

Atividade 1

Modelagem em elementos finitos

Renan Miranda Portela

15 de outubro de 2018

1 INTRODUÇÃO

O objetivo desta atividade é implementar computacionalmente o processo de modelagem em elementos finitos, utilizando elementos de quatro nós.

2 METODOLOGIA

O primeiro passo desta atividade foi estabelecer o número de nós nas direções x e y por se tratar de uma geometria bi-dimensional. Neste caso, foram estabelecidos 33 nós na direção x e 17 nós na direção y , para uma geometria de 16×8 . Em seguida, a matriz de incidência, que representa os nós, foi criada, nela cada linha contém os nós que compõe o elemento, o material atribuído ao elemento e propriedades geométricas. A figura 2.1 mostra a malha inicial, com a numeração de cada nó.

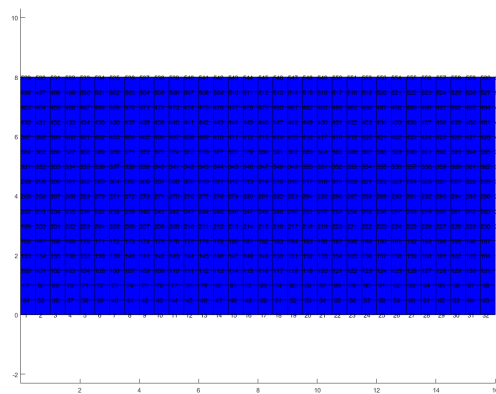


Figura 2.1: Geometria inicial

Em seguida foram estabelecidas condições de contorno e a carga aplicada. Neste caso, os nós 1 e 33 foram engastados, enquanto que o nó 16 recebeu a carga vertical de 10 000 N aplicados para baixo. A figura 2.2 representa essas condições de contorno anteriormente explicadas, sendo o triângulo a representação do nó engastado e o círculo o nó que recebeu carga vertical.

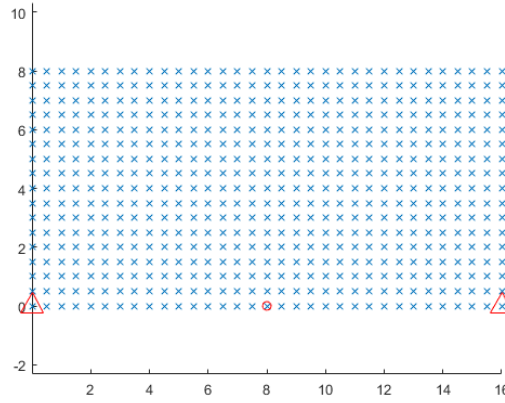


Figura 2.2: Geometria inicial

O passo seguinte é desenvolver o *solver* por elementos finitos. A primeira etapa da implementação do *solver* é a matriz de rigidez elementar e global, respectivamente. No entanto, a matriz de rigidez local (2.2) depende da matriz de elasticidade (2.1). Uma vez feita a matriz de rigidez elementar, a matriz global é construída realizando o somatório das matrizes locais nas linhas e colunas determinadas para cada nó.

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

$$[K_e] = \begin{bmatrix} \frac{D_{11}b}{3a} + \frac{D_{33}a}{3b} & \frac{D_{12}+D_{33}}{3b} & -\frac{D_{11}b}{3a} + \frac{D_{33}a}{6b} & \frac{D_{12}-D_{33}}{6b} & -\frac{D_{11}b}{6a} - \frac{D_{33}a}{6b} & -\frac{D_{12}-D_{33}}{6a} & \frac{D_{11}b}{6a} + \frac{D_{33}a}{3b} & -\frac{D_{12}+D_{33}}{6b} \\ \frac{D_{22}a}{3b} + \frac{D_{33}b}{3a} & \frac{D_{12}+D_{33}}{3a} & -\frac{D_{12}+D_{33}}{6b} & \frac{D_{22}a}{6b} - \frac{D_{33}b}{3a} & -\frac{D_{12}-D_{33}}{6b} & -\frac{D_{22}a}{6a} - \frac{D_{33}b}{6a} & \frac{D_{11}b}{6a} - \frac{D_{33}a}{6b} & -\frac{D_{22}a}{6b} + \frac{D_{33}b}{6a} \\ \frac{D_{11}b}{3a} + \frac{D_{33}a}{3b} & -\frac{D_{12}+D_{33}}{6b} & \frac{D_{11}b}{6a} - \frac{D_{33}a}{6b} & -\frac{D_{12}-D_{33}}{6b} & \frac{D_{11}b}{6a} - \frac{D_{33}a}{6b} & \frac{D_{12}+D_{33}}{6a} & -\frac{D_{11}b}{6a} + \frac{D_{33}a}{3b} & \frac{D_{12}-D_{33}}{6b} \\ \frac{D_{22}a}{3b} + \frac{D_{33}b}{3a} & \frac{D_{12}+D_{33}}{6b} & -\frac{D_{12}-D_{33}}{6b} & \frac{D_{22}a}{6b} - \frac{D_{33}b}{3a} & -\frac{D_{12}-D_{33}}{6b} & -\frac{D_{22}a}{6a} - \frac{D_{33}b}{6a} & \frac{D_{11}b}{6a} - \frac{D_{33}a}{6b} & -\frac{D_{22}a}{6b} + \frac{D_{33}b}{6a} \\ \frac{D_{11}b}{6a} - \frac{D_{33}a}{6b} & -\frac{D_{12}+D_{33}}{6b} & \frac{D_{11}b}{6a} - \frac{D_{33}a}{6b} & -\frac{D_{12}-D_{33}}{6b} & \frac{D_{11}b}{6a} - \frac{D_{33}a}{6b} & \frac{D_{12}+D_{33}}{6a} & -\frac{D_{11}b}{6a} + \frac{D_{33}a}{3b} & \frac{D_{12}-D_{33}}{6b} \\ \frac{D_{22}a}{6b} - \frac{D_{33}b}{3a} & \frac{D_{12}+D_{33}}{6b} & -\frac{D_{12}-D_{33}}{6b} & \frac{D_{22}a}{6b} - \frac{D_{33}b}{3a} & -\frac{D_{12}-D_{33}}{6b} & -\frac{D_{22}a}{6a} - \frac{D_{33}b}{6a} & \frac{D_{11}b}{6a} - \frac{D_{33}a}{6b} & -\frac{D_{22}a}{6b} + \frac{D_{33}b}{6a} \\ \frac{D_{11}b}{6a} + \frac{D_{33}a}{3b} & -\frac{D_{12}+D_{33}}{6b} & \frac{D_{11}b}{6a} - \frac{D_{33}a}{6b} & -\frac{D_{12}-D_{33}}{6b} & \frac{D_{11}b}{6a} - \frac{D_{33}a}{6b} & \frac{D_{12}+D_{33}}{6a} & -\frac{D_{11}b}{6a} + \frac{D_{33}a}{3b} & \frac{D_{12}-D_{33}}{6b} \\ \frac{D_{22}a}{6b} - \frac{D_{33}b}{3a} & \frac{D_{12}+D_{33}}{6b} & -\frac{D_{12}-D_{33}}{6b} & \frac{D_{22}a}{6b} - \frac{D_{33}b}{3a} & -\frac{D_{12}-D_{33}}{6b} & -\frac{D_{22}a}{6a} - \frac{D_{33}b}{6a} & \frac{D_{11}b}{6a} - \frac{D_{33}a}{6b} & -\frac{D_{22}a}{6b} + \frac{D_{33}b}{6a} \\ \frac{D_{11}b}{6a} - \frac{D_{33}a}{6b} & -\frac{D_{12}+D_{33}}{6b} & \frac{D_{11}b}{6a} - \frac{D_{33}a}{6b} & -\frac{D_{12}-D_{33}}{6b} & \frac{D_{11}b}{6a} - \frac{D_{33}a}{6b} & \frac{D_{12}+D_{33}}{6a} & -\frac{D_{11}b}{6a} + \frac{D_{33}a}{3b} & \frac{D_{12}-D_{33}}{6b} \\ \frac{D_{22}a}{6b} - \frac{D_{33}b}{3a} & \frac{D_{12}+D_{33}}{6b} & -\frac{D_{12}-D_{33}}{6b} & \frac{D_{22}a}{6b} - \frac{D_{33}b}{3a} & -\frac{D_{12}-D_{33}}{6b} & -\frac{D_{22}a}{6a} - \frac{D_{33}b}{6a} & \frac{D_{11}b}{6a} - \frac{D_{33}a}{6b} & -\frac{D_{22}a}{6b} + \frac{D_{33}b}{6a} \\ \frac{D_{11}b}{6a} + \frac{D_{33}a}{3b} & -\frac{D_{12}+D_{33}}{6b} & \frac{D_{11}b}{6a} - \frac{D_{33}a}{6b} & -\frac{D_{12}-D_{33}}{6b} & \frac{D_{11}b}{6a} - \frac{D_{33}a}{6b} & \frac{D_{12}+D_{33}}{6a} & -\frac{D_{11}b}{6a} + \frac{D_{33}a}{3b} & \frac{D_{12}-D_{33}}{6b} \\ \frac{D_{22}a}{6b} - \frac{D_{33}b}{3a} & \frac{D_{12}+D_{33}}{6b} & -\frac{D_{12}-D_{33}}{6b} & \frac{D_{22}a}{6b} - \frac{D_{33}b}{3a} & -\frac{D_{12}-D_{33}}{6b} & -\frac{D_{22}a}{6a} - \frac{D_{33}b}{6a} & \frac{D_{11}b}{6a} - \frac{D_{33}a}{6b} & -\frac{D_{22}a}{6b} + \frac{D_{33}b}{6a} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

simétrico

Para calcular a tensão de *Von-Mises*, utiliza-se a matriz 2.1, os deslocamentos computados pela equação 2.3 e pela matriz $[B_t]$ que está relacionada com o tamanho do elemento. Essas tensões computadas são utilizadas na equação 2.5 para calcular o valor da tensão de *Von-Mises* em cada elemento.

$$F = [K]u \quad (2.3)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = [D][B_t][u] \quad (2.4)$$

$$\sigma_{vm} = \sqrt{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 - \sigma_{xx}\sigma_{yy} + 3\sigma_{xy}^2} \quad (2.5)$$

3 RESULTADOS

Os deslocamentos computados pelo *solver* desenvolvido são mostrados na figura 3.1. O resultado obtido é coerente com o esperado, uma vez que o maior deslocamento computado se encontra onde a carga foi aplicada, e os nós engastados se mantiveram presos nas suas respectivas posições originais.

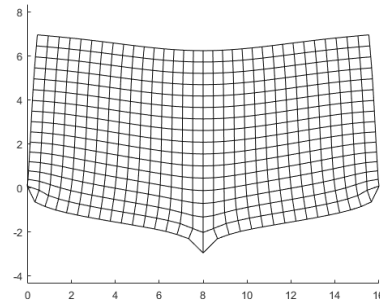


Figura 3.1: Deslocamentos computados

Outro resultado esperado é mostrado na figura 3.2. Pode se observar que as tensões máximas se encontram nos pontos de engaste e no ponto de aplicação da carga nodal. No resto da geometria a imagem coincide com o resultado obtido por [2] na estrutura do tipo Michell.

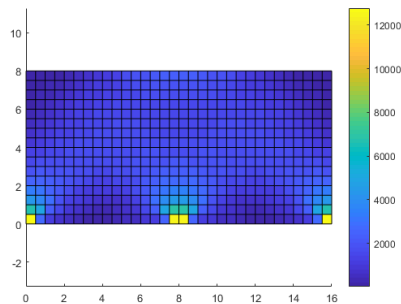


Figura 3.2: Tensões computadas de *Von-Mises*

REFERÊNCIAS

- [1] Buchanan, G. R., *Finite Element Analysis*, McGraw-Hill, 1994.
- [2] Steven, G. P., Xie, Y.M., *Evolutionary Structural Optimization*, Springer, 1997.