Exercícios do Elon

Renan Wenzel

June 20, 2022

Contents

1 Capítulo 3 **3**

1.1 Exercício 1 3

1.2 Exercício 2 3

1.3 Exercício 3 3

1.4 Exercício 4 4

1.5 Exercício 5 4

1.6 Exercício 6 4

1 Capítulo 3

1.1 Exercício 1

1.2 Exercício 2

Enunciado. *$f : X \to Y$ é injetora se, e somente se, existe uma função $g : Y \to X$ tal que g(f(x)) = x para todo $x \in X$.*

Comecemos pela implicação

> *" Se $f : X \to Y$ é injetora, então existe uma função $g : Y \to X$ tal que g(f(x)) = x para todo $x \in X$. "*

A ideia aqui é que nós definamos uma "coisa" $g : Y \to X$ tal que g(f(x)) = x para todo $x \in X$ que nós ainda não sabemos se é uma função ou não. A partir disso, vamos mostrar que, de fato, essa g é uma função. Em outras palavras, mostrar que ela é bem-definida (o que significa que se $y_1 = y_2$, então $g(y_1) = g(y_2)$).

A priori, suponha que $y_1 = y_2$, mas $g(y_1) \neq g(y_2)$. Suponha também que y_1, y_2 pertencem à imagem da função f. Em outras palavras, $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2)$ para algum $x_1, x_2 \in X$. Neste caso, se $g(y_1) \neq g(y_2)$, então $g(f(x_1)) = x_1 \neq x_2 = g(f(x_2))$. No entanto, isso é uma contradição, pois f é injetora, tal que $y_1 = y_2$ implica que $f(x_1) = f(x_2)$.

Agora, lidemos com o caso em que y_1, y_2 não pertencem à imagem de f. Com isso, podemos definir a função g da maneira que desejarmos, pois o caso que importa é quando ela é aplicada a algum elemento da imagem de f. Assim, definindo, por exemplo, $g(y) = 1$ para todo y fora da imagem de f. Então, se $y_1 = y_2$, segue que $g(y_1) = 1 = g(y_2)$, tal que a função está, de fato, bem-definida.

Resta lidar com a outra implicação, isto é,

> Se existe uma função $g : Y \to X$ tal que g(f(x)) = x para todo $x \in X$, então f é injetora.

Explicitamente, precisamos mostrar que se $f(x_1) = f(x_2)$, então $x_1 = x_2$. De fato, suponha que $f(x_1) = f(x_2)$. Aplicando g, segue que:

$$x_2 = g(f(x_2)) = g(f(x_1)) = x_1.$$

Portanto, a função é injetora. □

1.3 Exercício 3

Enunciado. *" Se $f : X \to Y$ é injetora, então existe uma função $g : Y \to X$ tal que g(f(x)) = x para todo $x \in X$. "*

1.4 Exercício 4

1.5 Exercício 5

1.6 Exercício 6