UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS E COMPUTACIONAIS - ICMC

Notas de Física

Renan Wenzel - 11169472

Patrícia Christina Marques Castilho - patricia.castilho@ifsc.usp.br

17 de abril de 2023

Conteúdo

1 Aula 00 - 23/03/2023

(Revisão Unidades de Medidas)

2 Aula 01 - 27/03/2023

- Revisar propriedades de derivadas;
- Aplicar derivadas em movimento 1D.

2.1 Movimentos 1D

Dada uma partícula com posição descrita por $x = x(t)$, em que t é a variável de tempo, denotamos seu deslocamento por $\Delta x = x_2 - x_1 = x(t_2) - x(t_1)$. Analogamente, o intervalo de tmepo é definido por $\Delta t = t_2 - t_1$. Com essas ferramentas, já podemos definir a velocidade média de um objeto em uma dimensão como $\vec{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$. Observe que, quanto menor o intervalo de tempo, mais momentâneo se torna essa definição, de modo que a velocidade instantânea pode ser encontrada como

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \vec{v}(t).$$

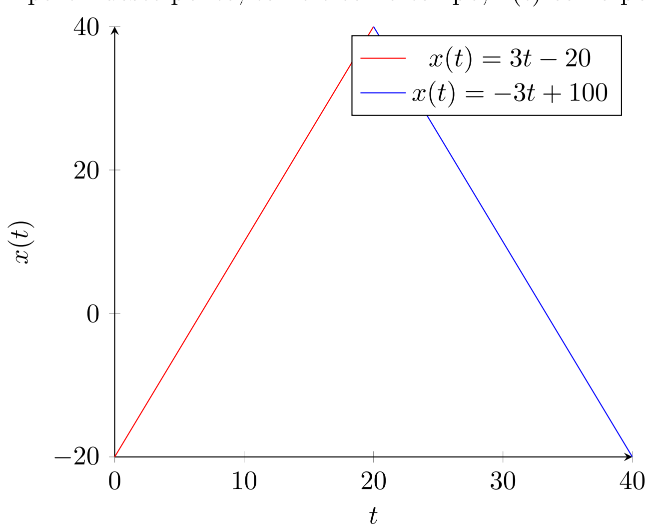
Regras de derivadas:

$$f(t) = c \Rightarrow \frac{df}{dt} = 0 \text{ Derivada de uma constante é sempre nula;}$$
$$f(t) = x^n \Rightarrow \frac{df}{dt} = nx^{n-1} \text{ Regra do tombo;}$$
$$f(t) = A\sin(t) \Rightarrow \frac{df}{dt} = A\cos(t);$$
$$f(t) = B\cos(t) \Rightarrow \frac{df}{dt} = -B\sin(t);$$
$$f(t) = Ce^t \Rightarrow \frac{df}{dt} = Ce^t.$$

Exemplo 1.

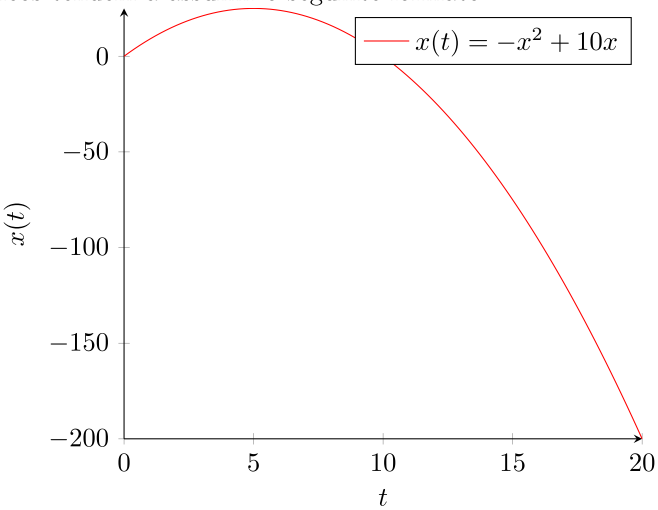
$$i) f(t) = 3t^4 + t^2 \Rightarrow \frac{df}{dt} = 12t^3 + 2t$$
$$ii) f(t) = 5\sin(t) + 3(t^2 + 1) = 5\sin(t) + 3t^2 + 3 \Rightarrow \frac{df}{dt} = 5\cos(t) + 6t$$

A partir deste ponto, tome t como tempo, x(t) como posição e v(t) a velocidade instantânea.

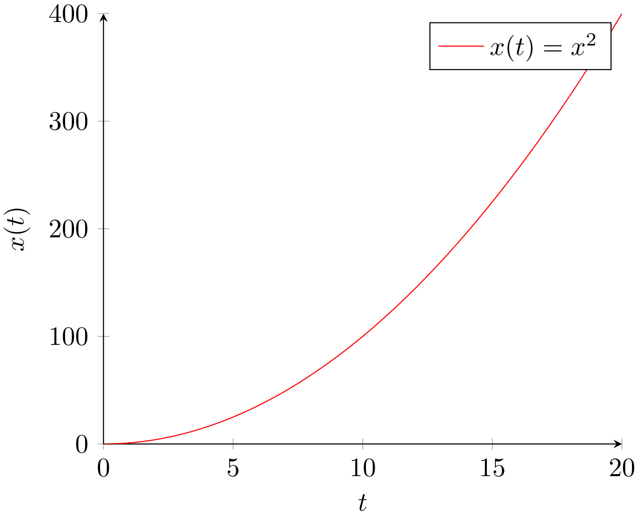


Esse movimento em que a velocidade é descrita por uma linha reta é conhecido como movimento retilíneo uniforme, pois a velocidade $v(t)$ muda de forma linear, i.e., $\frac{dx}{dt} = c$, em que c é uma constante.

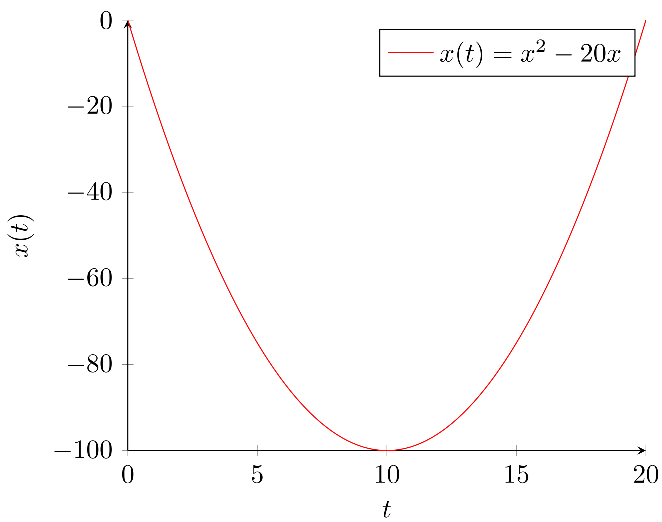
Por outro lado, há outro tipo de movimento, o movimento retilíneo uniformemente variado, em que a velocidade não é constante. A ação responsável por mudar a velocidade é conhecida como aceleração, e os gráficos tendem a assumir o seguinte formato



Ou, caso a velocidade cresça com o tempo,



Há ainda o caso em que a velocidade cresce por um tempo e diminui depois, com gráficos como o que segue



Nestes casos, para calcular o deslocamento da particula, precisamos somar muito mais intervalos de tempo. Para isso, observe que cada instante, a posição da partícula pode ser encontrada multiplicando-se o intervalo de tempo pela velocidade instanânea, i.e., $\Delta x_i' = v_i' \Delta t_i'$. Quebrando os intervalos desta forma, o deslocamento de um ponto a outro é denotado por

$$\Delta x_{1,2} = x(t_2) - x(t_1) \approx \sum_{k=1}^{N} \Delta x_i' = \sum_{k=1}^{N} v_i' \Delta t_i'$$

Assim como para a velocidade instantânea, quanto menor tomarmos o intervalo de tempo, mais preciso é o valor encontrado para $\Delta x_{1,2}$, o que indica uma boa oportunidade para o uso do limite novamente. Com isso, definimos

$$x(t_2) - x(t_1) = \lim_{\Delta t' \to 0} \sum_{i=1}^{N} v(t_i') \Delta t_i' = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$$

Este último símbolo, chamado integral, descreve a área "embaixo" da curva da função f(t) dentro do intervalo $[t_1, t_2]$. Supondo que c e k são constantes quaisquer, seguem abaixo algumas das regras de integração:

$$i) f(t) = ct^n \Rightarrow \frac{df}{dt} = nct^{n-1} \Rightarrow F(t) = \frac{ct^{n+1}}{n+1} \text{ (Primitiva de f)}$$

$$ii) \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt = F(t_2) - F(t_1) = \frac{c}{n+1} t_2^{n+1} - \frac{c}{n+1} t_1^{n+1} \text{ (Integral definida de f)}$$

$$iii) \int f(t) dt = \frac{c}{n+1} t^{n+1} + k \text{ (Integral indefinida de f)}$$

Para conferir se a integral está correta, é preciso derivar a função F e, se obter como resultado a função f, significa que está correto. Com este conhecimento em mente, segue que

$$\boxed{x(t) = \int v_0 dt = v_0 t + x_0}$$

Algumas outras regras importantes:

$$iv) \frac{d \sin(t)}{dt} = \cos(t) \Rightarrow \int \cos(t) dt = \sin(t) + c$$

$$v) \frac{d \cos(t)}{dt} = -\sin(t) \Rightarrow \int \sin(t) dt = \cos(t) + c$$

$$vi) \frac{de^t}{dt} = e^t \Rightarrow \int e^t dt = e^t + c$$

Ou seja, em certo sentido, a integral e a derivada são dois lados da mesma moeda, assim como mulitplicação e divisão ou adição e subtração.

3 Aula 02 - 29/03/2023

3.1 Motivações

- Estudar a aceleração;
- Entender o Movimento Retilíneo Uniformemente Variado.

3.2 Aceleração

Definimos previamente a velocidade média como sendo a variação de tempo dividindo o deslocamento, sendo, portanto, uma quantidade representando a taxa de variação da posição em um intervalo de tempo. De forma análoga, definimos a aceleração como a taxa de variação da velocidade em um intervalo de tempo, ou seja,

$$\vec{a_m} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}.$$

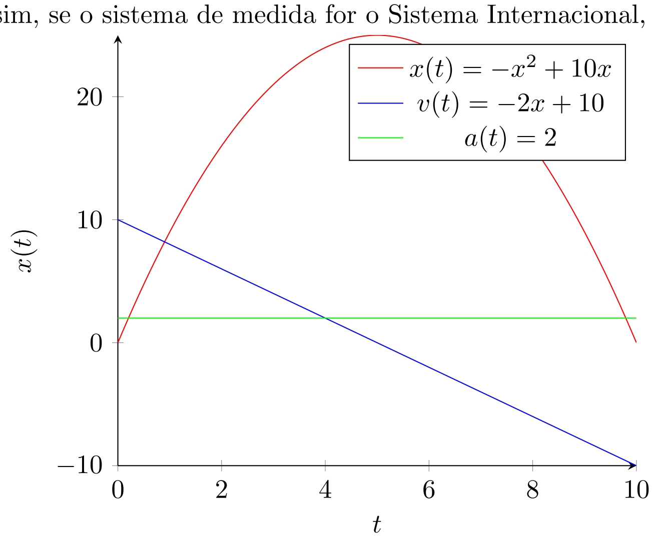
Ainda mais, se ela for positiva, a velocidade aumenta. Caso contrário, ela diminui. Ainda repetindo o processo feito para o caso da velocidade, podemos encontrar uma aceleração instanânea como

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} \right] = \frac{dv(t)}{dt}$$

Observe também que

$$a(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx(t)}{dt} \right) = \frac{d^2 x}{dt^2}.$$

Utilizando a análise dimensional, é possível encontrar a dimensão da aceleração como $[a] = \frac{[v]}{[t]} = \frac{\frac{[L]}{[t]}}{[t]} = \frac{[L]}{[t]^2}$. Assim, se o sistema de medida for o Sistema Internacional, $[a] = \frac{m}{s^2}$.



3.3 Movimento Retilíneo Uniformemente Variado.

Sabendo que $a = \dfrac{d^2 x(t)}{dt^2}$, podemos fazer o caminho oposto para encontrar uma fórmula para a posição sabendo a aceleração. De fato, dado um intervalo de tempo $[t_0, t]$,

$$v(t) = \int_{t_0}^{t} a(t) dt = at \Big|_{t_0}^{t} = at - at_0$$

Sabemos, também, que $v(t) - v(t_0) = \Delta v$, tal que

$$v(t) = v(t_0) + a(t - t_0) = v_0 + a(t - t_0)$$

Além disso, vimos que

$$\Delta x = x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} v(t)dt.$$

Juntando tudo, segue a fórmula dita:

$$\begin{aligned}
x(t) - x(t_0) = &\overbrace{\int_{t_0}^{t}[v_0 + a(t-t_0)]dt}^{\int f(t)+g(t)dt=\int f(t)dt+\int g(t)dt} = \overbrace{\int_{t_0}^{t} v_0 dt}^{\int cdt=ct} + \overbrace{\int_{t_0}^{t} atdt}^{\int t^n dt=\frac{t^{n+1}}{n+1}} - \int_{t_0}^{t} at_0 dt \\
&\Rightarrow x(t) - x(t_0) = v_0 t\Big|_{t_0}^{t} + a\frac{t^2}{2}\Big|_{t_0}^{t} - at_0 t\Big|_{t_0}^{t} \\
&= v_0(t-t_0) + a\frac{(t^2-t_0^2)}{2} - at_0(t-t_0) \\
&= v_0(t-t_0) + a\frac{t^2-t_0^2}{2} - at_0 t + at_0^2 = v_0 t - v_0 t_0 + \frac{a}{2}(t^2 - 2t_0 t + 2t_0^2) \\
&= v_0(t-t_0) + \frac{a}{2}(t-t_0)^2 \\
&\Rightarrow x(t) = x(t_0) + v_0(t-t_0) + \frac{1}{2}a(t-t_0)^2.
\end{aligned}$$

Com isso, no caso em que $t_0 = 0$, segue que

$$\boxed{x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}}$$

Uma coisa notável é que todas essas fórmulas estão dependentes de tempo. No entanto, será que é possível se livrar dessa variável e relacionar, por exemplo, velocidade e posição? A resposta é sim! E vamos mostrar como a seguir, na equação conhecida como Equação de Torricelli. Com efeito,

$$\begin{aligned}
&(I) \quad (t-t_0) = \frac{v(t)-v_0}{a} = \frac{v-v_0}{a} \\
&(II) \quad x(t) = x_0 + v_0(t-t_0) + \frac{1}{2}a(t-t_0)^2 \\
&(I \text{ com } II) \quad x = x_0 + v_0\frac{v-v_0}{a} + \frac{1}{2}a\frac{v-v_0}{a} \\
&\Rightarrow x = x_0 + \frac{1}{a}\left\{v_0 v - v_0^2 + \frac{1}{2}(v^2 - 2vv_0 + v_0^2)\right\} \\
&= x_0 + \frac{1}{a}\left\{-v_0^2 + \frac{v^2}{2} + \frac{v_0^2}{2}\right\} \\
&\Rightarrow x - x_0 = \frac{1}{2a}\left[v^2 - v_0^2\right] \iff [v^2 - v_0^2] = 2a(x-x_0).
\end{aligned}$$

Portanto, chegamos na Equação de Torricelli

$$\boxed{v^2 = v_0^2 + 2a(x-x_0)}$$

Para reforçar o que foi visto até agora, vejamos um exemplo.

Exemplo 2. *Suponha que um carro freia uniformemente, passando de 60km/h para 30km/h em 5 segundos. Qual é a distância que o carro percorrerá até parar? Em quanto tempo?*

Solução: *Sabemos que* $x(t) = x_0 + v_0(t-t_0) + \frac{1}{2}a(t-t_0)^2, v(t) = v_0 + a(t-t_0),$ *e* $v^2 = v_0^2 + 2a(x-x_0)$. *Além disso, como é até o carro parar, a velocidade final é 0km/h, a variação de tempo até o momento em que a velocidade atinge 30km/h (=8.333m/s) é dada como* $\Delta t = 5 - 0 = 5s$ *, sendo a velocidade inicial 60km/h (=16,666m/s). Pela equação dois,*

$$a = \frac{v(t_1) - v_0}{t_1 - t_0} = \frac{8.33 - 16.66}{5} = -1.66\frac{m}{s^2}$$

Agora, para obter a distância, sendo $v_2 = 0km/h$ o valor da aceleração no tempo em que o carro para (o segundo percurso), utilizamos Torricelli para obter o deslocamento no pedaço final do percurso

$$v_2^2 = v_1^2 + 2a(x_2 - x_1) \Rightarrow 0 = 8.33^2 + 2(-1.66)\Delta x_2$$

Assim, isolando o Δx_2,

$$\Delta x_2 = \frac{8.33^2}{3.32} = \textit{ Professora vai passar na próxima aula.}$$

Ademais, para encontrar todo o caminho que o carro andou, temos

$$0 = v_0^2 + 2a(x_2 - x_0) = 16.66^2 + 2(-1.66)\Delta x \Rightarrow \Delta x = \frac{16.66^2}{3.32}$$

Finalmente, o instante de tempo pode ser encontrado fazendo

$$v_2(t) = v_1 + a(t_2 - t_0) \Rightarrow 0 = 8.33 - 1.66\Delta t_2 \Rightarrow \Delta t_2 = 5s. \blacksquare$$

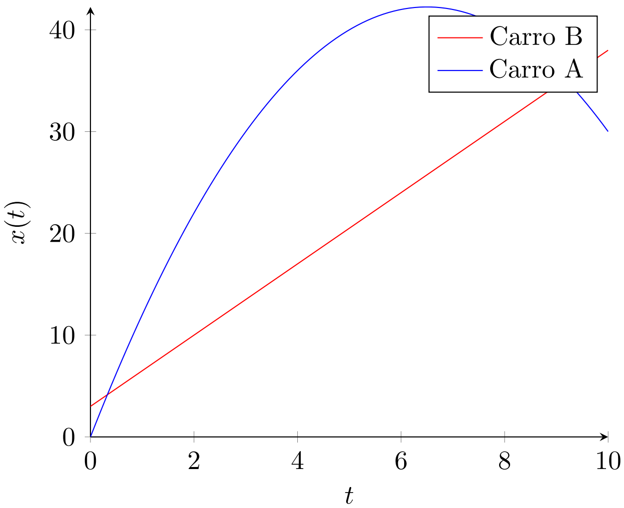
4 Aula 03 - 30/03/2023

4.1 Motivações

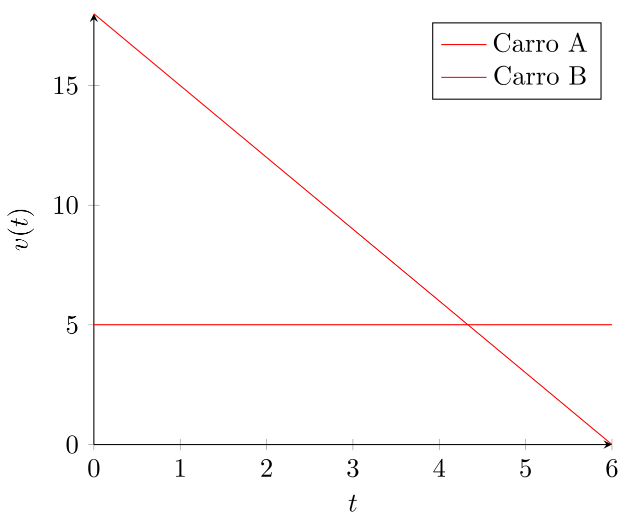
- Resolução de Exercícios.

4.2 Exercício 29 - Tipler

"Considere a trajetória de dois carros, o Carro A e o Carro B. (a) Existe algum instante para o qual os carros estão lado-a-lado? (b) Eles viajam sempre no mesmo sentido? (c) Eles viajam com a mesma velocidade em algum instante t? (d) Para que t os carros estão mais distantes entre si? (e) Esboce os gráficos de $v \times t$'



Os carros se encontram lado-a-lado quando os gráficos se cruzam, ou seja, em t = 1s e t = 9s (Tipler mais acurado que meu gráfico.). É notável quer eles não estão sempre no mesmo sentido, visto que, a partir de 6s, o gráfico do carro B passa a mudar o sentido. Em aproximadamente 5s, ambos estão com a reta tangente iguais, ou seja, estão com a mesma velocidade, e distância entre eles está maior exatamente no ponto em que as velocidades estão iguais. Finalmente, seguem os gráficos:



4.3 Exercício 44 - Tipler

"Um carro viaja em linha reta com $\vec{v} = 80$km/h durante $\Delta t_1 = 2.5$h. Depois, $\vec{v_2} = 40$km/h, $\Delta t_2 = 1.5$h. Qual é o deslocamento total? E qual é a velocidade $\vec{v}$ total?"

$$(a) \quad \Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 = \vec{v_1}\Delta t_1 + \vec{v_2}\Delta t_2 \Rightarrow \Delta x = 260\text{km}.$$
$$(b) \quad \vec{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{260}{4} = 65\text{km/h}.$$

4.4 Exercício 58 - Tipler

"Um carro acelera de 48.3km/h para 80.5km/h em 3.70s. Qual a aceleração média?"

Primeiramente, precisamos converter as unidades para medidas iguais. Com isso, note que $\vec{v_1} = 48.3km/h = 13.52m/s, \vec{v_2} = 80.5km/h = 22.54m/s$. Assim, chegamos em

$$\vec{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t} \approx 2.4\text{m/s}.$$

4.5 Exercício 67 - Tipler

"Um corpo está em uma posição inicial x_1 com velocidade inicial $\vec{v_1}$. Passado um tempo, ele se encontra na posição x_2 com velocidade $\vec{v_2}$. Qual é a aceleração deste corpo?"

Utilizaremos Torricelli. sabemos que

$$(1): \quad x_1 = 6m, \vec{v_1} = 10m/s$$
$$(2): \quad x_2 = 10m, \vec{v_2} = 15m/s.$$

Deste modo, $v^2 = v_0^2 + 2a\Delta x \Rightarrow v_2^2 = v_1^2 + 2a(x_2 - x_1) \Rightarrow a \approx 16m/s^2$

4.6 Exercício 72 - Tipler

"Um parafuso se desprende de um elevador subindo a $v_0 = 6m/s$. O parafuso atinge o fundo do poço em 3s. (a) Qual era a altura do elevador? (b) Qual é a velocidade do parafuso no chão? Tome g = 9.8 m/s^2"

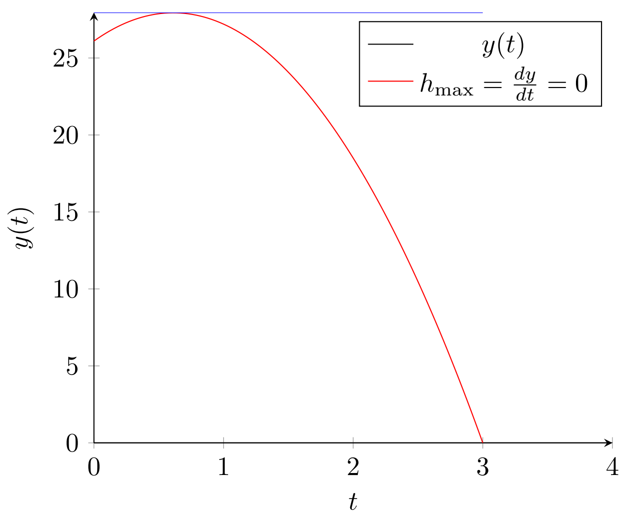
Sabemos que $t_0 = 0s, y(t_0) = h, v(t_0) = v_0$. Com isso, podemos descrever $y(t) = h + v_0 t + \frac{1}{2}gt^2$. Vamos responder, agora, o item a, isto é, qual é o valor da altura h? Segue que, em $t = 3s, y(t) = 0$. Utilizando a fórmula,

$$h = -v_0 t + \frac{1}{2}gt^2 = -6 \cdot 3 + \frac{1}{2}9.8 \cdot 3^2 = 26.1m$$

Com relação ao item (b), vimos que $v(t) = v_0 + at$. Deste modo,

$$v(3s) = 6 - 9.8 \cdot 3 = -23.4m/s$$

Indo um pouco além do que foi pedido, analisemos o movimento do parafuso. É possível concluir que o parafuso atingirá a altura máxima no instante em que $t^* = \frac{v_0}{g} = 0.6s$, visto que este momento ocorre quando $v(t) = v_0 - gt = 0$. Com isso, conclui-se que a altura máxima é $y(t^*) = h + v_0 t^* - \frac{1}{2}g{t^*}^2 \approx 27.5m$. No gráfico,



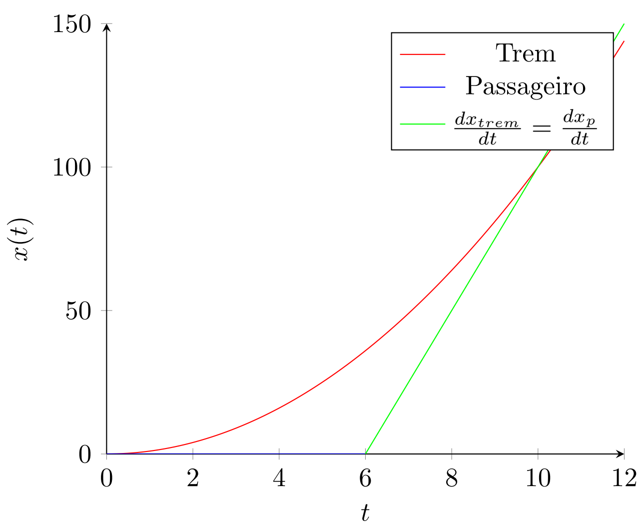
4.7 Exemplo - Aula 06 Vanderlei

"Suponha que há um trem parado no instante t=0 com aceleração a. Passados 6s, um passageiro chega ao local e observa o trem na posição x_{trem_1}. Este passageiro sai correndo com velocidade v_0 para tentar alcançar o trem. Qual é a velocidade mínima que o passageiro precisa atingir para alcançá-lo?"

Com relação ao trem, suas condições iniciais são $t_0 = 0, x_{trem} = 0, v_{trem} = 0$, tal que $x_{trem}(t) = \frac{1}{2}at^2$. Por outro lado, quanto ao passageiro, quando $t = 6s, x_p = 0$, de modo que $x_p(t) = x_{p_0} + v_0 t$. Como temos a informação da posição do passageiro aos 6s,

$$x_p(6) = x_{p_0} + v_0 \cdot 6 = 0 \Rightarrow x_{p_0} = -6v_0 \Rightarrow x_p(t) = v_0(t-6).$$

No momento em que o passageiro alcança o trem, eles possuem posições iguais, isto é, $x_p(t) = x_{trem}(t)$. Graficamente,



Ou seja, buscamos t^* tal que $x_p(t^*) = x_{trem}(t^*), v_p(t^*) = v_{trem}(t^*)$. Com efeito,

$$v_0(t^* - 6) = \frac{a{t^*}^2}{2} \Rightarrow v_0 = at^* \Rightarrow t^* = \frac{v_0}{a}$$
$$v_0 = \frac{a}{2}\frac{(\frac{v_0}{a})^2}{\frac{v_0}{a} - 6} \Rightarrow \frac{v_0^2}{2a} = 6v_0 \Rightarrow v_0 = 12a.$$

Outra forma de resolver é utilizando o fato de que quando $\frac{dv}{dt} = 0$, a função está num mínimo. Ou seja, basta encontrar o valor mínimo de v_0 que satisfaça o que buscamos. Temos

$$v_0(t-6) = \frac{at^2}{2} \Rightarrow v_0(t) = \frac{at^2}{2}\frac{1}{(t-6)}.$$

Agora, derivando essa equação para v_0,

$$\frac{dv_0}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{at^2}{2}\frac{1}{t-6}\right) = \frac{d}{dt}(f(t)g(t)),$$

em que $f(t) = \frac{at^2}{2}, g(t) = (t-6)^{-1}$. Fazemos isso porque há uma regra para derivar o produto de funções, a Regra do Produto

$$\boxed{\frac{df(t)g(t)}{dt} = g(t)\frac{df(t)}{dt} + f(t)\frac{dg(t)}{dt}}$$

Derivando individualmente f e g,

$$\frac{df(t)}{dt} = at, \quad \frac{dg(t)}{dt} = -(t-6)^{-2} = -\frac{1}{(t-6)^2}.$$

Agora, vamos juntar tudo para obter a derivada de v_0:

$$\begin{aligned}
\frac{dv_0}{dt} &= \frac{df(t)}{dt}g(t) + \frac{dg(t)}{dt}f(t) = \frac{at}{t-6} - \frac{1}{2(t-6)^2}at^2 \\
&= at\left(\frac{1}{t-6} - \frac{t}{2(t-6)^2}\right) = 0 \\
&\Rightarrow \frac{1}{t-6} = \frac{t}{2(t-6)} \Rightarrow 1 = \frac{t}{2(t-6)} \\
&\Rightarrow 2(t-6) = t \Rightarrow 2t - t = 12 \Rightarrow t = 12s.
\end{aligned}$$

5 Aula 04 - 10/04/2023

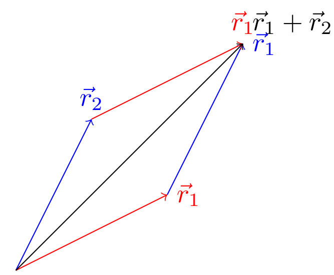
5.1 Motivações

- Iniciar os estudos de movimentos em um plano todo (duas dimensões);
- Revisar vetores e sua manipulação.

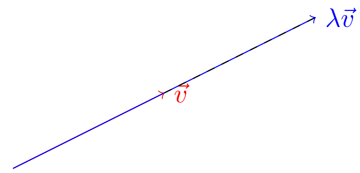
5.2 Vetores

Começamos com um estudo das propriedades de veotres. Dados vetores $\vec{r_1}, \vec{r_2}$ e um número real λ, definimos:

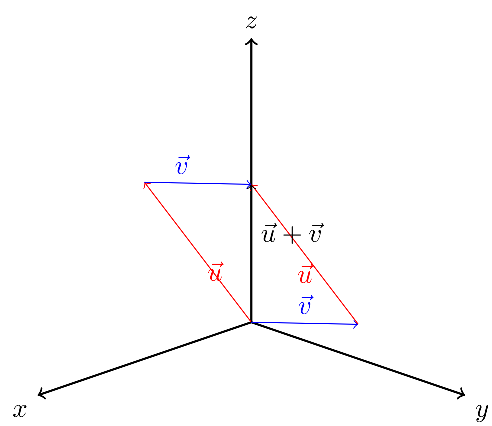
i) A soma dos vetores:



ii) A multiplicação por escalar: $\lambda(r_1 + r_2)$ (Essencialmente, o resultado é aumentar ou diminuir o tamanho da seta.)



A título de curiosidade, a soma de vetores em três dimensões seria desta forma:



Porém, não basta utilizar apenas representações gráficas para vetores. Desta forma, é comum definirmos um sistema de coordenadas cartesiano para suas componentes. Assim, um vetor $\vec{u}$ pode ser decomposto em uma coordenada x e outra coordenada y:

$$\vec{u} = u_x\hat{i} + u_y\hat{j}(+u_z\hat{k})$$

chamamos os valores u_x, u_y, u_z de projeções, sendo a última um objeto presente apenas no caso de três coordenadas. Com isso, definimos o módulo do vetor, ou seja, seu tamanho, pela fórmula

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2},$$

e, de brinde, ganhamos fórmulas para as projeções em cada coordenada:

$$\begin{aligned} &u_x = |u|\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{u_x}{|\vec{u}|} \\ &u_y = |u|\sin\theta \Rightarrow \sin\theta = \frac{u_y}{|\vec{u}|} \\ &\tan\theta = \frac{u_y}{u_x}. \end{aligned}$$

É importante, tamém, darmos uma forma de obter um betor de módulo 1, i.e., um vetor unitário, visto que ele pode nos fornecer a informação do valor do ângulo θ, a direção, etc. Ele é obtido reduzindo um vetor u pelo seu módulo,

$$\hat{u} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}.$$

Uma utilidade imediata da definição em coordenadas é que agora temos um modo de tratar a soma de vetores algebricamente

$$\begin{aligned} &\text{Soma: } \vec{u} + \vec{v} = (u_x\hat{i} + u_y\hat{j}) + (v_x\hat{i} + v_y\hat{j}) = (u_x + v_x)\hat{i} + (u_y + v_y)\hat{j} \\ &\text{Multiplicação por Escalar: } \lambda\vec{u} = \lambda(u_x\hat{i} + u_y\hat{j}) = \lambda u_x\hat{i} + \lambda u_y\hat{j} \\ &\theta = ctg\left(\frac{\lambda u_y}{\lambda u_x}\right) = ctg\left(\frac{u_y}{u_x}\right). \end{aligned}$$

Agora podemos ir à aplicação física dessa discussão, o deslocamento de uma partícula no plano. Nesta configuração, normalmente terá-se uma partícula com posição $\vec{x}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} \quad (+z(t)\hat{k})$. Para realizar o estudo desses casos, vamos decompor o movimento dela em cada eixo, ou seja, quebramos o movimento no plano em dois movimentos independentes, um em cada eixo x ou y. Nestas condições, o deslocamento de uma partícula de uma posição 1 até uma posição 2 será

$$\vec{x_2} - \vec{x_1} = (x_2\hat{i} + y_2\hat{j}) - (x_1\hat{i} + y_1\hat{j}) = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j}.$$

Com isso, podemos escrever que o deslocamento $\Delta\vec{r}$ é

$$\Delta\vec{r} = \Delta x\hat{i} + \Delta y\hat{j}.$$

Ainda mais, se conhecemos o valor do ângulo entre as posições 1 e 2 e o módulo dos vetores representando-as,

$$|\Delta r|^2 = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2\cos\theta.$$

Tendo o básico do deslocamento, podemos repetir o raciocínio prévio para trabalhar com aceleração e velocidade. De fato,

$$\vec{v_m} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}, \quad \vec{a_m} = \frac{\Delta\vec{v_m}}{\Delta t}$$

e os valores instantâneos serão dados por

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\hat{i} + \frac{dy(t)}{dt}\hat{j} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j}. \\ \vec{a}(t) &= \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{dv_x(t)}{dt}\hat{i} + \frac{dv_y(t)}{dt}\hat{j} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j}. \end{aligned}$$

Além disso, o módulo e orientação desses valores serão dados por

$$\begin{aligned} |\vec{v}| &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2}, \quad \theta_v = ctg\left(\frac{v_y}{v_x}\right) \\ |\vec{a}| &= \sqrt{a_x^2 + a_y^2}, \quad \theta_a = ctg\left(\frac{a_y}{a_x}\right). \end{aligned}$$

Note que a aceleração não aponta na direção da velocidade em si, mas sim na direção da **variação** da velocidade.

5.3 Movimento Uniforme Bidimensional

Considere uma partícula com posição $\vec{r}(t)$ e uma orientação, tal que forma um ângulo θ com o plano. Como estaremos considerando o movimento do tipo uniforme, a aceleração é nula e a velocidade $\vec{v}(t) = v_0$ é constante, tendo módulo v_0 e orientação θ. Em outras palavras, as componentes desse vetor serão, também, constantes, isto é,

$$\text{constantes}\begin{cases} v_x(t) = v_{x_0} \\ v_y(t) = v_{y_0}. \end{cases}$$

Desta forma, a decomposição da velocidade em coordenadas é tal que

$$\begin{aligned} &\text{Eixo x: } v_x(t) = v_{x_0} \Rightarrow x(t) = x_0 + v_{x_0}(t - t_0), \quad x_0 = x(t_0) \\ &\text{Eixo y: } v_y(t) = v_{y_0} \Rightarrow y(t) = y_0 + v_{y_0}(t - t_0), \quad y_0 = y(t_0). \end{aligned}$$

Logo, a posição da partícula no plano será dada por

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} = (x_0 + v_{x_0}(t - t_0)\hat{i}) + (y_0 + v_{y_0}\hat{j}).$$

Note que, quando falamos de trajetória de uma partícula ou objeto, buscamos uma relação entre as componentes x(t) e y(t) que independe do tempo, isto é, a relação temporal é dada de forma implicita. Uma forma de fazer isso é a através da tangente, pois

$$\frac{y(t) - t_0}{x(t) - x_0} = \frac{v_{y_0}(t - t_0)}{v_{x_0}(t - t_0)} = \frac{v_{y_0}}{v_{x_0}} = \tan\theta_0.$$

Com isso,

$$y(t) - y_0 = \tan\theta_0(x(t) - x_0) \Rightarrow y = \tan(\theta_0)x - \tan(\theta_0)x_0 + y_0,$$

ou seja, y tem a forma de um equação da reta com inclinação constante e igual a $\tan\theta_0$.

6 Aula 06 - 13/04/2023

6.1 Motivações

- Revisar movimento relativo;

6.2 Movimento Relativo

Fixada uma origem O, a soma dos vetores representando os corpos A e B

$$\vec{r}_{AO} + \vec{r}_{BA} = \vec{r}_{BO}$$

nos fornece a direção relativa do corpo B com relação a A. Se A e B estão se movendo, ou seja, os vetores deles possuem dependência no tmepo ($\vec{r}_{AO} = \vec{r}_{AO}(t), \vec{r}_{BO} = \vec{r}_{BO}(t)$), então

$$\vec{r}_{BA}(t) = \vec{r}_{BO}(t) + \vec{r}_{AO}(t),$$

ou seja, a posição relativa de B com relação a A também dependerá do tempo. Além de posição relativa, podemos definir outros conceitos, tais como a velocidade relativa:

$$\vec{v}_{BA}(t) = \frac{d\vec{r}_{BA}(t)}{dt} = \frac{d\vec{r}_{BO}}{dt} + \frac{d\vec{r}_{AO}}{dt} \Rightarrow \vec{v}_{BA}(t) = \vec{v}_{BO}(t) + \vec{v}_{AO}(t)$$

e aceleração relativa de modo análogo, i.e., $\vec{a}_{BA}(t) = \vec{a}_{BO}(t) + \vec{a}_{AO}(t)$. Vejamos alguns exemplos

Exemplo 3. *Considere um sistema em que um carrinho viaja com velocidade $\vec{v}_r$ e tem um passageiro $\vec{v}_p$ com ele. Ambos se movem para a direita. Neste caso, há o sistema referencial de inérca da pessoa dentro do trem. Buscamos descobrir a velocidade da pessoa com relação ao trem. De fato, segue que*

$$\vec{v}_p = \vec{v}_{PT} + \vec{v}_T.$$

Exemplo 4. *Considere um sistema análogo ao anterior, mas, embaixo, há uma plataforma se movendo para a esquerda com velocidade igual à do trem. Neste caso, há o sistema referencial de inérca da pessoa dentro do trem. Buscamos descobrir a velocidade da pessoa com relação à plataforma. Obtemos*

$$\vec{v}_{PT} = \vec{v}^x_{PT}\hat{\imath} + \vec{v}^y_{PT}\hat{\jmath}. \Rightarrow \vec{v}_p = (\vec{v}^x_{PT} + \vec{v}_T)\hat{\imath} + \vec{v}^y_P\hat{\jmath}$$

Exemplo 5. *(Exemplo 32 do Tipler): Considere um sistema de avião e vento, no qual o módulo da velocidade do avião é de 200km/h e, o da velocidade do vento, é 90km/h. O vento é dado por um vetor apontando para a direito, enquanto o avião é um vetor apontando para cima. Pergunta-se: (a) Qual é a orientação que o avião deve voar? (Ambos estão sendo vistos do solo.) (b) Qual é o módulo da velocidade do avião visto do solo? (a) Segue que*

$$\vec{v}_{AO} = \vec{v}_A - \vec{v}_v \Rightarrow \sin\theta = \frac{|\vec{v}_v|}{|\vec{v}_{av}|} = \frac{90}{200} = \frac{9}{20} \approx 27\,\mathrm{deg}$$

(b) Sabemos, por pitágora, que

$$|\vec{v}_{AT}|^2 = |\vec{v}_v|^2 + |\vec{v}_a|^2 \Rightarrow |\vec{v}_a| = \sqrt{|\vec{v}_{av}|^2 - |\vec{v}_v|^2} = \sqrt{51900} \approx 178km/h$$

Com relação a este último exemplo, por que a velocidade $\vec{v}_a$ tem valor 178km/h e não 200 - 90 = 110km/h? A resposta está na decomposição de $\vec{v}_{av}$, pois

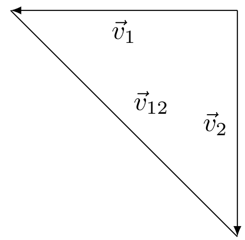
$$v^x_{av} = |\vec{v}_{av}|\sin\theta = -200 \cdot 0.454 \approx -90km/h$$
$$v^y_{av} = |\vec{v}_{av}|\cos\theta = 200 \cdot 0.891 \approx 178km/h.$$

Exemplo 6. *Suponha que, num instante t_0, dois trens estão andando em direção a uma plataforma. O trem um chegou nela, vindo do Norte, enquanto o trem dois, vindo pelo Leste, ainda se move, ambos com velocidade*

$$|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| = 60km/h.$$

Passados dois minutos, o trem 2 alcança a plataforma e continua andando na direção Oeste com velocidade $\vec{v}_2$ e o trem um continuou sua viagem ao Sul com velocidade $\vec{v}_1$. Pede-se: (a) Determine o vetor $\vec{v}_{21}$ da velocidade relativa dos trens. (b) Encontre, para este vetor do item (a), seu módulo (c) Quando a distância entre os vetores é mínima?

Faremos o diagrama de velocidades. Nele, $|v_1| = |v_2|$.



Além disso, pelo desenho,

$$\sin\theta = \frac{|\vec{v}_2|}{|\vec{v}_{21}|}, \quad \cos\theta = \frac{|\vec{v}_1|}{|\vec{v}_{21}|} = \frac{|\vec{v}_2|}{|\vec{v}_{21}|} = \sin\theta.$$

A igualdade entre seno e cosseno ocorre quando o ângulo vale 45 graus, ou seja, $\theta = 45\deg$. Assim,

$$\vec{v}_{21} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = -|\vec{v}_2|\hat{\imath} - (-|\vec{v}_1|\hat{\jmath}) \Rightarrow \vec{v}_{21} = -|\vec{v}_2|\hat{\imath} + |\vec{v}_1|\hat{\jmath}.$$

Logo,

$$|\vec{v}_{21}| = \sqrt{|\vec{v}_1|^2 + |\vec{v}_2|^2} \approx 85km/h$$

Para resolver, agora, o item b, a comecemos pela posição relativa 2 nos instantes t=0, t=2min e t=4min. Quanto ao trem 2, as informações que temos indicam que ele se move no eixo x ($y_2(t) = 0$), em t=2min, ele está na origem ($x_2(2min) = 0$) e, deste modo,

$$\vec{r}_2(t) = x_2(t)\hat{\imath} + y_2(t)\hat{\jmath} = x_2(t)\hat{\imath} \Rightarrow x_2(t) = x_{2O} + |\vec{v}_2|t$$

Utilizando o valor que sabemos, i.e., x(2min), segue que, convertendo 2 minutos para horas ($2min \approx 0.03h$) ,

$$x(0.03) = 0 = x_{2O} - 60 \cdot 0.03 \Rightarrow x_{2O} = 60 \cdot 0.03 = 2km.$$

Agora, sobre o trem 1, sabe-se que ele se move no eixo y, ou seja, $x_1(t) - 0$, tal que

$$y_1(t) = -|\vec{v}_1|t = -60t$$

Com essas informaçẽs, encontramos os valores

$$\begin{aligned}
t = 0min: &\quad x_1(0) = 0, y_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 2km, y_2(0) = 0km \\
t = 2min: &\quad x_1(2) = 0, y_1(2) = -2km, \quad x_2(2) = 0km, y_2(2) = 0km \\
t = 4min: &\quad x_1(4) = 0, y_1(4) = -4km, \quad x_2(4) = -2, y_2(4) = 0km.
\end{aligned}$$

Desta forma,

$$\vec{r}_{21}(t) = \vec{r}_2(t) - \vec{r}_1(t) \Rightarrow \vec{r}_{21}(t) = x_2(t)\hat{\imath} - y_1(t)\hat{\jmath}.$$

Finalmente, para o item c, calculamos a disência como

$$L_{21}(t) = \sqrt{x_1^2 + (-y_1)^2} = \sqrt{(x_{20} - |\vec{v}_2(t)|)^2 + (|\vec{v}_1|)^2} = \sqrt{7200t^2 - 240t + 4}.$$

*Para encontrar a distância **mínima**, é preciso derivar esta fórmula, igualar a 0 e resolver para tempo. Coloque $l = 7200t^2 - 240t + 4$, tal que*

$$\frac{dl}{dt} = 2 \cdot 7200t - 240 + 0 = 0$$

Resolvendo isso, encontramos o tempo em que a distância é mínima, valendo $t^* \approx 0.017h \approx 1min$, tal que a distância mínima é

$$L_{21}(t^*) \approx 1.4.$$

7 Aula x - 17/03/2023

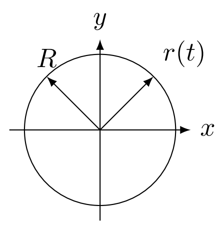
7.1 Motivações

- Começar a estudar o movimento circular;
-

7.2 Movimento Circular

Quando temos uma particular fazendo movimento circular em um círculo de raio R num eixo x, y, diremos que ela, sua posição em qualquer instante será dada por um vetor r(t), sendo sua trajetória limitada a este círculo. Assim, obtemos o sistema $R = |\vec{r}(t)|$, sendo $\vec{r}(t) = x(t)\hat{\imath} + y(t)\hat{\jmath}$ e

$$\begin{cases} x(t) = R\cos\theta(t) \\ y(t) = R\sin\theta(t). \end{cases}$$



Utilizando o sistema e o desenho, obtemos

$$\vec{r}(t) = R\cos\theta(t)\hat{\imath} + R\sin\theta(t)\hat{\jmath},$$

donde segue o valor do módulo do vetor $\vec{r}(t)$:

$$\begin{aligned} |\vec{r}(t)|^2 = x^2(t) + y^2(t) &= (R\cos\theta(t))^2 + (R\sin\theta(t))^2 \\ &= R^2(\cos\theta(t)^2 + \sin\theta(t)^2) \\ &= R^2 \Rightarrow |\vec{r}(t)| = R. \end{aligned}$$

Concluímos, assim, que todo o movimento da partícula é dado em termos do ângulo $\theta(t)$. Além disso, o deslocamento da partícula é feita em arcos de círculo $s(t) = R\theta(t)$. Chamamos esta posição de "posição escalar do corpo sobre o círculo". No entanto, no movimento circular, há outra posição, chamada "posição angular do corpo", que é dada por $\theta(t) = \frac{s(t)}{R}$.

Utilizando estes dois, podemos encontrar uma equação para $\vec{r}(t)$:

$$\vec{r}(t) = R\cos\theta(t)\hat{\imath} + R\sin\theta(t)\hat{\jmath} = R\underbrace{\left[\cos\theta(t)\hat{\imath} + \sin\theta(t)\hat{\jmath}\right]}_{\hat{r}(t)} = R\hat{r}(t),$$

em que $\hat{r}(t)$ é um versor na direção de $\vec{r}(t)$, isto é, um vetor com módulo um. De fato, vamos verificar isto:

$$|\hat{r}(t)| = \sqrt{\cos^2(\theta(t)) + \sin^2(\theta(t))} = 1$$

A seguir, vamos estudar como este versor $\hat{r}(t)$ varia, ou seja, vamos derivar este vetor com respeito ao tempo. Para isso, introduizremos outra regra de derivação, a "Regra da Cadeia". Dada uma função $f(t) = u(v(t))$, ou seja, uma função definida como uma função composta, sua derivação é feita de denro pra fora: Derivamos v(t) com respeito a t, depois derivamos u com relação a v e multiplicamos, ou seja,

$$\boxed{\frac{df}{dt} = \frac{du}{dv}\frac{dv}{dt}}.$$

Assim, no caso do versor $\hat{r}(t)$,

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{r}(t)}{dt} &= \frac{d}{dt}[\cos\theta(t)\hat{\imath} + \sin\theta(t)\hat{\jmath}]\\ &= \frac{d}{dt}[\cos\theta(t)]\hat{\imath} + \frac{d}{dt}[\sin\theta(t)]\hat{\jmath}\\ &= \frac{d\cos\theta(t)}{d\theta}\frac{d\theta(t)}{dt}\hat{\imath} + \frac{d\sin\theta(t)}{d\theta}\frac{d\theta(t)}{dt}\hat{\jmath}\\ &= -\sin\theta(t)\frac{d\theta(t)}{dt}\hat{\imath} + \cos\theta(t)\frac{d\theta(t)}{dt}\hat{\jmath}.\end{aligned}$$

Como $\theta(t)$ é a posição angular, chamamos a sua derivada com respeito a tempo de velocidade ângular

$$\boxed{\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt}.}$$

De brinde, conseguimos definir a velocidade escalar da partícula como

$$\begin{aligned}\frac{ds(t)}{dt} &= \frac{dR\theta(t)}{dt} = R\frac{d\theta(t)}{dt} = R\omega(t).\\ &\Rightarrow \boxed{v(t) = R\omega(t).}\end{aligned}$$

Vamos estudar a dimensão dessa quantidade. Temos

$$[\omega] = \frac{[\theta]}{[t]} = \frac{1}{T} \quad \text{(Exemplo: rad/s (radianos por segundo.))}$$

como unidades de velocidade angular e

$$[v] = [R][\omega] = LT^{-1} \quad \text{(Exemplo: m/s (metros por segundo))}$$

como dimensão da velocidade escalar. Com relação ao versor definido, sua derivada é

$$\frac{d\hat{r}(t)}{dt} = \omega(t)\underbrace{[-\sin\theta(t)\hat{\imath} + \cos\theta(t)\hat{\jmath}]}_{\hat{\theta(t)}},$$

em que $\hat{\theta(t)}$ é um versor apontando na direção do ângulo. Com isso, definimos a velocidade vetorial por

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = R\frac{d\hat{r}(t)}{dt} \Rightarrow \vec{v}(t) = R\omega(t)\hat{\theta(t)}.$$

Algo interessante de notar é que a velocidade escalar consiste do módulo da velocidade vetorial, i.e., $v(t) = |\vec{v}(t)|$. Também podemos representar a velocidade por meio das componentes em cada eixo:

$$\vec{v}(t) = \underbrace{-R\omega(t)\sin\theta(t)}_{v_x(t)}\hat{\imath} + \underbrace{R\omega(t)\cos\theta(t)}_{v_y(t)}\hat{\jmath}.$$

7.3 Acelerações no Movimento Circular.

Agora que estamos mais familiariizados com a velocidade e posição angular, podemos estudar a aceleração no movimento circular. Assim como antes, começamos definindo a aceleração angular:

$$\alpha(t) = \frac{d\omega(t)}{dt} = \frac{d^2\theta(t)}{dt^2},$$

que possui dimensão $[\alpha] = \frac{[\omega]}{[t]} = \frac{T^{-1}}{T} = T^{-2}$, sendo um exemplo a unidade rad/s^2, i.e., radiano por segundo quadrado. Analogamente, definimos a aceleração vetorial por

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}[R\omega(t)\hat{\theta}(t)].$$

Pela regra do produto,

$$\vec{a}(t) = R[\frac{d\omega(t)}{dt}\hat{\theta(t)} + \omega(t)\frac{d\hat{\theta(t)}}{dt}].$$

Analisando termo a termo, a primeira derivada acontece no módulo da velocidade, i.e., $R\frac{d\omega(t)}{dt}$, ou seja, representa a variação no módulo da velocdade. Por outro lado, o segundo termo representa a variação da direção da velocidade. Como já encontramos alguns desses termos antes, segue que

$$\vec{a}(t) = R[\alpha(t)\hat{\theta(t)} + v(t)\frac{d\hat{\theta}(t)}{dt}].$$

Mas o que é este termo $\frac{d\hat{\theta}}{dt}$? Olhando pra ele com cuidado, vemos que

$$\begin{aligned}
\frac{d\hat{\theta}}{dt} &= \frac{d}{dt}[-\sin\theta(t)\hat{\imath} + \cos\theta(t)\hat{\jmath}] \\
&= -\frac{d}{dt}[\sin\theta(t)]\hat{\imath} + \frac{d}{dt}[\cos\theta(t)]\hat{\jmath} \\
&= -\cos\theta(t)\frac{d\theta(t)}{dt}\hat{\imath} - \sin\theta(t)\frac{d\theta(t)}{dt}\hat{\jmath} \\
\Rightarrow \frac{d\hat{\theta(t)}}{dt} &= \omega(t)[-\cos\theta(t)\hat{\imath} - \sin\theta(t)\hat{\jmath}] = \omega(t)(-\hat{r}(t)).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\vec{a}(t) = R[\alpha(t)\hat{\theta(t)} + \omega^2(t)(-\hat{r}(t))] = \underbrace{R\alpha(t)\hat{\theta(t)}}_{\text{aceleração tangencial } \vec{a}_t(t)} - \underbrace{R\omega^2(t)\hat{r}(t)}_{\text{aceleração centrípeta } \vec{a}_{cp}(t)}$$

Obtivemos disso tudo duas acelerações novas e que precisam ser mais compreendidas. Vamos começar pela tangencial.

Com relação ao módulo da aceleração tangencial, note que $|\vec{a}_t(t)| = R\alpha(t) = \frac{dv(t)}{dt}$. Agora, quanto à aceleração centrípeta, seu módulo é dado por $|\vec{a}_{cp}(t)| = R\omega^2(t) \Rightarrow |\vec{a}_{cp}(t)| = \frac{v^2}{R}$.

7.4 Movimento Circular Uniforme

Resumindo o que temos até o momento em forma de tabela, segue que

	Variáveis angulares	**Variáveis escalares**
Posição	$\theta(t)$	$s(t) = R\theta(t)$
Velocidade	$\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt}$	$v(t) = \frac{ds(t)}{dt} = R\omega(t)$
Aceleração	$\alpha(t) = \frac{d\omega(t)}{dt} = \frac{d^2\theta(t)}{dt^2}$	$\lvert\vec{a}(t)\rvert = \frac{dv(t)}{dt} = R\alpha(t), \quad \lvert\vec{a}_{cp}\rvert = \frac{v^2}{R}$

Tabela 1: Resumo movimento circular.

No movimento circular uniforme, estudamos arcos iguais em tempos iguais, ou seja,

$$\Delta s_1 = \Delta s_2, \quad \Delta t_1 = \Delta t_2,$$

tal que $\Delta\theta_1 = \Delta\theta_2$. Além disos, $\omega(t) \equiv \omega$ constante. Assim,

$$|\vec{v}(t)| = v(t) = R\omega(t) \equiv v, \text{ constante} \Rightarrow a_t = R\alpha(t) = 0.$$

Com isso, as posições são descritas por

$$\begin{aligned}
\omega(t) = \omega \Rightarrow \theta(t) = \theta_0 + \omega(t - t_0) \\
v(t) = v \Rightarrow s(t) = s_0 + v(t - t_0)
\end{aligned}$$

Neste caso, o movimento é periódico, ou seja, ele volta a ter as mesmas propriedades após um período T. Em forma matemática, isso quer dizer que

$$\begin{cases} \vec{r}(t+T) = \vec{r}(t) \\ \vec{v}(t+T) = \vec{v}(t). \end{cases}$$

Tendo isso em mente, definimos também a frequência como o número de ocorrências. Ele vale o inverso do período T, i.e., $f = \frac{1}{T}$.