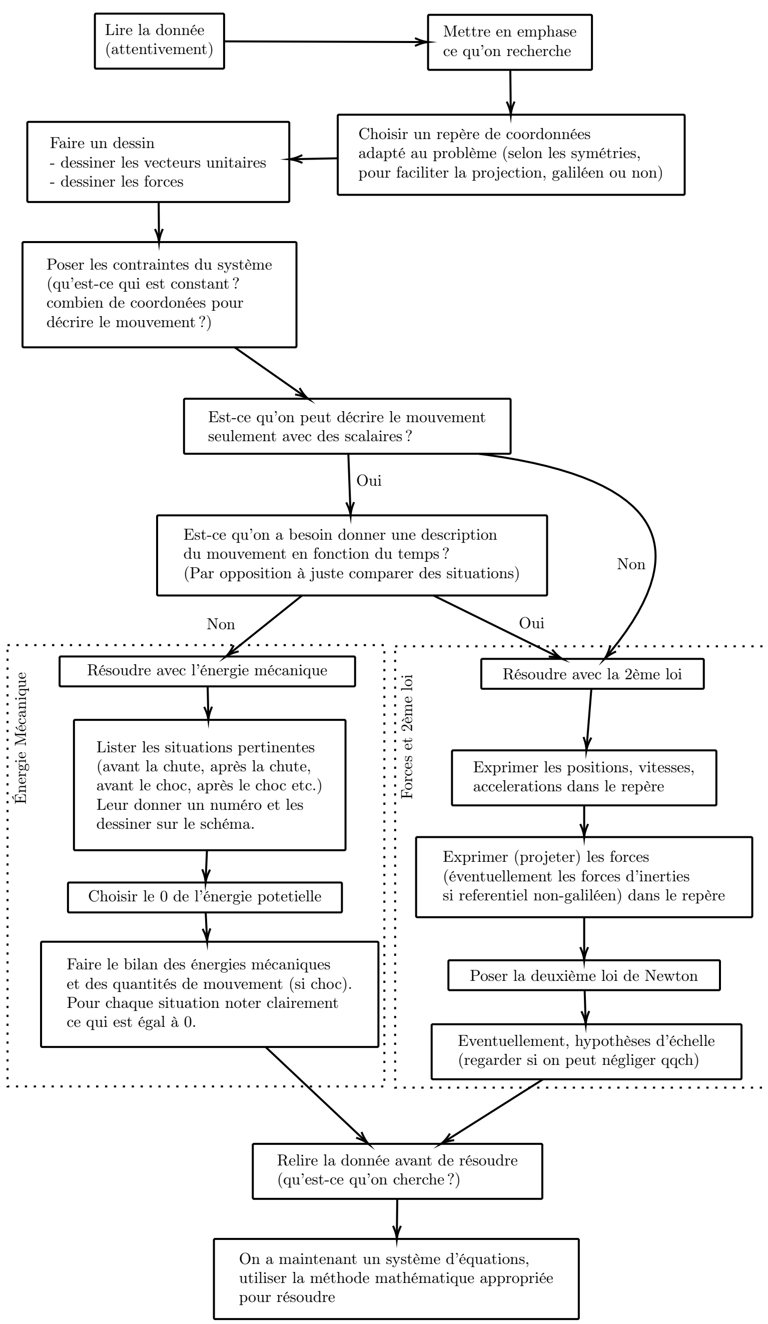
Antisèche pour le cours de mécanique newtonienne

Titouan Renard

24 novembre 2021

1 Marche à suivre



2 Lois Fondamentales

2.1 Lois de Newton

1ère loi

Tout corps persévère dans l'état de repos ou de mouvement uniforme en ligne droite à moins qu'une force agisse sur lui.

$$\vec{F} = 0 \Rightarrow \ddot{x} = 0 \Rightarrow \dot{x} \text{ cst}$$

2ème loi

Les changements de mouvements sont proportionnels à la force motrice, et se font dans la ligne droite dans laquelle cette force est appliquée.

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Note : $\frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a}$ si $\vec{a}$ est conservé.

3ème loi

$$\vec{F}^{2\to 1} + \vec{F}^{1\to 2} = 0$$

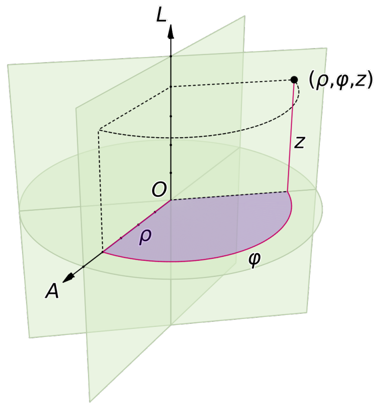
La somme des forces internes entre 2 corps prise "des deux côtés" est toujours nulle. A toute action est opposée une réaction égale.

Ce qu'il faut en retirer c'est que les forces internes d'un système sont sans influence sur le comportement du centre de masse du système.

3 Outils mathématiques

3.1 Systèmes de coordonnées

Coordonnées cylindriques



On représente un point $\vec{M}$ par les trois coordonnées ρ, φ and z :

$$\vec{M} = (\rho, \varphi, z).$$

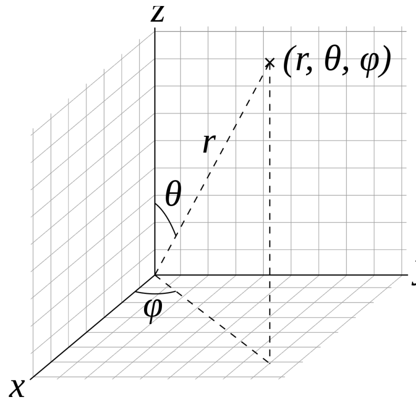
Les vecteurs unitaires sont représentés en base cartésienne comme :

$$\vec{e_\rho} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e_\rho} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e_\rho} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On pose les coordonnées d'un point (et leur dérivées) comme suit :

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \rho\vec{e_\rho} + z\vec{e_z}, \\ \vec{v} = \dot{\vec{r}} &= \dot\rho\vec{e_\rho} + \rho\dot\varphi\vec{e_\varphi} + \dot z\vec{e_z}, \\ \vec{a} &= \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}, \\ \ddot{\vec{r}} &= (\ddot\rho - \rho\dot\phi^2)\vec{e_\rho} + (\rho\ddot\varphi + 2\dot\rho\dot\varphi)\vec{e_\varphi} + \ddot z\vec{e_z}. \end{aligned}$$

Coordonnées sphériques



On représente un point $\vec{M}$ par les trois coordonnées r, θ and φ :

$$\vec{M} = (r, \theta, \varphi).$$

Les vecteurs unitaires sont représentés en base cartésienne comme :

$$\vec{e_r} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}, \vec{e_\theta} = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\varphi \\ \cos\varphi\sin\varphi \\ -\sin\theta \end{pmatrix}, \quad \vec{e_\varphi} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On pose les coordonnées d'un point (et leur dérivées) comme suit :

$$\begin{aligned} \vec{r} &= r\vec{e_r}, \\ \vec{v} = \dot{\vec{r}} &= \dot r\vec{e_r} + r\dot\theta\vec{e_\theta} + \sin\theta\vec{e_\varphi}, \\ \vec{a} &= \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}, \\ \ddot{\vec{r}} &= (\ddot r - r\dot\theta^2 - r\dot\varphi^2\sin^2\theta)\vec{e_r} \\ &+ (r\ddot\theta + 2\dot r\dot\theta - r\dot\varphi^2\sin\theta\cos\theta)\vec{e_\theta} \\ &+ (r\ddot\varphi\sin\theta + 2\dot r\dot\varphi\sin\theta + 2r\dot\varphi\dot\theta\cos\theta)\vec{e_\varphi}. \end{aligned}$$

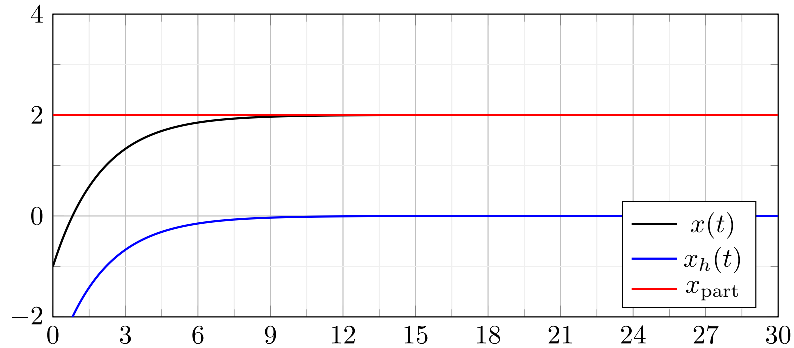
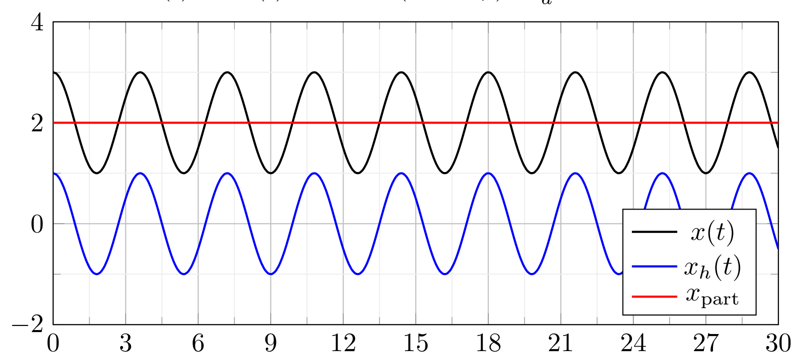
3.2 Equations différentielles

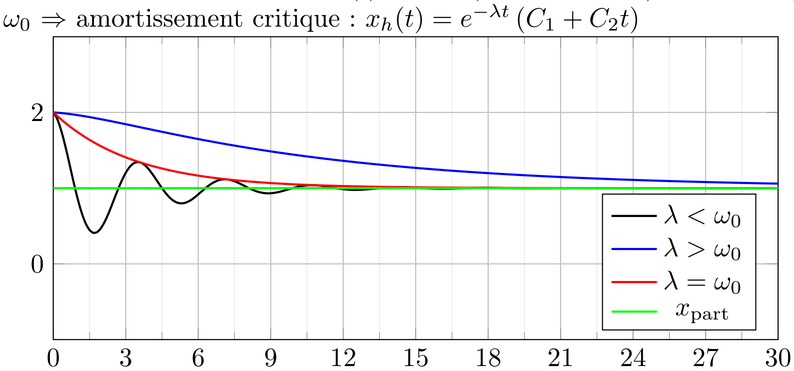
En physique 1 on traite des équations différentielles linéaire du premier et du second ordre. Physique 1 n'est pas un cours de math (en tout cas pas un cours sur les equations différentielles), donc on se contente d'étudier des equations différentielles connues. **La résolution de ces équations revient à réécrire les équations du mouvement sous une forme dont on connait déjà la solution**.

Marche à suivre pour résoudre une équation différentielle

1. Identifier quel type d'équation on a (1er ordre, 2ème ordre, amorti ou non)
2. Réécrire l'équation sous la forme canonique (pour la lisibilité)
3. Résoudre
   (a) trouver la solution particulière
   (b) trouver la solution homogène
4. Trouver les inconnues en fonction des conditions initiales

3.3 Tableau des équations différentielles

<table>
<tr><td>Nom de l'équation</td><td>Forme canonique</td><td>solution particulière</td><td>solution homogène</td></tr>
<tr><td>Premier ordre</td><td>$\dot{x}(t) + ax(t) = c$</td><td>$x_{\text{part}} = \frac{c}{a}$</td><td>$x_h(t) = A \cdot e^{-a(t-t_0)}$</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="3">Solution complète : $x(t) = A \cdot e^{-a(t-t_0)} + \frac{c}{a}$

</td></tr>
<tr><td>Deuxième ordre</td><td>$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = c$</td><td>$x_{\text{part}} = \frac{c}{\omega_0^2}$</td><td>$x_h(t) = A \cdot cos(\omega_0 t + \varphi)$</td></tr>
<tr><td>oscillateur non amorti</td><td colspan="3">Solution complète : $x(t) = x_h(t) = A \cdot cos(\omega_0 t + \varphi) + \frac{c}{a}$


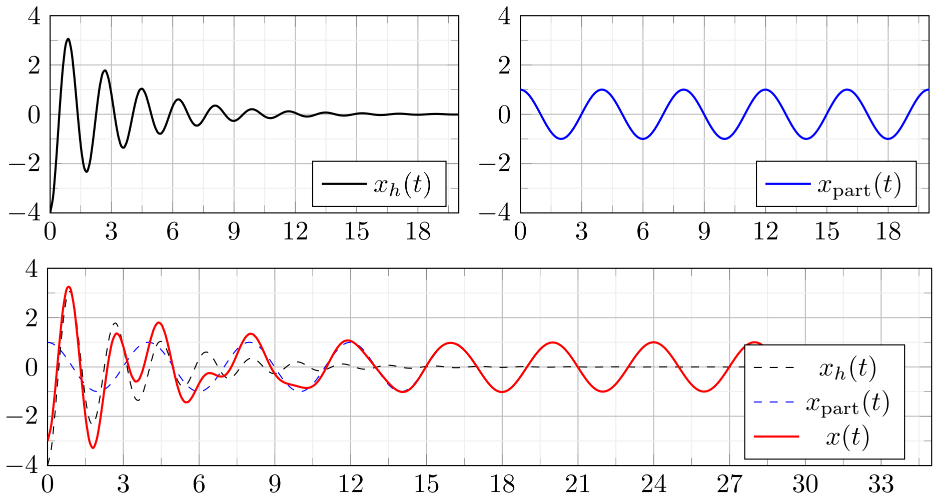
Note : la solution homogène peut être réécrite $x(t) = x_h(t) = A \cdot sin(\omega_0 t + \varphi)$ ou encore $x(t) = x_h(t) = A \cdot sin(\omega_0 t) + B \cdot sin(\omega_0 t)$.
(En choisissant correctement les constantes).</td></tr>
<tr><td>Deuxième ordre</td><td>$a\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + cx(t) = d$</td><td>$x_{\text{part}} = \frac{d}{c}$</td><td>$x_h(t)$: plusieurs cas</td></tr>
<tr><td>oscillateur amorti</td><td colspan="3">Coefficient d'amortissement : $\lambda = \frac{b}{2a}$, pulsation propre : $\frac{c}{a} = \omega_0^2$
1. $\lambda < \omega_0 \Rightarrow$ amortissement faible : $x_h(t) = Ae^{-\lambda t} cos(\omega t + \varphi)$, avec $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$
2. $\lambda > \omega_0 \Rightarrow$ amortissement fort : $x_h(t) = e^{-\lambda t}\left(C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{\omega t}\right)$, avec $\omega = \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$
3. $\lambda = \omega_0 \Rightarrow$ amortissement critique : $x_h(t) = e^{-\lambda t}\left(C_1 + C_2 t\right)$


La solution est toujours donnée par $x(t) = x_h(t) + x_{\text{part}}$.</td></tr>
</table>

Oscillateurs forcés

Dans un oscillateur forcé **la solution particulière n'est pas constante**, l'oscillateur se stabilise dans un régime permanent ou sa pulsation rejoint la pulsation d'excitation. L'amplitude de son oscillation ansi que son déphasage avec la force excitatrice sont fonction de la pulsation excitatrice et des paramètres de l'oscillateur. La solution homogène est la même que pour un oscillateur ammorti non entrainé.

Forme canonique : $$\overbrace{\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x}^{\text{Equation diff. de l'oscillateur amorti}} = \overbrace{A_e \sin(\Omega t)}^{\text{Force excitatrice}}$$



Solution particulière

Forme de la sol. particulière : $$x_{\text{part}}(t) = \overbrace{A(\Omega)}^{\text{Amplitude}} \sin(\Omega t + \psi)$$

Amplitude : $$A(\Omega) = \frac{A_e}{\sqrt{(\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2}}$$

Dephasage : $$\psi = \arctan\left(\frac{-2\lambda\Omega}{(\omega_0^2 - \Omega^2)}\right)$$