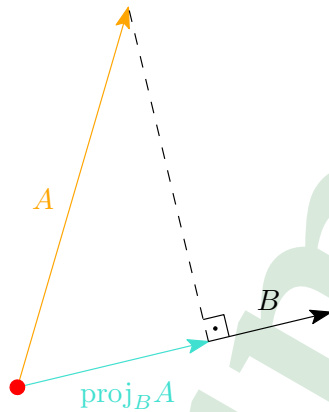


Reflexões de GA

Renan Guedes

22 de agosto de 2020

1 Projeção de vetores



A figura acima ilustra a projeção ortogonal que o vetor \mathbf{A} faz sobre \mathbf{B} . Essa projeção existe quando sua subtração de \mathbf{A} gera um vetor ortogonal a \mathbf{B} . Para chegar na relação que expressa essa medida em termos dos vetores \mathbf{A} e \mathbf{B} vamos considerar que \mathbf{V}_1 é igual a projeção de \mathbf{A} sobre \mathbf{B} e \mathbf{V}_2 é o vetor ortogonal a \mathbf{B} dado por $\mathbf{A} - \text{proj}_B \mathbf{A}$, então

$$\begin{cases} \mathbf{V}_1 = \text{proj}_B \mathbf{A} \\ \mathbf{V}_2 = \mathbf{A} - \text{proj}_B \mathbf{A} \end{cases}$$

Como \mathbf{V}_1 é um múltiplo escalar de \mathbf{B} (vetores paralelos), então é possível escrever \mathbf{V}_1 em termos de \mathbf{B} , como

$$\mathbf{V}_1 = \alpha \mathbf{B} \quad (1)$$

Ao fazer o produto ponto entre \mathbf{B} e \mathbf{V}_2 , temos

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{V}_2 = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{A} - \alpha \mathbf{B}) \quad (2)$$

$$(3)$$

sendo $\mathbf{B} \cdot \mathbf{B} = \|\mathbf{B}\| \|\mathbf{B}\| \cos 0^\circ = \|\mathbf{B}\|^2$ e $\mathbf{B} \cdot \mathbf{V}_2 = 0$ (perpendiculares), vem

$$0 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} - \alpha \|\mathbf{B}\|^2 \quad (4)$$

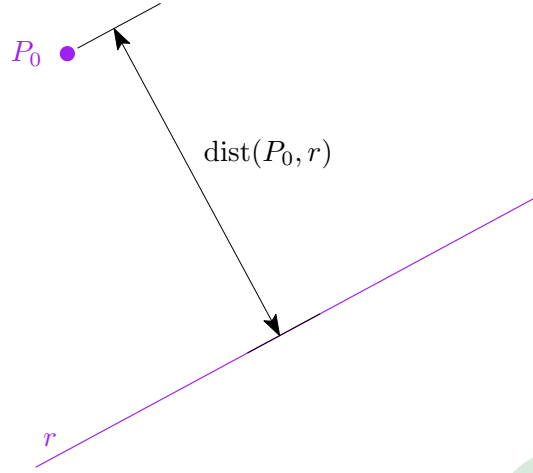
logo α será

$$\alpha = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{\|\mathbf{B}\|^2} \quad (5)$$

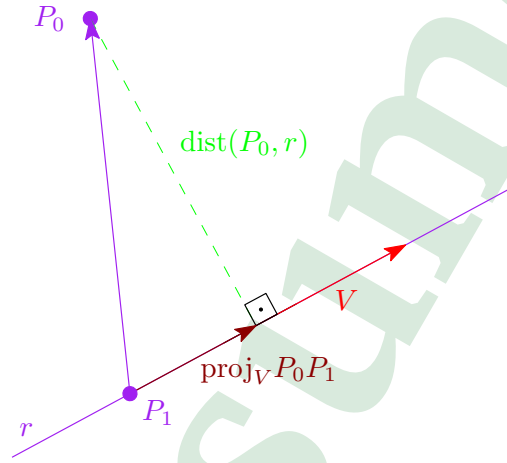
retornando na eq. (1) e substituindo o que foi encontrado em eq. (5), obtemos

$$\mathbf{V}_1 = \text{proj}_B \mathbf{A} = \left(\frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{\|\mathbf{B}\|^2} \right) \mathbf{B} \quad (6)$$

2 Distância de um ponto a uma reta



Visando dar uma abordagem vetorial ao problema, vamos redesenhar a figura



aplicando o teorema de Pitágoras, vem

$$(\text{dist}(P_0, r))^2 = \|P_1 P_0\|^2 - \|\text{proj}_V P_1 P_0\|^2 \quad (7)$$

$$= \|P_1 P_0\|^2 - \left\| \left(\frac{P_1 P_0 \cdot V}{\|V\|^2} \right) V \right\|^2 \quad (8)$$

$$= \|P_1 P_0\|^2 - \frac{(P_1 P_0 \cdot V)^2}{\|V\|^2} \quad (9)$$

como $P_1 P_0 \cdot V = \|P_1 P_0\| \|V\| \cos \theta$, então

$$= \frac{\|P_1 P_0\|^2 \|V\|^2}{\|V\|^2} - \frac{\|P_1 P_0\|^2 \|V\|^2 \cos^2 \theta}{\|V\|^2} \quad (10)$$

colocando em evidência

$$= \frac{\|P_1 P_0\|^2 \|V\|^2 (1 - \cos^2 \theta)}{\|V\|^2} \quad (11)$$

usando a relação fundamental da trigonometria ao considerar que $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$, substituindo

$$= \frac{\|P_1 P_0\|^2 \|V\|^2 \sin^2 \theta}{\|V\|^2} \quad (12)$$

dessa forma, o numerador da seção 2 é o produto vetorial entre $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_0$ e \mathbf{V} , temos que a distância de \mathbf{P}_0 a r ao quadrado assumirá

$$(\text{dist}(P_0, r))^2 = \left(\frac{\mathbf{P}_1\mathbf{P}_0 \times \mathbf{V}}{\|\mathbf{V}\|} \right)^2 \quad (13)$$

após elevar ambos os lados a $1/2$, temos que a distância será

$$\text{dist}(P_0, r) = \frac{\|\mathbf{P}_1\mathbf{P}_0 \times \mathbf{V}\|}{\|\mathbf{V}\|^2} \quad (14)$$

3 Produto Vetorial

Foi visto na seção anterior que para o cálculo da distância entre um ponto e uma reta é requerido o uso do produto vetorial entre um vetor que ligue um ponto de r ao ponto que se deseja saber a distância. Todavia, um questionamento que pode surgir seria o motivo do produto vetorial ser constante, tendo em vista que o ponto P_1 de r ao ser escolhido de forma arbitrária gera um $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_0$ distinto em cada situação.

Uma justificativa que pode ser aplicada é lembrar que o produto vetorial entre dois vetores produz um vetor ortogonal aos dois primeiros com a magnitude dada pela área do paralelogramo formado entre eles. Com base nisso, o que torna o produto cruz $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_0 \times \mathbf{V}$ constante é o fato de que a distância entre a reta r e o ponto P_0 é constante independente do vetor diretor de r ou do vetor que liga P_1 a P_0 . Logo, por mais que o vetor $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_0$ não seja ortogonal a r há uma compensação entre o valor do seno de θ e o comprimento de $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_0$, gerando sempre a mesma projeção da distância. Imaginando que o comprimento de $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_0$ aumente por conta de um ponto $P_1 \in r$ muito afastado de P_0 , nesse caso, θ irá diminuir e junto dele o seu seno. Entretanto, caso a distância entre P_1 e P_0 diminua, θ aumentará até que seu seno se torne 1, o que caracteriza a menor distância em linha reta, porém, em ambos os casos, ao considerar que \mathbf{V} é o mesmo, então $\|\mathbf{P}_1\mathbf{P}_0\| \sin \theta$ não mudará.

