Antisèche pour le cours de mécanique newtonienne

Titouan Renard

30 octobre 2021

1 Marche à suivre

1.1 Quand on traite le problème avec la 2ème loi

1. Lire la donnée (attentivement)
2. Mettre en emphase ce qu'on recherche
3. Choisir un repère de coordonnées adapté au problème (selon les symétries, pour faciliter la projection, galiléen ou non)
4. Faire un dessin
   (a) Dessiner les vecteurs unitaires du repère
   (b) Dessiner les forces
5. Poser les contraintes du système (qu'est-ce qui est constant ?)
6. Exprimer les positions, vitesses, accelerations dans le repère
7. Exprimer les forces dans le repère
   (a) S'il y en a, calculer les forces d'inertie et les ajouter au dessin
8. Poser la deuxième loi de newton

$$\sum \vec{F}_{\text{i}} = m \cdot \vec{a}$$

9. Eventuellement, résoudre l'équation (si demandé par la donnée)
   (a) Relire la donnée avant de résoudre
   (b) Hypothèses d'échelle, regarder si on peut négliger qqch...

2 Lois Fondamentales

2.1 Lois de Newton

1ère loi

Tout corps persévère dans l'état de repos ou de mouvement uniforme en ligne droite à moins qu'une force agisse sur lui.

$$\vec{F} = 0 \Rightarrow \ddot{x} = 0 \Rightarrow \dot{x} \text{ cst}$$

2ème loi

Les changements de mouvements sont proportionnels à la force motrice, et se font dans la ligne droite dans laquelle cette force est appliquée.

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Note : $\frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a}$ si $\vec{a}$ est conservé.

3ème loi

A toute action est opposée une réaction égale.
Ce qu'il faut en retirer c'est que les forces internes d'un système sont sans influence sur le comportement du centre de masse du système.

3 Outils mathématiques

3.1 Systèmes de coordonnées

Cylindriques

On représente un point $\vec{M}$ par les trois coordonnées ρ, φ and z :

$$\vec{M} = (\rho, \varphi, z).$$

Les vecteurs unitaires sont représentés en base cartésienne comme :

$$\vec{e_\rho} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e_\rho} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e_\rho} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On pose les coordonnées d'un point (et leur dérivées) comme suit :

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \rho\vec{e_\rho} + z\vec{e_z}, \\ \vec{v} = \dot{\vec{r}} &= \dot{\rho}\vec{e_\rho} + \rho\dot{\varphi}\vec{e_\varphi} + \dot{z}\vec{e_z}, \\ \vec{a} = \dot{\vec{v}} &= \ddot{\vec{r}}, \\ \ddot{\vec{r}} &= (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\vec{e_\rho} + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\vec{e_\varphi} + \ddot{z}\vec{e_z}. \end{aligned}$$

Sphériques

On représente un point $\vec{M}$ par les trois coordonnées r, θ and φ :

$$\vec{M} = (r, \theta, \varphi).$$

Les vecteurs unitaires sont représentés en base cartésienne comme :

$$\vec{e_r} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}, \vec{e_\theta} = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\varphi \\ \cos\varphi\sin\varphi \\ -\sin\theta \end{pmatrix}, \\ \vec{e_\varphi} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On pose les coordonnées d'un point (et leur dérivées) comme suit :

$$\begin{aligned} \vec{r} &= r\vec{e_r}, \\ \vec{v} = \dot{\vec{r}} &= \dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\theta}\vec{e_\theta} + \sin\theta\vec{e_\varphi}, \\ \vec{a} = \dot{\vec{v}} &= \ddot{\vec{r}}, \\ \ddot{\vec{r}} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)\vec{e_r} \\ &+(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta)\vec{e_\theta} \\ &+(r\ddot{\varphi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta)\vec{e_\varphi}. \end{aligned}$$

3.2 Equations différentielles

En physique 1 on traite des équations différentielles linéaire du premier et du second ordre. **La résolution de ces équations revient à réécrire les équations du mouvement sous une forme dont on connait déjà la solution**.

Equations différentielles du premier ordre