# EXERCÍCIOS DE CÁLCULO

Renan Wenzel

16 de dezembro de 2022

## Campos e Potenciais

### 0.1 Exercício 12

Dada a função $\vec{F}(x,y) = (e^x y^3 + y, 3e^x y^2 + x)$, buscamos uma função f tal que $\vec{\nabla} f = \vec{F}$. Assim, basta integrar a primeira entrada com relação a x:

$$f(x,y,z) = e^x y^3 + yx + g(y)$$

derivando f com respeito a y, chegamos em

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3e^x y^2 + x + g'(y) \Longleftrightarrow 3e^x y^2 + x = 3e^x y^2 + x + g'(y) \Rightarrow g'(y) = 0$$

Logo, $g(y) = k, k \in \mathbb{R}$ e $f(x,y,z) = e^x y^3 + yx + k$. Por outro lado, se $\vec{F}(x,y,z) = (12x^2, \cos(y)\cos(z), 1 - \sin(y)\sin(z)$, será preciso repetir o último raciocínio nas 3 coordenadas. Com efeito, obtemos

$$f(x,y,z) = 4x^3 + g(y,z) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = g'(y,z) \Longleftrightarrow g'(y,z) = \cos(y)\cos(z),$$

donde segue que $g(y,z) = \sin(y)\cos(z) + h(z)$, ou seja, $f(x,y,z) = 4x^3 + \sin(y)\cos(z) + h(z)$. Vamos finalizar encontrando h(z):

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -\sin(y)\sin(z) + h'(z) \Longleftrightarrow 1 - \sin(y)\sin(z) = -\sin(y)\sin(z) + h'(z) \Rightarrow h'(z) = 1,$$

de forma que $h(z) = z + k$. Portanto,

$$f(x,y,z) = 4x^3 + \sin(y)\cos(z) + z + k. \blacksquare$$

### 0.2 Exercício 13

Primeiramente, sem utilizar o TFIL, a resolução se torna uma aplicação mecânica do que foi visto ao longo do curso, ou seja, basta calcular

$$\begin{aligned}
\int_C \vec{F} dr &= \int_1^e F(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_1^e (2t^2 \ln t, \frac{t^4}{t} + t^2, 2t.t) \cdot (2t, 1, 1)dt \\
&= \int_1^e 4t^3 \ln t + t^3 + t^2 + 2t^2 dt = \int_1^e t^3(4\ln t^2 + 1) + 3t^2 dt \\
&= 4\int_1^e t^3 \ln t dt + \int_1^e t^3 dt + 3\int_1^e t^2 dt = (t^4 \ln t - \frac{t^4}{4} + \frac{t^4}{4} + t^3)\Big|_1^e \\
&= (t^4 \ln t + t^3)\Big|_1^e = e^4 + e^3 - 1
\end{aligned}$$

O segundo método, ou seja, utilizando o TFIL, é mais interessante. Buscaremos uma função f tal que $\vec{\nabla} f = \vec{F}$ Para isto, integraremos as entradas de F. Com efeito,

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = 2x \ln y \\
&\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = \frac{x^2}{y} + z^2 \\
&\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = 2yz \\
&\Rightarrow x^2 \ln y + g(y,z) = f(x,y,z),
\end{aligned}$$

em que o último passo foi dado integrando a primeira derivada parcial de f com relação a x. Utilizando a segunda das derivadas parciais, chegamos em

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^2}{y} + \frac{\partial g}{\partial y} \iff \frac{x^2}{y} + z^2 = \frac{x^2}{y} + \frac{\partial g}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial y} = z^2.$$

Ao integrar este resultado com respeito a y, obtemos $g(y,z) = z^2 y + h(z)$, tal que

$$f(x,y,z) = x^2 \ln y + g(y,z) = x^2 \ln y + z^2 y + h(z).$$

Repetiremos o raciocínio para a derivada parcial de f com respeito a z, ou seja,

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2zy + h'(z) \iff 2yz = 2zy + h'(z) \Rightarrow h'(z) = 0,$$

ou seja, $h(z) = k, k \in \mathbb{R}$. Juntando tudo, obtemos

$$f(x,y,z) = x^2 \ln y + z^2 y + k$$

Agora, pelo TFIL, segue que

$$\int_C \vec{F} dr = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = f(\gamma(e)) - f(\gamma(1)).$$

Vamos por partes. Começando pelos valores da curva nos pontos dados, segue que

$$\begin{aligned}
\gamma(e) &= (e^2, e, e) \\
\gamma(1) &= (1,1,1).
\end{aligned}$$

Além disso, o valor de f nesses pontos é

$$f(\gamma(e)) = e^4 + e^3 + k, \quad f(\gamma(1)) = 1 + k$$

Portanto,

$$\int_C \vec{F} dr = f(\gamma(e)) - f(\gamma(1)) = e^4 + e^3 - 1 \blacksquare$$

## 0.3 Exercício 16

Para mostrar que o campo $\vec{F}$ é conservativo, precisamos mostrar que $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}$. Com efeito, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} &= {\frac{2xy}{x^2+y^2}}^{2} \\
\frac{\partial Q(x,y)}{\partial y} &= {\frac{2xy}{X^2+y^2}}^{2}
\end{aligned}$$

Portanto, como as derivadas são iguais, o campo é conservativo.

## 0.4 Exercício 18

**a.)**

O campo será dito conservativo se ele possui rotacional nulo, ou seja,

$$rot\vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$
$$= (\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z})\vec{i} + (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x})\vec{j} + (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\vec{k} = 0$$

Utilizando o campo dado, temos P = x, Q = x + z, R = -y, de maneira que

$$rot\vec{F} = (0-1, 0-0, 1-0) \neq \vec{0}.$$

Conclui-se que $\vec{F}$ não é conservativo.

**b.)**

Construiremos a curva $\gamma_1 = (t, 2t, 3t), 0 \leq t \leq 1$ e $\gamma_2 = (-t, -2t, -3t), -1 \leq t \leq 0$. Com essas condições, as integrais são

$$\int_{\gamma_1} \vec{F} dr = \int_0^1 (t, 4t, -2t) \cdot (1, 2, 3) dt = \int_0^1 t + 8t - 6t dt = \int_0^1 3t dt = \frac{3}{2}$$
$$\int_{\gamma_2} \vec{F} dr = \int_{-1}^0 (-t, -4t, 2t) \cdot (-1, -2, -3) dt = \int_{-1}^0 t + 8t - 6t dt = \int_{-1}^0 3t dt = -\frac{3}{2}$$
$$\Rightarrow \int_{\gamma_1} \vec{F} dr \neq \int_{\gamma_2} \vec{F} dr$$

Portanto, o campo não é independente de caminho e nem conservativo. ■

# Teorema de Green

## 0.5 Exercício 22

**a.)**

Neste caso, escreveremos

$$\vec{F}(x, y, z) = (a_1 x + a_2 y + a_3)\vec{i} + (b_1 x + b_2 y + b_3)\vec{j}$$

tal que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = a_2, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = b_1.$$

Com isso, segue do Teorema de Green que

$$\oint_{\partial D} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D -a_2 + b_1 dA = -\iint_D a_2 dA + \iint_D b_1 dA = \iint_D dA(b_1 - a_2) = \text{Área(D)}(b_1 - a_2).$$ ■

# 1 Aula de Hoje

## 1.1 Exemplo

Calcule o fluxo exterior do campo vetorial $\vec{F} = \frac{(x,y,z)}{x^2+y^2+z^2}$ através do sólido E limitado pelas esferas $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x^2 + y^2 + z^2 = b^2, 0 < a < b$.

A fronteira dele é dada por $\partial E = S_a \cup S_b$. Assim, o fluxo de exterior de $\vec{F}$ é:

$$\iint_{\partial E = S_a \cup S_b} (vecF \cdot \vec{n}) dS$$

É possível fazer essa conta de dois modos. O primeiro é uma conta direta,

$$\iint_{\partial E = S_a \cup S_b} (\vec{F} \cdot \vec{n}) dS = \iint_{S_a} (\vec{F} \cdot \vec{n}) dS + \iint_{S_b} (\vec{F} \cdot \vec{n}) dS.$$

O segundo, por outro lado, é pelo teorema de divergência, i.e.,

$$\iint_{\partial E} (\vec{F} \cdot \vec{n}) dS = \iiint_E div \vec{F} dV.$$

Começamos calculando a divergência de F

$$\begin{aligned}
div\vec{F}(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{x^2+y^2+z^2} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{x^2+y^2+z^2} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{z}{x^2+y^2+z^2} \\
&= \frac{-x^2 x^2 + y^2 + z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} + \frac{-y^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} + \frac{-z^2+x^2+y^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} \\
&= \frac{2(x^2+y^2+z^2) - (x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2} = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}.
\end{aligned}$$

Consequentemente, a integral se torna

$$\begin{aligned}
\iint_{\partial e} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint_E div\vec{F} dV = \iiint_E \frac{1}{x^2+y^2+z^2} dV \underbrace{=}_{\text{Coord. Esférica}} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_a^b \frac{1}{\rho^2}\rho^2 \sin\phi d\rho d\phi d\theta \\
= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin\phi d\phi \int_a^b d\rho = 2\pi.2.(b-a) = 4\pi(b-a).
\end{aligned}$$

## 1.2 Exemplo

Sejam $\vec{F}(x,y,z) = (x,y,z)$ um campo vetorial de $\mathbb{R}^3$ de classe $C^1$ e W a pirâmide de vértices 0 = (0, 0, 0), A = (0, 1, 0), B = (0, 0, 1), C = (c, 1, 0), com $c > 0$. Calcule o valor de c sabendo que

$$\iint_{S_W} (\vec{F} \cdot \vec{n}) dS + \iint_{S_{ABC}} (\vec{F} \cdot \vec{n}) dS = 1,$$

em que $S_W$ é a superfície da pirâmide e $S_{ABC}$ é a face da pirâmide de vértices A, B e C e $\vec{n}$ é o campo vetorial normal unitário externo á pirâmide. Segue que

$$\begin{aligned}
I = \iint_{S_W} (\vec{F} \cdot \vec{n}) dS &\underbrace{=}_{\substack{\text{Teorema da} \\ \text{Divergência}}} \iiint_W div\vec{F} dV = \iiint_W 3dV \\
&= \iint_D \left( \int_0^{1-y} 3dz \right) dA = \iint_D 3z \Big|_{z=0}^{z=1-y} dA \\
&= \iint_D 3(1-y) dA = \int_0^1 \left( \int_0^{cy} 3(1-y) dx \right) dy = \frac{c}{2}.
\end{aligned}$$

em que $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 1-y, (x,y) \in D\}$, sendo D a projeção de W no plano xy ($D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq cy, 0 \leq y \leq 1\}$). Resta calcularmos a segunda integral. Com efeito, começamos parametrizando $S_{ABC}$ colocando r(x, y) = (x, y, 1-y), $(x,y) \in D$. Deste modo, temos duas opções

$$r_x \times r_y = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$$

Como a orientação dada é um campo vetorial norma unitário externo, podemos usar esse valor, pois o sinal de $\vec{k}$ é positivo. Assim, a integral se torna

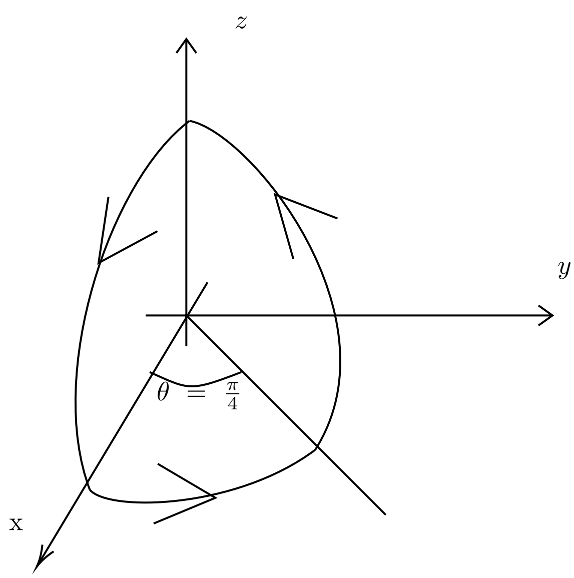
$$\begin{aligned}\mathbb{I} = \iint_{S_{ABC}} (\vec{F}\cdot\vec{n})dS &= \iint_D (\vec{F}\cdot r_x \times r_y)dA = \iint_D \vec{F}(x,y,1-y)\cdot(0,1,1)dA \\ &= \iint_D (x,y,1-y)\cdot(0,1,1)dA = \iint_D 1dA = \text{Área}(D) = \frac{c}{2}.\end{aligned}$$

Portanto, concluimos que

$$I + \mathbb{I} = 1 \iff \frac{c}{2} + \frac{c}{2} = 1 \Rightarrow c = 1 \;\blacksquare$$

## 1.3 Exemplo

Dado rot$\vec{F}(x,y,z) = (x,-2y,z)$, calcule $\oint_C \vec{F}dr$, em que C é o bordo da porção da esfera centrada de (0, 0, 0) de raio a para $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$, orientada no sentido anti-horário quando vista de cima segundo a figura:




Pelo Teorema de Stokes,

$$\oint_C \vec{F}dr = \iint_S (rot\vec{F}\cdot\vec{n})dS.$$

Uma forma de parametrizar S é colocando $r(\theta,\phi) = (a\cos(\theta)\sin(\phi), a\sin(\theta)\sin(\phi), a\cos(\phi)), 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, 0 < \phi \leq \frac{\pi}{2}$, que possui vetor normal

$$r_\phi \times r_\theta = (a^2\cos(\theta)\sin^2(\phi), a^2\sin(\theta)\sin^2(\phi), a^2\sin(\phi)\cos(\phi)).$$

Com isto, podemos calcular a integral, finalmente

$$\begin{aligned}\iint_S (rot\vec{F}\cdot\vec{n})dS &= \iint_{[0,\frac{\pi}{4}]\times[0,\frac{\pi}{2}]} rot(F(r(\vec{\theta},\phi)))\cdot r_\phi \times r_\theta d\theta d\phi \\ &= \iint_{[0,\frac{\pi}{4}]\times[0,\frac{\pi}{2}]} a^3((1-3\sin^2\theta)\sin^3\theta + \sin(\phi)\cos^2(\phi))d\theta d\phi \\ &= \iint_{[0,\frac{\pi}{4}]\times[0,\frac{\pi}{2}]} a^3(1-3\sin^2\theta)\sin^3(\phi)d\theta d\phi + \iint_{[0,\frac{\pi}{4}]\times[0,\frac{\pi}{2}]} a^3\sin(\phi)\cos^2(\phi)d\theta d\phi \\ &= a^3\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3(\phi)d\phi\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-3\sin^2(\theta))d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(\phi)\cos^2(\phi)d\phi\right) = \frac{a^3}{2} \;\blacksquare\end{aligned}$$

## 1.4 Exemplo Poranga

Considere S uma superfície suave segundo uma poranga (Google) tendo como bordo a curva C de equação $x^2 + y^2 = 1, z = 0$, orientada no sentido anti-horário. Calcule

$$\iint_S (rot\vec{F} \cdot \vec{n}) dS,$$

em que $rot(\vec{F})(x, y, z) = (y, -x, e^{xz})$.

Por Stokes, temos, parametrizando $C : r(t) = (\cos t, \sin t, 0), 0 \leq t \leq 2\pi$

$$\begin{aligned}
\iint_S (rot(\vec{F}) \cdot \vec{n}) dS = \int_C \vec{F} dr = \int_0^{2\pi} F(\vec{r(t)}) \cdot r'(t) dt &= \oint_C y dx - x dy \\
&= \iint_D \left[ \frac{\partial}{\partial x}(-x) - \frac{\partial}{\partial y}(y) \right] dA = \iint_D -2 dA \\
&= -2\text{Área(D)} = -2\pi. \blacksquare
\end{aligned}$$