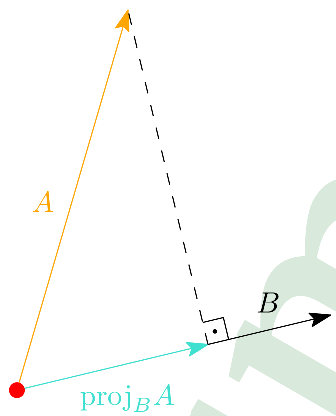
Reflexões de GA

Renan Guedes

21 de agosto de 2020

1 Projeção de vetores



A figura acima ilustra a projeção ortogonal que o vetor $\boldsymbol{A}$ faz sobre $\boldsymbol{B}$. Essa projeção existe quando sua subtração de $\boldsymbol{A}$ gera um vetor ortogonal a $\boldsymbol{B}$. Para chegar na relação que expressa essa medida em termos dos vetores $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ vamos consideram que $\boldsymbol{V}_1$ é igual a projeção de $\boldsymbol{A}$ sobre $\boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{V}_2$ é o vetor ortogonal a $\boldsymbol{B}$ dado por $\boldsymbol{A} - \text{proj}_{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{A}$, então

$$\begin{cases} \boldsymbol{V}_1 = \text{proj}_{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{V}_2 = \boldsymbol{A} - \text{proj}_{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{A} \end{cases}$$

Como $\boldsymbol{V}_1$ é um múltiplo escalar de $\boldsymbol{B}$ (vetores paralelos), então é possível escrever $\boldsymbol{V}_1$ em termos de $\boldsymbol{B}$, como

$$\boldsymbol{V}_1 = \alpha \boldsymbol{B} \tag{1}$$

Ao fazer o produto ponto entre $\boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{V}_2$, temos

$$\begin{aligned} \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{V}_2 &= \boldsymbol{B} \cdot (\boldsymbol{A} - \alpha \boldsymbol{B}) && (2) \\ & && (3) \end{aligned}$$

sendo $\boldsymbol{B}\boldsymbol{B} = ||\boldsymbol{B}||\,||\boldsymbol{B}|| \cos 0^\circ = ||\boldsymbol{B}||^2$ e $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{V}_2 = 0$ (perpendiculares), vem

$$0 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} - \alpha ||\boldsymbol{B}||^2 \tag{4}$$

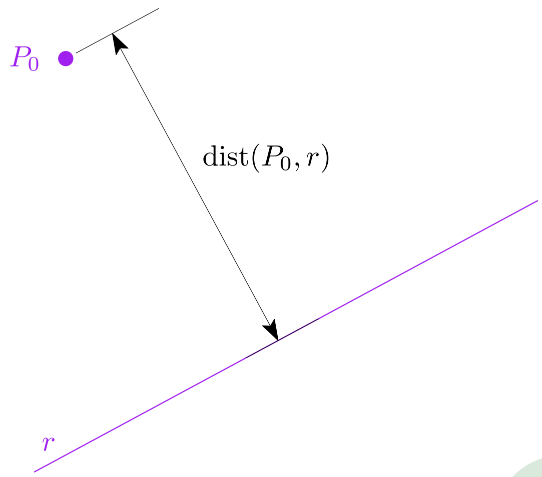
logo α será

$$\alpha = \frac{\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}}{||\boldsymbol{B}||^2} \tag{5}$$

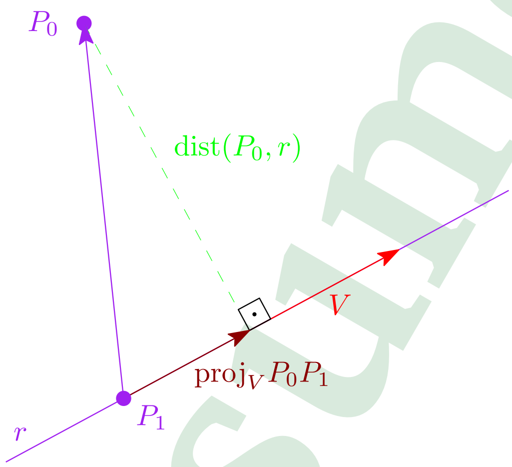
retornando na eq. (1) e substituindo o que foi encontrado em eq. (5), obtemos

$$\boldsymbol{V}_1 = \text{proj}_{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{A} = \left(\frac{\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}}{||\boldsymbol{B}||^2} \right) \boldsymbol{B} \tag{6}$$

2 Distância de um ponto a uma reta



Visando dar uma abordagem vetorial ao problema, vamos redesenhar a figura



aplicando o teorema de Pitágoras, vem

$$\begin{aligned}
(\mathrm{dist}(P_0, r))^2 &= ||\boldsymbol{P_1P_0}||^2 - ||\mathrm{proj}_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{P_1P_0}||^2 && (7)\\
&= ||\boldsymbol{P_1P_0}||^2 - \left\|\left(\frac{\boldsymbol{P_1P_0}\cdot\boldsymbol{V}}{||\boldsymbol{V}||^2}\right)\boldsymbol{V}\right\|^2 && (8)\\
&= ||\boldsymbol{P_1P_0}||^2 - \frac{(\boldsymbol{P_1P_0}\cdot\boldsymbol{V})^2}{||\boldsymbol{V}||^2} && (9)
\end{aligned}$$

como $\boldsymbol{P_1P_0}\cdot\boldsymbol{V} = ||\boldsymbol{P_1P_0}||\,||\boldsymbol{V}||\cos\theta$, então

$$= \frac{||\boldsymbol{P_1P_0}||^2\,||\boldsymbol{V}||^2}{||\boldsymbol{V}||^2} - \frac{||\boldsymbol{P_1P_0}||^2\,||\boldsymbol{V}||^2\cos^2\theta}{||\boldsymbol{V}||^2} \tag{10}$$

colocando em evidência

$$= \frac{||\boldsymbol{P_1P_0}||^2\,||\boldsymbol{V}||^2(1-\cos^2\theta)}{||\boldsymbol{V}||^2} \tag{11}$$

usando a relação fundamental da trigonometria ao considerar que $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$, substituindo

$$= \frac{||\boldsymbol{P_1P_0}||^2\,||\boldsymbol{V}||^2\sin^2\theta}{||\boldsymbol{V}||^2} \tag{12}$$

dessa forma, o numerador da seção 2 é o produto vetorial entre $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_0$ e $\boldsymbol{V}$, temos que a distância de $\boldsymbol{P}_0$ a r ao quadrado assumirá

$$(\mathrm{dist}(P_0, r))^2 = \left(\frac{\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_0 \times \boldsymbol{V}}{||\boldsymbol{V}||} \right)^2 \tag{13}$$

após elevar ambos os lados a 1/2, temos que a distância será

$$\mathrm{dist}(P_0, r) = \frac{\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_0 \times \boldsymbol{V}}{||\boldsymbol{V}||} \tag{14}$$