UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS E COMPUTACIONAIS - ICMC

Notas de Física

Renan Wenzel - 11169472

Patrícia Christina Marques Castilho - patricia.castilho@ifsc.usp.br

3 de maio de 2023

Conteúdo

1 Aula 00 - 23/03/2023

(Revisão Unidades de Medidas)

2 Aula 01 - 27/03/2023

- Revisar propriedades de derivadas;
- Aplicar derivadas em movimento 1D.

2.1 Movimentos 1D

Dada uma partícula com posição descrita por $x = x(t)$, em que t é a variável de tempo, denotamos seu deslocamento por $\Delta x = x_2 - x_1 = x(t_2) - x(t_1)$. Analogamente, o intervalo de tmepo é definido por $\Delta t = t_2 - t_1$. Com essas ferramentas, já podemos definir a velocidade média de um objeto em uma dimensão como $\vec{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$. Observe que, quanto menor o intervalo de tempo, mais momentâneo se torna essa definição, de modo que a velocidade instantânea pode ser encontrada como

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \vec{v}(t).$$

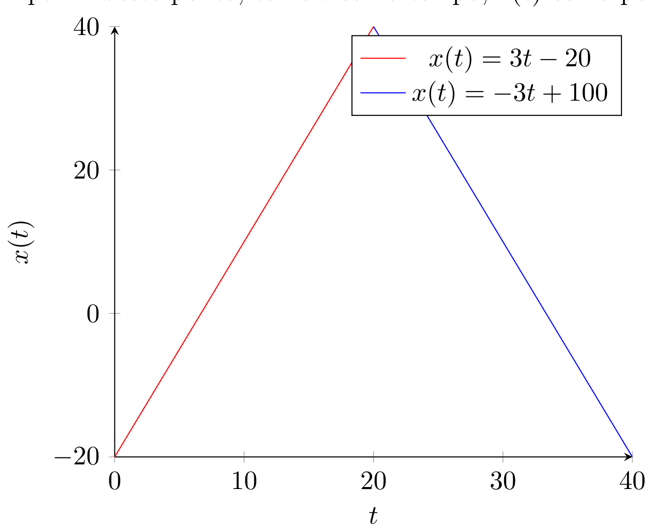
Regras de derivadas:

$$\begin{aligned}
&f(t) = c \Rightarrow \frac{df}{dt} = 0 \text{ Derivada de uma constante é sempre nula;}\\
&f(t) = x^n \Rightarrow \frac{df}{dt} = nx^{n-1} \text{ Regra do tombo;}\\
&f(t) = A\sin(t) \Rightarrow \frac{df}{dt} = A\cos(t);\\
&f(t) = B\cos(t) \Rightarrow \frac{df}{dt} = -B\sin(t);\\
&f(t) = Ce^t \Rightarrow \frac{df}{dt} = Ce^t.
\end{aligned}$$

Exemplo 1.

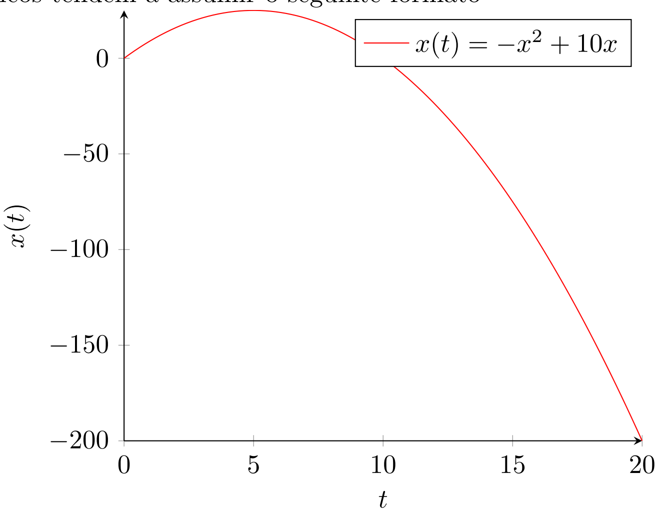
$$\begin{aligned}
&i) f(t) = 3t^4 + t^2 \Rightarrow \frac{df}{dt} = 12t^3 + 2t\\
&ii) f(t) = 5\sin(t) + 3(t^2 + 1) = 5\sin(t) + 3t^2 + 3 \Rightarrow \frac{df}{dt} = 5\cos(t) + 6t
\end{aligned}$$

A partir deste ponto, tome t como tempo, x(t) como posição e v(t) a velocidade instantânea.

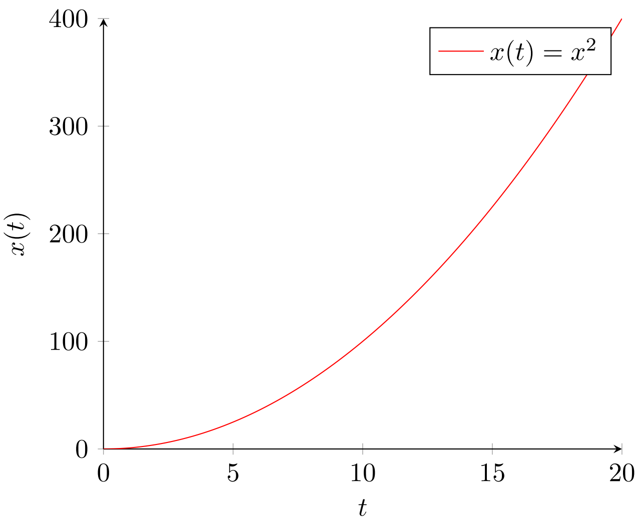


Esse movimento em que a velocidade é descrita por uma linha reta é conhecido como movimento retilíneo uniforme, pois a velocidade $v(t)$ muda de forma linear, i.e., $\frac{dx}{dt} = c$, em que c é uma constante.

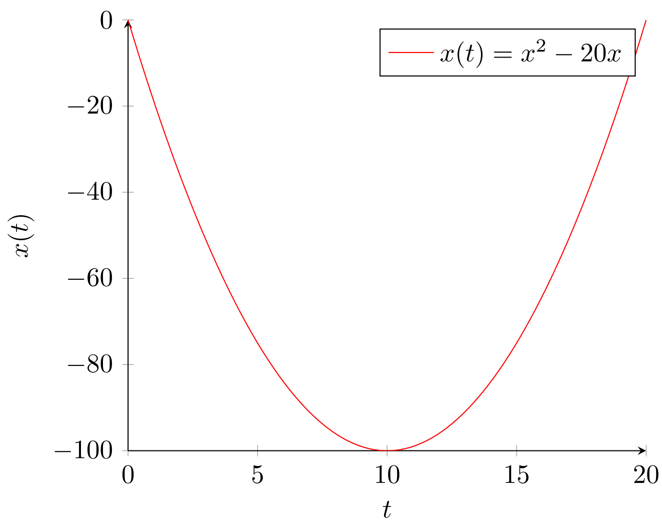
Por outro lado, há outro tipo de movimento, o movimento retilíneo uniformemente variado, em que a velocidade não é constante. A ação responsável por mudar a velocidade é conhecida como aceleração, e os gráficos tendem a assumir o seguinte formato



Ou, caso a velocidade cresça com o tempo,



Há ainda o caso em que a velocidade cresce por um tempo e diminui depois, com gráficos como o que segue



Nestes casos, para calcular o deslocamento da particula, precisamos somar muito mais intervalos de tempo. Para isso, observe que cada instante, a posição da partícula pode ser encontrada multiplicando-se o intervalo de tempo pela velocidade instanânea, i.e., $\Delta x'_i = v'_i \Delta t'_i$. Quebrando os intervalos desta forma, o deslocamento de um ponto a outro é denotado por

$$\Delta x_{1,2} = x(t_2) - x(t_1) \approx \sum_{k=1}^{N} \Delta x'_i = \sum_{k=1}^{N} v'_i \Delta t'_i$$

Assim como para a velocidade instantânea, quanto menor tomarmos o intervalo de tempo, mais preciso é o valor encontrado para $\Delta x_{1,2}$, o que indica uma boa oportunidade para o uso do limite novamente. Com isso, definimos

$$x(t_2) - x(t_1) = \lim_{\Delta t' \to 0} \sum_{i=1}^{N} v(t'_i) \Delta t'_i = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$$

Este último símbolo, chamado integral, descreve a área "embaixo" da curva da função f(t) dentro do intervalo $[t_1, t_2]$. Supondo que c e k são constantes quaisquer, seguem abaixo algumas das regras de integração:

$$i) f(t) = ct^n \Rightarrow \frac{df}{dt} = nct^{n-1} \Rightarrow F(t) = \frac{ct^{n+1}}{n+1} \text{ (Primitiva de f)}$$

$$ii) \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt = F(t_2) - F(t_1) = \frac{c}{n+1} t_2^{n+1} - \frac{c}{n+1} t_1^{n+1} \text{ (Integral definida de f)}$$

$$iii) \int f(t) dt = \frac{c}{n+1} t^{n+1} + k \text{ (Integral indefinida de f)}$$

Para conferir se a integral está correta, é preciso derivar a função F e, se obter como resultado a função f, significa que está correto. Com este conhecimento em mente, segue que

$$\boxed{x(t) = \int v_0 dt = v_0 t + x_0}$$

Algumas outras regras importantes:

$$iv) \frac{d \sin(t)}{dt} = \cos(t) \Rightarrow \int \cos(t) dt = \sin(t) + c$$

$$v) \frac{d \cos(t)}{dt} = -\sin(t) \Rightarrow \int \sin(t) dt = \cos(t) + c$$

$$vi) \frac{de^t}{dt} = e^t \Rightarrow \int e^t dt = e^t + c$$

Ou seja, em certo sentido, a integral e a derivada são dois lados da mesma moeda, assim como mulitplicação e divisão ou adição e subtração.

3 Aula 02 - 29/03/2023

3.1 Motivações

- Estudar a aceleração;
- Entender o Movimento Retilíneo Uniformemente Variado.

3.2 Aceleração

Definimos previamente a velocidade média como sendo a variação de tempo dividindo o deslocamento, sendo, portanto, uma quantidade representando a taxa de variação da posição em um intervalo de tempo. De forma análoga, definimos a aceleração como a taxa de variação da velocidade em um intervalo de tempo, ou seja,

$$\vec{a_m} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}.$$

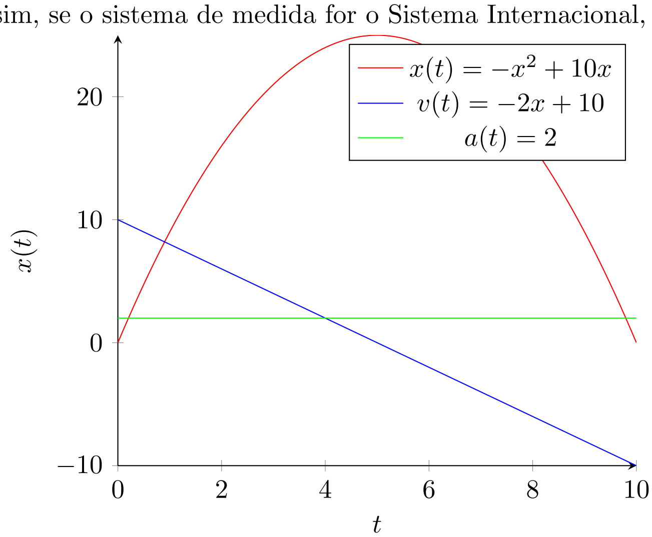
Ainda mais, se ela for positiva, a velocidade aumenta. Caso contrário, ela diminui. Ainda repetindo o processo feito para o caso da velocidade, podemos encontrar uma aceleração instanânea como

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} \right] = \frac{dv(t)}{dt}$$

Observe também que

$$a(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx(t)}{dt}\right) = \frac{d^2 x}{dt^2}.$$

Utilizando a análise dimensional, é possível encontrar a dimensão da aceleração como $[a] = \frac{[v]}{[t]} = \frac{\frac{[L]}{[t]}}{[t]} = \frac{[L]}{[t]^2}$. Assim, se o sistema de medida for o Sistema Internacional, $[a] = \frac{m}{s^2}$.



3.3 Movimento Retilíneo Uniformemente Variado.

Sabendo que $a = \dfrac{d^2x(t)}{dt^2}$, podemos fazer o caminho oposto para encontrar uma fórmula para a posição sabendo a aceleração. De fato, dado um intervalo de tempo $[t_0, t]$,

$$v(t) = \int_{t_0}^{t} a(t)dt = at\Big|_{t_0}^{t} = at - at_0$$

Sabemos, também, que $v(t) - v(t_0) = \Delta v$, tal que

$$v(t) = v(t_0) + a(t - t_0) = v_0 + a(t - t_0)$$

Além disso, vimos que

$$\Delta x = x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} v(t)dt.$$

Juntando tudo, segue a fórmula dita:

$$\begin{aligned}
x(t) - x(t_0) = \quad & \overbrace{\int_{t_0}^{t} [v_0 + a(t-t_0)]dt}^{\int f(t)+g(t)dt = \int f(t)dt + \int g(t)dt} \quad = \overbrace{\int_{t_0}^{t} v_0 dt}^{\int cdt = ct} + \overbrace{\int_{t_0}^{t} atdt}^{\int t^n dt = \frac{t^{n+1}}{n+1}} - \int_{t_0}^{t} at_0 dt \\
& \Rightarrow x(t) - x(t_0) = v_0 t\Big|_{t_0}^{t} + a\frac{t^2}{2}\Big|_{t_0}^{t} - at_0 t\Big|_{t_0}^{t} \\
& = v_0(t-t_0) + a\frac{(t^2 - t_0^2)}{2} - at_0(t-t_0) \\
& = v_0(t-t_0) + a\frac{t^2 - t_0^2}{2} - at_0 t + at_0^2 = v_0 t - v_0 t_0 + \frac{a}{2}(t^2 - 2t_0 t + 2t_0^2) \\
& = v_0(t-t_0) + \frac{a}{2}(t-t_0)^2 \\
& \Rightarrow x(t) = x(t_0) + v_0(t-t_0) + \frac{1}{2}a(t-t_0)^2.
\end{aligned}$$

Com isso, no caso em que $t_0 = 0$, segue que

$$\boxed{x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}}$$

Uma coisa notável é que todas essas fórmulas estão dependentes de tempo. No entanto, será que é possível se livrar dessa variável e relacionar, por exemplo, velocidade e posição? A resposta é sim! E vamos mostrar como a seguir, na equação conhecida como Equação de Torricelli. Com efeito,

$$\begin{aligned}
&(I) \quad (t - t_0) = \frac{v(t) - v_0}{a} = \frac{v - v_0}{a} \\
&(II) \quad x(t) = x_0 + v_0(t-t_0) + \frac{1}{2}a(t-t_0)^2 \\
&(I \text{ com } II) \quad x = x_0 + v_0\frac{v - v_0}{a} + \frac{1}{2}a\frac{v - v_0}{a} \\
&\Rightarrow x = x_0 + \frac{1}{a}\left\{v_0 v - v_0^2 + \frac{1}{2}(v^2 - 2vv_0 + v_0^2)\right\} \\
&= x_0 + \frac{1}{a}\left\{-v_0^2 + \frac{v^2}{2} + \frac{v_0^2}{2}\right\} \\
&\Rightarrow x - x_0 = \frac{1}{2a}\left[v^2 - v_0^2\right] \iff [v^2 - v_0^2] = 2a(x - x_0).
\end{aligned}$$

Portanto, chegamos na Equação de Torricelli

$$\boxed{v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)}$$

Para reforçar o que foi visto até agora, vejamos um exemplo.

Exemplo 2. *Suponha que um carro freia uniformemente, passando de 60km/h para 30km/h em 5 segundos. Qual é a distância que o carro percorrerá até parar? Em quanto tempo?*

***Solução**: Sabemos que $x(t) = x_0 + v_0(t-t_0) + \frac{1}{2}a(t-t_0)^2, v(t) = v_0 + a(t-t_0),$ e $v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$. Além disso, como é até o carro parar, a velocidade final é 0km/h, a variação de tempo até o momento em que a velocidade atinge 30km/h (=8.333m/s) é dada como $\Delta t = 5 - 0 = 5s$, sendo a velocidade inicial 60km/h (=16,666m/s). Pela equação dois,*

$$a = \frac{v(t_1) - v_0}{t_1 - t_0} = \frac{8.33 - 16.66}{5} = -1.66\frac{m}{s^2}$$

Agora, para obter a distância, sendo $v_2 = 0km/h$ o valor da aceleração no tempo em que o carro para (o segundo percurso), utilizamos Torricelli para obter o deslocamento no pedaço final do percurso

$$v_2^2 = v_1^2 + 2a(x_2 - x_1) \Rightarrow 0 = 8.33^2 + 2(-1.66)\Delta x_2$$

Assim, isolando o Δx_2,

$$\Delta x_2 = \frac{8.33^2}{3.32} = \textit{ Professora vai passar na próxima aula.}$$

Ademais, para encontrar todo o caminho que o carro andou, temos

$$0 = v_0^2 + 2a(x_2 - x_0) = 16.66^2 + 2(-1.66)\Delta x \Rightarrow \Delta x = \frac{16.66^2}{3.32}$$

Finalmente, o instante de tempo pode ser encontrado fazendo

$$v_2(t) = v_1 + a(t_2 - t_0) \Rightarrow 0 = 8.33 - 1.66\Delta t_2 \Rightarrow \Delta t_2 = 5s. \blacksquare$$

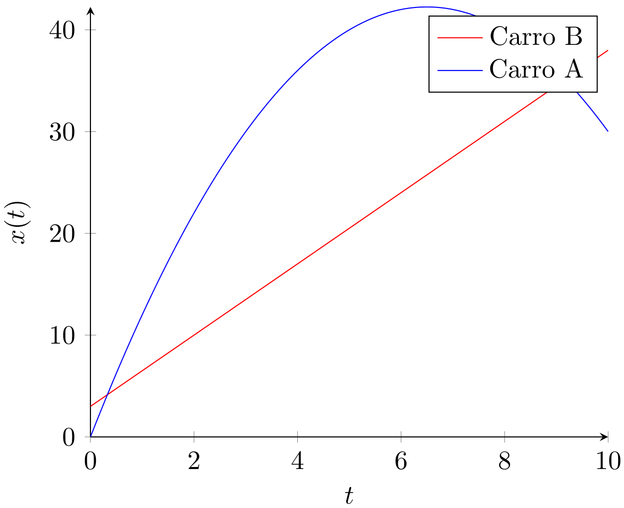
4 Aula 03 - 30/03/2023

4.1 Motivações

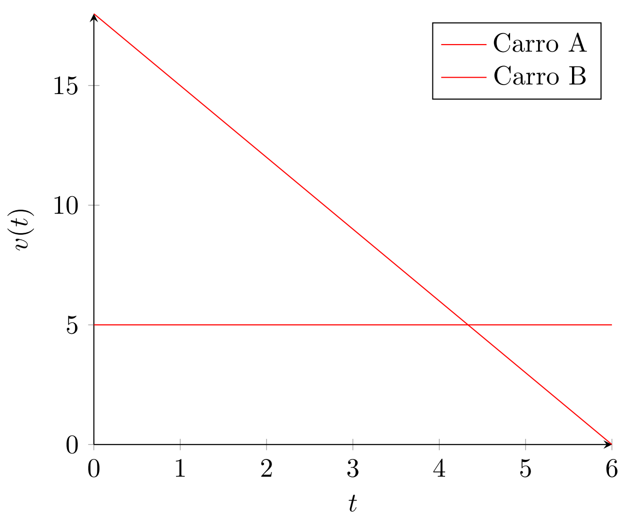
- Resolução de Exercícios.

4.2 Exercício 29 - Tipler

"Considere a trajetória de dois carros, o Carro A e o Carro B. (a) Existe algum instante para o qual os carros estão lado-a-lado? (b) Eles viajam sempre no mesmo sentido? (c) Eles viajam com a mesma velocidade em algum instante t? (d) Para que t os carros estão mais distantes entre si? (e) Esboce os gráficos de $v \times t$'



Os carros se encontram lado-a-lado quando os gráficos se cruzam, ou seja, em t = 1s e t = 9s (Tipler mais acurado que meu gráfico.). É notável quer eles não estão sempre no mesmo sentido, visto que, a partir de 6s, o gráfico do carro B passa a mudar o sentido. Em aproximadamente 5s, ambos estão com a reta tangente iguais, ou seja, estão com a mesma velocidade, e distância entre eles está maior exatamente no ponto em que as velocidades estão iguais. Finalmente, seguem os gráficos:



4.3 Exercício 44 - Tipler

"Um carro viaja em linha reta com $\vec{v} = 80$km/h durante $\Delta t_1 = 2.5$h. Depois, $\vec{v_2} = 40$km/h, $\Delta t_2 = 1.5$h. Qual é o deslocamento total? E qual é a velocidade $\vec{v}$ total?"

$$
\begin{aligned}
(a) \quad & \Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 = \vec{v_1}\Delta t_1 + \vec{v_2}\Delta t_2 \Rightarrow \Delta x = 260\text{km}. \\
(b) \quad & \vec{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{260}{4} = 65\text{km/h}.
\end{aligned}
$$

4.4 Exercício 58 - Tipler

"Um carro acelera de 48.3km/h para 80.5km/h em 3.70s. Qual a aceleração média?"

Primeiramente, precisamos converter as unidades para medidas iguais. Com isso, note que $\vec{v_1} = 48.3km/h = 13.52m/s, \vec{v_2} = 80.5km/h = 22.54m/s$. Assim, chegamos em

$$
\vec{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t} \approx 2.4\text{m/s}.
$$

4.5 Exercício 67 - Tipler

"Um corpo está em uma posição inicial x_1 com velocidade inicial $\vec{v_1}$. Passado um tempo, ele se encontra na posição x_2 com velocidade $\vec{v_2}$. Qual é a aceleração deste corpo?"

Utilizaremos Torricelli. sabemos que

$$
\begin{aligned}
(1): \quad & x_1 = 6m, \vec{v_1} = 10m/s \\
(2): \quad & x_2 = 10m, \vec{v_2} = 15m/s.
\end{aligned}
$$

Deste modo, $v^2 = v_0^2 + 2a\Delta x \Rightarrow v_2^2 = v_1^2 + 2a(x_2 - x_1) \Rightarrow a \approx 16m/s^2$

4.6 Exercício 72 - Tipler

"Um parafuso se desprende de um elevador subindo a $v_0 = 6m/s$. O parafuso atinge o fundo do poço em 3s. (a) Qual era a altura do elevador? (b) Qual é a velocidade do parafuso no chão? Tome g = 9.8 m/s^2"

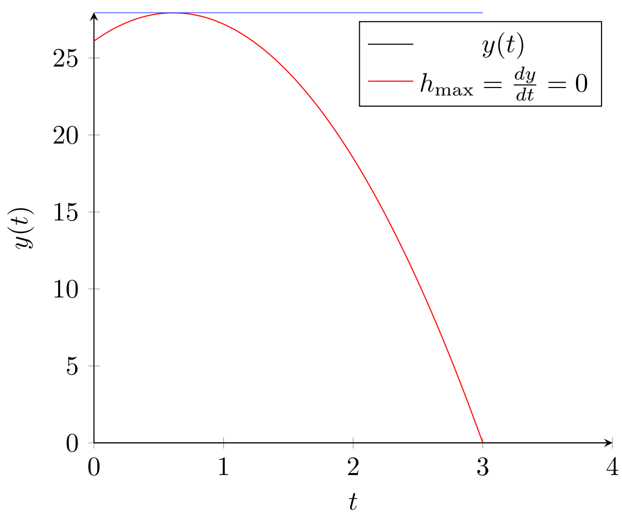
Sabemos que $t_0 = 0s, y(t_0) = h, v(t_0) = v_0$. Com isso, podemos descrever $y(t) = h + v_0 t + \frac{1}{2}gt^2$. Vamos responder, agora, o item a, isto é, qual é o valor da altura h? Segue que, em $t = 3s, y(t) = 0$. Utilizando a fórmula,

$$
h = -v_0 t + \frac{1}{2}gt^2 = -6 \cdot 3 + \frac{1}{2}9.8 \cdot 3^2 = 26.1m
$$

Com relação ao item (b), vimos que $v(t) = v_0 + at$. Deste modo,

$$
v(3s) = 6 - 9.8 \cdot 3 = -23.4m/s
$$

Indo um pouco além do que foi pedido, analisemos o movimento do parafuso. É possível concluir que o parafuso atingirá a altura máxima no instante em que $t^* = \frac{v_0}{g} = 0.6s$, visto que este momento ocorre quando $v(t) = v_0 - gt = 0$. Com isso, conclui-se que a altura máxima é $y(t^*) = h + v_0 t^* - \frac{1}{2}g{t^*}^2 \approx 27.5m$. No gráfico,



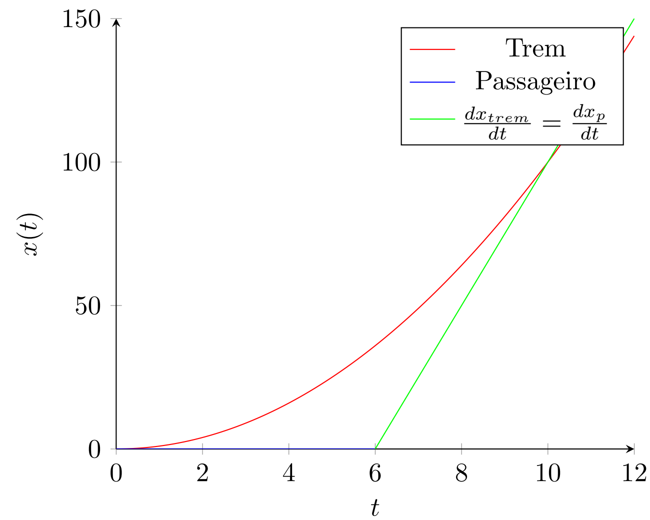
4.7 Exemplo - Aula 06 Vanderlei

"Suponha que há um trem parado no instante t=0 com aceleração a. Passados 6s, um passageiro chega ao local e observa o trem na posição x_{trem_1}. Este passageiro sai correndo com velocidade v_0 para tentar alcançar o trem. Qual é a velocidade mínima que o passageiro precisa atingir para alcançá-lo?"

Com relação ao trem, suas condições iniciais são $t_0 = 0, x_{trem} = 0, v_{trem} = 0$, tal que $x_{trem}(t) = \frac{1}{2}at^2$. Por outro lado, quanto ao passageiro, quando $t = 6s, x_p = 0$, de modo que $x_p(t) = x_{p_0} + v_0 t$. Como temos a informação da posição do passageiro aos 6s,

$$x_p(6) = x_{p_0} + v_0 \cdot 6 = 0 \Rightarrow x_{p_0} = -6v_0 \Rightarrow x_p(t) = v_0(t-6).$$

No momento em que o passageiro alcança o trem, eles possuem posições iguais, isto é, $x_p(t) = x_{trem}(t)$. Graficamente,



Ou seja, buscamos t^* tal que $x_p(t^*) = x_{trem}(t^*), v_p(t^*) = v_{trem}(t^*)$. Com efeito,

$$v_0(t^* - 6) = \frac{a{t^*}^2}{2} \Rightarrow v_0 = at^* \Rightarrow t^* = \frac{v_0}{a}$$

$$v_0 = \frac{a}{2}\frac{(\frac{v_0}{a})^2}{\frac{v_0}{a} - 6} \Rightarrow \frac{v_0^2}{2a} = 6v_0 \Rightarrow v_0 = 12a.$$

Outra forma de resolver é utilizando o fato de que quando $\frac{dv}{dt} = 0$, a função está num mínimo. Ou seja, basta encontrar o valor mínimo de v_0 que satisfaça o que buscamos. Temos

$$v_0(t-6) = \frac{at^2}{2} \Rightarrow v_0(t) = \frac{at^2}{2}\frac{1}{(t-6)}.$$

Agora, derivando essa equação para v_0,

$$\frac{dv_0}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{at^2}{2}\frac{1}{t-6}\right) = \frac{d}{dt}(f(t)g(t)),$$

em que $f(t) = \frac{at^2}{2}, g(t) = (t-6)^{-1}$. Fazemos isso porque há uma regra para derivar o produto de funções, a Regra do Produto

$$\boxed{\frac{df(t)g(t)}{dt} = g(t)\frac{df(t)}{dt} + f(t)\frac{dg(t)}{dt}}$$

Derivando individualmente f e g,

$$\frac{df(t)}{dt} = at, \quad \frac{dg(t)}{dt} = -(t-6)^{-2} = -\frac{1}{(t-6)^2}.$$

Agora, vamos juntar tudo para obter a derivada de v_0:

$$\begin{aligned}
\frac{dv_0}{dt} &= \frac{df(t)}{dt}g(t) + \frac{dg(t)}{dt}f(t) = \frac{at}{t-6} - \frac{1}{2(t-6)^2}at^2 \\
&= at\left(\frac{1}{t-6} - \frac{t}{2(t-6)^2}\right) = 0 \\
&\Rightarrow \frac{1}{t-6} = \frac{t}{2(t-6)} \Rightarrow 1 = \frac{t}{2(t-6)} \\
&\Rightarrow 2(t-6) = t \Rightarrow 2t - t = 12 \Rightarrow t = 12s.
\end{aligned}$$

5 Aula 04 - 10/04/2023

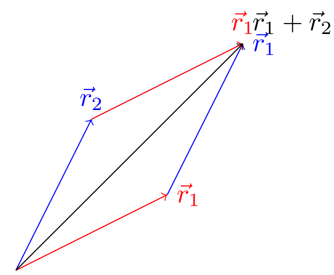
5.1 Motivações

- Iniciar os estudos de movimentos em um plano todo (duas dimensões);
- Revisar vetores e sua manipulação.

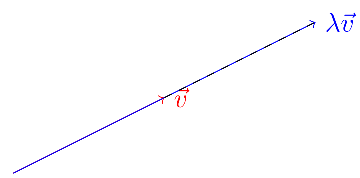
5.2 Vetores

Começamos com um estudo das propriedades de veotres. Dados vetores $\vec{r_1}, \vec{r_2}$ e um número real λ, definimos:

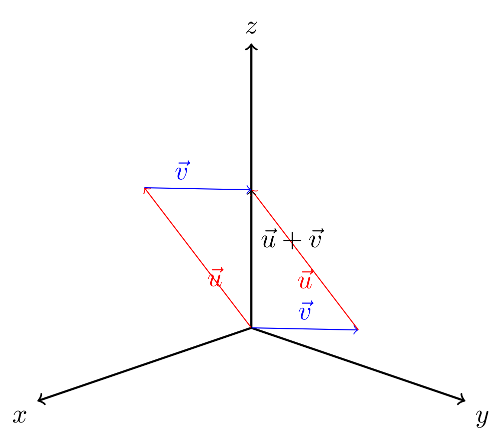
i) A soma dos vetores:



ii) A multiplicação por escalar: $\lambda(r_1 + r_2)$ (Essencialmente, o resultado é aumentar ou diminuir o tamanho da seta.)



A título de curiosidade, a soma de vetores em três dimensões seria desta forma:



Porém, não basta utilizar apenas representações gráficas para vetores. Desta forma, é comum definirmos um sistema de coordenadas cartesiano para suas componentes. Assim, um vetor $\vec{u}$ pode ser decomposto em uma coordenada x e outra coordenada y:

$$\vec{u} = u_x\hat{i} + u_y\hat{j}(+u_z\hat{k})$$

chamamos os valores u_x, u_y, u_z de projeções, sendo a última um objeto presente apenas no caso de três coordenadas. Com isso, definimos o módulo do vetor, ou seja, seu tamanho, pela fórmula

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2},$$

e, de brinde, ganhamos fórmulas para as projeções em cada coordenada:

$$\begin{aligned}
&u_x = |u|\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{u_x}{|\vec{u}|}\\
&u_y = |u|\sin\theta \Rightarrow \sin\theta = \frac{u_y}{|\vec{u}|}\\
&\tan\theta = \frac{u_y}{u_x}.
\end{aligned}$$

É importante, tamém, darmos uma forma de obter um betor de módulo 1, i.e., um vetor unitário, visto que ele pode nos fornecer a informação do valor do ângulo θ, a direção, etc. Ele é obtido reduzindo um vetor u pelo seu módulo,

$$\hat{u} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}.$$

Uma utilidade imediata da definição em coordenadas é que agora temos um modo de tratar a soma de vetores algebricamente

$$\begin{aligned}
&\text{Soma: } \vec{u}+\vec{v} = (u_x\hat{\imath} + u_y\hat{\jmath}) + (v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath}) = (u_x+v_x)\hat{\imath} + (u_y+v_y)\hat{\jmath}\\
&\text{Multiplicação por Escalar: } \lambda\vec{u} = \lambda(u_x\hat{\imath} + u_y\hat{\jmath}) = \lambda u_x\hat{\imath} + \lambda u_y\hat{\jmath}\\
&\theta = ctg\left(\frac{\lambda u_y}{\lambda u_x}\right) = ctg\left(\frac{u_y}{u_x}\right).
\end{aligned}$$

Agora podemos ir à aplicação física dessa discussão, o deslocamento de uma partícula no plano. Nesta configuração, normalmente terá-se uma partícula com posição $\vec{x}(t) = x(t)\hat{\imath} + y(t)\hat{\jmath} \quad (+z(t)\hat{k})$. Para realizar o estudo desses casos, vamos decompor o movimento dela em cada eixo, ou seja, quebramos o movimento no plano em dois movimentos independentes, um em cada eixo x ou y. Nestas condições, o deslocamento de uma partícula de uma posição 1 até uma posição 2 será

$$\vec{x_2} - \vec{x_1} = (x_2\hat{\imath} + y_2\hat{\jmath}) - (x_1\hat{\imath} + y_1\hat{\jmath}) = (x_2 - x_1)\hat{\imath} + (y_2 - y_1)\hat{\jmath}.$$

Com isso, podemos escrever que o deslocamento $\Delta\vec{r}$ é

$$\Delta\vec{r} = \Delta x\hat{\imath} + \Delta y\hat{\jmath}.$$

Ainda mais, se conhecemos o valor do ângulo entre as posições 1 e 2 e o módulo dos vetores representando-as,

$$|\Delta r|^2 = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2\cos\theta.$$

Tendo o básico do deslocamento, podemos repetir o raciocínio prévio para trabalhar com aceleração e velocidade. De fato,

$$\vec{v_m} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}, \quad \vec{a_m} = \frac{\Delta\vec{v_m}}{\Delta t}$$

e os valores instantâneos serão dados por

$$\begin{aligned}
\vec{v}(t) &= \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\hat{\imath} + \frac{dy(t)}{dt}\hat{\jmath} = v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath}.\\
\vec{a}(t) &= \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{dv_x(t)}{dt}\hat{\imath} + \frac{dv_y(t)}{dt}\hat{\jmath} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath}.
\end{aligned}$$

Além disso, o módulo e orientação desses valores serão dados por

$$\begin{aligned}
|\vec{v}| &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2}, \quad \theta_v = ctg\left(\frac{v_y}{v_x}\right)\\
|\vec{a}| &= \sqrt{a_x^2 + a_y^2}, \quad \theta_a = ctg\left(\frac{a_y}{a_x}\right).
\end{aligned}$$

Note que a aceleração não aponta na direção da velocidade em si, mas sim na direção da **variação** da velocidade.

5.3 Movimento Uniforme Bidimensional

Considere uma partícula com posição $\vec{r}(t)$ e uma orientação, tal que forma um ângulo θ com o plano. Como estaremos considerando o movimento do tipo uniforme, a aceleração é nula e a velocidade $\vec{v}(t) = v_0$ é constante, tendo módulo v_0 e orientação θ. Em outras palavras, as componentes desse vetor serão, também, constantes, isto é,

$$\text{constantes}\begin{cases} v_x(t) = v_{x_0} \\ v_y(t) = v_{y_0}. \end{cases}$$

Desta forma, a decomposição da velocidade em coordenadas é tal que

$$\begin{aligned} &\text{Eixo x: } v_x(t) = v_{x_0} \Rightarrow x(t) = x_0 + v_{x_0}(t - t_0), \quad x_0 = x(t_0) \\ &\text{Eixo y: } v_y(t) = v_{y_0} \Rightarrow y(t) = y_0 + v_{y_0}(t - t_0), \quad y_0 = y(t_0). \end{aligned}$$

Logo, a posição da partícula no plano será dada por

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{\imath} + y(t)\hat{\jmath} = (x_0 + v_{x_0}(t - t_0)\hat{\imath}) + (y_0 + v_{y_0}\hat{\jmath}).$$

Note que, quando falamos de trajetória de uma partícula ou objeto, buscamos uma relação entre as componentes x(t) e y(t) que independe do tempo, isto é, a relação temporal é dada de forma implicita. Uma forma de fazer isso é a através da tangente, pois

$$\frac{y(t) - t_0}{x(t) - x_0} = \frac{v_{y_0}(t - t_0)}{v_{x_0}(t - t_0)} = \frac{v_{y_0}}{v_{x_0}} = \tan\theta_0.$$

Com isso,

$$y(t) - y_0 = \tan\theta_0(x(t) - x_0) \Rightarrow y = \tan(\theta_0)x - \tan(\theta_0)x_0 + y_0,$$

ou seja, y tem a forma de um equação da reta com inclinação constante e igual a $\tan\theta_0$.

6 Aula 06 - 13/04/2023

6.1 Motivações

- Revisar movimento relativo;

6.2 Movimento Relativo

Fixada uma origem O, a soma dos vetores representando os corpos A e B

$$\vec{r}_{AO} + \vec{r}_{BA} = \vec{r}_{BO}$$

nos fornece a direção relativa do corpo B com relação a A. Se A e B estão se movendo, ou seja, os vetores deles possuem dependência no tmepo ($\vec{r}_{AO} = \vec{r}_{AO}(t), \vec{r}_{BO} = \vec{r}_{BO}(t)$), então

$$\vec{r}_{BA}(t) = \vec{r}_{BO}(t) + \vec{r}_{AO}(t),$$

ou seja, a posição relativa de B com relação a A também dependerá do tempo. Além de posição relativa, podemos definir outros conceitos, tais como a velocidade relativa:

$$\vec{v}_{BA}(t) = \frac{d\vec{r}_{BA}(t)}{dt} = \frac{d\vec{r}_{BO}}{dt} + \frac{d\vec{r}_{AO}}{dt} \Rightarrow \vec{v}_{BA}(t) = \vec{v}_{BO}(t) + \vec{v}_{AO}(t)$$

e aceleração relativa de modo análogo, i.e., $\vec{a}_{BA}(t) = \vec{a}_{BO}(t) + \vec{a}_{AO}(t)$. Vejamos alguns exemplos

Exemplo 3. *Considere um sistema em que um carrinho viaja com velocidade $\vec{v}_r$ e tem um passageiro $\vec{v}_p$ com ele. Ambos se movem para a direita. Neste caso, há o sistema referencial de inérca da pessoa dentro do trem. Buscamos descobrir a velocidade da pessoa com relação ao trem. De fato, segue que*

$$\vec{v}_p = \vec{v}_{PT} + \vec{v}_T.$$

Exemplo 4. *Considere um sistema análogo ao anterior, mas, embaixo, há uma plataforma se movendo para a esquerda com velocidade igual à do trem. Neste caso, há o sistema referencial de inérca da pessoa dentro do trem. Buscamos descobrir a velocidade da pessoa com relação à plataforma. Obtemos*

$$\vec{v}_{PT} = \vec{v}_{PT}^x\hat{i} + \vec{v}_{PT}^y\hat{j}. \Rightarrow \vec{v}_p = (\vec{v}_{PT}^x + \vec{v}_T)\hat{i} + \vec{v}_P^y\hat{j}$$

Exemplo 5. *(Exemplo 32 do Tipler): Considere um sistema de avião e vento, no qual o módulo da velocidade do avião é de 200km/h e, o da velocidade do vento, é 90km/h. O vento é dado por um vetor apontando para a direito, enquanto o avião é um vetor apontando para cima. Pergunta-se: (a) Qual é a orientação que o avião deve voar? (Ambos estão sendo vistos do solo.) (b) Qual é o módulo da velocidade do avião visto do solo? (a) Segue que*

$$\vec{v}_{AO} = \vec{v}_A - \vec{v}_v \Rightarrow \sin\theta = \frac{|\vec{v}_v|}{|\vec{v}_{av}|} = \frac{90}{200} = \frac{9}{20} \approx 27\,\mathrm{deg}$$

(b) Sabemos, por pitágora, que

$$|\vec{v}_{AT}|^2 = |\vec{v}_v|^2 + |\vec{v}_a|^2 \Rightarrow |\vec{v}_a| = \sqrt{|\vec{v}_{av}|^2 - |\vec{v}_v|^2} = \sqrt{51900} \approx 178km/h$$

Com relação a este último exemplo, por que a velocidade $\vec{v}_a$ tem valor 178km/h e não 200 - 90 = 110km/h? A resposta está na decomposição de $\vec{v}_{av}$, pois

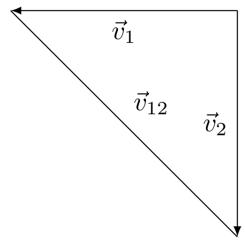
$$v_{av}^x = |\vec{v}_{av}|\sin\theta = -200 \cdot 0.454 \approx -90km/h$$
$$v_{av}^y = |\vec{v}_{av}|\cos\theta = 200 \cdot 0.891 \approx 178km/h.$$

Exemplo 6. *Suponha que, num instante t_0, dois trens estão andando em direção a uma plataforma. O trem um chegou nela, vindo do Norte, enquanto o trem dois, vindo pelo Leste, ainda se move, ambos com velocidade*

$$|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| = 60km/h.$$

Passados dois minutos, o trem 2 alcança a plataforma e continua andando na direção Oeste com velocidade $\vec{v}_2$ e o trem um continuou sua viagem ao Sul com velocidade $\vec{v}_1$. Pede-se: (a) Determine o vetor $\vec{v}_{21}$ da velocidade relativa dos trens. (b) Encontre, para este vetor do item (a), seu módulo (c) Quando a distância entre os vetores é mínima?

Faremos o diagrama de velocidades. Nele, $|v_1| = |v_2|$.



Além disso, pelo desenho,

$$\sin\theta = \frac{|\vec{v}_2|}{|\vec{v}_{21}|}, \quad \cos\theta = \frac{|\vec{v}_1|}{|\vec{v}_{21}|} = \frac{|\vec{v}_2|}{|\vec{v}_{21}|} = \sin\theta.$$

A igualdade entre seno e cosseno ocorre quando o ângulo vale 45 graus, ou seja, $\theta = 45\deg$*. Assim,*

$$\vec{v}_{21} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = -|\vec{v}_2|\hat{\imath} - (-|\vec{v}_1|\hat{\jmath}) \Rightarrow \vec{v}_{21} = -|\vec{v}_2|\hat{\imath} + |\vec{v}_1|\hat{\jmath}.$$

Logo,

$$|\vec{v}_{21}| = \sqrt{|\vec{v}_1|^2 + |\vec{v}_2|^2} \approx 85km/h$$

Para resolver, agora, o item b, a comecemos pela posição relativa 2 nos instantes t=0, t=2min e t=4min. Quanto ao trem 2, as informações que temos indicam que ele se move no eixo x ($y_2(t) = 0$*), em t=2min, ele está na origem (*$x_2(2min) = 0$*) e, deste modo,*

$$\vec{r}_2(t) = x_2(t)\hat{\imath} + y_2(t)\hat{\jmath} = x_2(t)\hat{\imath} \Rightarrow x_2(t) = x_{2O} + |\vec{v}_2|t$$

Utilizando o valor que sabemos, i.e., x(2min), segue que, convertendo 2 minutos para horas ($2min \approx 0.03h$*)*
,

$$x(0.03) = 0 = x_{2O} - 60 \cdot 0.03 \Rightarrow x_{2O} = 60 \cdot 0.03 = 2km.$$

Agora, sobre o trem 1, sabe-se que ele se move no eixo y, ou seja, $x_1(t) - 0$*, tal que*

$$y_1(t) = -|\vec{v}_1|t = -60t$$

Com essas informaçẽs, encontramos os valores

$$\begin{aligned}
t = 0min: &\quad x_1(0) = 0, y_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 2km, y_2(0) = 0km \\
t = 2min: &\quad x_1(2) = 0, y_1(2) = -2km, \quad x_2(2) = 0km, y_2(2) = 0km \\
t = 4min: &\quad x_1(4) = 0, y_1(4) = -4km, \quad x_2(4) = -2, y_2(4) = 0km.
\end{aligned}$$

Desta forma,

$$\vec{r}_{21}(t) = \vec{r}_2(t) - \vec{r}_1(t) \Rightarrow \vec{r}_{21}(t) = x_2(t)\hat{\imath} - y_1(t)\hat{\jmath}.$$

Finalmente, para o item c, calculamos a disência como

$$L_{21}(t) = \sqrt{x_1^2 + (-y_1)^2} = \sqrt{(x_{20} - |\vec{v}_2(t)|)^2 + (|\vec{v}_1|)^2} = \sqrt{7200t^2 - 240t + 4}.$$

*Para encontrar a distância **mínima**, é preciso derivar esta fórmula, igualar a 0 e resolver para tempo. Coloque* $l = 7200t^2 - 240t + 4$*, tal que*

$$\frac{dl}{dt} = 2 \cdot 7200t - 240 + 0 = 0$$

Resolvendo isso, encontramos o tempo em que a distância é mínima, valendo $t^* \approx 0.017h \approx 1min$*, tal que a distância mínima é*

$$L_{21}(t^*) \approx 1.4.$$

7 Aula 7 - 17/03/2023

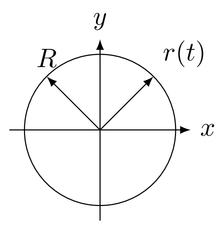
7.1 Motivações

- Começar a estudar o movimento circular;
-

7.2 Movimento Circular

Quando temos uma particular fazendo movimento circular em um círculo de raio R num eixo x, y, diremos que ela, sua posição em qualquer instante será dada por um vetor r(t), sendo sua trajetória limitada a este círculo. Assim, obtemos o sistema $R = |\vec{r}(t)|$, sendo $\vec{r}(t) = x(t)\hat{\imath} + y(t)\hat{\jmath}$ e

$$\begin{cases} x(t) = R\cos\theta(t) \\ y(t) = R\sin\theta(t). \end{cases}$$



Utilizando o sistema e o desenho, obtemos

$$\vec{r}(t) = R\cos\theta(t)\hat{\imath} + R\sin\theta(t)\hat{\jmath},$$

donde segue o valor do módulo do vetor $\vec{r}(t)$:

$$\begin{aligned} |\vec{r}(t)|^2 = x^2(t) + y^2(t) &= (R\cos\theta(t))^2 + (R\sin\theta(t))^2 \\ &= R^2(\cos\theta(t)^2 + \sin\theta(t)^2) \\ &= R^2 \Rightarrow |\vec{r}(t)| = R. \end{aligned}$$

Concluímos, assim, que todo o movimento da partícula é dado em termos do ângulo $\theta(t)$. Além disso, o deslocamento da partícula é feita em arcos de círculo $s(t) = R\theta(t)$. Chamamos esta posição de "posição escalar do corpo sobre o círculo". No entanto, no movimento circular, há outra posição, chamada "posição angular do corpo", que é dada por $\theta(t) = \frac{s(t)}{R}$.

Utilizando estes dois, podemos encontrar uma equação para $\vec{r}(t)$:

$$\vec{r}(t) = R\cos\theta(t)\hat{\imath} + R\sin\theta(t)\hat{\jmath} = R\underbrace{\left[\cos\theta(t)\hat{\imath} + \sin\theta(t)\hat{\jmath}\right]}_{\hat{r}(t)} = R\hat{r}(t),$$

em que $\hat{r}(t)$ é um versor na direção de $\vec{r}(t)$, isto é, um vetor com módulo um. De fato, vamos verificar isto:

$$|\hat{r}(t)| = \sqrt{\cos^2(\theta(t)) + \sin^2(\theta(t))} = 1$$

A seguir, vamos estudar como este versor $\hat{r}(t)$ varia, ou seja, vamos derivar este vetor com respeito ao tempo. Para isso, introduizremos outra regra de derivação, a "Regra da Cadeia". Dada uma função $f(t) = u(v(t))$, ou seja, uma função definida como uma função composta, sua derivação é feita de denro pra fora: Derivamos v(t) com respeito a t, depois derivamos u com relação a v e multiplicamos, ou seja,

$$\boxed{\frac{df}{dt} = \frac{du}{dv}\frac{dv}{dt}}.$$

Assim, no caso do versor $\hat{r}(t)$,

$$\begin{aligned}
\frac{d\hat{r}(t)}{dt} &= \frac{d}{dt}[\cos\theta(t)\hat{\imath} + \sin\theta(t)\hat{\jmath}] \\
&= \frac{d}{dt}[\cos\theta(t)]\hat{\imath} + \frac{d}{dt}[\sin\theta(t)]\hat{\jmath} \\
&= \frac{d\cos\theta(t)}{d\theta}\frac{d\theta(t)}{dt}\hat{\imath} + \frac{d\sin\theta(t)}{d\theta}\frac{d\theta(t)}{dt}\hat{\jmath} \\
&= -\sin\theta(t)\frac{d\theta(t)}{dt}\hat{\imath} + \cos\theta(t)\frac{d\theta(t)}{dt}\hat{\jmath}.
\end{aligned}$$

Como $\theta(t)$ é a posição angular, chamamos a sua derivada com respeito a tempo de velocidade ângular

$$\boxed{\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt}.}$$

De brinde, conseguimos definir a velocidade escalar da partícula como

$$\begin{aligned}
\frac{ds(t)}{dt} &= \frac{dR\theta(t)}{dt} = R\frac{d\theta(t)}{dt} = R\omega(t). \\
&\Rightarrow \boxed{v(t) = R\omega(t).}
\end{aligned}$$

Vamos estudar a dimensão dessa quantidade. Temos

$$[\omega] = \frac{[\theta]}{[t]} = \frac{1}{T} \quad \text{(Exemplo: rad/s (radianos por segundo.))}$$

como unidades de velocidade angular e

$$[v] = [R][\omega] = LT^{-1} \quad \text{(Exemplo: m/s (metros por segundo))}$$

como dimensão da velocidade escalar. Com relação ao versor definido, sua derivada é

$$\frac{d\hat{r}(t)}{dt} = \omega(t)\underbrace{[-\sin\theta(t)\hat{\imath} + \cos\theta(t)\hat{\jmath}]}_{\hat{\theta(t)}},$$

em que $\hat{\theta(t)}$ é um versor apontando na direção do ângulo. Com isso, definimos a velocidade vetorial por

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = R\frac{d\hat{r}(t)}{dt} \Rightarrow \vec{v}(t) = R\omega(t)\hat{\theta(t)}.$$

Algo interessante de notar é que a velocidade escalar consiste do módulo da velocidade vetorial, i.e., $v(t) = |\vec{v}(t)|$. Também podemos representar a velocidade por meio das componentes em cada eixo:

$$\vec{v}(t) = \underbrace{-R\omega(t)\sin\theta(t)}_{v_x(t)}\hat{\imath} + \underbrace{R\omega(t)\cos\theta(t)}_{v_y(t)}\hat{\jmath}.$$

7.3 Acelerações no Movimento Circular.

Agora que estamos mais familiariizados com a velocidade e posição angular, podemos estudar a aceleração no movimento circular. Assim como antes, começamos definindo a aceleração angular:

$$\alpha(t) = \frac{d\omega(t)}{dt} = \frac{d^2\theta(t)}{dt^2},$$

que possui dimensão $[\alpha] = \frac{[\omega]}{[t]} = \frac{T^{-1}}{T} = T^{-2}$, sendo um exemplo a unidade rad/s^2, i.e., radiano por segundo quadrado. Analogamente, definimos a aceleração vetorial por

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}[R\omega(t)\hat{\theta}(t)].$$

Pela regra do produto,

$$\vec{a}(t) = R[\frac{d\omega(t)}{dt}\theta(\hat{t}) + \omega(t)\frac{d\theta(\hat{t})}{dt}].$$

Analisando termo a termo, a primeira derivada acontece no módulo da velocidade, i.e., $R\frac{d\omega(t)}{dt}$, ou seja, representa a variação no módulo da velocdade. Por outro lado, o segundo termo representa a variação da direção da velocidade. Como já encontramos alguns desses termos antes, segue que

$$\vec{a}(t) = R[\alpha(t)\theta(\hat{t}) + v(t)\frac{d\hat{\theta}(t)}{dt}].$$

Mas o que é este termo $\frac{d\hat{\theta}}{dt}$? Olhando pra ele com cuidado, vemos que

$$\begin{aligned}
\frac{d\hat{\theta}}{dt} &= \frac{d}{dt}[-\sin\theta(t)\hat{\imath} + \cos\theta(t)\hat{\jmath}] \\
&= -\frac{d}{dt}[\sin\theta(t)]\hat{\imath} + \frac{d}{dt}[\cos\theta(t)]\hat{\jmath} \\
&= -\cos\theta(t)\frac{d\theta(t)}{dt}\hat{\imath} - \sin\theta(t)\frac{d\theta(t)}{dt}\hat{\jmath} \\
\Rightarrow \frac{d\theta(\hat{t})}{dt} &= \omega(t)[-\cos\theta(t)\hat{\imath} - \sin\theta(t)\hat{\jmath}] = \omega(t)(-\hat{r}(t)).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\vec{a}(t) = R[\alpha(t)\theta(\hat{t}) + \omega^2(t)(-\hat{r}(t))] = \underbrace{R\alpha(t)\theta(\hat{t})}_{\text{aceleração tangencial } \vec{a}_t(t)} - \underbrace{R\omega^2(t)\hat{r}(t)}_{\text{aceleração centrípeta } \vec{a}_{cp}(t)}$$

Obtivemos disso tudo duas acelerações novas e que precisam ser mais compreendidas. Vamos começar pela tangencial.

Com relação ao módulo da aceleração tangencial, note que $|\vec{a}_t(t)| = R\alpha(t) = \frac{dv(t)}{dt}$. Agora, quanto à aceleração centrípeta, seu módulo é dado por $|\vec{a}_{cp}(t)| = R\omega^2(t) \Rightarrow |\vec{a}_{cp}(t)| = \frac{v^2}{R}$.

7.4 Movimento Circular Uniforme

Resumindo o que temos até o momento em forma de tabela, segue que

	Variáveis angulares	**Variáveis escalares**
Posição	$\theta(t)$	$s(t) = R\theta(t)$
Velocidade	$\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt}$	$v(t) = \frac{ds(t)}{dt} = R\omega(t)$
Aceleração	$\alpha(t) = \frac{d\omega(t)}{dt} = \frac{d^2\theta(t)}{dt^2}$	$\|\vec{a}(t)\| = \frac{dv(t)}{dt} = R\alpha(t), \quad \|\vec{a}_{cp}\| = \frac{v^2}{R}$

Tabela 1: Resumo movimento circular.

No movimento circular uniforme, estudamos arcos iguais em tempos iguais, ou seja,

$$\Delta s_1 = \Delta s_2, \quad \Delta t_1 = \Delta t_2,$$

tal que $\Delta\theta_1 = \Delta\theta_2$. Além disos, $\omega(t) \equiv \omega$ constante. Assim,

$$|\vec{v}(t)| = v(t) = R\omega(t) \equiv v, \text{ constante} \Rightarrow a_t = R\alpha(t) = 0.$$

Com isso, as posições são descritas por

$$\begin{aligned}
\omega(t) = \omega \Rightarrow \theta(t) = \theta_0 + \omega(t - t_0) \\
v(t) = v \Rightarrow s(t) = s_0 + v(t - t_0)
\end{aligned}$$

Neste caso, o movimento é periódico, ou seja, ele volta a ter as mesmas propriedades após um período T. Em forma matemática, isso quer dizer que

$$\begin{cases} \vec{r}(t+T) = \vec{r}(t) \\ \vec{v}(t+T) = \vec{v}(t). \end{cases}$$

Tendo isso em mente, definimos também a frequência como o número de ocorrências. Ele vale o inverso do período T, i.e., $f = \frac{1}{T}$.

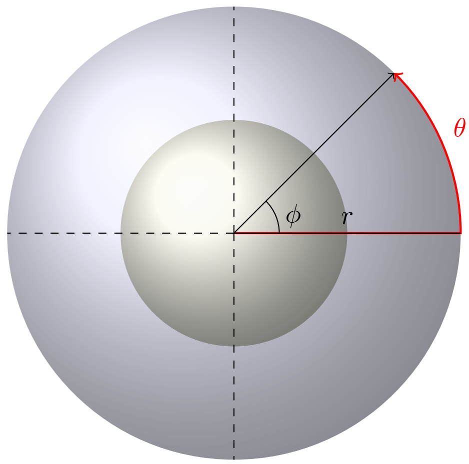
8 Aula 8 - 19/04/2023

8.1 Motivações

- Começar os estudos de dinâmica

8.2 Exemplo de MCU - 67 Tiples

Suponha que a Terra tem velocidade angular ω constante, velocidade e aceleração angulares $\vec{v}_\theta(t), \vec{a}_\theta(t)$ e velocidade e aceração escalares $\vec{v}_e(t), \vec{a}_e(t)$.



No equador, $R_E = R_T, \omega_E = \omega$, tal que

$$\begin{cases} v_E = \omega_E R_E = \omega R_T \\ a_{E_{cp}} = \frac{v_E^2}{R_E} = \frac{(\omega R_T)^2}{R_T} = \omega^2 R_T. \end{cases}$$

Na latitude θ, $R_\theta = R_T \cos\theta, \omega_\theta = \omega$, de modo que

$$\begin{cases} v_\theta = \omega R_T \cos\theta \\ a_{\theta_{cp}} = \omega^2 R_T \cos\theta \end{cases}$$

Para a Terra dar uma volta em torno de si de novo, ela demora aproximadamente 24h. Assim, $T = 24h$ é o período da Terra, donde concluímos que a frequência será $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{86400}s^{-1}$. Como $\omega = 2\pi f$, segue que

$$\omega = \frac{2\pi}{86400} = 7.27 \cdot 10^{-5} rad/s.$$

Pede-se: a) Quais são os valores de v_e, a_e? b e d) Quais são as orientações das acelerações? c) Quanto valem v_θ, a_θ?

a.) Vemos que $v_E = 463.1 m/s, a_E = 0.0337 m/s^2, g = 9.8 m/s^2$. Em particular, $a_E = 0.0034g$.

b. e d.) O diagrama de v indica que o vetor aceleração aponta na vertical pra esquerda e levemente pra cima.

c.) Temos $v_\theta = 379.4 m/s, a_\theta = 0.0276 m/s^2$.

8.3 Dinâmica e Leis de Newton

8.3.1 O que esperar

Quando estudamos os movimentos anteriores, estávamos vendo cinemática, a descrição matemática do movimento. No entanto, nunca nos questionamos o que causa o movimento. Como ele surge, o que influencia-o, etc. Essa pergunta é respondida pela dinâmica, q formulação matemática que explicíta as causas do movimento. Ela nos fornece uma relação entre as interações, chamadas forças, que o corpo sofre e o seu movimento. A primeira formulação da dinâmica foi feita por Isaac Newton, sendo suas Leis nosso Ponto de partida.

8.3.2 Leis de Newton

A primeira Lei de Newton, também chamada de Lei da Inércia, afirma que

> "Um corpo em repouso, ou em movimento retilíneo uniforme, permenecerá em seu estado de movimento a não ser que uma força externa atue sobre ele. "

Observe que velocidade constante significa que tanto seu módulo será constante quanto a direção o movimento precisa ser em linha reta. Uma consequência dessa Lei é que não tem distinção entre um corpo em repouso e um corpo se movendo com velocidade constante. Com isso, um sistema de referencial inercial será definido como um eixo de coordenadas que está em repouso ou se movendo com velocidade constante.

A segunda Lei de Newton surge para explicar como aparecem as forças dentro do contexto da dinâmica, dizendo que

> "A força resultante atuando em um corpo é igual à massa dele multiplicada pela aceleração"

Matematicamente, isto significa que

$$\boxed{\vec{F}_r = m \cdot \vec{a} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}}$$

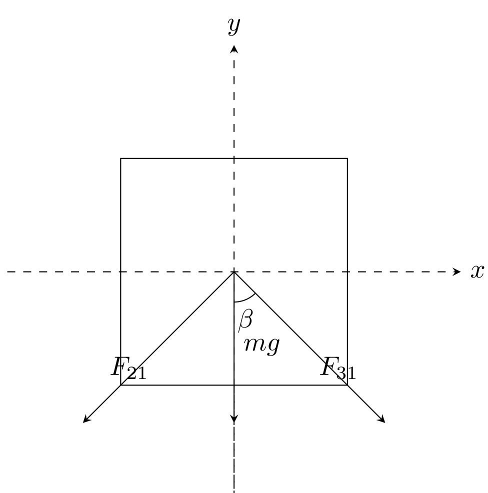
O termo novo m é chamado de massa inercial, sendo interpretada como a grandeza física que expressa a resistência do corpo ao movimento. Quanto maior for a massa, maior vai ser a resistência a se mover. De fato, se temos dois blocos de massas $m_1 > m_2$, então

$$\vec{a}_1 = \frac{\vec{F}}{m_1}, \quad \vec{a}_2 = \frac{\vec{F}}{m_2} \Rightarrow a_1 < a_2.$$

A dimensão dessa grandeza é $[m] = M$. No Sistema Internacional, a unidade de massa é o kilograma.

Note que a força é uma grandeza vetorial que soma-se, ou seja, se há várias forças agindo sobre um corpo, a resultante será a soma delas. Se temos forças $\vec{F}_{21}, \vec{F}_{31}$ agindo sobre um corpo, então a resultante será $\vec{F}_R = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{31}$. Além disso, suas coordenadas serão

$$\begin{aligned} x &: F^x_{res} = -F_{21}\sin\alpha + F_{31}\sin\beta \\ y &: F^y_{res} = -F_{21}\cos\alpha - F_{31}\cos\beta. \end{aligned}$$



A unidade da força é dada por $[F] = [ma] = MLT^{-2}$. No SI, sua unidade é $1kgms^{-2} = 1N$ o Newton. Um corpo será dito em equilíbrio quando a força resultante agindo sobre ele é nula, pois, neste caso,

$$\vec{F}_{res} = \sum_n \vec{F}_n = 0 \Rightarrow F_{res} = ma = 0 \Rightarrow a = 0.$$

A terceira e última Lei de Newton é conhecida como Lei da Ação e Reação. Segue seu enunciado

> "Se um corpo faz uma força em outro, então este segundo também realizará uma força no primeiro, sendo esta de mesmo módulo, mas com direção oposta. "

Em outras palavras, se um corpo 2 age sobre um corpo 1 com força $\vec{F}_{21}$, então o corpo 1 fará uma força sobre o corpo 2 $\vec{F}_{12}$ tal que $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}, |\vec{F}_{21}| = |\vec{F}_{12}|$.

8.3.3 Exemplo 4.2 - Tipler

Os dados que temos é que há uma pessoa que se moveu 2.25m em 3s e cuja massa é 68kg. Pede-se para encontrar o módulo da força agindo sobre ela. Segue que

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow \Delta x = x(3) - x(0) = \frac{1}{2}a3^2 = \frac{9}{2}a = 2.25m$$

Isolando a equação, encontra-se que $a = 0.5m/s^2$. Com isso, como $|\vec{F}| = |m\vec{a}| = 68 \cdot 0.5 = 34N$. $\blacksquare$

9 Aula 09 - 20/04/2023

10 Aula 10 - 24/04/2023

10.1 O que esperar?

- Continuação de Dinâmica;
- Tipos de forças.

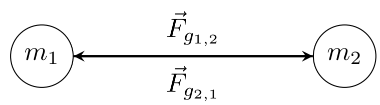
10.2 Motivação

Neste resumo, discutiremos diferentes tipos de forças em física, suas fórmulas e algumas propriedades. Elas serão abordadas ao longo das próximas aulas, não apenas nesta primeira. **Nota ao Leitor: as fórmulas aqui apresentadas são apenas para o módulo das forças, mas esta palavra foi omitida para não ficar muito repetitivo. As forças são estudadas vetorialmente, não esqueça-se disto.**

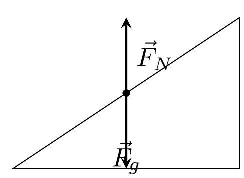
A força gravitacional é a atração entre dois objetos devido à sua massa. A fórmula da força gravitacional é:

$$F_g = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \tag{1}$$

onde F_g é a força gravitacional, G é a constante gravitacional, m_1 e m_2 são as massas dos dois objetos e r é a distância entre seus centros de massa.



A força normal é a força que um objeto exerce perpendicularmente à sua superfície de contato com outro objeto. Esta força é responsável por impedir que os objetos atravessem uns aos outros. A força normal tem módulo igual à componente do peso do objeto perpendicular à superfície.



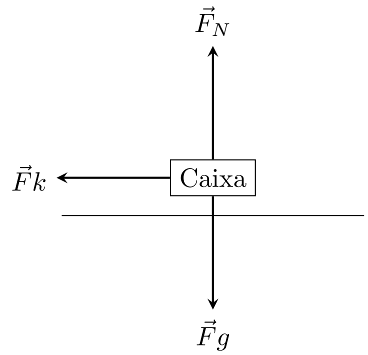
A força de atrito é a força que age oposta ao movimento relativo entre duas superfícies em contato. Existem dois tipos de força de atrito: estático e cinético. A força de atrito estático age entre duas superfícies em repouso relativo e é responsável por impedir que objetos comecem a se mover. A força de atrito estático pode variar de zero até o valor máximo dado por:

$$F_{s_{max}} = \mu_s F_N \tag{2}$$

onde $F_{s_{max}}$ é a força de atrito estático máxima, μ_s é o coeficiente de atrito estático e F_N é a força normal. A força de atrito cinético age entre duas superfícies em movimento relativo e é responsável por reduzir a velocidade dos objetos. A força de atrito cinético é dada por:

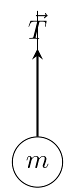
$$F_k = \mu_k F_N \tag{3}$$

onde F_k é a força de atrito cinético, μ_k é o coeficiente de atrito cinético e F_N é a força normal.



Estas duas últimas forças, ou seja, forças normal e atrito, encaixam-se na classe de forças de contato.

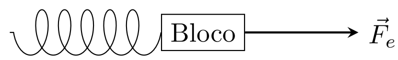
A força tensional é a força que atua ao longo de um cabo, corda ou fio quando esticado por forças opostas aplicadas em suas extremidades. A força tensional é transmitida ao longo do comprimento do cabo, corda ou fio.



A força elástica é a força de restituição que atua quando um objeto é deformado, como uma mola esticada ou comprimida. A força elástica segue a Lei de Hooke:

$$F_e = -k\Delta x \tag{4}$$

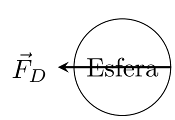
onde F_e é a força elástica, k é a constante elástica e Δx é o deslocamento da posição de equilíbrio da mola.



A força de arrasto é a força de resistência que um objeto experimenta ao se mover através de um fluido (líquido ou gás). A força de arrasto é proporcional ao quadrado da velocidade do objeto em relação ao fluido e é dada por:

$$F_D = \frac{1}{2}\rho v^2 C_D A \tag{5}$$

onde F_D é a força de arrasto, ρ é a densidade do fluido, v é a velocidade do objeto, C_D é o coeficiente de arrasto e A é a área da seção transversal do objeto.



10.3 Tipos de Força

10.3.1 As Quatro Forças Fundamentais de Forma Breve

O primeiro tipo de força que veremos é a Interação gravitacional. Ela ocorre na forma da interação de corpos massivos, sendo representada pela força peso. Além disso, ela é uma força atrativa e de longo alcance. Em particular, o módulo da força gravitacoinal é

$$|\vec{F}_{21}| = |\vec{F}_{12}| = \frac{Gm_1m_2}{r^2}.$$

Aqui, G é a constante de gravitacional, cujo valor é $G = 6.67 \cdot 10^{-11} N kg^{-2} m^2$.

A segunda forma de interação é a eletromagnética, estando presente no contexto de partículas carregadas. Ela será atrativa dado que as duas cargas q_1, q_2 possuam sinais opostos ($q_1 \cdot q_2 < 0$) e repulsivas caso possuam sinais iguais ($q_1 \cdot q_2 > 0$). Seu módulo é dado por

$$|\vec{F}_{12}| = |\vec{F}_{21}| = k\frac{q_1 q_2}{r^2}.$$

Outra força que existe é a interação forte, que age em curto alcance, aproximadamente do tamanho do núcleo atômico. Ela é responsável por manter os prótons e neutron no núcleo.

A última força fundamental é a interação fraca, sendo uma que ocorre em curtíssimo alcance e presente em alguns decaimento radioativos.

Em dinâmica, estudaremos principalmente interações gravitacionais na forma da Força Peso e interações eletromagnéticas, que se manifrestarão nas formas da força normal, força de tração, força de atrito, entre outras.

10.3.2 Força Peso

A força peso é descrita como a atração de um corpo por um objeto celeste quando o corpo está em sua superfície. Como vimos previamente, ela é dada, na Terra, por

$$F_g = \frac{GMm}{R_T^2} = mg.$$

Isso ajuda-nos a descobrir, em particular, como obter o valor da aceleração na superfície. Considerando a massa de humanos como desprezível em comparação à da Terra, obtemos

$$g = \frac{GM_T}{R_T^2} \approx 9.81 m/s^2.$$

A força peso que iremos considerar é definida como $\vec{P} = m\vec{g}$. Consideremos um exemplo.

Exemplo 7. *Considere uma pessoa pulando. A Terra exerce uma força atrativa nela de volta para a superfície, a força Peso, tal que a força resultante nela é dada por*

$$\vec{F}_r = \vec{P} = m\vec{g} - m\vec{a}.$$

Caso a pessoa esteja na superfície, ela estará em equilíbrio, ou seja, $\vec{F}_r = 0$. *Com isso, segue que*

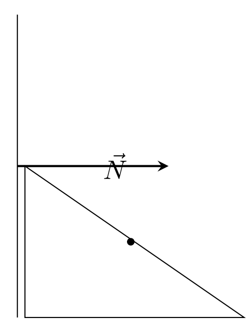
$$\vec{F}_r = \vec{P} + \vec{N} = 0.$$

Essa força oposta à Peso, que denotamos por N, será estudada a seguir.

10.3.3 Força Normal

A força normal é a resultante do contato dos corpos, com direção perpendicular às superfícies de contato. Ela não possui uma fórmula exata, pois é uma interação muito complexa relacionada a moléculas e forças eletromagnéticas.

Exemplo 8. *Considere uma escada encostada a uma parede. Então, haverá uma força normal conseguinte do contato entre a escada e a parede perpendicular à parede.*



Exemplo 9. *Considere um bloco no elevador. Qual é a força normal? Na situação (a), considere-o [o elevador] parado. Na situação (b), ele possui velocidade constante. No caso (c), o elevador está acelerando para cima. Finalmente, no item (d), o elevador acelera para baixo.*

Estando ele parado, a aceleração e a velocidade são nulos. Com isso, sabe-se o valor da resultante:

$$\vec{F}_r = m\vec{a} = \vec{0}.$$

Observando a esquemática do problema, nota-se que nada ocorre no eixo x, além de que $\vec{a}_x = F_r^x = 0$. No entanto, com relação ao eixo y, observamos que, apesar de $\vec{a}_y = F_r^y = 0$, existem forças atuando sobre o bloco. Assim,

$$0 = F_r^y = -P + N = -mg + N = 0 \Rightarrow N = mg = P.$$

Quanto à situação (b), note que, novamente, a força resultante será 0, pois a velocidade é constante. analisando as forças em y, assim, obtemos o mesmo resultado que no item (a):

$$0 = F_r^y = -P + N \Rightarrow N = P = mg.$$

No item (c), como o elevador está acelerado, existe uma aceleração para o bloquinho, tal que

$$\vec{F}_r = m \cdot \vec{a} \neq 0.$$

No eixo y, as duas forças continuam as mesmas, ou seja,

$$F_r^y = -P + N = m \cdot a \neq 0.$$

Assim, a força normal será dada por

$$N = m(a + g).$$

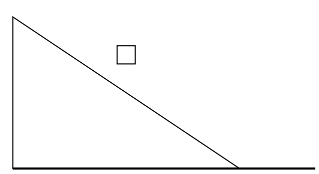
Por fim, no caso (d), novamente, há uma aceleração, então a resultante é não-nula. No entanto, como a aceleração é para baixo,

$$\vec{F}_r = m \cdot (\vec{-a}) \neq 0.$$

Com isso,

$$F_r^y = -P + N = m \cdot (\vec{-a}) \Rightarrow N = m(g - a).$$

Exemplo 10. *Considere o um plano inclinado e um bloco deslizando nele. Qual é a aceleração $\vec{a}$?*



Temos $\vec{N} = |\vec{N}|\hat{j}, |\vec{P}| = mg$. Lembre-se que

$$\begin{cases} P'_x = |\vec{P}| \sin\theta \\ P'_y = |\vec{P}| \cos\theta \end{cases}$$

Com isso, as componentes de força são

$$\begin{aligned} x') &\Rightarrow F_r^{x'} = P_{x'} = |\vec{P}| \sin\theta = ma_{x'} \\ y') &\Rightarrow F_r^{y'} = -P_{y'} + N = -|\vec{P}| \cos\theta + N = 0. \end{aligned}$$

Desta última equação, tiramos que a força normal é $N = |\vec{P}| \cos\theta = mg\cos\theta$. Além disso, da primeira equação, temos

$$a'_x = \frac{mg\sin\theta}{m} = g\sin\theta.$$

Portanto, $\vec{a} = a_{x'}\hat{i} = g\sin\theta\hat{i}$.

Exemplo 11. *Exemplo 4.7 do Tipler: Temos* $v_y \leq 2.5m/s$ *e uma altura de 1m. Pergunta-se: Qual é o maior ângulo possível?*

Após deslocar-se em Δx*, o pacote tem* $v_{x'}$ *dado por*

$$v_{x'}^2 = v_{0_{x'}}^2 + 2a_{x'}\Delta x' = 2a_{x'}\Delta x' \Rightarrow v_{x'}^2 = \frac{2g\sin\theta h}{\sin\theta} = 2gh.$$

Logo, $v_{x'} = \sqrt{2gh}$*. Assim,*

$$\begin{cases} v_x = v_x' \cos\theta \\ v_y = v_{x'}\sin\theta \leq 2.50m/s. \end{cases}$$

Disso segue que

$$\sqrt{2gh}\sin\theta \leq 2.5m/s \Rightarrow \sqrt{2gh}\sin\theta_{max} = 2.5m/s$$

Portanto, $\theta_{max} = 34.4°$.

11 Aula 11 - 25/04/2023 (INCOMPLETO!!!)

11.1 O que esperar?

- Força de Tensão;
- Roldanas e Polias.

11.2 Força de Tensão

A força de tensão é a força sofirda por cordas e roldanas. Assume-se que a corda é inextensível e possui massa desprezível. Um exemplo em que ela aparece bastante é quando há roldanas/polias, ou seja, mecanismos que mudam a direção da força. Vejamos exemplos

Exemplo 12. *Suponha que há um bloco suspenso ao teto por uma corda com massa m e em equilíbrio. Qual é a força de tração?*

Como o bloco está em repouso, sabemos que a resultante vale 0. Note que as forças que agem sobre o bloco são a tração da corda e a foça peso. Logo,

$$0 = \vec{F}_r = T - P \Rightarrow T = P = mg.$$

Exemplo 13. *Agora, imagine que há um bloco suspenso por duas cordas próximo à quinta de um teto. As duas cordas encontram-se num ponto p em que há um nó. A primeira delas sai horizontalmente da parede, fazendo um ângulo reto com a mesma. A segunda surge pelo teto com um ângulo θ. Qual é a força de tração que age sobre a corda que sai do ponto de nó delas e prende-se ao bloco? E nas cordas 1 e 2?*

Quanto ao primeiro item, note que o bloco está em equilíbrio, logo a força resultante em p e no bloco deve ser 0. Assim,

$$T_3 - P = 0 \Rightarrow T_3 = m \cdot g.$$

Para o segundo, decompõe-se a tração nas suas componentes x e y:

12 Aula 12 - 27/04/2023

12.1 O que esperar?

- Força de Tensão;
- Força de mola/Força Elástica.

12.2 Força de Mola

Sendo x_0 a posição da equação da mola, ao aplicarmos uma força na mola e deformamos, a reação é uma força chamada restauradora, pois ela é responsável por recuperar o estado de equilíbrio da mola. Sua fórmula é

$$\vec{F} = -k\Delta\vec{x},$$

em que k é a constante elástica da mola. Podemos elaborar nessa fórmula um pouco mais utilizando a segunda lei de Newton, pois $F = -kx = ma = m\frac{dv}{dt}$. Assim, $-kx = m\frac{d^2x}{dt^2}$, de onde encontramos uma fórmula para a posição em função de tempo

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x = -\omega^2 x \Rightarrow \boxed{x(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = A\sin\omega t}$$

Se derivarmos essa função, a velocidade do movimento será

$$\frac{d}{dt}\sin\omega t = \frac{d\sin u}{du}\frac{du}{dt} = \cos u\omega = \omega\cos\omega t$$

e a aceleração

$$\frac{d}{dt}\cos u\omega = \frac{d}{du}\cos u\omega\frac{du}{dt} = \omega^2\sin\omega t.$$

Vejamos um exemplo

Exemplo 14. *Considere um objeto em repouso preso a uma mola com posição de equilíbrio x_0. Ocorre um deslocamento da mola em Δy, aplicando uma força $\vec{F}_{el}$ ao bloquinho. Qual é a força normal?*

Note que todas as forças estão atuando no eixo y. Como o corpo está parado, a resultante no eixo y é nula, tal que $F_r^y = |F_{el}| + N - P$. Com isso, $N = P - |F_d| = mg - k|\Delta y|$.

12.3 Força de Tração

Exemplo 15. *Considere um elevador manual segurado por uma roldana com uma pessoa dentro dela. Essa pessoa está puxando a corda, exercendo uma força $\vec{F}$ para baixo. O sistema pessoa-elevador tem uma massa de $m = 95kg$. Utilize $g = 9.81m/s^2$.*

a) Qual é o módulo de $\vec{F}$ para subir com velocidade constante?

b) Qual é a força resultante para uma aceleração $a_y = 1.3m/s^2$?

(a) Observe que, ao puxar a corda, a reação gerada à força do puxão é a força de tração. Além disso, a resultante no ponto em que a pessoa puxa a corda é igual à tração. Assim, como há a tração no elevador também,

$$\vec{F}_R^y = -P + T + T = -P + 2T$$

Como é pedido que o elevador suba com velocidade constante, $\vec{F}_R^y = 0$, donde segue que

$$T = \frac{P}{2} = \frac{95 \cdot 9.8}{2} = 466N.$$

(b) Como encontramos a forma da resultante no último item, temos

$$\vec{F}_R^y = -P + 2T = ma_y \Rightarrow T = F = \frac{ma_y + P}{2}.$$

Assim, $F = \frac{m}{2}(a_y + g)^2 = 528N$.

Exemplo 16. *Dado um bloco e multiplas polias, sendo o bloco com um peso de* $2670N$*. Suponha que o sistema está em equilíbrio.*

a) *Quanto vale a tração no sistema da primeira roldana?*

b) *Agora, quanto vale a tração considerando também a segunda roldana no sistema como separada?*

c) *Suponha que a polia passa por uma nova polia ligada ao teto antes de chegar ao bloco. Qual é a tração nesse caso?*

(a) Como a polia redireciona a direção da tração uma vez, $F_r^y = 2T - P = 0$*, segue que* $T = \frac{P}{2} = 1385N$*.*

(b) Apesar de ter adicionado uma nova polia, ainda assim, como só há dois pontos de sustentação, $F_r^y = 2T - P \Rightarrow T = \frac{P}{2}$*.*

(c) Diferente do item (b), como ela passa por mais uma polia, há um novo ponto de sustentação além do segundo, sendo eles o teto, a polia presa ao teto e a polia preso ao bloco. Logo, $F_r^y = 3T - P = 0$*, ou seja,* $T = \frac{P}{3} = 890N$*.*

13 Aula 13 - 03/05/2023

13.1 O que Esperar?

- Revisão Pré-Prova

13.2 Cinemática

13.2.1 Movimento Unidimensional

As equações do movimento unidimensional são

$$\vec{r}(t) \Rightarrow \vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \Rightarrow \vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}$$
$$\vec{v}(t) - \vec{v}(t_0) = \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t)dt \Rightarrow \vec{r}(t) - \vec{r}(t_0) = \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t)dt$$

13.2.2 Movimento Bidimensional

Em duas dimensões ou mais,

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{\imath} + y(t)\hat{\jmath} + z(t)\hat{k}(\text{ O mesmo para v(t) e a(t)}).$$

Neste caso, decompomos o movimento em cada eixo e tratamos como movimento unidimensional. No caso do movimento bidimensional uniforme, as velocidades em ambos os eixos são constantes, tal que

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_x t - t = \frac{x - x_0}{v_x} \\ y(t) = y_0 + v_y t. \end{cases}$$

A trajetória será $y = y_0 + \frac{v_y}{v_x}(x - x_0)$.

13.2.3 Trajetória de Projéteis

Vimos também sobre o movimento de projéteis. Nele, a velocidade no eixo x é constante; No eixo y, $v_y(t) = v_y^0 + at$, $a \neq 0$. Assim, $x(t) = x_0 + v_x^0 t$ e $y(t) = y_0 + v_y^0 t$. Além disso, a trajetória é dada por

$$y = \tan\theta x - \frac{gx^2}{2|v_0|^2 \cos^2(\theta)}$$

Utilizando esses dados, a altura máxima de um objeto em trajetória de projétil, (x_m, y_m), ocorre quando $v_y(t_m) = 0$, tal que $t_m = \frac{|\vec{v}_0| \sin(\theta)}{g}, y_m = \frac{1}{2}\frac{|v_0|^2 \sin^2(\theta)}{g}$. Finalmente, vimos o alcance de um objeto em lançamento, o qual é dado pelo ponto cartesiano $(x_r, 0)$:

$$x_r = \frac{v_0^2}{g}\sin\theta\cos\theta, \quad t_m = \frac{2|\vec{v}_0|\sin(\theta)}{g} = 2t_m$$

13.2.4 Movimento Circular

Além desses tipos de movimentos, aprendemos sobre o movimento circular, sumarizado na tabela

	Vetoriais	Variáveis angulares	Variáveis escalares
Posição	$\vec{r}(t)$	$\theta(t)$	$s(t) = R\theta(t)$
Velocidade	$\vec{v}(t)$	$\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt}$	$v(t) = \frac{ds(t)}{dt} = R\omega(t)$
Aceleração	$\vec{a}(t)$	$\alpha(t) = \frac{d\omega(t)}{dt} = \frac{d^2\theta(t)}{dt^2}$	$\lvert\vec{a}(t)\rvert = \frac{dv(t)}{dt} = R\alpha(t), \quad \lvert\vec{a}_{cp}\rvert = \frac{v^2}{R}$

Tabela 2: Resumo movimento circular.

13.3 Revisão de Dinâmica

A dinâmica é a relação entre o movimento e as interações/forças.

13.3.1 Leis de Newton

A primeira Lei de Newton é a seguinte:

> "Um corpo em repouso ou em Movimento Uniforme matném o seu estado a não ser que haja uma força."

A segunda relaciona massa e aceleração para descrever a interação:

$$\vec{F}_r = m\vec{a}.$$

A terceira e última é a chamada lei da ação e reação

> "Para toda força que é aplicada, ocorrerá uma força de reação com mesma intensidade, mas direção oposta"

13.3.2 Tipos de Força

Em seguida, vimos os tipos de força, sendo elas

1) Força Peso: $\vec{P} = m\vec{g}$.
2) Força Normal: Aparece em corpos que estão em contato, responsável por impedir objetos de entrarem um no outro. Caso o contato suma, a normal também desparece, ou seja, se perde o contato, $\vec{N} = 0$.
3) Força de Tração ($\vec{T}$): Atua no contexto de cordas, polias, etc.
4) Força Elástica: Força restaurativa quando uma mola é distorcida. $\vec{F} = -k\vec{x}$.

13.4 Exemplos

Exemplo 17. *Considere um forno esquentado até 200 graus. Num pedaço deste forno, há um pequeno buraco. Além disso, há algo dentro do forno. Através desse buraco, há um feixe de partículas saindo com velocidade $\vec{v}_0$. Na direção pela qual elas estão saindo, há um gradiente de campo magnético B' com uma força de origem magnética agindo nele, dada por $\vec{F} \approx \mu_B \vec{B}'$, em que μ_B é uma constante chamada magneton de Bohr com valor $\mu_B = 9.27 \cdot 10^{-24} J/T$. Quando a partícula passa pelo campo após percorrer a distância D, a força fará com que ela mude sua trajetória e comece a mover-se para baixo. No fim do sistema, tem uma máquina que registrará a posição em que a partícula irá parar, ou seja, um desvio Δy de onde ela originalmente teria parado caso continuasse a seguir reto. Temos $|v_0| = 400m/s, D = 10m, \Delta y = 19cm, B' = 2.5T/m$. Qual é o átomo?*

Vamos separar em eixos. No eixo x,

$$v_x = v_0^x = |\vec{v}_0|, \quad x(t) = |\vec{v}_0|t.$$

Disto segue que $t = \frac{D}{|\vec{v}_0|} = 0.025s$.

No eixo y,

$$y(t) = \frac{1}{2}at^2.$$

Podemos encontrar a aceleração notando que $F = ma = \mu_B B'$, *ou seja,* $\vec{a} = \frac{\mu_B B'}{m}$. *Assim,*

$$y(t) = \frac{1}{2}\frac{\mu_B B'}{m}t^2.$$

No instante final,

$$\Delta y = \frac{1}{2}\frac{\mu_B B'}{m}t_f^2 \Rightarrow m = \frac{1}{2}\frac{\mu_B B'}{\Delta y}t_f^2.$$

Podemos resolver essa conta com os dados do enunciado:

$$m = \frac{1}{2}\frac{9.27 \cdot 10^{-24} \cdot 2.5}{0.19}(0.025)^2 = 3.81 \cdot 10^{-26}kg.$$

Pela tabela periódica, utilizando a unidade de massa atômica como $1.66 \cdot 10^{-27}kg$, *temos*

$$m = m^* \cdot u,$$

sendo m^* *o número de massa atômica. Assim,*

$$m^* = \frac{m}{u} \approx 22.9 \approx 2 \cdot 11.$$

Portanto, os átomos saindo pelo fogão são de sódio.

Exemplo 18. *Seuponha que tem um jogador de futebol a uma distância d do gol. Ele chuta a bola, a qual faz um ângulo* θ *com o eixo horizontal. O gol possui uma altura h. Qual é a menor e a maior velocidade para fazer o gol? Dados* $d = 9m$, $h = 2.4m$, $\theta = 30°, g = 9.8m/s^2$.

Para entrar no gol, a bola deve percorrer toda a d e ficar no chão, ou acertar um lugar menor que h. Em outras palavras, temos uma restrição com relação à trajetória (Sempre que houver uma restrição de trajetória, utilize a equação da trajetória.). Segue que

$$y = \tan(\theta)x - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2(\theta)}.$$

Em $x = d$, $0 \le y \le h$, *tal que*

$$0 \le \tan(\theta)d - \frac{gd^2}{2v_0^2\cos^2(\theta)} \le h.$$

Vamos quebrar o problema em duas partes. Na primeira,

$$\begin{aligned}
&\frac{gd^2}{2v_0^2\cos^2\theta} \le \tan(\theta)d \Rightarrow gd^2 \le \tan(\theta)d \cdot 2v_0^2\cos^2(\theta) \\
&\Rightarrow \frac{gd^2}{\tan(\theta)d \cdot 2\cos^2(\theta)} \le v_0^2 \Rightarrow \frac{gd}{2\sin\theta\cos\theta} \le v_0^2 \\
&\Rightarrow v_0 \ge 10.09m/s.
\end{aligned}$$

Para a parte 2,

$$\begin{aligned}
&\tan(\theta)d - \frac{gd^2}{2v_0^2\cos^2(\theta)} \le h \Rightarrow \tan(\theta)d - h \le \frac{gd^2}{2v_0^2\cos^2(\theta)} \\
&\Rightarrow v_0^2(\tan(\theta)d - h) \le \frac{gd^2}{2\cos^2(\theta)} \Rightarrow v_0^2 \le \frac{gd^2}{2\cos^2(\theta)(\tan(\theta)d - h)} \\
&v_0 \le 13.76m/s.
\end{aligned}$$

Portanto, $10.09m/s \le v_0 \le 13.76m/s$.