



UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS E
COMPUTACIONAIS - ICMC

Notas de Espaços Métricos

Renan Wenzel - 11169472

Professora - Thaís Jordão
E-mail: tjordao@icmc.usp.br

22 de agosto de 2023

Conteúdo

0	Informações (Possivelmente) Úteis	3
0.1	Datas das Provas:	3
0.2	Bibliografia	3
1	Aula 01 - 08/08/2023	4
1.1	Motivações	4
2	Aula 02 - 10/08/2023	5
2.1	Motivações	5
2.2	Uma nota histórica	5
2.3	Exercício 1 da Lista 1	5
2.4	Espaço de funções contínuas	5
2.5	Espaço euclidiano n-dimensional	6
3	Aula 03 - 17/08/2023	8
3.1	Motivações	8
4	Aula 04 - 21/08/2023	9
4.1	Motivações	9
4.2	Subespaços Métricos e Distância entre Conjuntos	9
4.3	Topologia de Espaços Métricos	10

0 Informações (Possivelmente) Úteis

0.1 Datas das Provas:

- P1) 31/08 - Peso 1;
- P2) 03/10 - Peso 2;
- P3) 31/10 - Peso 2;
- P4) 23/11 - Peso 3;
- P5) 14/12 - Peso 3.

0.2 Bibliografia

- LIMA, E. L. “Espaços Métricos”, Rio de Janeiro: Projeto Euclides, 2005.
- DOMINGUES, H. H. “Espaços Métricos e Introdução à Topologia”, Atual Editora, 1982.

Monitoria

A ser definido.

1 Aula 01 - 08/08/2023

1.1 Motivações

- Introdução ao Material do Curso.

O que é um espaço métrico?

Ao longo deste curso, trabalharemos com um conjunto M não-vazio.

Definição. Uma função $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ é dita ser uma métrica em M se:

- i) $d(x, y) \geq 0, x, y \in M$;
- ii) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y, x, y \in M$;
- iii) $d(x, y) = d(y, x), x, y \in M$;
- iv) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), x, y, z \in M$.

Neste caso, o par (M, d) é chamado espaço métrico.

Exemplo 1. 1) (\mathbb{R}, d) , em que $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ é dado por $d(x, y) = |x - y|$. É claro que, olhando para $d(x, y)$, vale para quaisquer x, y reais que

$$d(x, y) = |x - y| = |-1(y - x)| = 1|y - x| = d(y, x).$$

Assim, resta verificarmos os itens dois e quatro da definição de métrica. Para o item (ii),

$$|x - y| = 0 \iff x = y.$$

Com relação ao último item, observe que

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

De fato, como $|a| \geq a$ para todo número real a ,

$$|x + y|^2 = (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \leq x^2 + 2|x||y| + y^2 = (|x| + |y|)^2.$$

Logo, tomando a raiz dos dois lados, segue a afirmação:

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

Com isso, temos

$$d(x, y) = |x - y| = |x - z + z - y| = |(x - z) - (y - z)| \leq |x - z| + |y - z|.$$

Portanto, $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, o que torna (\mathbb{R}, d) um espaço métrico.

2) Seja X um conjunto não-vazio. Definimos

$$d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$$

por

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y. \end{cases}$$

Esta métrica é conhecida como métrica discreta. Verifiquemos as propriedades dela.

Com efeito, como a imagem dela pode ser apenas 0 ou 1, o item 1 é trivial. Por definição, a métrica vale 0 se, e somente se, x e y são iguais, tal que o item (ii) está feito. O item (iii) segue automaticamente se x e y são iguais. Caso eles sejam diferentes, temos $d(x, y) = 1, d(y, x) = 1$, ou seja, o item (iii) é válido para todos os casos. Por fim, a desigualdade triangular fica como exercício.

2 Aula 02 - 10/08/2023

2.1 Motivações

- Exemplos de espaços métricos;
- Similaridade entre métricas;
- Produto de espaços métricos.

2.2 Uma nota histórica

Algumas dessas informações podem ser vistas com mais detalhe do livro de espaços métricos de Jean Cerqueira, do IME.

Para um contexto temporal, em 1906, Maurice Fréchet publicou sua tese de doutorado, nomeada “Sus quelques du calcul fonctionnel”. A seguir, em 1910, David Hilbert faz sua tentativa de axiomatizar as ideias vistas na tese de Fréchet e, dois anos depois, Felix Hausdorff, trabalhando no conceito de separação de pontos a partir do ponto de vista de conjuntos, acaba contribuindo com essa axiomatização. Antes disso, Henri Poincaré, havia sistematizado as ideias de forma prototípica. Outro nome mencionável é o de Pavel Urysohn, responsável por aprofundar-se na parte da separação de pontos.

2.3 Exercício 1 da Lista 1

Considere $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, \infty)$ definida por

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = |x_2 - y_2|.$$

Então, d não é uma métrica. Chequemos este fato.

Com efeito, considere x um número real qualquer. Assim,

$$d((1, x), (2, x)) = |x - x| = 0.$$

No entanto, $(1, x)$ não é igual a $(2, x)$, ou seja, já falha logo na primeira condição de métrica! Portanto, conclui-se que d não pode ser métrica. Analogamente, definindo $d' : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, \infty)$ por $d'((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = |x_1 - y_1|$, ela também não será métrica.

Obs.: Definiremos, ainda essa aula, a métrica $d_s : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, \infty)$ por

$$d_s((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|,$$

a qual torna (\mathbb{R}^2, d_s) num espaço métrico. Mostremos isso. Os itens (i), (ii) e (iii) da definição de métrica estão trivialmente cumpridos. Para a desigualdade triangular, observe que

$$\begin{aligned} d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) &= |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| \\ &\leq |x_1 - z_1| + |z_1 - y_1| + |x_2 - z_2| + |z_2 - y_2| \\ &= d((x_1, x_2), (z_1, z_2)) + d((z_1, z_2), (y_1, y_2)) \end{aligned}$$

2.4 Espaço de funções contínuas

Considere o intervalo $I = [0, 1]$ e tome o conjunto

$$\mathcal{C}(I, \mathbb{R}) := \{f : I \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ contínua}\}.$$

Então, são métrica em $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ as funções $d : \mathcal{C}(I, \mathbb{R}) \rightarrow [0, \infty)$, $(f, g) \mapsto \sup_{x \in I} \{|f(x) - g(x)|\}$ e $\rho : \mathcal{C}(I, \mathbb{R}) \times \mathcal{C}(I, \mathbb{R}) \rightarrow [0, +\infty)$ definida por

$$\rho(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx, \quad f, g \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}).$$

Mostremos que elas são métricas, começando pela d.

Observe que, se $d(f, g) = 0$, então

$$|f(y) - g(y)| \leq \sup_{x \in I} \{|f(x) - g(x)|\} \quad \forall y \in I.$$

Logo, $|f(y) - g(y)| = 0$ para todo y em I , garantindo que f e g são as mesmas. Para a desigualdade triangular, observe que, para qualquer y em I , e h em $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$, vale que

$$|f(y) \pm h(y) - g(y)| \leq |f(y) - h(y)| + |h(y) - g(y)|.$$

Tomando o supremo, obtemos

$$d(f, g) \leq d(f, h) + d(h, g).$$

Assim, $(\mathcal{C}(I, \mathbb{R}), d)$ é um espaço métrico.

Agora, analisando a questão de ρ , se $\rho(f, g) = 0$, então

$$\int_0^1 |f(x) - g(x)| dx = 0$$

Como o Teorema da Conservação de Sinal implicaria em $\int_0^1 |f(x) - g(x)| dx > 0$ se $|f(x) - g(x)| > 0$ para algum x em I . Logo, $|f(x) - g(x)| = 0$ para todo x em I . Para mostrar a desigualdade triangular, considere $f, g, h \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$. Temos, para todo $x \in I$,

$$|f(x) - \overbrace{g(x)}^{\pm h(x)}| \leq |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)|$$

Integrando os dois lados da desigualdade,

$$\int_0^1 |f(x) - g(x)| dx \leq \int_0^1 |f(x) - h(x)| dx + \int_0^1 |h(x) - g(x)| dx,$$

de onde segue a desigualdade triangular. Portanto, $(\mathcal{C}(I, \mathbb{R}), \rho)$ é um espaço métrico.

2.5 Espaço euclidiano n-dimensional

Seja n um natural, $n \geq 1$. O espaço euclidiano é

$$\mathbb{R}^n := \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n\},$$

munido da métrica usual/euclidiana, definida por

$$d(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

em que $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ são elementos de \mathbb{R}^n . Sobre \mathbb{R}^n , podemos considerar duas outras métricas, a métrica da soma e do máximo. Definimo-las, respectivamente, por

$$d_s(x, y) := \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$$
$$d_m(x, y) := \max\{|x_i - y_i|, i = 1, 2, \dots, n\},$$

para $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ são elementos de \mathbb{R}^n . Vamos mostrar que a primeira d é métrica.

Pra começar, não é difícil ver que os itens (i) e (ii) da definição são satisfeitos. Para mostrar a desigualdade triangular, será necessário utilizar Cauchy-Schwarz:

Lema (Desigualdade de Cauchy-Schwarz). Dados (x_1, \dots, x_n) e (y_1, \dots, y_n) , vale a desigualdade

$$\sum_{i=1}^n |x_i \cdot y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Prova. Observe que, dados $x, y \in \mathbb{R}$, vale que $2xy \leq x^2 + y^2$. Temos, para $x = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ e $y = \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.

Com isso, aplicando a desigualdade vista para $\frac{|x_i|}{x}$ e $\frac{|y_i|}{y}$, ganhamos

$$2 \frac{|x_i||y_i|}{xy} \leq \frac{|x_i|^2}{x^2} + \frac{|y_i|^2}{y^2}.$$

Somando de $i = 1, \dots, n$, obtemos

$$\frac{2}{xy} \sum_{i=1}^n |x_i||y_i| \leq \frac{1}{x^2} \sum_{i=1}^n |x_i|^2 + \frac{1}{y^2} \sum_{i=1}^n |y_i|^2 = 1 + 1 = 2.$$

Portanto, isolando a soma à esquerda, temos

$$\sum_{i=1}^n |x_i||y_i| \leq \frac{2}{2} \cdot xy = xy. \blacksquare$$

A desigualdade triangular seguirá do seguinte

$$\begin{aligned} [d(\bar{x}, \bar{y})]^2 &= \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - z_i + z_i - y_i)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2 + 2 \sum_{i=1}^n (x_i - z_i)(z_i - y_i) + \sum_{i=1}^n (z_i - y_i)^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2 + 2 \left(\sum_{i=1}^n |x_i - z_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n |z_i - y_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \sum_{i=1}^n (z_i - y_i)^2 \\ &= [d(\bar{x}, \bar{z})]^2 + 2d(\bar{x}, \bar{z})d(\bar{z}, \bar{y}) + [d(\bar{z}, \bar{y})]^2 \\ &= (d(\bar{x}, \bar{z}) + d(\bar{z}, \bar{y}))^2. \end{aligned}$$

O fim da prova da desigualdade triangular é um exercício.

3 Aula 03 - 17/08/2023

3.1 Motivações

-

4 Aula 04 - 21/08/2023

4.1 Motivações

- Subespaços métricos e distância entre conjuntos;
- Conjuntos limitados, abertos e fechados;
- A topologia de espaços métricos.

4.2 Subespaços Métricos e Distância entre Conjuntos

Definição. Seja (X, d) um espaço métrico e $M \subseteq X$. Então, $d|_M M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ define uma métrica, chamada métrica induzida em M . Isso faz de $(M, d|_M)$ um subespaço métrico. \square

Além da distância entre pontos, pode-se falar da distância entre um ponto e um subconjunto do espaço métrico e da distância entre dois subconjuntos de um espaço métrico. Para isso, considere (X, ρ) um espaço métrico, $x \in X$ e $E, F \subseteq X$. Definimos, então,

$$\begin{aligned}d(x, E) &:= \inf\{\rho(x, e) : e \in E\} \\d(E, F) &:= \inf\{d(e, F) : e \in E\}.\end{aligned}$$

Observação: O nome “distância”, aqui, não é sinônimo de métrico. De fato, há um exercício na lista que mostra que a distância entre conjuntos **NÃO** é simétrica, ou seja, não define uma métrica.

Proposição. Seja (X, ρ) um espaço métrico e $E \subseteq X$. Então,

$$|d(x, E) - d(y, E)| \leq \rho(x, y) \quad \forall x, y \in X.$$

Prova. Note que, para todo e em E ,

$$d(x, E) \leq \rho(x, e) \leq \rho(x, y) + \rho(y, E).$$

Logo, para todo $x, y \in X$,

$$d(x, E) \leq \rho(x, y) + d(y, E).$$

Assim, temos

$$d(x, E) - d(y, E) \leq \rho(x, y).$$

Analogamente,

$$d(y, E) - d(x, E) \leq \rho(x, y)$$

Portanto,

$$|d(x, E) - d(y, E)| \leq \rho(x, y). \quad \blacksquare$$

Exemplo 2. Considere $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, $A = (-1, 0]$ e $x = -2$. Por definição,

$$d(x, A) = \inf\{|-2 - a| : a \in A\} = \inf\{|2 + a| : a \in A\} = 1 \quad [d(-2, 1 + \varepsilon) = 1 + \varepsilon \forall \varepsilon > 0]$$

No entanto, $d(-2, a) > 1$ para todo a em A .

Corolário. Seja (X, ρ) um espaço métrico. Vale a desigualdade

$$|\rho(x, z) - \rho(y, z)| \leq \rho(x, y).$$

Prova. Seja $E = \{z\}$. Pela proposição, o resultado já segue. \blacksquare

4.3 Topologia de Espaços Métricos

Definição. Seja (X, d) um espaço métrico. Dado x em X e $r > 0$, o conjunto

$$B_r(x) := \{y \in X : d(x, y) < r\}$$

é chamado bola aberta de centro em x e raio r . O conjunto

$$D_r(x) := \{y \in X : d(x, y) \leq r\}$$

é chamado bola fechada de centro em x e raio r . \square

Exemplo 3. Considere (\mathbb{R}^2, d_p) , em que $d_p(x, y) = \|x - y\|_p, 1 \leq p \leq \infty$.

$$d_2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = [(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2]^{\frac{1}{2}} \Rightarrow B_1(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : d_2((0, 0), (x, y)) < 1\}$$

$$d_\infty((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} \Rightarrow B_1(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|, |y|\} < 1\}$$

$$d_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| \Rightarrow B_1(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| < 1\}$$

Definição. Seja (X, d) um espaço métrico e x um ponto de X . Chamamos x de ponto isolado se existe $r > 0$ tal que $B_r(x) = \{x\}$. \square

Exemplo 4. Seja $S = [0, 1] \cup \{2\}$ munido da métrica usual, induzida da reta. Temos

$$B_{\frac{1}{2}}(2) = \{y \in S : |x - 2| < \frac{1}{2}\} = \{2\}.$$

Exemplo 5. Seja $X \neq \emptyset$ e d a métrica discreta. Então,

- Todo ponto é isolado;
- $D_r(x) = \{x\}$ se $r > 1$;
- $B_1(x) = \{x\}$ e $D_1(x) = X$;
- $B_r(x) = X$ se $r > 1$. De fato, $D_r(x) = \{y \in X : d(x, y) \leq r\}$. Por isso, se $r = 1$, $D_1(x) = X$. Pela mesma lógica, prova-se os outros itens.

Exemplo 6. i) Dado (\mathbb{R}, d) , d a métrica usual, nenhum ponto é isolado e $B_r(x) = (x - r, x + r), x \in \mathbb{R}, r > 0$.

ii) Se $M = [0, 2]$ com métrica induzida, $B_1(0) = [0, 1)$.

iii) Se $M = \mathbb{Z}$ com a métrica induzida, então $B_1(n) = \{n\}$

iv) Se $M = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}, n \neq 0\} \cup \{0\}$, com a métrica induzida, então $B_1(0) \neq \{0\}$ para todo $r > 0$. Neste caso, se $n, m \neq 0$, então existe $r > 0$ tal que $B_r\left(\frac{1}{n}\right) = \{\frac{1}{n}\}$ e $B_r\left(\frac{1}{m}\right) = \{\frac{1}{m}\}$. Porém, para qualquer $r > 0$, seja n_0 tal que $0 < \frac{1}{n_0} < \frac{r}{2}$ e $\frac{1}{n_0} \in B_r(0)$. Portanto, $B_r(0) \neq \{0\}$ para todo $r > 0$.

Exemplo 7. Considere $(C([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$, com $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in [a, b]\}$. Seja $h \in C([a, b])$ e $r > 0$. Temos

$$B_r(h) = \{f \in C([a, b]) : \|f - h\|_\infty < r\} = \{f \in C([a, b]) : \max_{x \in [a, b]} \{|f(x) - h(x)|\} < r\}.$$

Definição. Um subconjunto $M \neq \emptyset$ de um espaço métrico (X, d) é limitado se

$$\text{diam}(X) := \sup\{d(x, y) : x, y \in X\} < \infty.$$

Neste caso, $\text{diam}(X)$ é chamado diâmetro de X . Caso contrário, diz-se que M é ilimitado e $\text{diam}(X) = \infty$. \square

Exemplo 8. Seja (X, d) métrico. Para todo x em X e $r > 0$, $B_r(x)$ é ilimitado e, além disso, $\text{diam}(B_r(x)) \leq 2r$, o que segue da relação $d(y, z) \leq d(y, x) + d(x, z) \leq r + r = 2r$. Além disso, se $(X, \|\cdot\|)$ é um espaço vetorial normado e a métrica d é induzida pela norma, então $\text{diam}(B_r(x)) = 2r$. Com efeito, seja $s < 2r$. Tome y em X com $x \neq 0$. Definimos

$$v = \frac{t}{\|y\|}y,$$

para algum t satisfazendo $s < 2t < 2r$. Neste caso, $x - v, x + v \in B_r(x)$ e

$$d(x + v, x - v) = 2\|v\| = 2t > s,$$

ou seja, a afirmação feita está garantida.