Seja $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo aberto e $f : I \to \mathbb{R}$ Lipschitz contínua em I. Então, f é diferenciável em um subconjunto denso de I.*

Teorema. *Seja I um intervalo aberto da reta e $g : I \to \mathbb{R}$ Lipschitz contínua em I. Então, g é continuamente diferenciável se, e somente se, para cada $x_0 \in I$,*

$$\left| \frac{g(x_0 + s + h) - g(x_0 + s)}{h} - \frac{g(x_0 + h) + g(x_0)}{h} \right| \overset{|s|+|h|\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

24 Aula 23 - 24/05/2023