

Exercícios do Elon

Renan Wenzel

June 20, 2022

Contents

| | | |
|----------|-----------------------|----------|
| 1 | Capítulo 3 | 3 |
| 1.1 | Exercício 1 | 3 |
| 1.2 | Exercício 2 | 4 |
| 1.3 | Exercício 3 | 5 |
| 1.4 | Exercício 4 | 6 |

1 Capítulo 3

1.1 Exercício 1

Enunciado. *Seja $f : X \rightarrow Y$ uma função. A imagem inversa por f de um conjunto $B \subset Y$ é o conjunto $f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$. Prove que vale sempre $A \subset f^{-1}(f(A))$ para todo $A \subset X$ e $f(f^{-1}(B)) \subset B$ para todo $B \subset Y$. Prove também que f é injetora se, e somente se, $f^{-1}(f(A)) = A$ para todo $A \subset X$. Analogamente, mostre que f é sobrejetora se, e somente se, $f(f^{-1}(B)) = B$ para todo $B \subset Y$.*

□

1.2 Exercício 2

Enunciado. $f : X \rightarrow Y$ é injetora se, e somente se, existe uma função $g : Y \rightarrow X$ tal que $g(f(x)) = x$ para todo $x \in X$.

Começemos pela implicação

" Se $f : X \rightarrow Y$ é injetora, então existe uma função $g : Y \rightarrow X$ tal que $g(f(x)) = x$ para todo $x \in X$. "

A ideia aqui é que nós definamos uma "coisa" $g : Y \rightarrow X$ tal que $g(f(x)) = x$ para todo $x \in X$ que nós ainda não sabemos se é uma função ou não. A partir disso, vamos mostrar que, de fato, essa g é uma função. Em outras palavras, mostrar que ela é bem-definida (o que significa que se $y_1 = y_2$, então $g(y_1) = g(y_2)$).

A priori, suponha que $y_1 = y_2$, mas $g(y_1) \neq g(y_2)$. Suponha também que y_1, y_2 pertencem à imagem da função f . Em outras palavras, $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2)$ para algum $x_1, x_2 \in X$. Neste caso, se $g(y_1) \neq g(y_2)$, então $g(f(x_1)) = x_1 \neq x_2 = g(f(x_2))$. No entanto, isso é uma contradição, pois f é injetora, tal que $y_1 = y_2$ implica que $f(x_1) = f(x_2)$.

Agora, lidemos com o caso em que y_1, y_2 não pertencem à imagem de f . Com isso, podemos definir a função g da maneira que desejarmos, pois o caso que importa é quando ela é aplicada a algum elemento da imagem de f . Assim, definindo, por exemplo, $g(y) = 1$ para todo y fora da imagem de f . Então, se $y_1 = y_2$, segue que $g(y_1) = 1 = g(y_2)$, tal que a função está, de fato, bem-definida.

Resta lidar com a outra implicação, isto é,

Se existe uma função $g : Y \rightarrow X$ tal que $g(f(x)) = x$ para todo $x \in X$, então f é injetora.

Explicitamente, precisamos mostrar que se $f(x_1) = f(x_2)$, então $x_1 = x_2$. De fato, suponha que $f(x_1) = f(x_2)$. Aplicando g , segue que:

$$x_2 = g(f(x_2)) = g(f(x_1)) = x_1.$$

Portanto, a função é injetora. \square

1.3 Exercício 3

Enunciado. Se $f : X \rightarrow Y$ é sobrejetora, então existe uma função $g : Y \rightarrow X$ tal que $f(g(y)) = y$ para todo $y \in Y$.

Vamos mostrar que se $f : X \rightarrow Y$ é sobrejetora, existe uma função $g : Y \rightarrow X$ tal que $f(g(x)) = x$ para todo $x \in X$ de maneira análoga ao exercício anterior. Com efeito, suponha que $g(y_1) \neq g(y_2)$. Então, $y_1 = f(g(y_1)) \neq f(g(y_2)) = y_2$, tal que g está bem-definida para todo y em Y , pois ambos eram arbitrários, completando a prova.

Por outro lado, suponha que existe uma função $g : Y \rightarrow X$ tal que $f(g(y)) = y$ para todo $y \in Y$. Note que $g(y)$ é, por definição de g , um elemento de X . Em outras palavras, dado $y \in Y$, podemos escrever y como $f(g(y))$, ou seja, todo elemento de Y pode ser escrito como a f aplicada a um elemento de X . Portanto, f é sobrejetora. \square

1.4 Exercício 4

Enunciado. Dada uma função $f : X \rightarrow Y$ e $g, h : Y \rightarrow X$ tais que $g(f(x)) = x$ para todo $x \in X$ e $f(h(y)) = y$ para todo $y \in Y$. Prove que $g = h$.

Seja $y \in Y$. Como h é tal que $f(h(y)) = y$, segue que f é sobrejetora. Analogamente, como g é tal que $g(f(x)) = x$, f é injetora. Assim, temos:

$$h(y) = g(f(h(y))) = g(y).$$

Portanto, como y era um elemento qualquer, segue que $h = g$. \square