

# FA576 - Prova

Renan da Silva Guedes

RA: 223979

28 de julho de 2020

- (1) As duas equações que relacionam carga e deformação da lei de Hooke Generalizada são, respectivamente

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left( \epsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \epsilon_{kk} \right) \quad (1)$$

$$\epsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \delta_{ij} \sigma_{kk} \quad (2)$$

onde  $\sigma_{ij}$  é a tensão normal aplicada ao material,  $\epsilon_{ij}$  a deformação radial,  $\delta_{ij}$  o delta de Kronecker,  $E$  e  $\nu$  constantes do material,  $\epsilon_{kk}$  e  $\sigma_{kk}$  a deformação e tensão longitudinais, respectivamente.

- (2) Esquemas

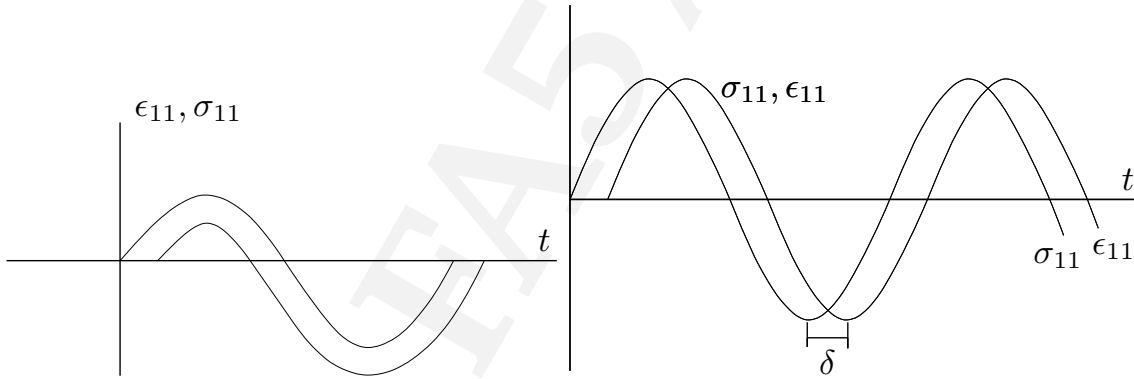


Figura 1: Gráfico à direita ilustrando a resposta ao carregamento em um material viscoelástico, enquanto que à esquerda, elástico.

- (3) A superfície de ruptura representa a área externa do corpo de prova sujeita à ação de esforços. Podendo estes ocasionar a ruptura a depender da magnitude das tensões no material.
- (4) (a) Na equação (3) abaixo, a deformação em  $i$  e  $j$  dadas como função de  $t$  representa o *strain* total. O termo  $d\sigma_{ij}(t')/dt'$  representa o *strees rate*, onde  $\sigma_{ij}$  é o tensor *stress*. Por fim, o termo  $\psi(t - t')$  denota a função *creep*.

$$\epsilon_{ij}(t) = \int_0^t \frac{d\sigma_{ij}(t')}{dt'} \psi(t - t') dt' \quad (3)$$

Ao subdividir os tensores em hidrostáticos e deviatóricos duas funções viscoelásticas seriam envolvidas como segue

$$e_{ij}(t) = \int_0^t \frac{ds_{ij}(t')}{dt'} \psi_d(t-t') dt' \quad (4)$$

$$\epsilon_{kk}(t) = \int_0^t \frac{d\sigma_{kk}(t')}{dt'} \psi_H(t-t') dt' \quad (5)$$

Análogo ao primeiro item, duas funções seriam obtidas como é visto em

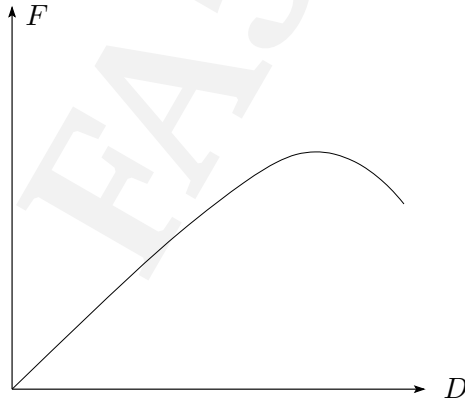
$$S_{ij}(t) = \int_0^t \frac{de_{ij}(t')}{dt'} \phi_d(t-t') dt' \quad (6)$$

$$\sigma_{kk}(t) = \int_0^t \frac{d\epsilon_{kk}(t')}{dt'} \phi_H(t-t') dt' \quad (7)$$

- (b) Na equação (8) o termo  $\sigma_{ij}$  é a função *stress* total dependente do tempo. O termo  $d\epsilon_{ij}(t')/dt'$  é a taxa de deformação (*strain rate*), onde  $\epsilon_{ij}$  é o tensor *strain*. A função  $\phi$  é *relaxation*.

$$\sigma_{ij}(t) = \int_0^t \frac{d\epsilon_{ij}(t')}{dt'} \phi(t-t') dt' \quad (8)$$

(5) Modelo sugerido

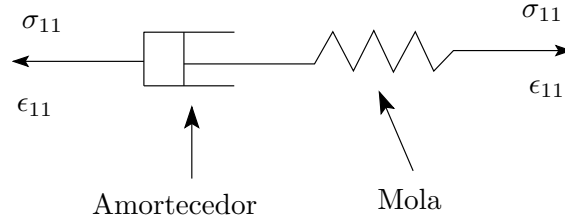


O parâmetro obtido da análise do gráfico é a força máxima ocorrente na maior ordenada da plotagem força *versus* deformação. Dessa forma, é possível obter o lado direito da equação (9) e determinar o módulo *firmness*, por exemplo, baseando-se somente na força aplicada e características geométricas do corpo de prova ensaiado.

$$b = \sqrt{\frac{4 F (1 - \nu^2) R}{\pi l E}} \Rightarrow \left( \frac{E}{1 - \nu^2} \right) = \frac{4 F R}{\pi l b^2} \quad (9)$$

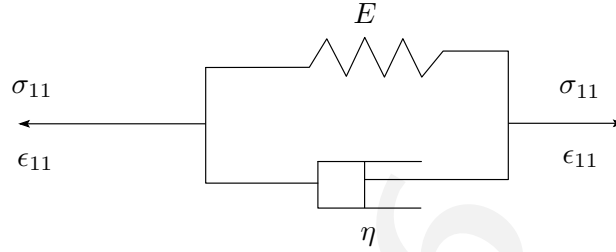
onde  $b$  é a metade da largura da área de contato,  $l$  é o comprimento do cilindro (ou da área de contato),  $R$  é o raio do corpo cilíndrico e  $F$  é a força aplicada (ortogonal ao plano de contato)

(6) – Modelo de Maxwell



$$\frac{\dot{\sigma}_{11}(M)}{E} + \frac{\sigma_{11}(A)}{\eta} = \dot{\epsilon}_{11} \quad (10)$$

– Modelo de Kelvin



$$\sigma_{11}(t)(T) = E \epsilon_{11}(t)(M) + \eta \dot{\epsilon}_{11}(t)(A) \quad (11)$$

- (7) Para obtenção do módulo  $E$  é necessário basear-se no ensaio de cargas de contato e determinação do módulo de firmeza do material. O módulo referido é o de elasticidade ou de Young.

Caso a área de contato não seja obtida é necessário lançar mão da literatura visando obter o módulo de firmeza do material estudado. Ao analisar a equação de Hertz abaixo

$$a = \sqrt[3]{\frac{3F(1-\nu^2)R}{4E}} \quad (12)$$

ao rearranjar os termos, temos que

$$\left( \frac{E}{1-\nu^2} \right) = \frac{3FR}{4a^3} \quad (13)$$

dessa forma, por não possuímos as características associadas à área de contato seria necessário aplicar somente o lado direito de (13) visando obter o módulo  $E$ . Porém a consideração a ser feita seria

$$firmness = \frac{E}{1-\nu^2} \quad (14)$$

onde  $firmness$  e  $\nu$  são conhecidos.

- (8) (a) A linearidade ou não linearidade geométrica estão vinculadas às características físicas do material ao ser submetido a esforços e solicitações. Sendo que estes podem originar deformações do material e a consequente alteração da sua estabilidade.

- (b) A linearidade material está vinculada às características dependentes do tempo, oriundas das mudanças físicas no interior do corpo afetando a sua uniformidade e semelhanças estruturais em toda sua porção, podendo ocasionar variação das propriedades mecânicas.
- (9) As constante a serem obtidas dizem respeito aos módulos  $E$ ,  $\nu$  e  $G$ . A primeiro – módulo de Young – pode ser retirado da curva tensão ( $\sigma$ ) *versus* deformação ( $\epsilon$ ) no trecho onde as duas grandezas se comportam de forma linear, onde a lei de Hooke é válida. Dessa forma, ao basear-se num determinado material devem ser feitos sucessivos ensaios visando analisar o comportamento da tensão em função da deformação. A figura (2) ilustra o procedimento, onde após terem sido realizadas cinco repetições de compressão axial da batata inglesa, sob diferentes velocidades, foi ajustada uma reta que contempla a inclinação do trecho linear das cinco curvas permitindo, desta maneira, obter o módulo  $E$  do material. Para  $\nu$  – coeficiente de Poisson – ele é obtido da compressão axial sob restrição de corpos de prova, onde a partir das condições de contorno do experimento e fazendo uso da equação da elasticidade

$$\frac{M}{E} = \frac{1 - \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (15)$$

sabendo que  $M$  é o coeficiente angular do ensaio sob restrição e  $E$  o módulo de elasticidade do mesmo material obtido na primeira parte, é possível calcular  $\nu$ . Por fim, tendo  $E$  e  $\nu$  em mãos é possível calcular  $G$  – módulo de elasticidade transversal – como função das duas primeiras.

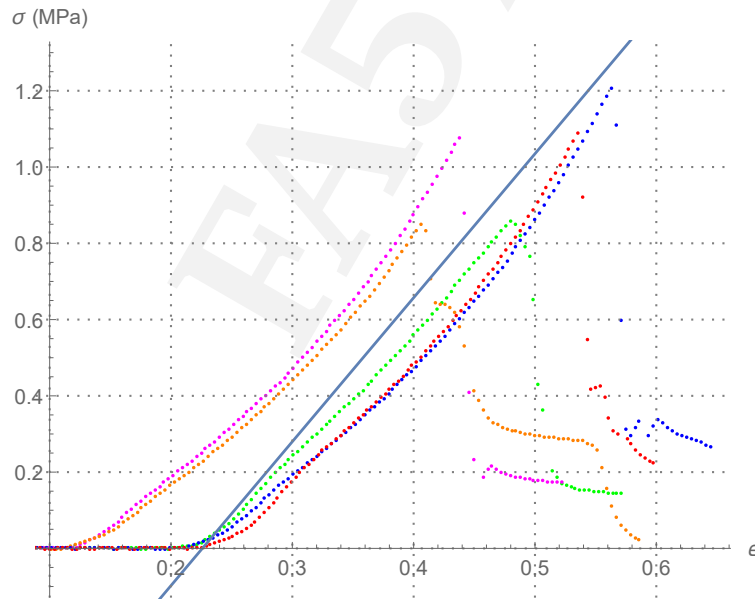


Figura 2: Linearização do trecho visando obter o módulo  $E$

(10)

$$E = \frac{8(1 - \nu^2)Z^2 F}{\pi D} \quad (16)$$

$$Z = \frac{R}{b} \quad (17)$$

$$\frac{D}{d} = \frac{1}{2Z^2} \left[ \ln(2Z) + \frac{1}{2} \right] \quad (18)$$

As três equações apresentadas acima referem-se ao ensaio de compressão diametral de um corpo de prova cilíndrico.  $E$  e  $\nu$  representam o módulo de Young e coeficiente de Poisson, respectivamente.  $Z$  é uma grandeza adimensional dada pela razão entre o raio do cilindro ( $R$ ) e a metade da largura da área de contato.  $F$  é a força máxima aplicada na deformação do corpo de prova, enquanto  $D$  e  $d$  são a deformação e o diâmetro do cilindro, respectivamente.

(11)

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt \quad (19)$$

Sendo  $\psi(t)$  a função *creep* e  $\phi(t)$  a função *relaxation*

$$\therefore \psi(s)\phi(s) = \frac{1}{s^2} \quad (20)$$

(12) As perdas podem ser diminuídas a partir do estudo mais aprofundado envolvendo a interação das operações mecanizadas e os esforços suportados por cada material. Ou seja, a partir do conhecimento das diferentes propriedades intrínsecas de cada produto, deve-se haver maior adequação entre o que os mesmos suportam para que não sofram danos ou injúrias mecânicas e apresentar elementos ao longo da cadeia de produção que englobem todas as variáveis pertinentes até a fase de se comercializar a mercadoria, considerando a variação das propriedades do produto com base em cada ambiente onde ele se encontra.