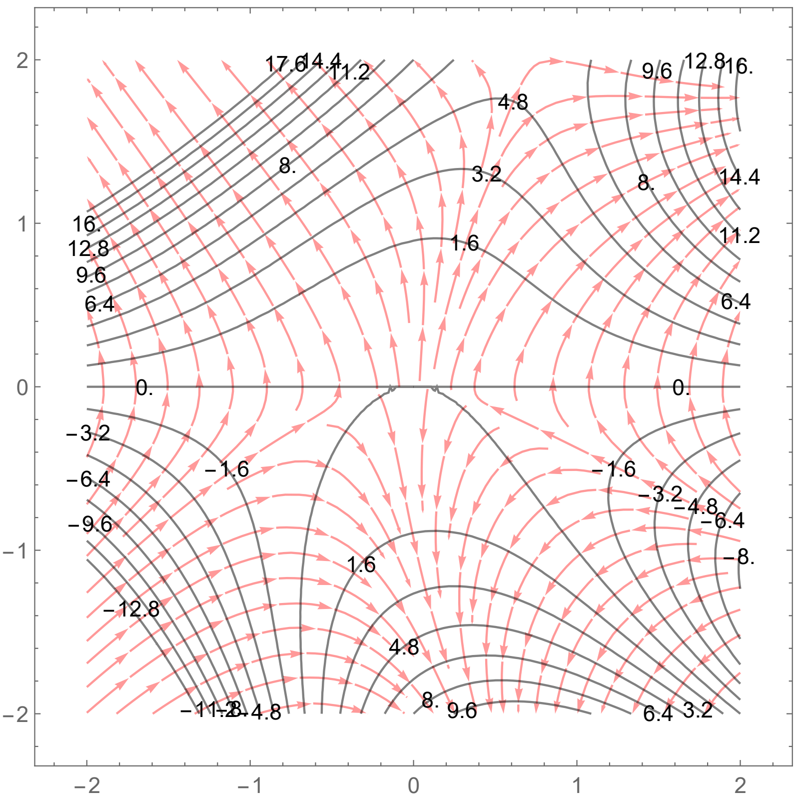
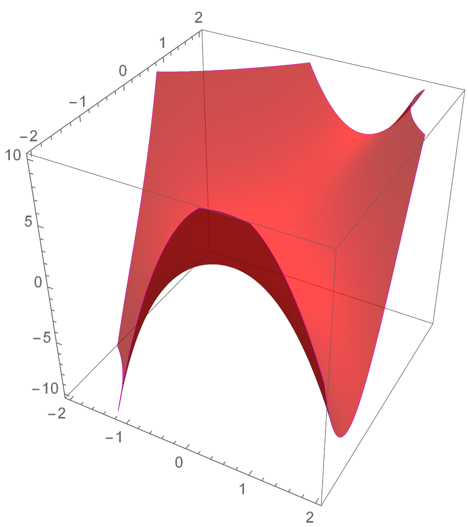
1 Lista ao final do 16.3

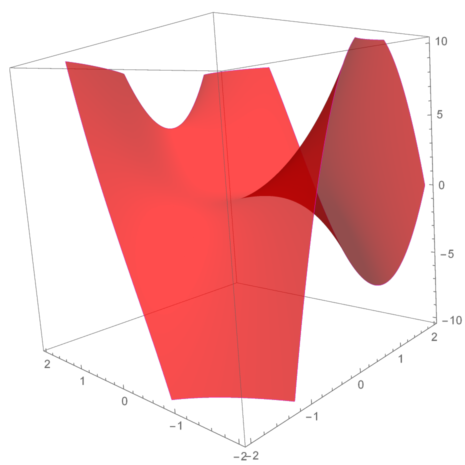
1.1 Exemplo 4 - Abordagem gráfica

No exemplo apresentado no livro as componentes P e Q da função vetorial F são dadas por $P(x, y) = 6xy - y^3$ e $Q(x, y) = 4y + 3x^2 - 3xy^2$. A verificação da existência da função potencial definida no domínio dos reais pode ser feita pelas derivadas parciais, sendo P em relação a y e Q em relação a x. Portanto, após verificar ambas as derivadas resultam em $6x - 3x^2$, concordando com o que era visado. Dessa maneira, após estabelecer $\partial f/\partial x = P(x, y)$ e resolver a integral, vem que $f(x, y)$ dependerá de dois termos em x e y mais uma função arbitrária que depende somente de y no caso.

Dessa forma, após obter o valor da função referida e adicionar o termo à f, temos que $f(x, y) = 3x^2y - y^3x + 2y^2$ e o conjunto campo vetorial-contornos torna-se







1.2 Exercício 1

Campo vetorial dado

$$\mathbf{F}(x, y) = (2x + 3y)\mathbf{i} + (3x + 2y)\mathbf{j} \tag{1}$$

As funções P e Q dependentes de x e y, nesse caso, são dadas por

$$\begin{cases} P(x, y) = 2x + 3y \\ Q(x, y) = 3x + 2y \end{cases}$$

A seguinte condição de que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \tag{2}$$

é satisfeita. Logo existe uma função potencial $f(x, y)$ definida em $\mathbb{R}$. Ao definir que $\partial f/\partial x = P(x, y)$ e $\partial f/\partial y = Q(x, y)$, temos que

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int P(x, y)\, dx \Rightarrow & (3) \\ &= \int (2x + 3y)\, dx \Rightarrow & (4) \\ \therefore f(x, y) &= x^2 + 3xy + \xi(y) & (5) \end{aligned}$$

Igualando a derivada da f anterior com relação a y a $Q(x, y)$, vem

$$\begin{aligned} 3x + \xi'(y) &= 3x + 2y \Rightarrow & (6) \\ \Rightarrow \xi'(y) &= 2y & (7) \end{aligned}$$

Para obter $\xi(y)$, basta integrar a equação anterior, de modo que

$$\begin{aligned} \int \frac{\xi(y)}{dy} dy &= \int 2y\, dy & (8) \\ &= y^2 & (9) \end{aligned}$$

Retornando em (5) e substituindo ξ, vem:

$$f(x, y) = x^2 + 3xy + y^2 \tag{10}$$

Agora que temos tanto o campo vetorial quanto a função potencial com os contornos ortogonais ao campo é possível aplicar o *software*. No *Mathematica*, para plotar o campo de vetores, basta usar o `StreamPlot` (Obs: O `VectorPlot` também é uma opção no caso). Para o item estudado ficaria

```
field1 = StreamPlot[{2x+3y,3x+2y},{x,-2,2},{y,-2,2}]
```

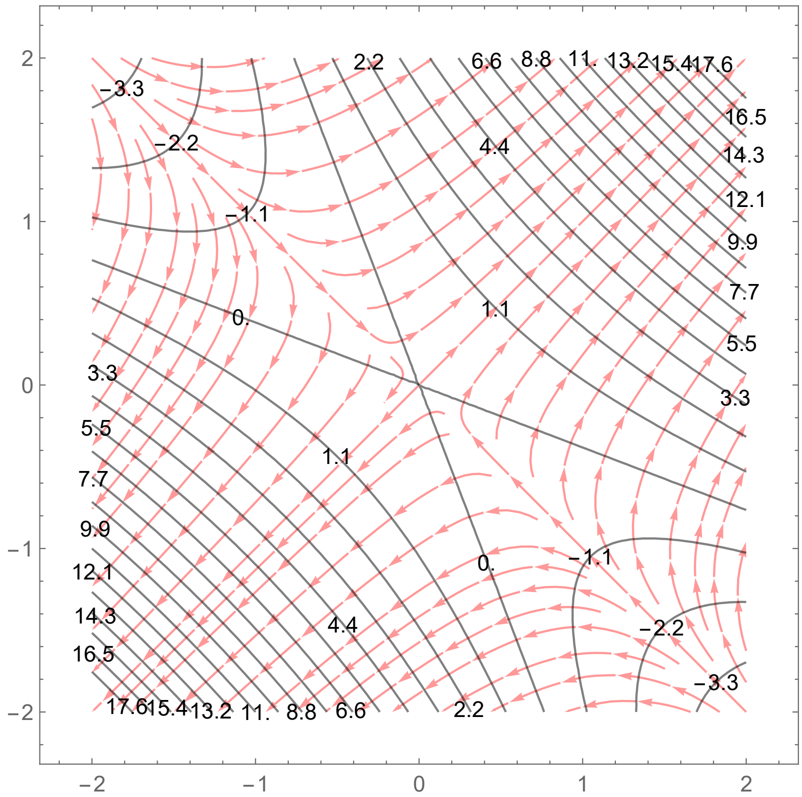
Para os contornos

```
contours1 = ContourPlot[x^2+3yx+y^2,{x,-2,2},{y,-2,2}]
```

Juntando os dois no `Show`

```
Show[contours1, stream1]
```

Após dar <enter>, obtemos



1.3 Exercício 2

Campo vetorial

$$\mathbf{F}(x,y) = (4x-y)\mathbf{i} + (6y-x)\mathbf{j} \tag{11}$$

Funções P e Q

$$\begin{cases} P(x,y) = 4x - y \\ Q(x,y) = 6y - x \end{cases}$$

Condição

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = -1 \tag{12}$$

Função potencial dada a partir de $\partial f/\partial x$

$$f(x,y) = \int P(x,y)\,dx \tag{13}$$

$$= 2x^2 - yx + \xi(y) \tag{14}$$

Estabelecendo a igualdade análoga ao exercício anterior, temos

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -x + \xi'(y) \tag{15}$$

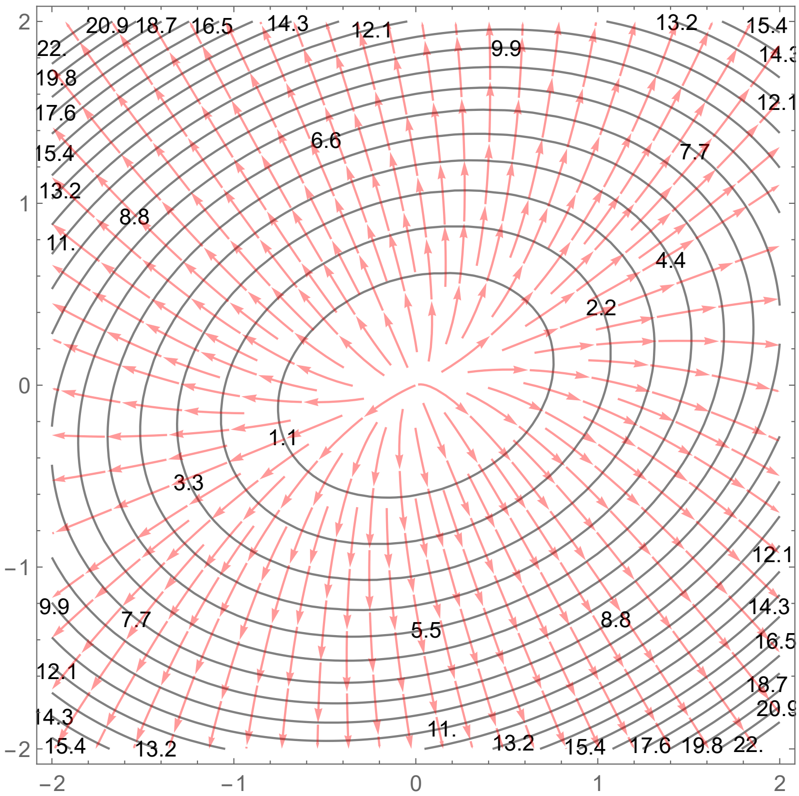
$$6y \cancel{-x} = \cancel{-x} + \xi'(y) \tag{16}$$

$$\xi(y) = 6y \tag{17}$$

Logo

$$f(x,y) = 2x^2 - yx + 3y^2 \tag{18}$$

No *Mathematica*, ao juntar o campo com os contornos, temos



1.4 Exercício 3

Partindo do campo vetorial definido por

$$\mathbf{F}(x, y) = (3x^2 + 2y^2)\mathbf{i} + (4xy + 6y^2)\mathbf{j} \tag{19}$$

Tomando P e Q como anteriormente verifica-se que se considerarmos $f(x, y)$ a partir de $\partial f/\partial x$ a função $\xi(y)$ que deveria depender somente de y terá um termo dependente de x. Portanto, uma manobra cabível é considerar $\partial f/\partial y = Q(x, y)$ e obter uma função arbitrária agora dependente de x como segue

$$f(x, y) = \int Q(x, y)\, dy \tag{20}$$

$$= 2xy^2 + 2y^3 + \xi(x) \tag{21}$$

Consequentemente

$$2y^2 + \xi'(x) = 3x^2 + 2y^2 \tag{22}$$

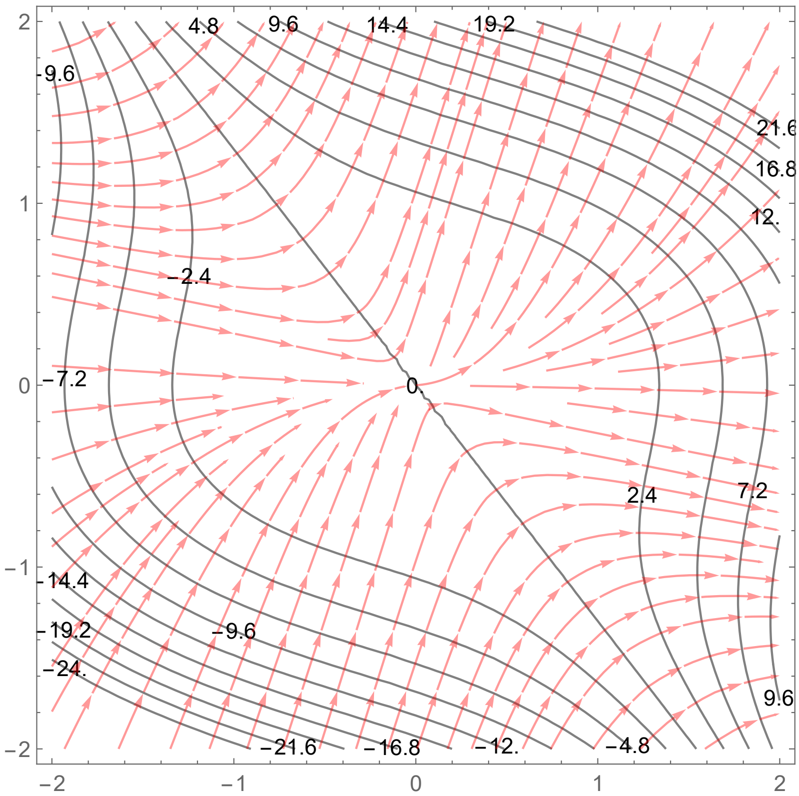
Simplificando

$$\cancel{2y}^2 + \xi'(x) = 3x^2 + \cancel{2y}^2 \tag{23}$$

Então após integrar chega-se que $\xi(x) = x^3$ e $f(x, y)$ será

$$f(x, y) = 2xy^2 + 2y^3 + x^3 \tag{24}$$

A representação gráfica será



1.5 Exercício 9

Nesse exercício considerando os artifícios apresentados no Exemplo 3, para o campo vetorial dado por

$$\mathbf{F}(x,y) = (3^2y^3 + y^4)\mathbf{i} + (3x^3y^2 + y^4 + 4xy^3)\mathbf{j} \tag{25}$$

Sabendo que o campo é conservativo e considerando a seguinte integral curvilínea que será independente do trajeto

$$f(x_1, y_1) = \int_A^B \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds \tag{26}$$

podemos escrever

$$f(x_1, y_1) \;\; = \;\; \int_A^B (3^2y^3 + y^4)\, dx + (3x^3y^2 + y^4 + 4xy^3)\, dy \tag{27}$$

seja C a trajetória retilínea do ponto $A = (0,0)$ ao ponto $B = (x_1, y_1)$ assumindo a parametrização $x = x_1(t)$, $y = y_1(t)$ para $0 \leq t \leq 1$, então

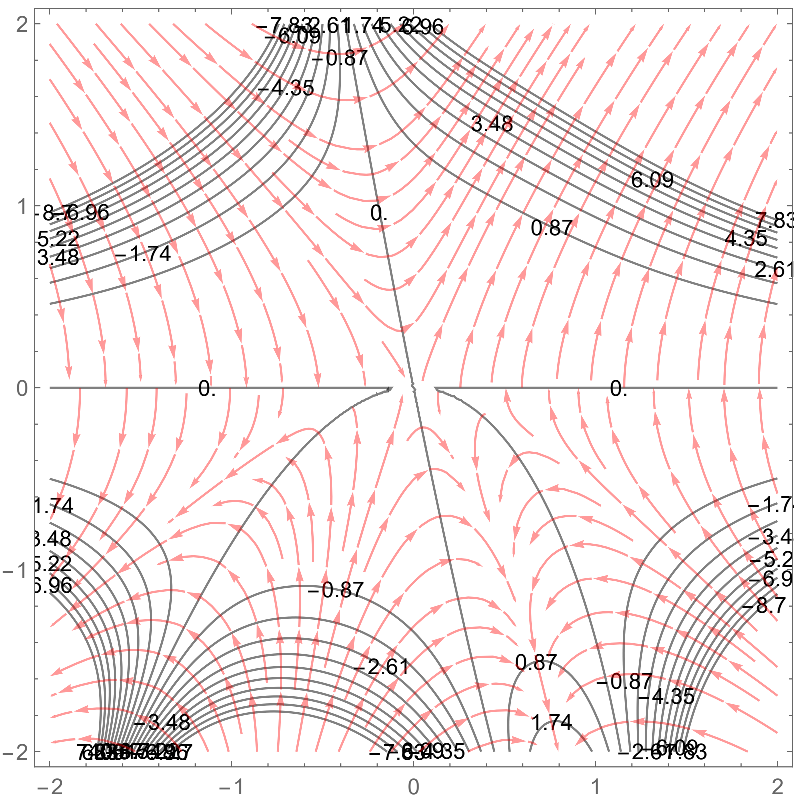
$$\begin{aligned} f(x_1, y_1) &= \int_A^B (3^2y^3 + y^4)\, dx + (3x^3y^2 + y^4 + 4xy^3)\, dy && (28) \\ &= \int_0^1 [(3x_1^2y_1^3t^5)(x_1\, dt) + (3x_1^3y_1^2t^5 + y_1^4t^4 + 4x_1y_1^4t^4)(y_1\, dt)] && (29) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^1 (3x_1^3y_1^3t^5 + x_1y_1^4t^4 + 3x_1^3y_1^3t^5 + y_1^5t^4 + 4x_1y_1^4t^4)\, dt && (30)\\
&= \left[x_1^3y_1^3t^6 + x_1y_1^4t^5 + \frac{y_1^5}{5}t^5\right]_0^1 && (31)\\
f(x_1, y_1) &= x_1^3y_1^3 + x_1y_1^4 + \frac{y_1^5}{5} && (32)
\end{aligned}
$$

Fazendo as verificações, temos

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} &= 3x^2y^3 + y^4 && (33)\\
\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} &= 3y^2x^3 + 4xy^3 + y^4 && (34)
\end{aligned}
$$

logo, há concordância entre o obtido e as componentes escalares de **F**. Graficamente, chegamos



Ao aplicar o `ContourPlot3D` para os contornos, chegamos na seguite configuração de superfície

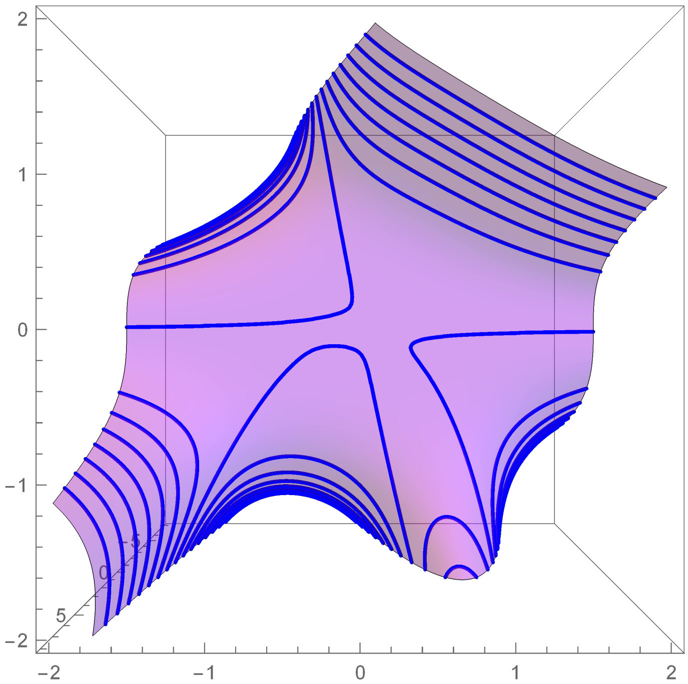


Figura 1: Vista superior

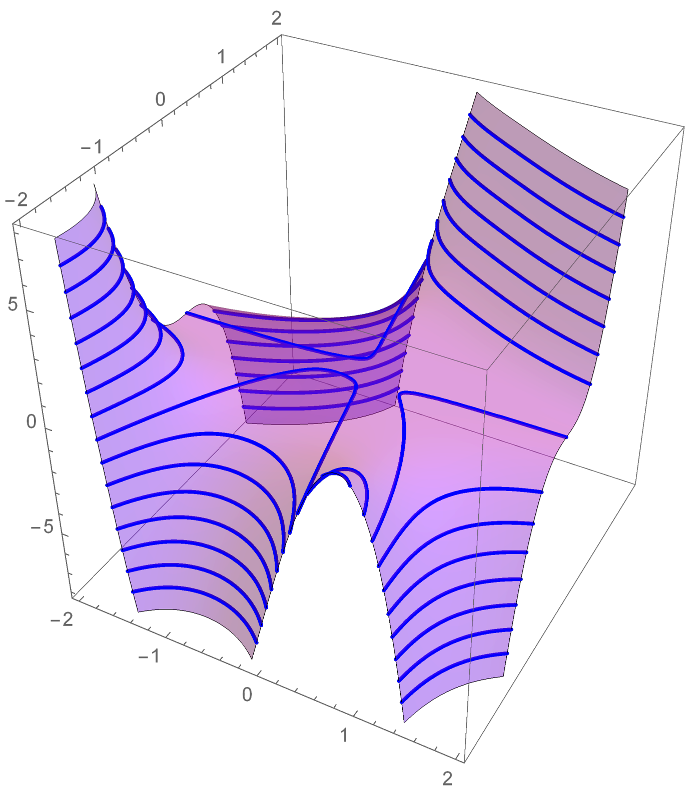


Figura 2: Vista padrão

1.6 Exercício 26

Campo vetorial de quadrados inversos

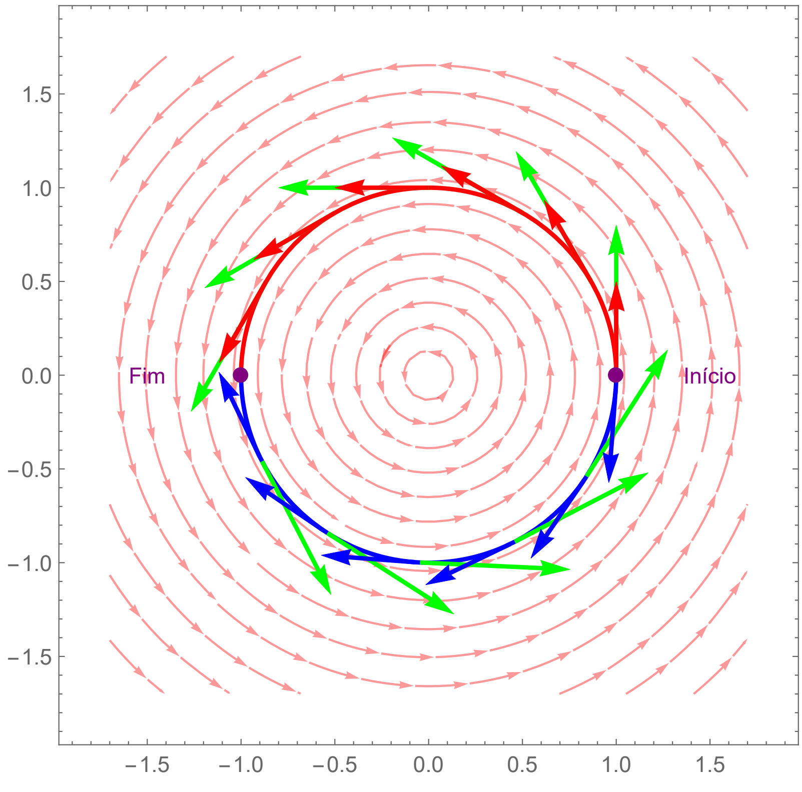
$$\mathbf{F}(x,y) = \frac{-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}}{x^2 + y^2} \tag{35}$$

O valor obtido na integral curvilínea

$$\int_C \mathbf{F}\, d\mathbf{r} \tag{36}$$

pode ser interpretado como o trabalho da partícula ao longo do campo vetorial apresentado. Porém, nesse caso é interessante aplicar a parametrização já que a trajetória descrita é a de uma circunferência. Sendo assim, a posição de uma partícula expressa como função do deslocamento angular pode ser dado por

$$\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j} \tag{37}$$



Para obter o elemento $d\mathbf{r}$ da integral curvilínea, basta derivar a função da posição, logo

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\sin t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j} \tag{38}$$

$$d\mathbf{r} = -\sin t\,dt\,\mathbf{i} + \cos t\,dt\,\mathbf{j} \tag{39}$$

Após substituir as componentes de $\mathbf{r}$ em $\mathbf{F}$, vem

$$\mathbf{F}(t) = \frac{-\sin t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j}}{\cos^2 t + \sin^2 t} \Rightarrow \tag{40}$$

$$\mathbf{F}(t) = -\sin t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j} \tag{41}$$

A integração no arco superior com $0 \leq t \leq \pi$ será

$$\begin{aligned}
W &= \int_0^{\pi} \mathbf{F}(t)\, d\mathbf{r}(t) && (42)\\
&= \int_0^{\pi} \sin^2 t\, dt + \cos^2 t\, dt && (43)\\
&= \int_0^{\pi} dt && (44)\\
t\Big|_0^{\pi} &= \pi && (45)
\end{aligned}$$

Se tratarmos o mesmo início e fim da trajetória anterior mas pelo arco de baixo, teremos $0 \leq t \leq -\pi$ e a integral assumirá

$$\begin{aligned}
W &= \int_0^{-\pi} dt && (46)\\
t\Big|_0^{-\pi} &= -\pi && (47)\\
& && (48)
\end{aligned}$$

Com base na análise dos valores obtidos para as integrais curvilíneas, vê-se que o trabalho exercido pelas forças de campo é positivo para o arco superior. O resultado é coerente tendo em vista que as linhas do campo vetorial possuem mesma direção e sentido com o deslocamento dr. Dessa forma, o produto ponto entre os vetores

$$\mathbf{F}\, d\mathbf{r} = ||\mathbf{F}||\, ||d\mathbf{r}|| \cos\theta \tag{49}$$

com $\theta = 0°$ ao longo de todo o percurso ocasionará num trabalho positivo. Em contrapartida, ao partir do início mostrado na figura e percorrer a trajetória circular no sentido horário, há contraposição entre o deslocamento e as linhas de campo. Como $\theta = 180°$, $W < 0$.

Quando se usa a definição de campos conservativos e funções potenciais vistas no livro, conclui-se que existe $\mathbf{F} = \nabla f$ já que o trabalho ao longo do percurso independe da trajetória no exercício estudado. Entretanto, partindo-se das derivadas parciais $\partial P/\partial y$ e $\partial Q/\partial x$, verifica-se que

$$\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x} \tag{50}$$

então o campo não é conservativo.