

Atividade 7

Otimização utilizando modelo de viga

Renan Miranda Portela

10 de dezembro de 2018

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho apresenta a formulação do processo de otimização de frequência natural em sistemas modelados por elementos de vigas e os resultados obtidos para os problemas propostos em sala de aula.

O objetivo desta tarefa é a implementação computacional do algoritmo de maximização da frequência natural de estruturas modeladas através de elementos de viga de *Euler-Bernoulli*.

2 METODOLOGIA

O comportamento dinâmico de uma estrutura submetida a vibrações livres sem amortecimento é representado pela equação 2.1.

$$([kg] - \omega_j^2 [mg])\phi_j = 0 \quad (2.1)$$

onde $[kg]$ é a matriz de rigidez global, $[mg]$ é a matriz de massa global, ω_j a j -ésima frequência natural do sistema e ϕ_j o autovetor correspondente da j -ésima frequência escolhida.

A matriz elementar de rigidez de uma viga de *Euler-Bernoulli* é regida pela equação matricial 2.2, e a matriz de rigidez pela equação 2.3.

$$[ke]_i = \frac{EI}{L_e^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L_e & -12 & 6L_e \\ & 4L_e^2 & -6L_e & 2L_e^2 \\ sim. & & 12 & -6L_e \\ & & & 4L_e^2 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

$$[me]_i = \frac{\rho AL_e}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L_e & 54 & -13L_e \\ & 4L_e^2 & 13L_e & -3L_e^2 \\ & & 156 & -22L_e \\ sim. & & & 4L_e^2 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Para o problema de maximização da primeira frequência natural, a sensibilidade da função objetivo é dada pela equação 2.4.

$$\alpha_i = \frac{1}{m_i} \phi_i^T ([ke]_i - \omega_j^2 [me]_i) \phi_i \quad (2.4)$$

Considerando a área do elemento como variável de projeto dada pelo vetor 2.5, encontramos o momento de inércia em função da área pela equação 2.6.

$$A = [0,5 \quad 0,6 \quad \dots \quad 1,4 \quad 1,5] \quad (2.5)$$

$$I = \frac{A}{2\pi} \quad (2.6)$$

A otimização é finalizada quando a variação relativa entre as frequências naturais obtidas em iterações consecutivas for menor que o erro prescrito como mostra a equação 2.7.

$$\frac{\omega_1^k - \omega_1^{k-1}}{\omega_1^{k-1}} \leq \tau \quad (2.7)$$

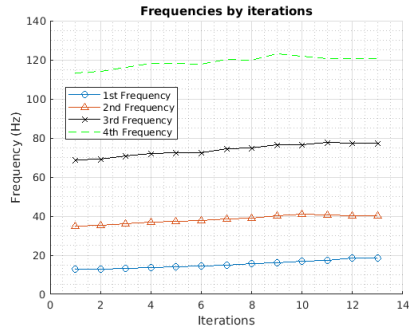
3 RESULTADOS

3.1 VIGA BI-ENGASTADA COM SEÇÃO CIRCULAR

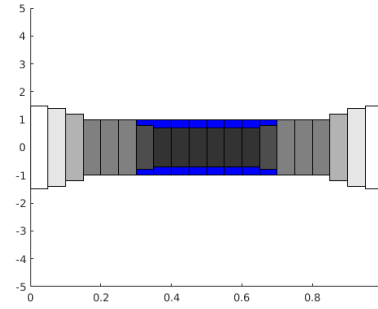
O primeiro problema proposto trata da maximização da primeira frequência natural de uma viga bi-engastada de seção circular. O modelo foi discretizado utilizando 20 elementos de viga e a variação relativa admitida para o erro $\tau = 0.1\%$.

A estrutura foi otimizada empregando áreas discretizadas de $0,5 \text{ m}^2$ a $1,5 \text{ m}^2$. Aumentando o valor dos elementos com maior número de sensibilidade e diminuindo a área daqueles que tiveram menor número de sensibilidade.

Na figura 3.1a, verifica-se que há um aumento considerável nas quatro primeiras frequências com o processo de otimização. Na figura 3.1b, observa-se a geometria inicial em azul e a final em um degradê em tons de cinza. Conclui-se que para aumentar as frequências os elementos do centro devem apresentar uma área menor e maior nas extremidades.



(a) 4 primeiras frequências



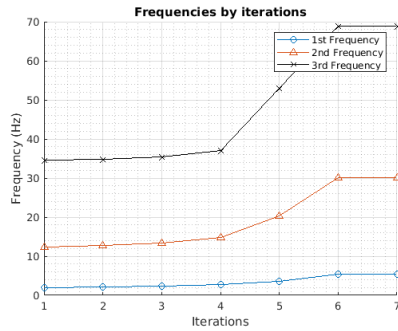
(b) Geometria

3.2 VIGA ENGASTADA COM UM DISCO NA EXTREMIDADE LIVRE

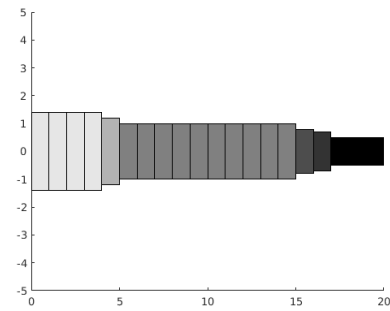
O segundo problema proposto corresponde a maximizar a primeira frequência natural de uma viga engastada com um disco na extremidade livre. A discretização empregada na modelagem da estrutura foi de 20 elementos finitos de viga e a variação relativa admitida para o erro $\tau = 0,1\%$.

Da mesma forma que no problema anterior, a otimização foi feita com áreas discretizadas de $0,5 \text{ m}^2$ a $1,5 \text{ m}^2$.

Na figura 3.1a, verifica-se novamente um incremento das frequências computadas. Na figura 3.1b, observa-se que a geometria vai afunilando na extremidade onde o disco está localizado, e ficando mais espessa na extremidade engastada.



(a) 4 primeiras frequências



(b) Geometria

4 CONCLUSÃO

Os resultados demonstraram que o processo de otimização implementado conseguiu maximizar efetivamente a primeira frequência natural das estruturas analisadas. Dessa forma, conclui-se que o programa desenvolvido atendeu aos objetivos propostos, podendo ser empregado na otimização de sistemas mecânicos modelados através de elementos de viga de *Euler-Bernoulli*.

REFERÊNCIAS

- [1] Notas de aula.
- [2] CASAS, W. J. P., *Concepção ótima de sistemas elasto-acústicos interiores acoplados*. Tese (Doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1998.
- [3] CASAS, W. J. P.; PAVANELLO, R. *Optimization of fluid-structure systems by eigenvalues gap separation with sensitivity analysis*. Applied Mathematical Modelling, 42: 269-289, 2017.