В.В. Меньших
О.В. Пьянков

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ ДЛЯ СЛУШАТЕЛЕЙ ФАКУЛЬТЕТА ЗАОЧНОГО ОБУЧЕНИЯ

Специальность 210406.65
« Сети связи и системы коммутации»

2010

ББК 22.161
М51
УДК 519.3

Рецензенты: начальник кафедры физики Воронежского института МВД России заслуженный работник высшей школы, доктор химических наук, профессор Ю.В. Спичкин;

профессор кафедры правовой информатики, информационного права и естественнонаучных дисциплин Центрального филиала ГОУ ВПО «Российская академия правосудия» доктор технических наук, доцент Л.Е. Мистров.

Меньших В.В.
М51 Дискретная математика: учебно-методическое пособие для слушателей факультета заочного обучения / В.В. Меньших. - Воронеж: ВИ МВД России, 2010. – 155 с.

Учебно-методическое пособие предназначено проведения практических занятий, выполнения контрольных работ и самоподготовки по курсу «Дискретная математика» для слушателей факультета заочного обучения, обучающихся по специальности 210403.65 «Защищенные системы связи».

$\grave{I}\ \frac{1602000000-03}{221-07}04-07$ ББК 22.161

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Классическая («непрерывная») математика традиционно развивалась в интересах решения естественнонаучных задач и, прежде всего, физики. В отличие от нее «дискретная» математика преимущественно связана с исследованием и моделированием человеческого мышления. Это и определяет в качестве основных областей применения дискретной математики объекты (системы, явления), связанные с определенными сторонами мыслительной деятельности человека и относящиеся в первую очередь к информатике и вычислительной технике: для создания и эксплуатации интегрированных автоматизированных систем обработки информации и их компонент (математического обеспечения, пакетов прикладных программ, распределенных банков данных, сетей передачи данных, систем с распределением ресурсов и распределенной обработкой информации) необходимо знание дискретной математики.

Основной особенностью дискретной математики является отсутствие предельного перехода и непрерывности, характерных для классической (непрерывной) математики. Ее теоретическое и методическое значение обусловлено возрастающими требованиями к профессиональным знаниям специалиста и формированию научного понимания структуры основных законов и принципов построения современных сложных технических систем.

Преподавание дискретной математики имеет целью повысить общую культуру мышления обучаемых и, тем самым, подготовить их к сознательному и глубокому усвоению математических дисциплин общего и специального циклов.

В дисциплине «Дискретная математика» широко используются знания, полученные при изучении ряда разделов дисциплины «Математика». С другой стороны, дисциплины «Математика» и «Дискретная математика» являются базовыми теоретическими дисциплинами и представляют собой фундамент для изучения других математических, естественнонаучных и специальных дисциплин, таких как физика, химия, теория вероятностей и математическая статистика, теория случайных процессов, численные методы, информатика, теория информации, моделирование систем, цифровые устройства и микропроцессоры, аппаратные средства вычислительной техники и др.

В данном пособии представлены теоретические сведения и практические задания по всем основным разделам курса дискретной математики, изучаемым в технических вузах:

- множества и отображения,
- комбинаторика,
- математическая логика,

- теория графов,
- конечные автоматы.

Кроме того, пособие содержит рабочую программу по курсу, задания для выполнения контрольной работы слушателями заочной формы обучения и рекомендации по их выполнению.

Материал, включенный в пособие распределялся между авторами следующим образом: части I и II написаны В.В. Меньших, часть III написана авторами совместно.

Настоящее пособие имеет целью помочь слушателям заочной формы обучения в самостоятельной работе над учебным материалом и выполнении контрольной работы.

ЧАСТЬ I. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

1. РАБОЧАЯ ПРОГРАММА КУРСА «ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА» ПО СПЕЦИАЛЬНОСТИ 210406.65- СЕТИ СВЯЗИ И СИСТЕМЫ КОММУТАЦИИ

Цель изучения дисциплины состоит в формировании личности курсантов и слушателей, развитии их интеллекта и способностей к логическому и алгоритмическому мышлению, обучению студентов основным математическим методам, необходимым для анализа и моделирования устройств, процессов и явлений при поиске оптимальных решений для осуществления научно-технического прогресса и выбора наилучших способов реализации этих решений.

Основные задачи дисциплины «Дискретная математика» состоят в следующем:

1) на примерах математических понятий и методов продемонстрировать курсантам и слушателям сущность научного подхода, специфику дискретной математики и ее роль в осуществлении научно-технического прогресса;

2) научить курсантов и слушателей приемам исследования и решения математических формализованных задач математическими методами;

3) выработать у курсантов и слушателей умение анализировать полученные результаты;

4) привить курсантам и слушателям навыки самостоятельного изучения литературы по дискретной математике и ее техническим приложениям.

Изучение дисциплины базируется на знаниях средней школы. Курс дискретной математики является фундаментом математического образования инженера и обеспечивает изучение дисциплин «Физика», «Информатика», «Теория вероятностей и математическая статистика», «Теория электрических цепей», «Теория электрической связи», «Теория цифровой обработки сигналов», «Теория информации», «Электроника и схемотехника», «Методы и средства программирования» и др., а также дипломное проектирование.

В результате изучения дисциплины курсанты и слушатели должны: иметь представление

- - о роли дискретной математики, ее месте в системе фундаментальных теоретических и прикладных наук и роли в решении практических задач;

– - об истории развития и современных направлениях дискретной математики;
– - о методологических вопросах дискретной математики;
– знать
– - основные алгебраические структуры; основы теории множеств и отображений;
– - основы математической логики;
– - основные понятия теории графов, алгоритмы на графах;
– - основы теории автоматов а теории алгоритмов.

уметь
– - определять возможности применения теоретических положений и методов математического анализа для постановки и решения практических радиотехнических задач;
– - решать задачи по теории множеств, математической логике и теории графов;
– владеть
– - методами аналитического представления и минимизации булевых функций, алгоритмического решения задач теории графов;
– - формализации прикладных задач с помощью автоматов.

В соответствии с рабочим учебным планом на изучение дисциплины «Дискретная математика» отводится 85 учебных часов, в т.ч. 12 часов – на аудиторные занятия и 73 час – на самостоятельную работу слушателей.

В рамках изучения дисциплины слушатели должны выполнить контрольную работу.

Дисциплина изучается в течение одного учебного года, в конце которого предусмотрен зачет.

2. ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН ДИСЦИПЛИНЫ «ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА»

№ п/п	Наименование разделов и тем	Всего часов	Аудит. занятия	Из них		Сам. раб.
				Л.	П.З.	
1	2	3	4	5	6	7
	Раздел 1. Основные структуры дискретной математики.					
1.	Тема 1. Теория множеств и отображения.	14	2	1	1	12
2.	Тема 2. Элементы математической логики.	18	2	1	1	16
3.	Тема 3. Элементы теории графов.	18	4	2	2	14
	Раздел 2. Автоматы и алгоритмы.					
4.	Тема 4. Основы теории конечных автоматов.	6	2	1	1	4
5.	Тема 5. Теория алгоритмов.	8	2	1	1	6
	Контрольная работа.	11	-	-	-	11
	Зачет.	10	-	-	-	10
	Итого по курсу.	85	12	6	6	73

3. ПЕРЕЧЕНЬ РАЗДЕЛОВ И ТЕМ ДИСЦИПЛИНЫ

Структурно дисциплина состоит из 2 разделов, включающих 5 тем.

Первый раздел носит название «Основные структуры дискретной математики» и включает в себя изучение основных операций теории множеств, отношения на множествах, отображения множеств, элементы математической логики, булевы функции, теории графов и алгоритмов на графах.

Во втором разделе «Автоматы и алгоритмы» рассматриваются основы теории конечных автоматов, способы представления автоматов и моделирование систем с помощью автоматов, а также понятие алгоритма и сложности алгоритмов.

Соответствующие темы с перечнем основных вопросов, подлежащих изучению по данной теме.

Раздел 1. Основные структуры дискретной математики.

Тема 1. Теория множеств и отображения.

Понятие множества. Способы задания множеств. Понятие подмножества. Равенство множеств. Операции над множествами: пересечение, объединение, дополнение. Булеан. Булева алгебра множеств.

Декартово произведение множеств. Бинарные отношения. Отношения эквивалентности. Отношения порядка.

Комбинаторные задачи. Принципы сложения и умножения. Размещения, перестановки и сочетания без повторений и с повторениями. Бином Ньютона.

Соответствия между множествами. Всюду определенные, сюръективные, функциональные и инъективные соответствия. Взаимнооднозначные соответствия и мощность бесконечных множеств. Конечные, счетные и континуальные множества.

Тема 2. Элементы математической логики.

Логика высказываний. Простые и сложные высказывания. Основные логические операции. Формулы логики. Законы логики высказываний. Равносильные преобразования. Упрощение формул. Тавтологии. Противоречия. Нормальные формы. Приведение формул к совершенным нормальным формам.

Булева алгебра функций. Булевы функции. Каноническое представление булевых функций. Булева алгебра функций. Алгебра Жегалкина. Основные классы булевых функций. Полные системы булевых функций.

Логическое проектирование релейно-контактных устройств. Минимизация булевых функций. Построение оптимальных схем функциональных элементов.

Тема 3. Элементы теории графов.

Предмет теории графов. Определения ориентированных и неориентированных графов. Типы графов. Основные инварианты графов. Изоморфизм графов. Операции над графами. Матрицы смежности, инцидентности. Достижимость и связность графов. Планарные графы. Укладки графов. Критерий планарности графа графа. Эйлеровы и гамильтоновы циклы и пути. Деревья и лес. Циклическое и хроматическое число графа. Взвешенный граф. Оптимизационные алгоритмы на графах.

Раздел 2. Автоматы и алгоритмы.

Тема 4. Основы теории конечных автоматов.

Основные понятия. Способы описания конечных автоматов. Функции, реализуемые конечным автоматом. Типы конечных автоматов. Структурная модель конечного автомата.

Тема 5. Теория алгоритмов.

Алгоритмы в интуитивном смысле. Формализация понятия алгоритма. Рекурсивные функции, нормальные алгоритмы Маркова. Машины Тьюринга. Тезисы Черча, Маркова и Тьюринга. Разрешимые и неразрешимые проблемы. Понятие сложности вычислений. Эффективные алгоритмы.

4. ВОПРОСЫ К ЗАЧЕТУ

1. Основные понятия и определения теории множеств. Способы задания множеств. Аксиоматика теории множеств.
2. Операции над множествами и их представление диаграммами Эйлера - Венна.
3. Основные тождества алгебры множеств.
4. Доказательство тождеств в алгебре множеств.
5. Векторы, декартовы произведения и проекции векторов.
6. Определение отображения и типы отображений.
7. Равномощность множеств. Счетные множества, несчетные множества.
8. Понятие мощности множества.
9. Бинарные отношения. Свойства и способы задания бинарных отношений.
10. Отношения эквивалентности и классы эквивалентности.
11. Отношения порядка. Упорядоченные множества.
12. Операции над бинарными отношениями.
13. Принцип сложения и принцип умножения.
14. Размещения, перестановки и сочетания без повторений.
15. Размещения, перестановки, сочетания с повторениями.
16. Бином Ньютона и полиномиальная формула.
17. Простые и сложные высказывания.
18. Основные логические операции.
19. Основные схемы логически правильных рассуждений.
20. Понятие формул логики. Таблицы истинности.
21. Логическая равносильность.
22. Законы логики.
23. Равносильные преобразования. Упрощение формул.
24. Функционально полные системы логических функций.
25. Переход от табличного задания логической функции к булевой формуле.
26. Эквивалентные преобразования. Упрощение формул.
27. Дизъюнктивная нормальная форма.
28. Конъюнктивная нормальная форма.
29. Совершенная дизъюнктивная нормальная форма.
30. Совершенная конъюнктивная нормальная форма.
31. Метод Квайна-Мак-Класски.
32. Метод карт Вейча.
33. Определение и примеры предикатов.
34. Связь предикатов с отношениями и функциями.
35. Область истинности предиката.
36. Кванторы. Квантификация предиката.
37. Простейшие логические операции над предикатами.

38. Выполнимость и истинность формул логики предикатов.
39. Эквивалентные преобразования предикатных формул.
40. Префиксная нормальная форма предикатных формул.
41. Определение простого графа и мультиграфа.
42. Основные понятия и определения теории графов.
43. Геометрическое изображение и изоморфизм графов.
44. Части графов.
45. Пути и циклы в ориентированных и неориентированных графах.
46. Связность и сильная связность графов. Компоненты связности.
47. Двудольные графы. Теорема Кенига.
48. Планарные графы. Теорема Понтрягина-Куратовского.
49. Простейшие числовые характеристики графов.
50. Матричное представление неориентированных графов.
51. Матричное представление ориентированных графов.
52. Числовые характеристики полного графа, леса и двудольного графа.
53. Эйлеровы графы. Теорема о существовании эйлерова цикла и эйлерова пути.
54. Алгоритм Х. Туя нахождения эйлерова пути и эйлерова цикла.
55. Гамильтоновы графы. Условие существования гамильтонова цикла.
56. Алгоритм поиска в глубину в графе.
57. Алгоритм поиска в ширину в графе.
58. Остовные деревья и фундаментальные циклы.
59. Построение остовного дерева минимальной длины. Жадный алгоритм.
60. Алгоритм построения кратчайшего остова графа. Алгоритм ближайшего соседа.
61. Алгоритм поиска кратчайшего пути в графе.
62. Операции с графами. Кольцевая сумма циклов.
63. Фундаментальный базис циклов.
64. Определение конечного автомата.
65. Способы описания конечного автомата.
66. Автоматы-преобразователи и автоматы-распознаватели.
67. Рекурсивные функции.
68. Машина Тьюринга.

ЧАСТЬ II. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ

1. МНОЖЕСТВА И ОТОБРАЖЕНИЯ

1.1. ПОНЯТИЕ И СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ МНОЖЕСТВ

Понятия *множество* и *элементы множества* являются неопределяемыми понятиями математики. Основатель теории множеств Г. Кантор дал нестрогое (интуитивное) определение этих понятий, которое удобно использовать для первоначального представления о них: «*Множество есть многое, мыслимое как единое*». Таким образом, каждое множество состоит из некоторых элементов.

Рассмотрим основные определения и обозначения теории множеств.

Принадлежность элемента a множеству M обозначается $a \in M$, а непринадлежность - $a \notin M$.

Если множества A и B составлены из одних и тех же элементов, то говорят. что они *равны*: $A = B$. В противном случае множества A и B *неравны* (обозначается $A \neq B$).

Множество A называется *подмножеством* множества B (обозначается $A \subseteq B$), если каждый элемент множества A является элементом множества B. В этом случае также говорят, что множество B содержит множество A или является надмножеством множества A (обозначается $B \supseteq A$). Множество A называется *собственным подмножеством* множества B (обозначается $A \subset B$), если $A \subseteq B$ и $A \neq B$, т. е. в B есть элементы, не содержащиеся в A.

Множество, содержащее конечное число элементов называется *конечным*, в противном случае – *бесконечным*. Число элементов конечного множества M называется его *мощностью* (обозначается $|M|$). Общее понятие мощности произвольного (как конечного, так и бесконечного) множества будет введено позднее.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым* (обозначается $\varnothing$). По определению $|\varnothing| = 0$. Считается, что пустое множество является подмножеством любого множества.

На практике удобно использовать следующие способы задания множеств:

- перечисление, например $A = \{-6, -4, -2, 0, 2, 4, 6\}$;
- порождающая процедура, например $B = \{x\colon x \in N, 2 < x \leq 13\}$;

- описание характеристических свойств, например C = {*неположительные четные числа*}.

Геометрически множества часто изображают с помощью *диаграмм Эйлера –Венна*, которые строятся следующим образом.

Прямоугольной рамкой выделяется <u>универсальное множество</u> U, содержащее элементы всех рассматриваемых множеств. Внутри прямоугольника выделяют замкнутыми линиями (обычно овалами) фигуры, соответствующие всем рассматриваемым множествам. Для конечных множеств их элементы часто обозначаются точками. Подмножества, обладающие определенными свойствами, могут отмечаться штриховкой.

Примеры приведены на рис. 1.1 и 1.2.

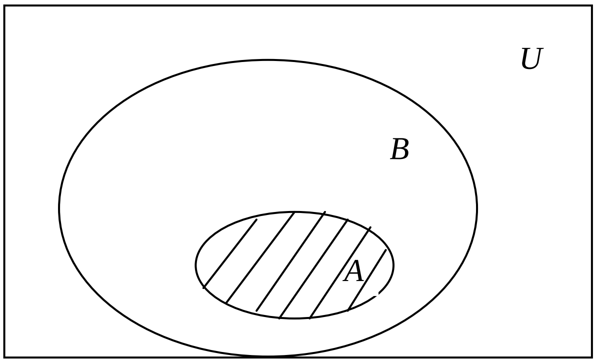


Рис. 1.1. Изображение диаграммой Эйлера-Венна множеств A и B таких, что $A \subset B$.

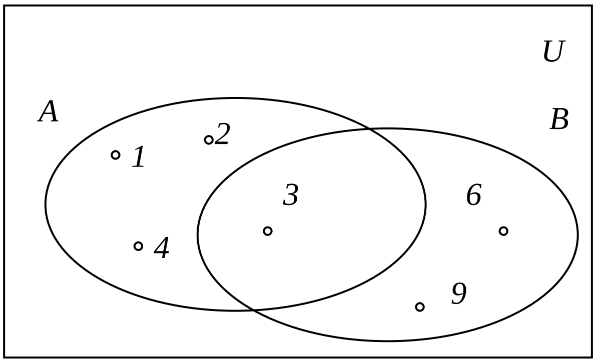


Рис. 1.2. Изображение диаграммой Эйлера-Венна множеств A и B таких, что $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 6, 9\}$.

Рассмотрим основные операции над множествами.

Объединением множеств A и B (обозначается $A \cup B$) называется множество, содержащее все элементы, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A и B, и не содержащее никаких других элементов (рис. 1.3): $A \cup B = \{x : x \in A \; или \; x \in B\}$.

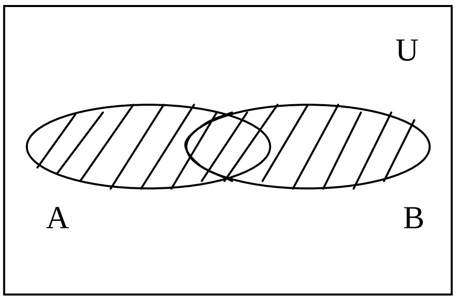


Рис. 1.3. $A \cup B$

Пересечением множеств A и B (обозначается $A \cap B$) называется множество, содержащее все элементы, которые принадлежат одновременно и множеству A и множеству B, и не содержащее никаких других элементов (рис. 1.4): $A \cap B = \{x : x \in A \ и \ x \in B\}$.

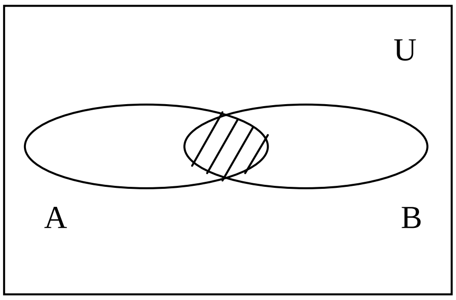


Рис. 1.4. $A \cap B$

Разностью множеств A и B (обозначается $A \setminus B$) называются множество, содержащее все элементы множества A, которые не принадлежат множеству B, и не содержащее никаких других элементов (рис. 1.5): $A \setminus B = \{x : x \in A \ и \ x \notin B\}$.

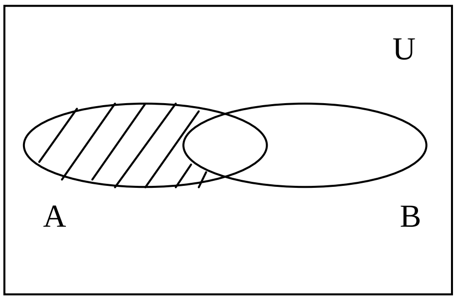


Рис. 1.5. $A \setminus B$

Дополнением до универсального множества U множества A (обозначается $\overline{A}$) называются множество, состоящее из всех элементов, не принадлежащих множеству A (но принадлежащих множеству U) (рис. 1.6): $\overline{A} = \{x : x \in U \setminus A\}$.

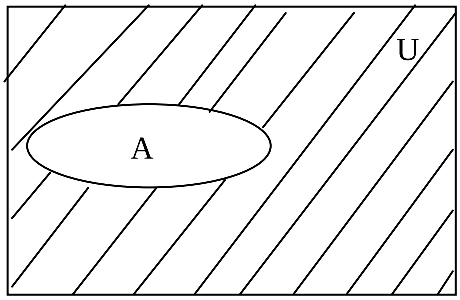


Рис. 1.6. $\overline{A}$

Введенные операции позволяют выражать одни множества через другие. При этом используется следующий порядок выполнения операций:

- операции дополнения,
- операции пересечения,
- операции объединения и разности.

Для изменения этого порядка в выражении используются скобки.

Рассмотрим примеры решения задач.

Задача 1. Найти

$A \cup B$, $A \cap \overline{B}$, $A \cup B \cap C$, $A \setminus B$, $(B \setminus A) \cap C$.

если $A = \{-2, 0, 1, 2, 4, 6\}$; $B = \{x\colon x \in Z, |x| \le 5\}$; $C = \{$*положительные нечетные числа*$\}$.

Решение.

1) Объединение множеств A и B содержит все элементы содержащиеся в этих множествах: $A \cup B = \{-2, 0, 1, 2, 4, 6\} \cup \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\} = \{-2, 0, 1, 2, 4, 6, -5, -4, -3, -1, 3, 5\}$.

2) Дополнением множества B являются все элементы, не входящие в это множество. Пересечению множеств принадлежат элементы, входящие одновременно во множество A и во множество $\overline{B}$. Следовательно,

$A \cap \overline{B} = \{6\}$.

3) Операция пересечения имеет больший приоритет, чем объединение. Поэтому, учитывая старшинство операций, первоначально найдем $B \cap C = \{1, 3, 5\}$. После этого найдем окончательное решение:

$A \cup B \cap C = \{-2, 0, 1, 2, 4, 6\} \cup \{1, 3, 5\} = \{-2, 0, 1, 2, 4, 6, 3, 5\}$.

4) Найдем разность множеств A и B, т. е. $A \setminus B$.

По определению в множество $A \backslash B$ должны входить те элементы множества A, которые не принадлежат множеству B, поэтому

$A \setminus B = \{6\}$.

При нахождении значений выражений, содержащих несколько операций, следует соблюдать порядок выполнения операций, если он не изменен с помощью скобок.

5) Найдем пересечение разности множеств B и A с множеством C, т. е. $(B \setminus A) \cap C$.

Найдем сначала разность множеств B и A: $B \backslash A$ = {-5, -4, -3, -1, 3, 5}. Окончательно $(B \setminus A) \cap C$ ={ 3, 5}.

Задача 2. По заданной диаграмме Эйлера–Венна описать множество, заданное штриховкой.

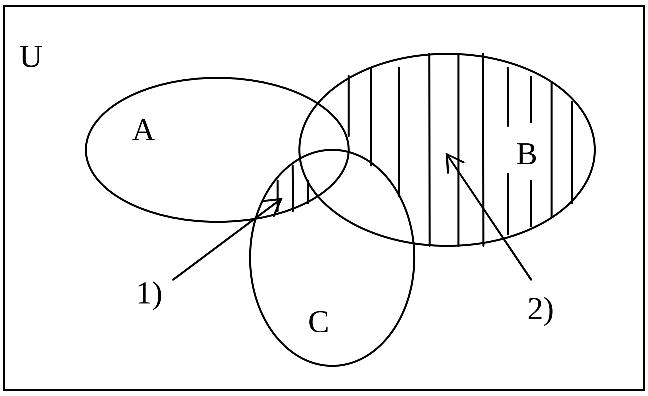


Рис. 1.7. Диаграмма Эйлера–Венна

На рис. 1.7 приведена диаграмма Эйлера-Венна, которая содержит изображение трех множеств A, B, C и универсального множества U. Штриховкой указано множество, являющееся объединением двух множеств:

1) пересечения множества A и множества C с вычитанием элементов множества B, т. е. $(A \cap C) \setminus B$;

2) разности множества C и объединения множеств A и B, т. е. $C \setminus (A \cup B)$.

Таким образом, решением задачи является множество $((A \cap C) \setminus B) \cup (C \setminus (A \cup B))$.

1.2. МОЩНОСТИ КОНЕЧНЫХ МНОЖЕСТВ

Большое количество текстовых задач может быть решено с помощью вычисления мощностей конечных множеств (числа их элементов) и их подмножеств. При этом удобно использовать графические представления в виде диаграмм Эйлера–Венна.

Пусть дана следующая текстовая задача.

Из 25 учеников класса 11 играют в футбол, 9 играют в баскетбол, 11 играют в теннис, 3 играют в футбол и баскетбол, 5 играют в футбол и теннис, 4 играют в баскетбол и теннис, 3 не занимаются спортом. Сколько учеников занимаются всеми тремя видами спорта?

Приведем решение задачи.

Введем обозначения:

A – множество учеников, играющих в футбол,

B – множество учеников, играющих в баскетбол,

C – множество учеников, играющих в теннис,

D – множество учеников, не занимающихся спортом.

В качестве универсального множества U можно рассматривать множество всех учеников класса. Поэтому $D = U \setminus (A \cup B \cup C)$.

Тогда, в соответствии с условием задачи дано, что $|U|=25$; $|A|=11$; $|B|=9$; $|C|=11$; $|A \cap B| = 3$; $|A \cap C| = 5$; $|B \cap C| = 4$; $|D| = 3$. Требуется найти пересечение трех множеств: $A \cap B \cap C$.

Очевидно, универсальное множество можно представить следующим образом

$$U = (A \cap B \cap C) \cup ((A \cap B) \setminus C) \cup ((A \cap C) \setminus B) \cup ((B \cap C) \setminus B) \cup$$
$$\cup (A \setminus (B \cup C)) \cup (B \setminus (A \cup C)) \cup (C \setminus (A \cup B)) \cup D$$

Никакие два множества, заключенные во внешние скобки, не пересекаются. Поэтому

$$\begin{aligned} |U| &= |A \cap B \cap C| + |(A \cap B) \setminus C| + |(A \cap C) \setminus B| + |(B \cap C) \setminus B| + \\ &+ |A \setminus (B \cup C)| + |B \setminus (A \cup C)| + |C \setminus (A \cup B)| + |D| \end{aligned} \qquad (1.1)$$

Обозначим мощность множества $|A \cap B \cap C| = x$. Найдем значения остальных слагаемых.

Изобразим все рассматриваемые на диаграмме Эйлера-Венна (рис. 1.8).

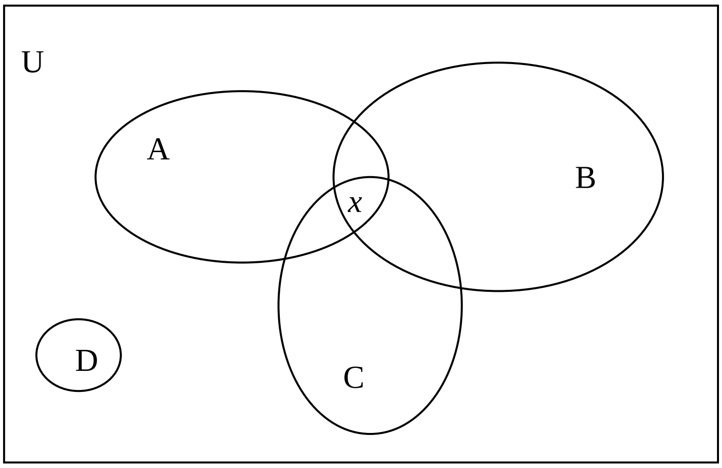


Рис. 1.8. Исходные множества

По условию задачи играют в футбол и баскетбол $|A \cap B| = 3$ человека. Тогда играют только в футбол и баскетбол (и не играют в теннис) $|(A \cap B) \setminus C| = |A \cap B| - |A \cap B \cap C| = 3 - x$ человек.

Рассуждая аналогично можно определить, что $|(A \cap C) \setminus B| = 5 - x$ – играют только в футбол и теннис (и не играют в баскетбол), $|(B \cap C) \setminus A| = 4 - x$ – играют только в баскетбол и теннис(и не играют в футбол).

Обозначим полученные выражения на диаграмме (рис. 1.9).

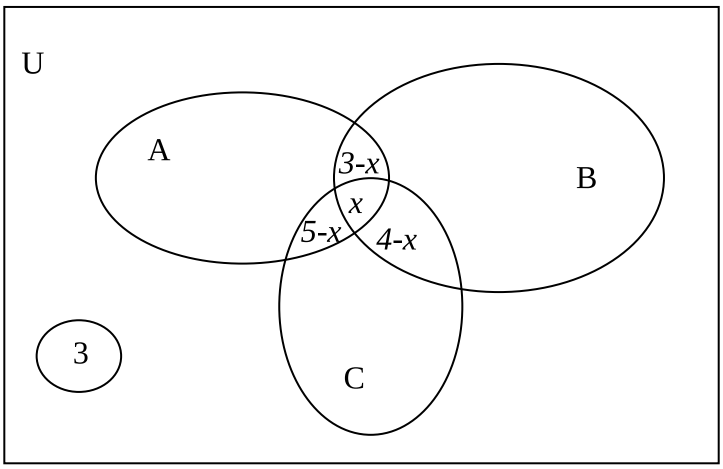


Рис. 1.9. Поиск решения задачи

Далее очевидно, что

$$|A \setminus (B \cup C)| = |A| - (|(A \cap B) \setminus C| + |(A \cap C) \setminus B| + |A \cap B \cap C|) =$$
$$= 11 - ((3 - x) + (5 - x) + x) = 3 + x;$$
$$|B \setminus (A \cup C)| = |B| - (|(A \cap B) \setminus C| + |(B \cap C) \setminus A| + |A \cap B \cap C|) =$$
$$= 9 - ((3 - x) + (4 - x) + x) = 2 + x;$$
$$|C \setminus (A \cup B)| = |C| - (|(A \cap C) \setminus B| + |(B \cap C) \setminus A| + |A \cap B \cap C|) =$$
$$= 11 - ((5 - x) + (4 - x) + x) = 2 + x.$$

Укажем полученные выражения на диаграмме (рис. 1.10).

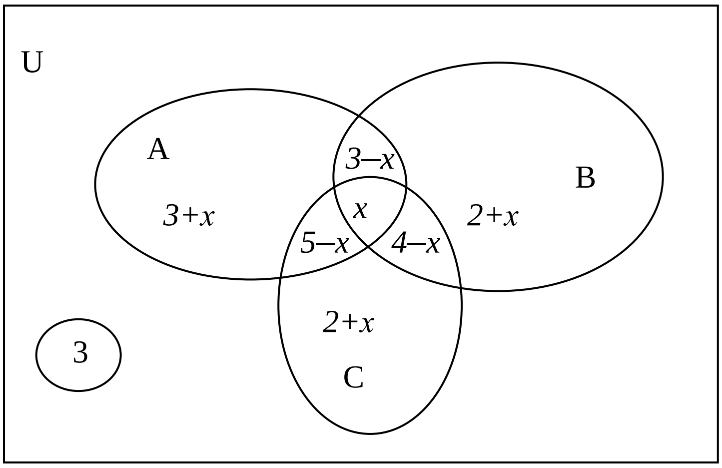


Рис. 1.10. Обозначение всех подмножеств

Таким образом, выражение (1.1) можно записать следующим образом:

25=x+(3-x)+(5-x)+(4-x)+(3+x)+(2+x)+(2+x)+3.

Получено уравнение относительно x. Его решение $|A \cap B \cap C| = x = 3$ означает, что всеми тремя видами спорта одновременно занимаются 3 человека.

1.3. СООТВЕТСТВИЯ МЕЖДУ МНОЖЕСТВАМИ

Пусть заданы множества A и B. *Соответствием* G между множествами A и B называется соотношение, при котором элементам $a \in A$ сопоставляются элементы $b \in B$. Это обозначается $G : A \to B$.

При этом используются следующие определения:

- каждый элемент $b \in B$, соответствующий элементу $a \in A$, называется *образом* элемента a; множество всех образов элемента $a \in A$ будем обозначать $G(a)$;
- каждый элемент $a \in A$, соответствующий элементу $b \in B$, называется *прообразом* элемента b; множество всех прообразов элемента $b \in B$ будем обозначать $G^{-1}(b)$;
- множество всех образов всех элементов $a \in A$, называется *множеством значений* соответствия G, которое будем обозначать $E(G)$;
- множество всех прообразов всех элементов $b \in B$, называется *множеством определения* соответствия G, которое будем обозначать $D(G)$.

1) Рассмотрим пример соответствия между подмножеством множества курсантов и множеством экзаменационных оценок.

Фамилия И.О. курсанта	Экзаменационные оценки		
	Математика	Физика	История Отечества
Иванов И.И.	5	4	5
Петров П.П.	2	2	3
Романов Р.Р.	4	4	4

Образы элемента x= «Иванов И.И.» - $G(\textit{Иванов И.И.}) = \{5,4\}$,

прообраз элемента $y = 2$ - $G^{-1}(2) = \{\textit{Петров П.П.}\}$,

множество определения соответствия

G – $D(G) = \{\textit{Иванов И.И.}, \textit{Петров П.П.}, \textit{Романов Р.Р.}\}$,

множество значений – $E(G) = \{2,3,4,5\}$.

Выделяют следующие типы соответствий.

Пусть заданы множества A и B.

Выделяют следующие типы соответствий:

- соответствие G называется *всюду определенным*, если его множество определения совпадает со всем множеством A:

$D(G) = A$, т. е. для каждого элемента $a \in A$ найдется хотя бы один образ;

- соответствие G называется *сюръективным*, если его множество значений совпадает со всем множеством B: $E(G) = B$, т. е. для каждого элемента $b \in B$ найдется хотя бы один прообраз;
- соответствие G называется *функциональным (однозначным)*, если для любого элемента $a \in A$ существует не более одного образа $|G(a)| \le 1$;
- соответствие G называется *инъективным*, если для любого элемента $b \in B$ существует не более одного прообраза $|G^{-1}(b)| \le 1$;
- соответствие G называется *взаимнооднозначным* или *биективным*, если оно всюду определено, сюръективно, функционально и инъективно.

Рассмотрим пример.

Пусть $A = R, B = R_{\ge 0}, G = \{(x, y), x \in A, y \in B, y = x^2\}$.

Найдем тип этого соответствия. Из свойств функции $y = x^2$ вытекает, что рассматриваемое соответствие

1) всюду определено, т. к. для каждого $x \in R$ найдется образ - значение $y = x^2 \ge 0$;

2) сюръективно, т. к. для каждого $y \ge 0$ найдется прообраз - значение $x = \sqrt{y}$;

3) функционально, т. к. для каждого $x \in R$ найдется только один образ - значение $y = x^2 \ge 0$;

4) не инъективно, т. к. для всякого $y \in B, y > 0$ во множестве A существуют два прообраза - значения $x_1 = \sqrt{y}, x_2 = -\sqrt{y}$;

5) не взаимнооднозначно, т. к. не является инъективным.

Если между конечными множествами существует взаимнооднозначное соответствие, то, как легко доказать, количество элементов в них одинаково, т. е. $|A| = |B|$. Взаимнооднозначные соответствия позволяют распространить понятие мощности на произвольные множества:

два множества называются *равномощными*, если между их элементами можно установить взаимнооднозначное соответствие.

Множества, равномощные множеству натуральных чисел N, называются *счетными*.

Пример 1. Показать, что множество всех целых чисел счетно.

Для этого необходимо найти взаимнооднозначное соответствие между множествами целых и натуральных чисел: $f : N \to Z$. Легко проверить, что таким соответствием является, например,

$$z = f(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2}, \text{ если } n - \text{четное число}, \\ -\dfrac{n-1}{2}, \text{ если } n - \text{нечетное число}. \end{cases}$$

Верны следующие утверждения для счетных множеств, которые мы примем без доказательства.

Теорема 1.

1) Объединение конечного числа счетных множеств счетно;
2) объединение счетного числа конечных множеств счетно;
3) объединение счетного числа счетных множеств счетно.

Теорема 2. Множество всех рациональных чисел счетно.

Доказательство следует из теоремы 1.

Теорема 3. (теорема Кантора). Множество всех действительных чисел интервала $(0,1)$ не является счетным.

Мощность множества $(0,1)$ называется «континуум», а все множества, имеющие такую мощность – континуальными.

Пример 2. Показать, что множество всех действительных чисел континуально.

С этой целью найдем взаимнооднозначное соответствие между множеством I чисел, лежащих на отрезке $(0,1)$ и множеством действительных чисел $g : I \to R$. Легко проверить, что таким соответствием является, например, $y = g(x) = tg(\pi x - \frac{\pi}{2})$.

Можно доказать, что континуальными являются

- множество всех точек пространства R^n,
- множество всех подмножеств счетного множества.

Значения мощности множеств называют кардинальными числами. В частности кардинальными числами являются натуральные числа – это мощности конечных множеств.

Доказано, что мощность множества A и мощность множества всех его подмножеств 2^A связаны следующим соотношением: $|A| < |2^A|$. Поэтому не существует множества максимальной мощности, т.е. не существует максимального кардинального числа.

1.4. ДЕКАРТОВЫ ПРОИЗВЕДЕНИЯ И ПРОЕКЦИИ МНОЖЕСТВ

Пусть заданы множества $M_1, M_2, ..., M_n$. Вектором или кортежем называется упорядоченный набор элементов

$$v = (a_1, a_2, ..., a_n) \qquad (*)$$

такой, что $a_1 \in M_1, a_2 \in M_2, ..., a_n \in M_n$.

Число n называется длиной или размерностью вектора, а $a_i (i \in \{1,2,...,n\})$ - координатами или компонентами вектора.

Множество всех векторов вида (*) называется декартовым или прямым произведением множеств $M_1, M_2, ..., M_n$ (обозначается $M_1 \times M_2 \times ... \times M_n$). Если $M_1 = M_2 = ... = M_n = M$, то для декартова произведения используется обозначение M^n.

Декартово произведение множеств само является множеством и поэтому к нему применимы все изученные ранее способы задания и операции.

Пример. Пусть $M = \{0,1\}$, $N = \{a,b,c\}$. Тогда

$M \times N = \{(0,a),(0,b),(0,c),(1,a),(1,b),(1,c)\}$;

$M \times N = \{(a,0),(b,0),(c,0),(a,1),(b,1),(c,1)\}$.

Проекцией вектора v на i-ю ось называется его i-я координата (обозначается $np_i v$). Проекцией вектора v на оси $i_1, i_2, ..., i_k$ называется вектор длины k $(a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_k})$ (обозначается $np_{i_1 i_2 ... i_k} v$).

Проекцией множества $M \subseteq M_1 \times M_2 \times ... \times M_n$ на i-ю ось называется множество всех $\{np_i v,\ v \in M\}$ (обозначается $np_i M$). Проекцией множества $M \subseteq A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ на оси $i_1, i_2, ..., i_k$ называется множество всех $\{np_{i_1 i_2 ... i_k} v,\ v \in M\}$ (обозначается $np_{i_1 i_2 ... i_k} M$).

При разработке информационных систем часто бывает необходимо описывать запросы на получение информации. Для этого можно использовать язык теории множеств.

Массивы однородных данных M_i представляют собой множества, а файл базы данных является подмножеством M их декартового произведения. Каждый запрос к этому файлу представляет собой проекцию множества M, полученную в соответствии с условиями запроса.

Рассмотрим пример нахождения множества следователей моложе 30 лет со стажем работы в ОВД более 3 лет с указанием специальных званий и фамилий.

Для решения задачи может быть использована следующая таблица реляционной базы данных:

Фамилия, имя, отчество сотрудника	**Год рождения сотрудника**	**Занимаемая должность**	**Год поступления на службу в ОВД**	**Специальное звание**
Иванов И.И.	*1970*	*следователь*	*1999*	*майор милиции*
Петров П.П.	*1980*	*дежурный*	*1997*	*капитан милиции*
Сидоров С.С.	*1985*	*следователь*	*2009*	*лейтенант милиции*

На языке теории множеств эту таблицу можно описать как $M \subseteq M_1 \times M_2 \times M_3 \times M_4 \times M_5$ - множество, представляющее собой файл базы данных, где значения полей данных содержатся в следующих множествах:

M_1 - фамилия, имя, отчество сотрудников отдела,

M_2 - год рождения,

M_3 - занимаемая должность,

M_4 - год поступления на службу в ОВД,

M_5 - специальное звание.

Будем обозначать через x – элементы множества M, представляющие собой записи базы данных.

Тогда множество всех сотрудников моложе 30 лет (для 2010 года) на языке теории множеств есть множество A_1, состоящее из x_i, для которых проекция x_i на множество M_2 меньше тридцати:

$A_1 = \{x : np_2 x > 2010 - 30\}$.

Аналогично множество следователей:

$A_2 = \{x : np_3 x = следователь\}$.

Множество сотрудников со стажем более 3 лет:

$A_3 = \{x : np_4 x < 2007 - 3\}$.

Обозначим $B = A_1 \cap A_2 \cap A_3$ - множество всех записей о следователях моложе 30 лет и со стажем более 3 лет. Проекция этого множества

$X = np_{5,1} B$

определяет их специальные звания и фамилии и, следовательно, является искомым множеством.

1.5. БИНАРНЫЕ ОТНОШЕНИЯ

Подмножество R декартова произведения $M_1 \times M_2 \times ... \times M_n$ называется n-арным или n-местным отношением. Если $R \subseteq M^n$, то говорят, что R - n-местное отношение на множестве M.

Пример. Файл базы данных с полями, значения которых находятся в полях $M_1, M_2, ..., M_n$ представляет собой подмножество декартова произведения $M_1 \times M_2 \times ... \times M_n$, т. е. n-арное отношение.

Если $n = 1$, то отношение называется унарным. Оно отражает наличие какого либо признака у данного множества. Например, отношение $R \subset Z$ «быть четным числом» на множестве целых чисел Z является унарным.

Наиболее часто встречаются 2-местные или бинарные отношения. Если для отношения R - $(a,b) \in R$, то это обычно обозначают aRb, если же $(a,b) \notin R$, то обозначают $a\overline{R}b$.

Примеры. а) Бинарными отношения на множестве целых чисел Z являются:

O_k - «иметь одинаковый остаток от деления на k»,

O_2 - «иметь одинаковую четность».

б) Пусть M - множество целых, рациональных или вещественных чисел. Бинарными отношения на множество целых, рациональных или вещественных чисел M являются отношения $<, \leq, =, \neq, \geq, >$.

в) Пусть M - множество сотрудников фирмы. Бинарными отношения на M являются отношения:

«быть начальником»,

«не быть начальником»,

Рассмотрим способы задания отношений.

В соответствии с определением отношения являются множествами, и поэтому для их задания могут быть использованы все ранее описанные способы. Бинарные отношения, определенные на конечных множествах могут, кроме того, задаваться с помощью квадратных матриц и графов отношений.

Пусть $M = \{ a_1, a_2, ..., a_m \}$; тогда бинарное отношение $R \subseteq M^2$ задается по правилу:

$$R_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } a_i R a_j, \\ 0, \text{ если } a_i \overline{R} a_j. \end{cases}$$

Граф бинарного отношения является его геометрическим изображением и представляет собой схему, включающую

- вершины, обозначаемые точками или кружочками, соответствующие элементам множества $M = \{ a_1, a_2, ..., a_m \}$, на котором определяется отношение;
- дуги, соответствующие парам элементов, входящих в бинарные отношения, обозначаемые линиями со стрелками, направленными от вершины, соответствующей элементу a_i к вершине, соответствующей элементу a_j, если $a_i R a_j$.

Пример. Отношение R «быть делителем на множестве $M = \{ 1, 2, 3, 4 \}$» может быть задано матрицей:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

или в виде графа:

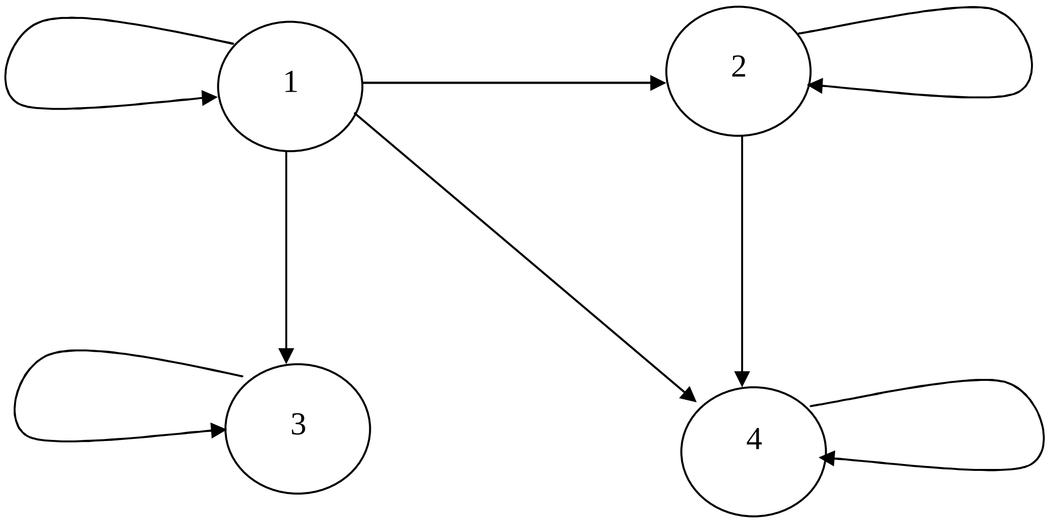


Рис. 1.11. Граф отношения R

Рассмотрим основные типы бинарных отношений.

Бинарное отношение R на множестве M называется *рефлексивным*, если для любого $a \in M$ выполняется aRa.

Примеры: 1) отношения $\le, =, \ge$ на множестве действительных чисел;

2) отношение «не быть начальником» на множестве сотрудников организации.

Бинарное отношение R на множестве M называется *антирефлексивным*, если для любого $a \in M$ выполняется $a\overline{R}a$.

Примеры: 1) отношения $<, >$ на множестве действительных чисел;
2) отношение «быть начальником» на множестве сотрудников организации.

Бинарное отношение R на множестве M называется *симметричным*, если для любых
$a, b \in M$, $a \neq b$ из aRb следует bRa.

Примеры: 1) отношения $\neq$ на множестве действительных чисел;
2) отношение «быть родственником» на множестве людей.

Бинарное отношение R на множестве M называется *антисимметричным*, если для любых $a, b \in M$, $a \neq b$ из aRb следует $b\overline{R}a$.

Примеры: 1) отношения $<, \leq, \geq, >$ на множестве действительных чисел;
2) отношение «быть сыном» на множестве людей.

Бинарное отношение R на множестве M называется *транзитивным*, если для любых $a, b, c \in M$ из aRb и bRc следует aRc.

Примеры: 1) отношения $<, \leq, =, \geq, >$ на множестве действительных чисел;
2) отношение «быть начальником» на множестве сотрудников организации.

Бинарное отношение R на множестве M называется *антитранзитивным*, если для любых $a, b, c \in M$ из aRb и bRc следует $a\overline{R}c$.

Примеры: 1) отношение «несовпадение четности» на множестве целых чисел;
2) отношение «быть непосредственным начальником» на множестве сотрудников организации.

Бинарное отношение R на множестве M называется *отношением эквивалентности*, если оно

- рефлексивно,
- симметрично,
- транзитивно.

Примеры: 1) отношение «иметь одинаковый остаток от деления на число k» на множестве целых чисел;
2) отношение «учиться в одной группе» на множестве учащихся.

Отношение эквивалентности R разбивает множество M на непересекающиеся подмножества так, что любые элементы одного подмножества находятся в отношении R, а любые элементы разных подмножеств не находятся в отношении R. Данные подмножества называются классами эквивалентности, а их количество – индексом разбиения.

Бинарное отношение R на множестве M называется *отношением нестрогого порядка*, если оно

- рефлексивно,
- антисимметрично,
- транзитивно.

Примеры: 1) отношение $\leq$ на множестве действительных чисел;
2) отношение «быть не старше» на множестве людей.

Бинарное отношение R на множестве M называется *отношением строгого порядка*, если оно

- антирефлексивно,
- антисимметрично,
- транзитивно.

Примеры: 1) отношение $<$ на множестве действительных чисел;
2) отношение «быть начальником» на множестве сотрудников организации.

Отношения строгого и нестрогого порядка называются отношениями порядка.

Элементы $a, b \in M$ называются сравнимыми по отношению порядка R, если aRb или bRa.

Множество M называется полностью упорядоченным множеством, если любые два элемента в нем сравнимы по некоторому отношению порядка R.

Примеры: 1) множество действительных чисел по отношениям $<, \leq, =, \geq, >$;
2) отношение «быть не старше» на множестве людей.

Множество M называется частично упорядоченным множеством, если в нем есть хотя бы два элемента, несравнимые по некоторому отношению порядка R.

Примеры: 1) множество комплексных чисел отношениям $<, \leq, \geq, >$;
2) отношение «быть начальником» на множестве сотрудников организации.

2. КОМБИНАТОРИКА

2.1. ОСНОВНЫЕ ТИПЫ КОМБИНАТОРНЫХ ЗАДАЧ

Комбинаторика – раздел дискретной математики, изучающий методы построения множеств. При комбинаторных построениях решаются задачи выбора и распределения элементов множества.

В рамках нашего курса мы ограничимся только рассмотрением вопросов оценки количества последовательностей элементов конечных множеств, для которых выполняются заданные ограничения.

При решении комбинаторных задач используются правила суммы и произведения.

Правило суммы. Если некоторый объект x можно распределить или выбрать k_x способами, а некоторый объект y - k_y способами, причем эти способы не пересекаются, то любой из этих объектов можно распределить или выбрать $k_x + k_y$ способами.

Задача. Найти число всех маршрутов из пункта *A* в пункт *B*, если известно, что имеется 5 автобусных и 3 железнодорожных маршрута.

Решение. $|M| = 5, |N| = 3 \Rightarrow |M \cup N| = 8$.

Правило произведения. Если некоторый объект x можно распределить (выбрать) k_x способами, а после каждого варианта распределения (выбора) объекта x некоторый объект y можно распределить (выбрать) k_y способами, то оба объекта (в указанном порядке) можно распределить (выбрать) $k_x k_y$ способами.

Задача. Найти число всех маршрутов из пункта *A* в пункт *B* через пункт *C*, если известно, что имеется 5 маршрутов из пункта *A* в пункт *C* и 3 маршрута из пункта *C* в пункт *B*.

Решение. $|M| = 5, |N| = 3 \Rightarrow |M \times N| = 15$.

Для формулировки и решения многих комбинаторных задач используются различные модели. Наиболее типичными из них является следующие.

Задача распределения элементов. Дано k различимых или неразличимых между собой предметов; их необходимо распределить по n ящикам так, чтобы выполнились заданные ограничения. Сколькими существует различных наборов заполненных ящиков, являющихся решениями этой задачи?

Задача выбора элементов. Дано n различимых или неразличимых между собой предметов или типов предметов; из них необходимо выбрать набор из k предметов так, чтобы выполнились заданные ограничения. Сколькими существует различных наборов предметов, являющихся решениями этой задачи?

Для решения комбинаторных задач используют наборы элементов множеств произвольной природы. Выделяют следующие типы наборов элементов:

- если в наборе элементы множеств могут повторяться, то такие наборы называются <u>наборами с повторениями</u>, а иначе - <u>наборами без повторений</u>;
- если порядок элементов в наборе важен, то наборы называются <u>размещениями</u>, а если не важен – <u>сочетаниями</u>;
- размещения, содержащие все элементы данного множества, называются <u>перестановками</u>.

Схематически это может быть представлено в виде блок-схемы, показанной на рис. 2.1.

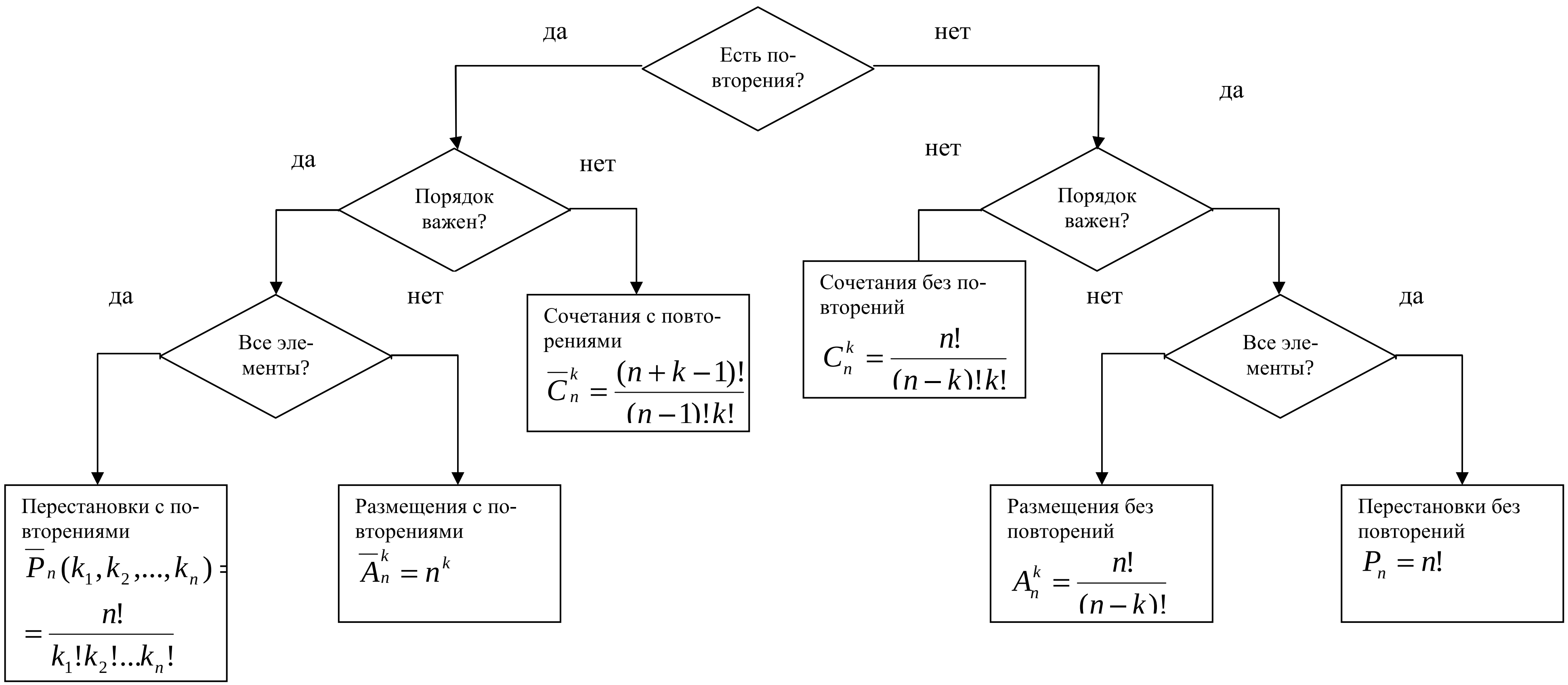


Рис. 2.1. Классификация наборов элементов

2.2. РЕШЕНИЕ КОМБИНАТОРНЫХ ЗАДАЧ

Числом размещений с повторениями из n по k (обозначается $\overline{A}_n^k$) является число всех возможных вариантов распределения k различимых между собой предметов по n ящикам.

Теорема. $\overline{A}_n^k = n^k$.

Пример. Сколькими способами можно распределить 3 различных шара по 6 лункам.

Решение. $n = 6, k = 3, \overline{A}_6^3 = 6^3 = 216$.

Числом размещений без повторений из n по k (обозначается A_n^k) является число всех возможных вариантов распределения k различимых между собой предметов по n ящикам так, чтобы в каждом ящике было не более одного предмета.

Теорема. $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

Пример. Сколько вариантов состава призеров, занявших первое, второе и третье места, если всего в соревновании участвуют 10 спортсменов.

Решение. $n = 10, k = 3, A_{10}^3 = \dfrac{10!}{7!} = 720$.Числом перестановок без повторений по n (обозначается P_n) является число всех возможных вариантов распределения n различимых между собой предметов по n ящикам так, чтобы в каждом ящике был один предмет.

Теорема. $P_n = n!$.

Пример. Сколько вариантов построить 5 человек в один ряд.

Решение. $n = 5, P_5 = 5! = 120$.

Числом перестановок с повторениями (обозначается $\overline{P}_n(k_1, k_2, ..., k_n)$) является число всех возможных вариантов распределения n предметов s различных типов по n $(\sum_{i=1}^{s} k_i = n)$ ящикам

k_1 предмет 1-го типа,

k_2 предметов 2-го типа, …,

k_s предметов s-го типа

так, чтобы в каждом ящике был один предмет.

Теорема. $\overline{P}_n(k_1, k_2, ..., k_s) = \dfrac{n!}{k_1!k_2!...k_s!}$.

Пример. Сколько различных слов можно написать из букв К,О,Л,О,К,О,Л.

Решение. $n = 7, k_1 = 2, k_2 = 3, k_3 = 2$. $\overline{P}_7(2,3,2) = \dfrac{7!}{2!\cdot 3!\cdot 2!} = 210$.

Числом <u>сочетаний без повторений из n по k</u> (обозначается C_n^k) является число всех возможных вариантов распределения k неразличимых между собой предметов по n ящикам так, чтобы в каждом ящике было не более одного предмета.

Теорема. $C_n^k = C_n^{n-k} = \dfrac{n!}{(n-k)!\,k!}$.

Пример. Сколькими способами можно назначить наряд из 3 человек, если имеется 9 претендентов.

Решение. $n = 9,\ k = 3$. $C_9^3 = \dfrac{9!}{3!\cdot 6!} = 84$.

числом <u>сочетаний с повторениями из n по k</u> (обозначается $\overline{C}_n^k$) является число всех возможных вариантов распределения k неразличимых предметов по n ящикам;

Теорема. $\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \dfrac{(n+k-1)!}{(n-1)!\,k!}$.

Пример. Сколькими способами можно поделить 10 яблок между 3 ребятами. *Решение.* $n = 3,\ k = 10$. $\overline{C}_3^{10} = \dfrac{12!}{2!\cdot 10!} = 66$.

2.3. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КОМБИНАТОРИКИ В ВЫЧИСЛЕНИЯХ

Теорема 1 (бином Ньютона)**.** $(x_1 + x_2)^n = \sum_{k=1}^{n} C_n^k x_1^{n-k} x_2^k$;

Следствие. $(x_1 - x_2)^n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k C_n^k x_1^{n-k} x_2^k$;

Задача. Найти коэффициент при x^5 в выражении $(x-2)^7$.

Решение. $(-1)^5 C_7^5 = -\frac{7!}{5!2!} = -21$

Биномиальные коэффициенты могут быть найдены с помощью треугольника Паскаля, где каждый внутренний элемент строки есть сумма стоящих над ним элементов предыдущей строки (рис. 1.1.)

Выражение:	Коэффициенты разложения C_n^k:
$(x_1 + x_2)^0$	1
$(x_1 + x_2)^1$	1 1
$(x_1 + x_2)^2$	1 2 1
$(x_1 + x_2)^3$	1 3 3 1
$(x_1 + x_2)^4$	1 4 6 4 1
$(x_1 + x_2)^5$	1 5 10 10 5 1
.	. . . .

Рис. 2.2. Треугольник Паскаля

Теорема 2 (полиномиальная формула).

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_p)^n = \sum_{k_1 + k_2 + \ldots + k_p = n} \frac{n!}{k_1!\,k_2!\ldots k_p!} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_p^{k_p}.$$

Задача. Раскрыть скобки в выражении $(x_1 - x_2 + 2)^2$.

Решение.

$$(x_1 - x_2 + 2)^2 = \frac{2!}{2!0!0!} x_1^2 (-x_2)^0 2^0 + \frac{2!}{0!2!0!} x_1^0 (-x_2)^2 2^0 +$$

$$+ \frac{2!}{0!0!2!} x_1^0 (-x_2)^0 2^2 + \frac{2!}{1!1!0!} x_1^1 (-x_2)^1 2^0 + \frac{2!}{1!0!1!} x_1^1 (-x_2)^0 2^1 +$$

$$+ \frac{2!}{0!1!1!} x_1^0 (-x_2)^1 2^1 = x_1^2 + x_2^2 + 4 - 2x_1x_2 + 4x_1 - 4x_2.$$

При нахождении значения полинома, возведенного в некоторую целую степень, для уменьшения количества вычислений удобно пользоваться полиномиальной формулой

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_p)^n = \sum_{k_1 + k_2 + \ldots + k_p = n} \frac{n!}{k_1!\, k_2! \ldots k_p!} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_p^{k_p} .$$

Воспользуемся данной формулой для нахождения значения следующего выражения: $(a - b + 3)^2$.

Выпишем все возможные случаи, когда сумма степеней трех элементов равна двум: 200, 020, 002, 011, 101, 110.

Распишем полиномиальную формулу, учитывая данные наборы:

$$(a - b + 3)^2 = \frac{2!}{2!\cdot 0!\cdot 0!} a^2 \cdot (-b)^0 \cdot 3^0 + \frac{2!}{0!\cdot 2!\cdot 0!} a^0 \cdot (-b)^2 \cdot 3^0 + \frac{2!}{0!\cdot 0!\cdot 2!} a^0 \cdot (-b)^0 \cdot 3^2 +$$

$$+ \frac{2!}{0!\cdot 1!\cdot 1!} a^0 \cdot (-b)^1 \cdot 3^1 + \frac{2!}{1!\cdot 0!\cdot 1!} a^1 \cdot (-b)^0 \cdot 3^1 + \frac{2!}{1!\cdot 1!\cdot 0!} a^1 \cdot (-b)^1 \cdot 3^0 =$$

$$= a^2 + b^2 + 9 - 6b + 6a - 6ab.$$

3. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

3.1. ЛОГИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Булевой или логической переменной называется переменная, принимающая одно из двух значений 0 и 1. Булевой или логической функцией называется функция булевых переменных, принимающая одно из двух значений 0 и 1.

Иногда значение 0 удобно интерпретировать как «ложь», а значение 1 - как «истина».

Булева функция $f(x_1,x_2,...,x_n)=0$ для всех значений аргументов называется логической константой 0, а булева функция $f(x_1,x_2,...,x_n)=1$ для всех значений аргументов называется логической константой 1.

Существуют два основных способа задания булевых функций - таблицы истинности и логические формулы.

Таблицы истинности содержат значения функций для всех возможных комбинаций значений входящих в них булевых переменных. Очевидно, что булева функция $f(x_1,x_2,...,x_n)$ с n аргументами имеет 2^n комбинаций значений аргументов. Поэтому ее таблица истинности содержит 2^n строк. Всех булевых функций с n аргументами - 2^{2^n}.

Для описания логических формул необходимо определить логические операции.

Конъюнкцией или логическим произведением двух логических переменных x и y называется логическая функция, принимающая

- значение 1, если обе переменные принимают значение 1,
- значение 0 - во всех остальных случаях.

Конъюнкция читается «x и y» и обозначается $x \wedge y$ или xy или $x \& y$.

Дизъюнкцией или логической суммой двух логических переменных x и y называется логическая функция, принимающая

- значение 0, если обе переменные принимают значение 0,
- значение 1 - во всех остальных случаях.

Дизъюнкция читается «x или y» и обозначается $x \vee y$.

Отрицанием или инверсией логической переменной x называется функция, принимающая

- значение 0, если x принимает значение 1,
- значение 1, если x принимает значение 0.

Отрицание читается «не x» и обозначается $\overline{x}$ или $\neg x$.

Импликацией или логическим следованием двух логических переменных x, называемой посылкой, и y, называемой следствием или заключением, называется логическая функция, принимающая

- значение 0, если $x = 1$, а $y = 0$,
- значение 1 - во всех остальных случаях.

Импликация читается «если *x*, то *y*» и обозначается $x \to y$. Очевидно, $x \to y = \overline{x} \vee y$.

Эквиваленцией или логической равнозначностью двух логических переменных x и y называется логическая функция, принимающая

- значение 0, если переменные x и y принимают одинаковые значения,
- значение 1, если переменные x и y принимают различные значения.

Эквиваленция обозначается $x \leftrightarrow y$ или $x \sim y$ или $x = y$.

Важную роль играют отрицания некоторых из введенных операций.

Штрихом Шеффера или антиконъюнкцией двух логических переменных x и y называется логическая функция, принимающая

- значение 0, если обе переменные принимают значение 1,
- значение 1 - во всех остальных случаях.

Штрих Шеффера обозначается $x \mid y$. Очевидно, $x \mid y = \overline{x \wedge y}$.

Стрелкой Пирса или антидизъюнкцией или функцией Вебба двух логических переменных x и y называется логическая функция, принимающая

- значение 1, если обе переменные принимают значение 0,
- значение 0 - во всех остальных случаях.

Стрелка Пирса обозначается $x \downarrow y$. Очевидно, $x \downarrow y = \overline{x \vee y}$.

Коимпликацией двух логических переменных x и y называется логическая функция, принимающая

- значение 1, если $x = 1$, а $y = 0$,
- значение 0 - во всех остальных случаях.

Коимпликация обозначается $x \overline{\to} y$. Очевидно, $x \overline{\to} y = x \wedge \overline{y}$.

Логической неравнозначностью или исключающим «или» или сложением по модулю 2 или суммой Жегалкина двух логических переменных x и y называется логическая функция, принимающая

- значение 0, если переменные x и y принимают различные значения,
- значение 1, если переменные x и y принимают одинаковые значения.

Неравнозначность обозначается $x \oplus y$. Очевидно, $x \oplus y = \overline{x \leftrightarrow y}$.

Введенные логические операции позволяют определить булевы функции двух аргументов. Всех булевых функций двух аргументов уже $2^{2^2} = 16$. Приведем полную таблицу истинности для всех унарных и бинарных логических операций.

x	y	0	$x \wedge y$	$\overline{x \to y}$	$\overline{x \to y}$	$x \downarrow y$	x	y	$x \leftrightarrow y$
0	**0**	0	0	0	0	1	0	0	1
0	**1**	0	0	0	1	0	0	1	0
1	**0**	0	0	1	0	0	1	0	0
1	**1**	0	1	0	0	0	1	1	1

x	y	$x \oplus y$	$\neg y$	$\neg x$	$x \vee y$	$y \to x$	$x \to y$	$x \mid y$	1
0	**0**	0	1	1	0	1	1	1	1
0	**1**	1	0	1	1	0	1	1	1
1	**0**	1	1	0	1	1	0	1	1
1	**1**	0	0	0	1	1	1	0	1

Булевы функции произвольного числа аргументов задаются с помощью логических формул. Введем определения.

Логические константы, буквенные обозначения булевых переменных, символы логических операций и скобки составляют <u>алфавит логики</u>. <u>Логические формулы</u> строятся из элементов алфавита логики по следующим правилам:

- любая логическая константа или переменная есть формула;
- если f - формула, то $\overline{f}$ тоже формула;
- если f и g - формулы, то $f * g$ тоже формула, где $*$ - произвольная логическая операция;
- других формул нет.

В формулах действует следующий <u>порядок старшинства операций</u>:

- отрицание $\neg$,
- конъюнкция $\wedge$,
- дизъюнкция $\vee$.

Если этот порядок необходимо изменить, используют скобки.

<u>Подформулой</u> формулы f называется любая ее часть, сама являющаяся формулой.

Для каждой логической функции, заданной в виде логической формулы может быть построена таблица истинности. Приведем пример:

<u>построим</u> таблицу истинности для булевой функции $\varphi = (\overline{x_1 \to \overline{x_2}}) \vee x_3$:

x_1	x_2	x_3	$\overline{x_2}$	$x_1 \to \overline{x_2}$	$\overline{x_1 \to \overline{x_2}}$	φ
0	**0**	**0**	1	1	0	0
0	**0**	**1**	1	1	0	1
0	**1**	**0**	0	1	0	0
0	**1**	**1**	0	1	0	1
1	**0**	**0**	1	1	0	0
1	**0**	**1**	1	1	0	1
1	**1**	**0**	0	0	1	1
1	**1**	**1**	0	0	1	1

Перечисленные выше логические операции обладают следующими свойствами, которые называют алгеброй логики. Их легко доказать с помощью таблиц истинности.

1) законы коммутативности: $x \vee y = y \vee x$, $x \wedge y = y \wedge x$;

2) законы ассоциативности: $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$, $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$;

3) законы дистрибутивности:
$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$, $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$;

4) законы идемпотентности: $x \vee x = x$, $x \wedge x = x$;

5) действия с логическими константами:
$x \vee 1 = 1$, $x \wedge 1 = x$, $x \vee 0 = x$, $x \wedge 0 = 0$,
$x \vee \overline{x} = 1$ - закон исключенного третьего, $x \wedge \overline{x} = 0$ - закон противоречия;

6) законы де Моргана: $\overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y}$, $\overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y}$;

7) законы поглощения $x \vee (x \wedge y) = x$, $x \wedge (x \vee y) = x$;

8) законы склеивания: $(x \wedge y) \vee (x \wedge \overline{y}) = x$, $(x \vee y) \wedge (x \vee \overline{y}) = x$;

9) законы Порецкого: $x \vee (\overline{x} \wedge y) = x \vee y$, $x \wedge (\overline{x} \vee y) = x \wedge y$;

10) закон двойного отрицания: $\overline{\overline{x}} = x$.

3.2. УПРОЩЕНИЕ ЛОГИЧЕСКИХ ФОРМУЛ

Две логические формулы называются равносильными, если они имеют одинаковые таблицы истинности.

Одной из задач логики является установление равносильности логических формул. Построение таблиц истинности в этом случае может оказаться очень громоздким. Поэтому целесообразно осуществить преобразования формул. С этой целью используют следующие правила преобразования.

Правило подстановки. Пусть f_1^A и f_2^A - равносильные формулы содержащие подформулу A: $f_1^A \sim f_2^A$. Если подформулу A заменить в обеих формулах на подформулу B, то формулы f_1^B и f_2^B также будут равносильными: $f_1^B \sim f_2^B$.

Пример. Из равносильности формул $\overline{x \vee y} \sim \overline{x} \wedge \overline{y}$ вытекает равносильность формул $\overline{(x \to z) \vee y} \sim \overline{(x \to z)} \wedge \overline{y}$.

Правило замены. Пусть в формуле f^A выделена подформула A и B - равносильная ей формула: $A \sim B$. Если подформулу A в f^A заменить на подформулу B, то полученная формула f^B будет равносильна f^A: $f^A \sim f^B$.

Пример. Пусть $A = \overline{x \vee y}$, а $B = \overline{x} \wedge \overline{y}$. Тогда $\overline{\overline{(x \vee y)} \to z} \sim \overline{(\overline{x} \wedge \overline{y}) \to z}$.

При упрощении логических формул, как правило, исключают операции эквиваленции, импликации, штрих Шеффера и стрелку Пирса и осуществляют переход к стандартному базису логических функций, содержащему операции конъюнкции, дизъюнкции и отрицания. При этом добиваются, чтобы отрицания стояли только над отдельными переменными, а сами переменные или их отрицания связывались операциями дизъюнкции и конъюнкции.

Указанные преобразования можно осуществить с помощью логических правил, таких как:

$P \mid Q \sim \overline{P \wedge Q}$, $\overline{P \wedge Q} \sim \overline{P} \vee \overline{Q}$, $P \downarrow Q \sim \overline{P \vee Q}$, $\overline{P \vee Q} \sim \overline{P} \wedge \overline{Q}$,

$P \leftrightarrow Q \sim (P \to Q) \wedge (Q \to P)$, $P \to Q \sim \overline{P} \vee Q$, $\overline{\overline{P}} \sim P$ и др.

Рассмотрим пример упрощения следующей логической функции:

$$\psi = \left(\overline{A_1} \to \left(\overline{\overline{A_2}} \wedge A_1\right)\right) \wedge \overline{\overline{A_3} \wedge \overline{A_2}}\,.$$

Используя закон двойного отрицания, получим

$$\left(\overline{A_1} \to \left(A_2 \wedge A_1\right)\right) \wedge \overline{\overline{A_3} \wedge \overline{A_2}}\,.$$

Применяя закон де Моргана, имеем

$$\left(\overline{A_1} \to \left(A_2 \wedge A_1\right)\right) \wedge \left(\overline{\overline{A_3}} \vee \overline{\overline{A_2}}\right).$$

Еще раз применим закон двойного отрицания:

$$\left(\overline{A_1} \to \left(A_2 \wedge A_1\right)\right) \wedge \left(A_3 \vee A_2\right).$$

Используя эквивалентность для импликации $H_1 \to H_2 = \overline{H}_1 \vee H_2$, переходим к стандартному базису:

$$\left(\overline{\overline{A_1}} \vee \left(A_2 \wedge A_1\right)\right) \wedge \left(A_3 \vee A_2\right).$$

Применим закон двойного отрицания и закон поглощения и получим упрощенную эквивалентную формулу

$$A_1 \wedge \left(A_3 \vee A_2\right).$$

Таким образом, $\left(\overline{\mathrm{A}}_1 \to \left(\overline{\overline{\mathrm{A}}}_2 \wedge \mathrm{A}_1\right)\right) \wedge \overline{\overline{\mathrm{A}}_3 \wedge \overline{\mathrm{A}}_2} = \mathrm{A}_1 \wedge \left(\mathrm{A}_3 \vee \mathrm{A}_2\right).$

Для проверки эквивалентности составим таблицы истинности. В таблице должно быть $2^n = 2^3 = 8$ (n — число переменных) различных наборов логических переменных A_1, A_2, A_3. Для всех наборов логических переменных A_1, A_2 и A_3 должны получиться одинаковые значения результатов логических операций, стоящих в левой и правой частях рассматриваемой эквивалентности.

Для левой части получим следующую таблицу истинности:

A_1	A_2	A_3	$\overline{A_1}$	$\overline{A_2}$	$\overline{A_3}$	$A_2 \wedge A_1$	$\overline{A_1} \to (A_2 \wedge A_1)$	$\overline{A_3} \wedge \overline{A_2}$	$\overline{\overline{A_3} \wedge \overline{A_2}}$	ψ
0	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0
0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	0
0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0
1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0
1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	1
1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	1	1	0	1	1

Для правой части:

A_1	A_2	A_3	$A_3 \vee A_2$	$A_1 \wedge (A_3 \vee A_2)$
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

Сравнивая значения выражений в левой и правой частях для всех наборов логических переменных A_1, A_2 и A_3, убеждаемся в правильности полученного ответа.

3.3. ПОСТРОЕНИЕ СОВЕРШЕННЫХ И МИНИМАЛЬНЫХ НОРМАЛЬНЫХ ФОРМ ЛОГИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Рассмотрим методы позволяющие представлять любую логическую функцию в стандартном базисе, т. е. с помощью операций $\wedge, \vee, \neg$.

Конъюнктивным одночленом (элементарной конъюнкцией) называется конъюнкция логических переменных или их отрицаний, в которой каждая переменная встречается не более одного раза.

Пример. $x_1\overline{x_3}x_4$ - конъюнктивный одночлен; $x_1x_3x_1$, $x_1x_3\overline{x_1}$, $x_1\overline{x_3x_4}$ - формулы, не являющиеся конъюнктивными одночленами.

Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ) булевой функции называется формула, имеющая вид дизъюнкции конъюнктивных одночленов.

При этом конъюнктивные одночлены называются членами ДНФ.

Совершенной дизъюнктивной нормальной формой (СДНФ) булевой функции называется ДНФ, в которой каждый конъюнктивный одночлен включает все переменные или их отрицания.

Пример. $\varphi(x_1,x_2,x_3)=x_1\overline{x_3}\vee\overline{x_2}x_3$ - ДНФ, не являющаяся СДНФ; $\varphi(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2\overline{x_3}\vee\overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3$ - СДНФ.

Дизъюнктивным одночленом (элементарной дизъюнкцией) называется дизъюнкция логических переменных или их отрицаний, в которой каждая переменная встречается не более одного раза.

Пример. $x_1\vee\overline{x_3}\vee x_4$ - конъюнктивный одночлен; $x_1\vee x_3\vee x_1$, $x_1\vee x_3\vee\overline{x_1}$, $x_1\vee\overline{x_3\vee x_4}$ - формулы, не являющиеся конъюнктивными одночленами.

Конъюнктивной нормальной формой (КНФ) булевой функции называется формула, имеющая вид конъюнкции дизъюнктивных одночленов.

При этом дизъюнктивные одночлены называются членами КНФ,

Совершенной конъюнктивной нормальной формой (СКНФ) булевой функции называется ДНФ, в которой каждый дизъюнктивный одночлен включает все переменные или их отрицания.

Пример. $\varphi(x_1,x_2,x_3)=(x_1\vee\overline{x_3})(\overline{x_2}\vee x_3)$ - КНФ, не являющаяся СКНФ; $\varphi(x_1,x_2,x_3)=(x_1\vee x_2\vee\overline{x_3})(\overline{x_1}\vee\overline{x_2}\vee x_3)$ - СКНФ.

Наиболее просто СДНФ и СКНФ для логической функции $f(x_1,x_2,...,x_n)$ строятся с помощью таблицы истинности.

Построение СДНФ:

- для каждого набора значений переменных $x_1,x_2,...,x_n$, для которых $f(x_1,x_2,...,x_n)=1$ выписывается конъюнктивный одночлен, содержащий все переменные $x_i = 1$ и отрицания всех переменных $x_j = 0$;

- все полученные конъюнктивные одночлены объединяются знаками дизъюнкции.

Построение СКНФ:

- для каждого набора значений переменных $x_1, x_2, ..., x_n$, для которых $f(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$ выписывается дизъюнктивный одночлен, содержащий отрицания всех переменных $x_i = 1$ и все переменные $x_j = 0$;
- все полученные дизъюнктивные одночлены объединяются знаками конъюнкции.

Рассмотрим в качестве примера логическую функцию, описывающую принятие решения большинством голосов в коллективе из трех человек («комитете трех»):

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$	Строки для построения СДНФ	Строки для построения СКНФ
0	0	0	0		*
0	0	1	0		*
0	1	0	0		*
0	1	1	1	*	
1	0	0	0		*
1	0	1	1	*	
1	1	0	1	*	
1	1	1	1	*	

СДНФ:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1} x_2 x_3 \vee x_1 \overline{x_2} x_3 \vee x_1 x_2 \overline{x_3} \vee x_1 x_2 x_3;$$

СКНФ:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3})(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3)(\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3).$$

Часто при построении СДНФ и СКНФ полученные формы содержат избыточную информацию, от которой можно избавиться и получить минимальные дизъюнктивную нормальную форму (МДНФ) и конъюнктивную нормальную форму (МКНФ).

Метод Квайна включает два этапа:

1) переход от СДНФ (СКНФ) к сокращенной форме;
2) переход от сокращенной формы к МДНФ (МКНФ).

Реализацию метода Квайна опишем на примере.

Пусть дана логическая функция $f(x_1,x_2,x_3)$, заданная таблицей истинности

№ стр.	x_1	x_2	x_3	$f(x_1,x_2,x_3)$
1	0	0	0	1
2	0	0	1	1
3	0	1	0	0
4	0	1	1	1
5	1	0	0	0
6	1	0	1	1
7	1	1	0	1
8	1	1	1	0

1. Рассмотрим способ построения МДНФ с помощью метода Квайна.

В соответствии с правилом построения СДНФ используются строки № 7, 6, 4, 2 и 1: $f(x_1,x_2,x_3)=\left(x_1x_2\overline{x_3}\right)\vee\left(x_1\overline{x_2}x_3\right)\vee\left(\overline{x_1}x_2x_3\right)\vee\left(\overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3\right)\vee\left(\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\right)$.

Найдем все склеивающиеся пары:

2 и 4: $\left(x_1\overline{x_2}x_3\right)\vee\left(\overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3\right)=\overline{x_2}x_3$,

3 и 4: $\left(\overline{x_1}x_2x_3\right)\vee\left(\overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3\right)=\overline{x_1}x_3$,

4 и 5: $\left(\overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3\right)\vee\left(\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\right)=\overline{x_1}\,\overline{x_2}$.

Результаты операции склеивания вводим в выражение функции. Это не изменит ее значения.

$$f(x_1,x_2,x_3)=\left(x_1x_2\overline{x_3}\right)\vee\left(x_1\overline{x_2}x_3\right)\vee\left(\overline{x_1}x_2x_3\right)\vee\left(\overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3\right)\vee\left(\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\right)\vee\overline{x_2}x_3\vee x_1x_3\vee\overline{x_1}\,\overline{x_2}$$

Проведем операцию поглощения новыми членами старых членов нормальной формы:

$\left(x_1\overline{x_2}x_3\right)\vee\left(\overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3\right)\vee\overline{x_2}x_3=\overline{x_2}x_3$,

$\left(\overline{x_1}x_2x_3\right)\vee\overline{x_1}x_3=\overline{x_1}x_3$, $\left(\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\right)\vee\overline{x_1}\,\overline{x_2}=\overline{x_1}\,\overline{x_2}$.

Тогда $f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2\overline{x_3}\vee\overline{x_2}x_3\vee\overline{x_1}x_3\vee\overline{x_1}\,\overline{x_2}$.

Дальнейшее проведение операций склеивания и поглощения невозможно, следовательно, мы получили сокращенную форму.

Построим импликантную таблицу, в которой символом «*» отмечены возможности поглощения членов СДНФ простыми импликантами, а символом «!» - простые импликанты, входящие в ядро:

Простые импликанты	Члены СДНФ				
	$x_1x_2\overline{x_3}$	$x_1\overline{x_2}x_3$	$\overline{x_1}x_2x_3$	$\overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3$	$\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}$
$x_1x_2\overline{x_3}$!	*				
$\overline{x_2}x_3$!		*		*	
$\overline{x_1}x_3$!			*	*	
$\overline{x_1}\,\overline{x_2}$!				*	*

Ни один из членов сокращенной формы не может быть исключен из так, чтобы обеспечить поглащение всех членов СДНФ. Следовательно, МДНФ совпадает с сокращенной формой:

$$\text{МДНФ: } f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 \overline{x_3} \vee \overline{x_2} x_3 \vee \overline{x_1} x_3 \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2}.$$

2. Рассмотрим СКНФ.

В соответствии с правилом построения СКНФ используются строки № 1, 4, 6:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \left(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3\right)\left(\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3\right)\left(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}\right).$$

Поскольку в данном выражении отсутствуют склеивающиеся пары, то оно является минимальной конъюнктивной нормальной формой записи.

Если при минимизации совершенных нормальных форм логических функций использование метода Квайна оказывается слишком громоздким, то для логических функций не более чем 4 переменных можно использовать метод карт Вейча.

Карты Вейча являются другой, более компактной формой представления таблиц истинности. Значения логической функции записываются в клетки карты Вейча. Каждая клетка карты соответствует определенному набору значений аргументов. Эти значения записаны по краям столбцов, на пересечении которых стоит клетка. При этом принимается, что, если стоит x_i, то $x_i = 1$, а если $\overline{x_i}$, то $x_i = 0$. В клетку записывается значение на соответствующем наборе аргументов. Ниже приведен пример.

Таблица истинности

№ строки	x_1	x_2	x_3	$f(x_1,x_2,x_3)$
1	0	0	0	0
2	0	0	1	1
3	0	1	0	1
4	0	1	1	0
5	1	0	0	1
6	1	0	1	0
7	1	1	0	1
8	1	1	1	1

Карта Вейча

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|} & \multicolumn{2}{c}{\overbrace{\hphantom{000}}^{x_2}} & \multicolumn{2}{c}{\overbrace{\hphantom{000}}^{\overline{x_2}}} \\ \cline{2-5} x_1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ \cline{2-5} \overline{x_1} & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \cline{2-5} & \underbrace{\hphantom{0}}_{\overline{x_3}} & \multicolumn{2}{c}{\underbrace{\hphantom{000}}_{x_3}} & \underbrace{\hphantom{0}}_{\overline{x_3}} \end{array}$$

Карты Вейча обладают следующим свойством:

при переходе из клетки в клетку, соседнюю по строке или столбцу, изменяется значение только одной булевой переменной; свойство сохраняется, если осуществить сворачивание карты Вейча в цилиндр тор (поверхность объемного кольца («бублика»)) с объединением противоположных граней.

1) Пусть булева функция задана в виде СДНФ. Тогда указанное свойство означает, что если в паре соседних клеток содержатся единицы, то над соответствующими членами СДНФ может быть осуществлена операция склеивания. Можно доказать, что могут быть склеены члены СДНФ, соответствующие $2^k, k = 0,1,2,3,...$ клеткам с единицами, образующим прямоугольную область.

2) Пусть булева функция задана в виде СКНФ. Тогда указанное свойство означает, что если в паре соседних клеток содержатся нули, то над соответствующими членами СКНФ может быть осуществлена операция склеивания. Можно доказать, что могут быть склеены члены СКНФ, соответствующие $2^k, k = 0,1,2,3,...$ клеткам с нулями, образующим прямоугольную область.

Указанные свойства позволяют построить МДНФ (или МКНФ) в соответствии со следующим алгоритмом.

Шаг 1. Все клетки содержащие 1 (0), объединяются в минимальное число возможно больших прямоугольников с числом клеток $2^k, k = 0,1,2,3,...$. Прямоугольники могут пересекаться или появляться в результате сворачивания карты Вейча в цилиндр.

Шаг 2. Каждый из прямоугольников представляется членом МДНФ (МКНФ), число переменных в котором на k меньше числа всех переменных. В этот член в соответствии с правилом склеивания включаются те переменные, которые в этой области не меняют своих значений (отрицания этих переменных для МКНФ).

Шаг 3. Полученные члены объединяются в минимальную форму.

Опишем метод построения МДНФ для этой карты Вейча.

Выделим прямоугольные области в карте Вейча, содержащие единицы (количество клеток в прямоугольной области может быть 1 или 2 или 4 или 8; при определении прямоугольников карты Вейча предполагаются склеенными по краям).

	x_2	x_2	$\overline{x_2}$	$\overline{x_2}$
x_1	1	1	0	1
$\overline{x_1}$	1	0	1	0
	$\overline{x_3}$	x_3	x_3	$\overline{x_3}$

Каждый из 4 полученных прямоугольников представляется членом МДНФ. В этот член в соответствии с правилом склеивания включаем те переменные, которые в этой области не меняют своих значений. Полученные члены объединяем в минимальную форму.

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2\overline{x_3}\vee\overline{x_2}x_3\vee\overline{x_1}x_3\vee\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,.$$

Следует отметить, что одна ячейка $\left(x_1x_2\overline{x_3}\right)$ не объединилась с другими, поэтому соответствующий член выписан полностью.

Опишем метод построения МКНФ для этой карты Вейча.

Выделим прямоугольные области в карте Вейча, содержащие нули:

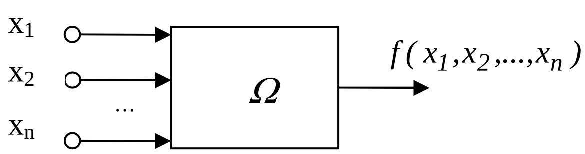
	x_2		$\overline{x_2}$	
x_1	1	1	$\boxed{0}$	1
$\overline{x_1}$	1	$\boxed{0}$	1	$\boxed{0}$
	$\overline{x_3}$	x_3		$\overline{x_3}$

Следует отметить, что ячейки, содержащие нули, не могут быть объединены друг с другом. Поэтому выписываем соответствующие члены СКНФ полностью.

$$f(x_1,x_2,x_3)=\left(x_1\vee\overline{x_2}\vee\overline{x_3}\right)\left(\overline{x_1}\vee x_2\vee\overline{x_3}\right)\left(x_1\vee x_2\vee x_3\right).$$

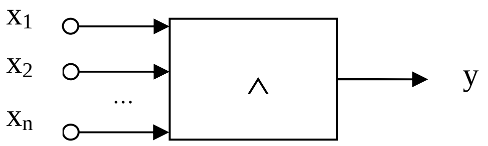
Основные применения логических функций связаны с цифровой техникой. При конструировании элементов цифровой техники используется большое разнообразие физических принципов их реализации (диоды, электронные лампы, переключатели и т. п.). Общим для всех этих устройств является наличие входов и выходов, каждый из которых может находиться в одном из двух отличающихся друг от друга состояниях.

Каждая логическая функция может быть реализована устройствами описанного типа. При этом устройство, реализующее логическую функцию, можно рассматривать как «черный ящик», на вход которого подаются всевозможные наборы значений переменных, а на выходе появятся соответствующие этим наборам значения функции.

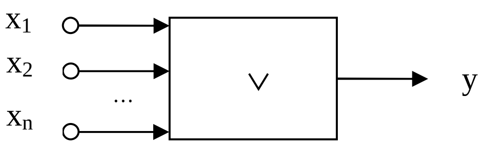


Чтобы понять, как устроен «черный ящик», необходимо разложить формулу, которую он реализует на подформулы, реализующие отдельные логические операции и представить каждую такую операцию отдельным устройством. Эти устройства связываются дугами, т. е. линиями со стрелками, определяющими порядок выполнения операций.

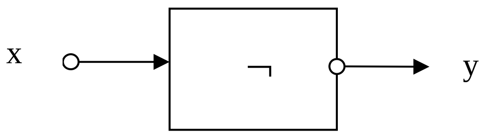
Однако для создания сложной цифровой техники достаточно иметь устройства, реализующие логические функции, составляющие базис во множестве всех логических функций. Далее изучаются только устройства, реализующие логические функции стандартного базиса:



конъюнктор



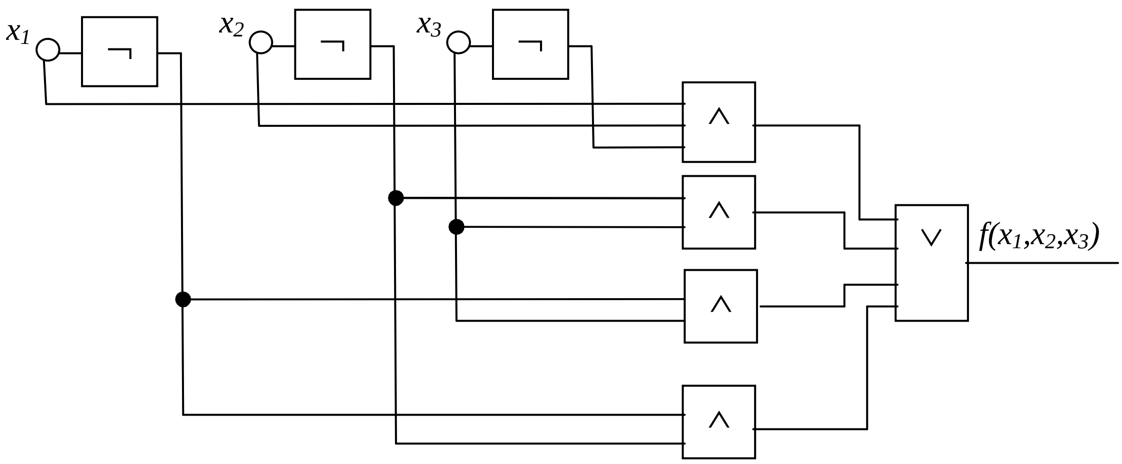
дизъюнктор

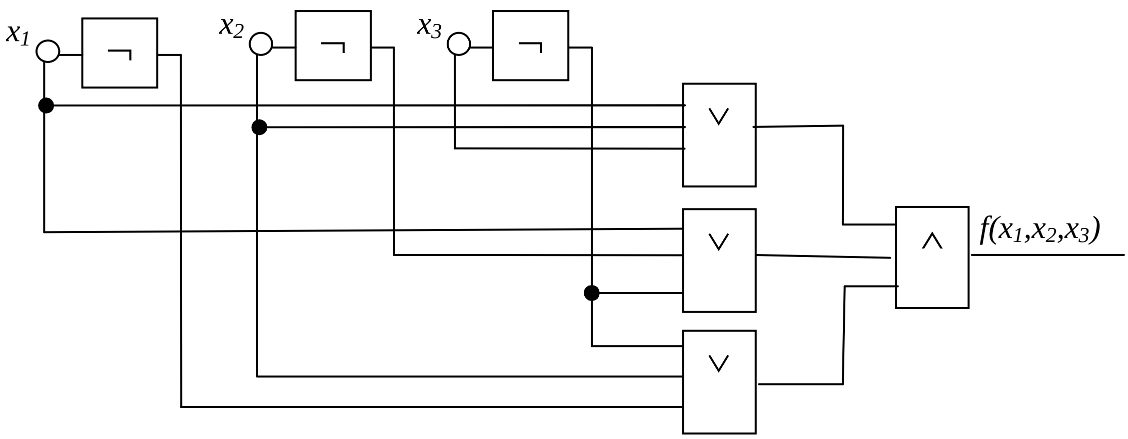


инвертор

После минимизации логических функций полученные формулы для МДНФ и МКНФ могут быть использованы для построения схем из функциональных элементов, аппаратно реализующих эти логические функции.

Схемы для МДНФ и МКНФ данной функции будет иметь вид:





4. ТЕОРИЯ ГРАФОВ

4.1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕОРИИ ГРАФОВ

Графом называется пара $G=(V,E)$, где

- $V=\{v_1,v_2,...,v_n\}$ - конечное непустое множество;
- $E=\{e_1,e_2,...,e_m\}$ - конечное множество, каждый элемент которого соответствует паре не обязательно различных элементов множества V.

Элементы множества V называются вершинами графа.

Если элемент множества E соответствует неупорядоченной паре вершин, т. е. $e_i \sim \{v_{i1},v_{i2}\}$, то он называется ребром, вершины v_{i1} и v_{i2} - концами этого ребра. Говорят, что ребро $e_i=(v_{i1},v_{i2})$ соединяет вершины v_{i1} и v_{i2}. Ребро, для которого $v_{i1}=v_{i2}$, называется петлей. Граф, содержащий только ребра, называется неориентированным графом.

Если элемент множества E соответствует упорядоченной паре вершин, т. е. $e_i \sim (v_{i1},v_{i2})$, то он называется дугой, вершина v_{i1}- началом, а v_{i2} - концом этой дуги. Говорят, что дуга $e_i=(v_{i1},v_{i2})$ исходит из вершины v_{i1} и заходит в вершину v_{i2}. Дуга, для которой $v_{i1}=v_{i2}$, называется ориентированной петлей. Граф, содержащий только дуги, называется ориентированным графом.

Обычно рассматривают только ориентированные или неориентированные графы.

Ребра (дуги), соответствующие одним и тем же парам (упорядоченным парам) вершин называются кратными. Граф, не содержащий кратных ребер (дуг) называется простым графом, иначе – мультиграфом.

Если $e_i \sim \{v_{i1},v_{i2}\}$ или $e_i \sim (v_{i1},v_{i2})$, то вершины v_{i1} и v_{i2} называются смежными, а ребро (дуга) e_i и вершины v_{i1} и v_{i2} - инцидентными. Если конец ребра e_i совпадает с концом ребра e_j, то эти ребра называются смежными; если начало или конец дуги e_i совпадает с началом или концом дуги e_j, то эти дуги называются смежными.

Удобство использования графов в значительной степени определяется наглядностью их геометрического изображения.

Вершины графа обычно (но не обязательно всегда!) изображают точками или незакрашенными кружочками, ребра – плавными линиями, соединяющими их концы, дуги – плавными линиями соединяющими начало и конец со стрелками у концов дуги. Местоположение, размеры и форма вершин значения не имеют. Важен только факт сохранения отношений смежности и инцидентности.

Примеры.

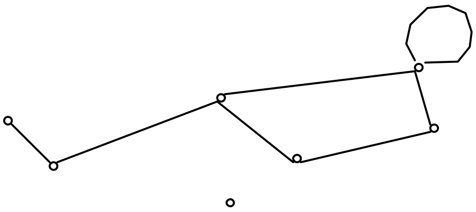


Рис. 4.1. Неориентированный простой граф

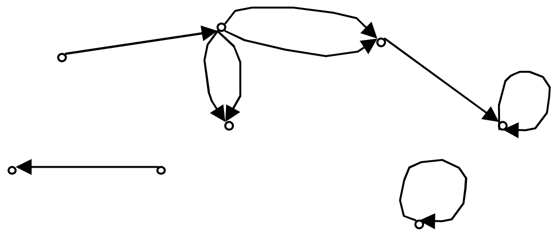


Рис. 4.2. Ориентированный мультиграф

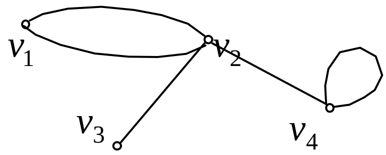
Предположим, что $G=(V,E)$ простой или мультиграф.

Граф $G'=(V',E')$ называется <u>частью</u> графа G, если $V'\subseteq V$, $E'\subseteq E$.

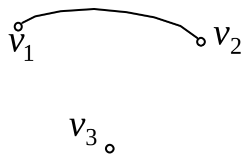
Часть $G''=(V'',E'')$ называется <u>подграфом</u> графа G, если в ней сохраняются все ребра или дуги между вершинами множества $V''\subseteq V$.

Часть $G'''=(V''',E''')$ называется <u>суграфом</u> графа G, если $V'''=V$.

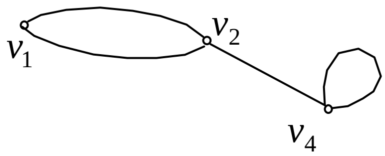
Примеры.



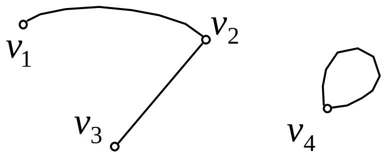
Граф G



Граф G' - часть графа G



Граф G'' - подграф графа G



Граф G''' - суграф графа G

Рис. 4.3. Различные виды частей графа

Рассмотрим некоторые наиболее часто встречающиеся части графов.

Как было указано выше, ребро, соединяющее вершину саму с собой, называется <u>петлей</u>, а дуга, соединяющая вершину саму с собой, называется <u>ориентированной петлей</u>.

Вершина, не имеющая смежных вершин, называется <u>изолированной</u>.
Примеры.

Петля Ориентированная петля Изолированные вершины

Рис. 4.4. Петли и изолированные вершины

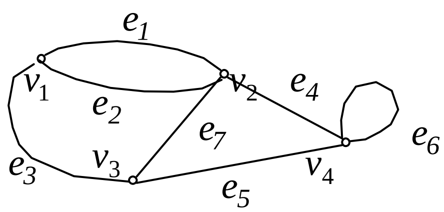
Последовательность вершин и ребер (дуг) (не обязательно различных)

$$v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, ..., v_{n-1}, e_n, v_n, \qquad (4.1)$$

такая, что соседние вершины и ребра (дуги) инцидентны, называется <u>путем</u>. Если граф G ориентированный и в (4.1) v_{i-1} и v_i - начало и конец дуги e_i, то путь называется <u>ориентированным</u>. Если путь не содержит повторяющихся вершин (кроме, может быть, первой и последней) и ребер или дуг, то он называется <u>простым</u>. Если первая и последняя вершины пути совпадают, то он называется <u>циклом</u>.

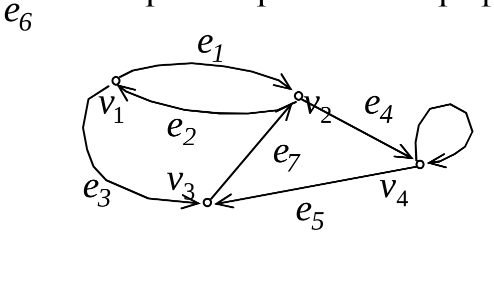
<u>Длиной пути</u> называется число ребер (дуг), которые он содержит.

Примеры.



$v_1, e_3, v_3, e_7, v_2, e_7, v_3$ - путь, не являющийся простым путем;
v_1, e_3, v_3, e_7, v_2 - простой путь;
$v_1, e_3, v_3, e_7, v_2, e_2, v_1$ - простой цикл.

Неориентированный граф G



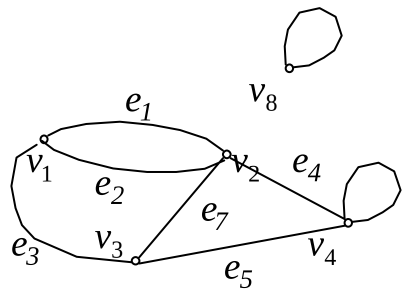
v_1, e_3, v_3, e_7, v_2 - простой путь, не являющийся ориентированным путем;
$v_1, e_1, v_2, e_4, v_4, e_6, v_4, e_5, v_3, e_7, v_2, e_2, v_1$ - ориентированный цикл, не являющийся простым циклом;
$v_2, e_4, v_4, e_5, v_3, e_7, v_2$ - простой ориентированный цикл.

Ориентированный граф G

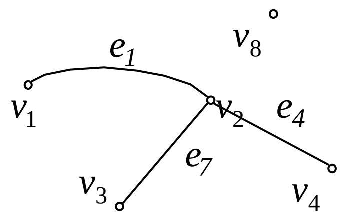
Рис. 4.5. Пути и циклы ориентированного и неориентированного графов

Суграф графа G, не содержащий циклов и являющийся максимальным по включению ребер или дуг суграфом, называется остовом графа G.

Пример.



Граф G



Остов графа G

Рис. 4.6. Один из возможных остовов графа G

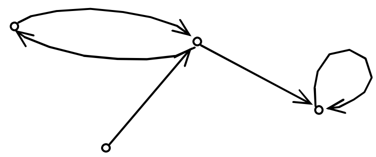
Подграф G' графа G называется <u>компонентой связности</u>, если

1) между любыми двумя его вершинами G' существует путь,

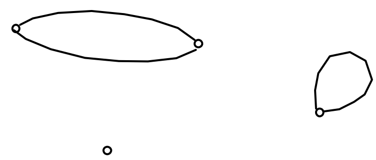
2) G' не является подграфом ни одного связного подграфа графа G, т.е. является максимальным по включению вершин связным подграфом графа G.

Если граф содержит одну компоненту связности, то он называется <u>связным</u>, а если более одной – <u>несвязным</u>.

Примеры.



Связный ориентированный граф



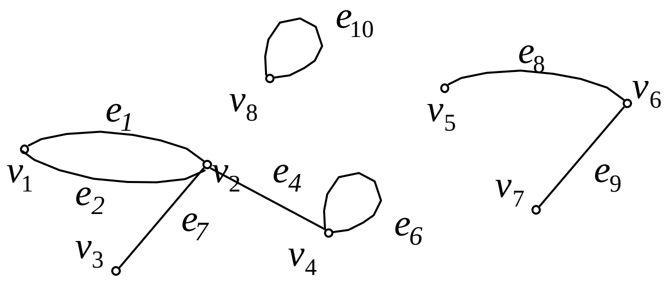
Несвязный неориентированный граф с тремя компонентами связности

Рис. 4.7. Связный и несвязный графы

Вершина v называется <u>точкой сочленения</u>, если ее исключение из графа G увеличивает количество его компонент связности. Ребро или дуга e называется <u>мостом</u>, если его исключение из графа G увеличивает количество его компонент связности.

Как легко видеть через не один простой цикл не может содержать точек сочленения и мостов.

Примеры.



v_2, v_6 - точки сочленения;
e_4 - мост.

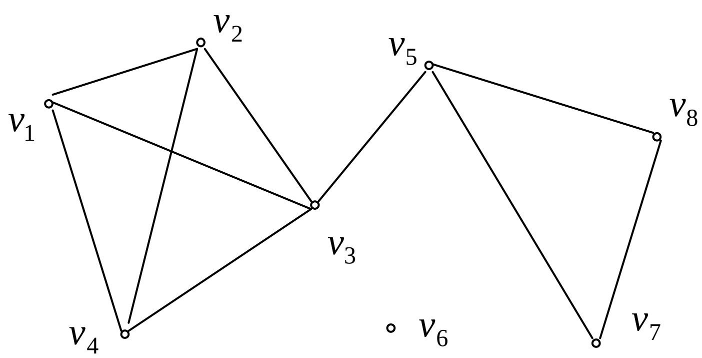
Рис. 4.8. Мосты и точки сочленения

Подграф G' ориентированного графа G называется <u>кликой</u>, если

1) любые две вершины G' смежны,

2) G' не является подграфом ни одного подграфа графа G, обладающего свойством 1), т.е. является максимальным по включению вершин сильно связным подграфом графа G.

Примеры.



Клики:
v_1, v_2, v_3, v_4;
v_5, v_7, v_8;
v_3, v_5;
v_6.

Рис. 4.9. Граф G и все его клики

Графы, не содержащие циклов, называются <u>лесами</u>. Связные графы, не содержащие циклов, называются <u>деревьями</u>. Легко видеть, что компонентами связности лесов являются деревья.

Примеры.

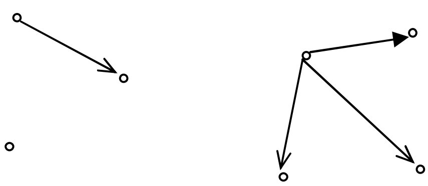


Рис. 4.10. Ориентированный лес

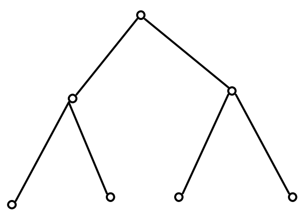


Рис. 4.11. Неориентированное дерево

Граф G называется <u>пустым</u>, если он не содержит вершин.

Неориентированный простой граф G называется полным, если

1) любые две различные его вершины являются смежными;

2) он не содержит петель.

Ориентированный простой граф G называется полным, если

1) для любой его вершины есть дуга, концом которой являются любая другая вершина;

2) он не содержит ориентированных петель.

Полный граф, как ориентированный, так и неориентированный, содержащий n вершин, обозначают K_n.

Граф $\overline{G}=(V,\overline{E})$ называется дополнительным к графу $G=(V,E)$ с тем же множеством вершин V, если он содержит все ребра или дуги, которые содержатся в полном графе и не содержатся в графе G.

Граф O_n, дополнительный к полному графу K_n, называется 0-графом. Легко видеть, что 0-граф O_n состоит из n изолированных вершин.

Примеры.

Рис. 4.12. Полный граф K_5 и дополнительный к нему 0-граф

Граф $G=(V_1 \cup V_2, E)$ называется двудольным, если его множество вершин разбивается на два непустых непересекающихся подмножества V_1 и V_2 так, что все вершины каждого подмножества попарно несмежны.

Двудольный граф $G=(V_1 \cup V_2, E)$ называется полным двудольным графом, если любые две вершины из разных подмножеств V_1 и V_2 смежны. Полный двудольный граф, у которого $|V_1|=n_1$ и $|V_2|=n_2$ обозначается K_{n_1,n_2}.

Теорема (Кёнига). Граф G является двудольным тогда и только тогда, когда он не содержит в качестве подграфов циклов нечетной длины.

Следствие. Лес является двудольным графом.

Примеры.

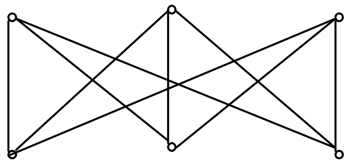


Рис. 4.13. Полный двудольный граф $K_{3,3}$

Граф G называется планарным, если его можно геометрически изобразить на плоскости без пересечения ребер (дуг).

Теорема (Понтрягина-Куратовского). Граф G является планарным тогда и только тогда, когда он не содержит в качестве подграфов графы K_5 или $K_{3,3}$.

4.2. ИНВАРИАНТЫ ГРАФОВ

Пусть задан граф $G=(V,E)$. К основным числовым характеристикам относятся:

<u>число вершин графа</u> - n;

<u>число ребер или дуг</u> - m;

<u>число компонент связности</u> - k;

<u>цикломатическое число</u> $c=m+k-n$.

Граф $G=(V,E)$ называется раскрашенным, если каждой его вершине приписан цвет (или номер) так, чтобы никакие две смежные вершины не имели одного цвета (номера).

Минимальное число цветов, которыми можно раскрасить граф, называется его <u>хроматическим числом</u> - h.

Число вершин в клике наибольшего размера графа называется <u>плотностью</u> графа p. Плотность дополнительного к G графа $\overline{G}$ называется <u>неплотностью</u> графа G, которую обозначим $\overline{p}$.

Максимальная длина простого пути в графе G называется <u>диаметром</u> графа d.

<u>Степенью вершины</u> $v_i \in V$ - $\deg v_i$ называется число ребер или дуг, инцидентных этой вершине. При этом каждая дуга учитывается дважды. Следующим инвариантом графа является <u>вектор степеней вершин графа</u> $\deg G=(\deg v_1, \deg v_2, ..., \deg v_n)$.

Если граф G является ориентированным, то кроме степени для вершины $v_i \in V$ определяются

$\deg^- v_i$ - <u>полустепень исхода</u> – число дуг, началом которых является вершина v_i;

$\deg^+ v_i$ - <u>полустепень захода</u> – число дуг, концом которых является вершина v_i.

Очевидно, $\deg v_i = \deg^- v_i + \deg^+ v_i$.

Инвариантами всего графа G являются

<u>вектор полустепеней исхода</u> $\deg^- G=(\deg^- v_1, \deg^- v_2, ..., \deg^- v_n)$,

<u>вектор полустепеней захода</u> $\deg^+ G=(\deg^+ v_1, \deg^+ v_2, ..., \deg^+ v_n)$.

Ни один из перечисленных инвариантов, ни даже их полная совокупность, не могут однозначно определить граф, т. е. существуют неизоморфные графы, для которых эти инварианты совпадают. Поэтому эти инварианты называются неполными инвариантами.

Полные инварианты могут быть построены с помощью матричных представлений. Рассмотрим их.

Пусть $G=(V,E)$ - неориентированный граф.

Матрицей смежности графа G называется матрица $A=(a_{ij})$ размерности $n\times n$ (n - число вершин), которая определяется по правилу:

$$a_{ij}=\begin{cases} n_{ij}-\text{число ребер, концами которых являются вершины } v_i \text{ и } v_j \\ \quad (\text{петля учитывается дважды}), \\ 0, \text{ если вершины } v_i \text{ и } v_j \text{ несмежны.} \end{cases}$$

Матрица A является симметрической, т. е. симметрична относительно главной диагонали.

Матрицей инциденций графа G называется матрица $B=(b_{ik})$ размерности $n\times m$ (n - число вершин, m - число ребер), которая определяется по правилу:

$$b_{ik}=\begin{cases} 2, \text{ если вершина } v_i \text{ инцидентна петле } e_k, \\ 1, \text{ если вершина } v_i \text{ инцидентна ребру, не являющемуся петлей } e_k, \\ 0, \text{ если вершина } v_i \text{ неинцидентна ребру } e_k. \end{cases}$$

Числовые характеристики графа связаны с введенными матрицами следующими соотношениями: $\deg v_i=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}=\sum_{k=1}^{m} b_{ik}$

Пусть $G=(V,E)$ - ориентированный граф.

Матрицей смежности графа G называется матрица $A=(a_{ij})$ размерности $n\times n$ (n - число вершин), которая определяется по правилу:

$$a_{ij}=\begin{cases} n_{ij}-\text{число дуг, исходящих из вершины } v_i \text{ и входящих в вершину } v_j, \\ 0, \text{ если вершины } v_i \text{ и } v_j \text{ несмежны.} \end{cases}$$

Матрица A в общем случае уже не будет являться симметрической.

Если $G=(V,E)$ - простой граф, то A - матрица бинарного отношения E.

Матрицей инциденций графа G называется матрица $B=(b_{ik})$ размерности $n\times m$ (n - число вершин, m - число ребер), которая определяется по правилу:

$$b_{ik}=\begin{cases} -1, \text{ если из вершины } v_i \text{ исходит дуга } e_k, \text{ не являющаяся петлей,} \\ 1, \text{ если в вершину } v_i \text{ входит дуга } e_k, \text{ не являющаяся петлей,} \\ 0, \text{ если вершина } v_i \text{ неинцидентна дуге } e_k \text{ или } e_k \text{ является петлей.} \end{cases}$$

Если граф $G=(V,E)$ не содержит петель, то матрица B полностью его характеризует. Если есть петли то вместо одной матрицы инциденций рассматривают две матрицы: исходящую матрицу инциденций $B^{-}=(b_{ik}^{-})$ и входящую матрицу инциденций $B^{+}=(b_{ik}^{+})$, которые определяются следующим образом:

$$b_{ik}^{-}=\begin{cases}1, \text{ если из вершины } v_i \text{ исходит дуга } e_k,\\ 0, \text{ если вершина } v_i \text{ неинцидентна дуге } e_k;\end{cases}$$

$$b_{ik}^{+}=\begin{cases}1, \text{ если в вершину } v_i \text{ входит дуга } e_k,\\ 0, \text{ если вершина } v_i \text{ неинцидентна дуге } e_k.\end{cases}$$

Все введенные матрицы инциденций связаны соотношением: $B=B^{+}-B^{-}$. Для петель, в частности, поучаем: $b_{ik}=b_{ik}^{+}-b_{ik}^{-}=1-1=0$.

Числовые характеристики графа связаны с введенными матрицами следующими соотношениями: $\deg^{-}v_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}=\sum_{k=1}^{m}b_{ik}^{-}$, $\deg^{+}v_j=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}=\sum_{k=1}^{m}b_{jk}^{+}$.

Матрица инциденций B является полным инвариантом, т. е. характеристикой однозначно определяющей неориентированный мультиграф или ориентированный мультиграф без петель. Для ориентированного мультиграфа с петлями полным инвариантом является пара матриц B^{+} и B^{-}.

Если $G=(V,E)$ является простым графом, то множество ребер или дуг однозначно определяется отношением E и, тем самым, полным инвариантом будет служить кроме матриц инциденций и матрица смежности A, независимо от того, является ли граф ориентированным или нет.

Указанный факт является основанием использования перечисленных матриц для компьютерного представления графов.

Рассмотрим примеры вычисления основных числовых инвариантов графов и их матричных представлений.

Пример 1. Пусть задан следующий неориентированный граф:

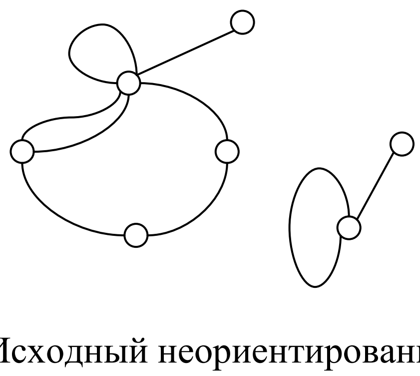


Рис. 4.14. Исходный неориентированный граф

Обозначим вершины и ребра графа:

$V=\{v_1,\ldots,v_7\}$ – множество вершин графа;

$E=\{e_1,\ldots,e_9\}$ – множество ребер графа.

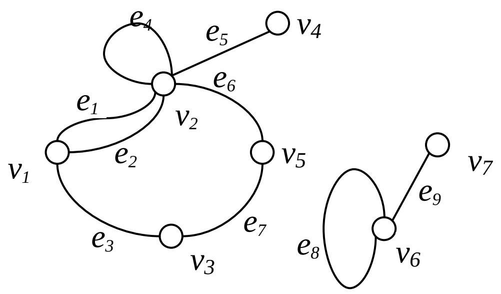


Рис. 4.15. Означенный ориентированный граф $G = (V, E)$

Найдем основные инварианты:

1. Число вершин $|V| = n = 7$.

2. Число ребер $|E| = m = 9$.

3. Число компонент связности $k = 2$.

Одна компонента составлена из вершин $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, другая – $\{v_6, v_7\}$.

4. Цикломатическое число $c = m + k – n = 9 + 2 – 7 = 4$.

5. Хроматическое число $h = 2$.

Минимальная раскраска графа цветами «А» и «В» приведена на рис. 4.3.

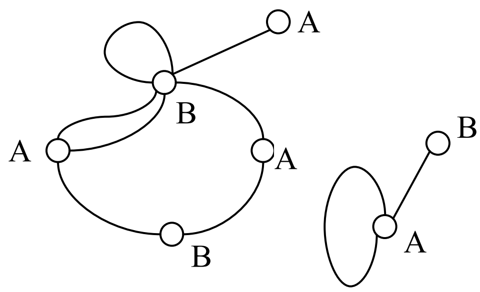


Рис. 4.16. Минимальная раскраска графа $G = (V, E)$

6. Плотность графа $p = 2$: максимальную клику составляют, например, вершины v_1 и v_2.

7. Диаметр графа равен 4:

Это следует из того, что максимально длинный простой путь, например, (v_1, e_3, v_3, e_7, v_5, e_6, v_2, , e_5, v_4) содержит 4 ребра.

8. Вектор степеней вершин графа G:

$deg\ G = (3, 6, 2, 1, 2, 3, 1)$.

9. Матрица смежности графа G:

$$M = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

10. Матрица инциденций графа G:

$$N = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Рассмотрим пример нахождения основных инвариантов ориентированных графов.

Пример 2. Пусть задан следующий граф:

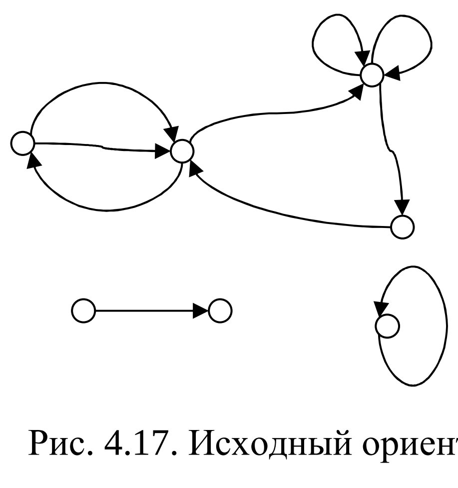


Рис. 4.17. Исходный ориентированный граф

Обозначим вершины и дуги графа:

$V = \{v_1,\ldots,v_7\}$ – множество вершин графа.

$E = \{e_1,\ldots,e_{10}\}$ – множество дуг графа.

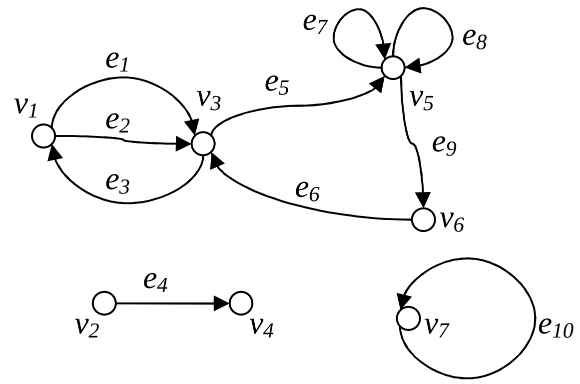


Рис. 4.18. Означенный ориентированный граф $G = (V, E)$

Найдем основные инварианты:

1. Число вершин $|V| = n = 7$.

2. Число ребер $|E| = m = 10$.

3. Число компонент связности $k = 3$. Одна компонента составлена из вершин$\{v_1, v_3, v_5, v_6\}$, вторая – $\{v_2, v_4\}$, третья – $\{v_7\}$.

4. Цикломатическое число $c = m + k – n = 10 + 3 – 7 = 6$.

5. Хроматическое число $h = 3$.

Минимальная раскраска графа цветами «А», «В» и «С» приведена на рис. 4.6.

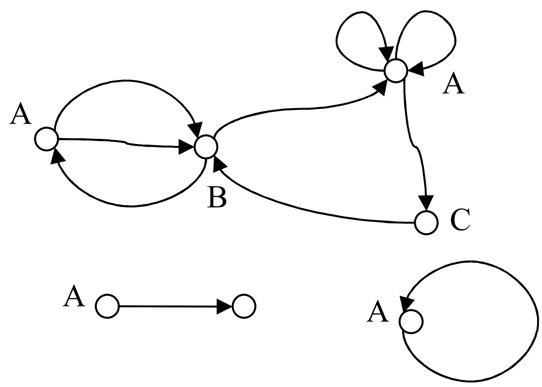


Рис. 4.19. Минимальная раскраска графа $G = (V, E)$

6. Плотность графа $p = 3$.

Максимальную клику составляют вершины v_3, v_5 и v_6 (рис. 4.5.).

7. Диаметр графа равен 3:

Это следует из того, что максимально длинный простой путь, например, $(v_1, e_3, v_3, e_5, v_5, e_9, v_6,)$ содержит 3 дуги.

8. Вектор степеней вершин графа G:

$$deg\ G = (3, 1, 5, 1, 6, 2, 2);$$

Вектор полустепеней исхода вершин графа G:

$$deg^-\ G = (2, 1, 2, 0, 3, 1, 1);$$

Вектор полустепеней захода вершин графа G:

$$deg^+\ G = (1, 0, 3, 1, 3, 1, 1).$$

9. Матрица смежности графа G:

$$M = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

10. Матрица инциденций графа G:

$$N = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 & e_{10} \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array};$$

исходящая матрица инциденций:

$$N^- = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 & e_{10} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array};$$

входящая матрица инциденций:

$$N^+ = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 & e_{10} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

4.3. ЭЙЛЕРОВЫ И ГАМИЛЬТОНОВЫ ПУТИ И ЦИКЛЫ

Пусть $G=(V,E)$ - связный ориентированный мультиграф.

Эйлеровым циклом называется цикл в графе G, который содержит все ребра в графе и каждое только один раз.

Эйлеровым графом называется граф, содержащий эйлеров цикл.

Эйлеровым путем называется путь в графе G, не являющийся циклом, который содержит все ребра в графе и каждое только один раз.

Полуэйлеровым графом называется граф, содержащий эйлеров путь.

Следующая теорема устанавливает необходимое и достаточное условие эйлеровости и полуэйлеровости графа.

Теорема (Эйлера).

1) Граф G является эйлеровым тогда и только тогда, когда все вершины графа имеют четную степень.

2) Граф G является полуэйлеровым тогда и только тогда, когда все вершины графа, кроме двух, имеют четную степень. При этом путь начинается в одной вершине с нечетной степенью и заканчивается в другой.

2^0. *Гамильтоновы графы.*

Пусть $G=(V,E)$ - связный ориентированный мультиграф.

Гамильтоновым циклом называется простой цикл в графе G, который содержит все вершины в графе и каждую только один раз.

Гамильтоновым графом называется граф, содержащий гамильтонов цикл.

Гамильтоновым путем называется простой путь в графе G, не являющийся циклом, который содержит все вершины в графе и каждую только один раз.

Очевидно, что если граф содержит гамильтонов цикл, то он содержит и гамильтонов путь.

Полугамильтоновым графом называется граф, содержащий гамильтонов путь, но не содержит гамильтонов цикл.

Необходимого и достаточного условия гамильтоновости графа до настоящего времени не найдено. Однако, существует целый ряд достаточных условий. Одним из наиболее простых достаточных условий является следующая теорема.

Теорема (Дирака).

Если для всех вершин $v_i \in V$ графа G, имеющего n вершин, выполняется $\deg v_i \geq \frac{n}{2}$, то граф является гамильтоновым.

Рассмотрим алгоритмы построения эйлерова пути или цикла в связном неориентированном эйлеровом мультиграфе $G=(V,E)$, принадлежащие Х.Тую.

Пусть сначала $G = (V, E)$ - полуэйлеров граф.

Обозначим u и w - вершины, между которыми будет строиться эйлеров путь, т. е. вершины с нечетными степенями

Алгоритм построения эйлерова пути имеет следующий вид.

Шаг 1. Находим простой путь, соединяющий вершины u и w.

Шаг 2. Всем ребрам найденного пути присвоим метки $h = 0$.

Шаг 3. Если в G помечены все ребра, то переход к *шагу 8*.

Шаг 4. Пусть максимальная пометка ребер равна h. Найти непомеченное ребро e, смежное с каким-либо уже помеченным.

Шаг 5. Построить простой цикл из непомеченных ребер, содержащий ребро e

Шаг 6. Пусть ранее достигнутая максимальная пометка ребер равна h. Тогда всем ребрам вновь построенного цикла присвоить пометку $h+1$.

Шаг 7. Переход к *шагу 3*.

Шаг 8. Построить эйлеров путь $u = x_1, e_1, x_2, e_2, x_3, \dots, x_m, e_m, w = x_{m+1}$, начинающийся в вершине u и заканчивающийся в вершине w.

При этом, если путь был определен до вершины x_i, то последующее ребро e_{i+1} должно обладать следующими свойствами:

1) быть инцидентным x_i;
2) не быть уже включенным в путь;
3) иметь максимальную пометку.

Пусть теперь $G = (V, E)$ - эйлеров граф.

Обозначим u и w - две произвольные смежные вершины, соединенные ребром e_0.

Алгоритм построения эйлерова цикла отличается от приведенного алгоритма только следующими шагами.

Шаг 1. Находим простой цикл, содержащий вершины u и w.

Шаг 8. Построить эйлеров цикл

$u = x_1, e_1, x_2, e_2, x_3, \dots, x_m, e_m, w = x_{m+1}, e_0, u$.

При этом, если путь был определен до вершины x_i, то последующее ребро e_{i+1} должно обладать следующими свойствами:

1) быть инцидентным x_i;
2) не быть уже включенным в путь;
3) иметь максимальную пометку.

Теорема (Хоанг Туя). Алгоритм Хоанг Туя всегда позволяет построить эйлеров цикл в эйлеровом графе и эйлеров путь в полуэйлеровом графе.

Для нахождения эйлеровых путей и циклов может быть использован алгоритм Х. Туя. Опишем этот алгоритм на примере.

Пусть задан неориентированный мультиграф.

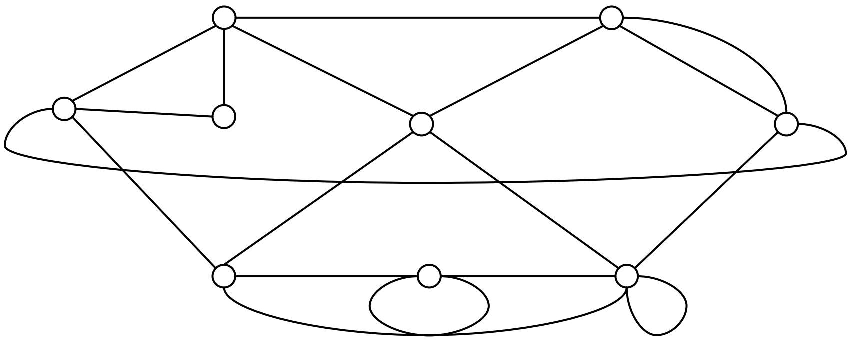


Рис. 4.20. Исходный неориентированный граф

Обозначим вершины и ребра графа:

$V = \{v_1,\ldots,v_9\}$ – множество вершин графа.

$E = \{e_1,\ldots,e_{18}\}$ – множество ребер графа.

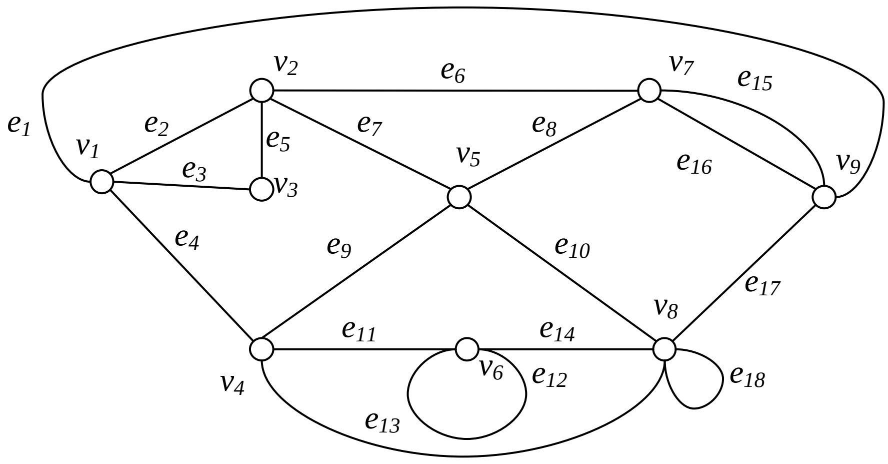


Рис. 4.21. Означенный неориентированный граф $G=(V,E)$

Найдем степени вершин графа G:

$deg\ G = (4, 4, 2, 4, 4, 4, 4, 6, 4)$.

Все степени вершин являются четными, поэтому по теореме Л. Эйлера граф является эйлеровым, т. е. содержит эйлеров цикл.

Для того чтобы найти эйлеров цикл, выделим ребро e_1, соединяющее различные вершины v_1 и v_9 и осуществим пометку ребер в соответствии с алгоритмом Х. Туя:

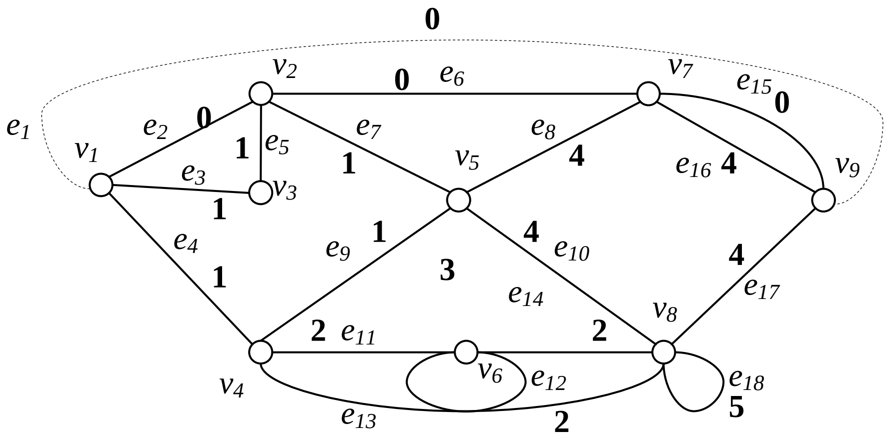


Рис. 4.22. Граф, помеченный в соответствии с алгоритмом Х.Туя

Используя полученные пометки вершин, найдем эйлеров цикл:
$v_1, e_4, v_4, e_{11}, v_6, e_{14}, v_6, e_{12}, v_8, e_{18}, v_8, e_{17}, v_9, e_{16}, v_7, e_8, v_5, e_{10}, v_8, e_{13}, v_4, e_9, v_5, e_7, v_2, e_5, v_3, e_3, v_1, e_2, v_2, e_6, v_7, e_{15}, v_9, e_1, v_1$.

Если граф является полуэйлеровым, т. е. содержит эйлеров путь, то пометки «**0**» ставятся на ребра любого простого пути, соединяющего обе вершины с нечетными степенями.

Простых (имеющих невысокую вычислительную сложность) алгоритмов нахождения гамильтоновых путей или циклов не существует. Однако на практике для графов с малым числом вершин, как правило, удается их найти, используя ограниченный перебор вариантов.

Условие теоремы Г. Дирака для рассматриваемого графа не выполняется. Поэтому сделать вывод о гамильтоновости, используя только эту теорему, нельзя.

С помощью перебора вариантов найдем гамильтонов путь

$v_1, e_3, v_3, e_5, v_2, e_7, v_5, e_8, v_7, e_{16}, v_9, e_{17}, v_8, e_{14}, v_6, e_{11}, v_4$

и гамильтонов цикл

$v_1, e_3, v_3, e_5, v_2, e_7, v_5, e_8, v_7, e_{16}, v_9, e_{17}, v_8, e_{14}, v_6, e_{11}, v_4, e_4, v_1$.

Таким образом эмпирически доказано, что заданный граф является гамильтоновым.

4.4. КРАТЧАЙШИЙ ПУТЬ В ГРАФЕ

Пусть $G=(V,E)$ - ориентированный взвешенный связный граф. При этом веса приписаны дугам. Сумму весов дуг в пути будем называть длиной пути. Путь называется кратчайшим, если его длина минимальна.

Далее будем считать, что G не содержит кратные дуги и петли. Если это не так, то его необходимо преобразовать: удалить все петли и все кратные дуги, кроме одной, имеющей наименьший вес. Легко видеть, что все удаленные дуги и петли не могут войти в кратчайший путь.

Если $(v_i,v_j)\in E$, то обозначим p_{ij} - вес этой дуги; иначе примем $p_{ij}=\infty$.

В процессе реализации алгоритма вершины получают метки, равные длине пути от начальной вершины v_0 до данной вершины v_i.

Метки могут быть временными и окончательными.

Временная метка вершины v_i q_i - это кратчайший путь от вершины v_0 до вершины v_i, когда учтены возможно не все пути от вершины v_0 до вершины v_i.

Окончательная метка вершины v_i Q_i - это кратчайший путь от вершины v_0 до вершины v_i, когда учтены все пути от вершины v_0 до вершины v_i.

Рассмотрим общую схему реализации алгоритма.

Пусть требуется найти кратчайший путь от вершины v_0 до вершины v_n.

Шаг 1. Вершине v_0 присваивается окончательная метка $Q_0=0$ (что означает нулевой кратчайший путь от вершины до самой себя). Всем остальным вершинам графа приписываются временные метки $q_i=\infty$.

Шаг 2. Пусть v_j - последняя вершина которой присвоена окончательная метка. Каждой вершине v_i, не имеющей окончательной метки присваивается новая временная метка $q_i=\min(q_i,Q_j+p_{ij})$.

Шаг 3. Определяется наименьшая из всех временных меток и объявляется окончательной (если таких меток несколько, выбирается любая).

Шаг 4. Если вершина v_n не получила окончательной метки, то переход к *шагу 2*. Иначе величина Q_n искомая длина кратчайшего пути.

Шаг 5. Величина Q_n - искомая длина кратчайшего пути. Найти кратчайший путь, двигаясь обратно от v_n к v_0 только через те вершины, из которых последующие получали окончательные метки.

Рассмотрим пример нахождения кратчайшего пути в заданном графе из вершины v_0 в вершину u.

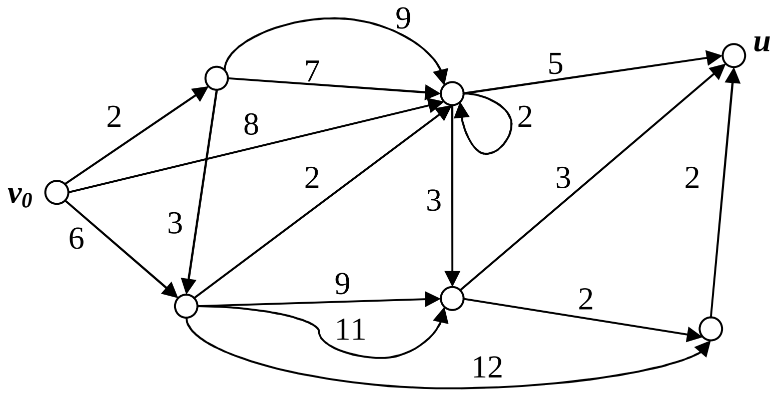


Рис. 4.23. Исходный ориентированный граф

1. Исключим петли и кратные дуги большего веса из графа, после чего обозначим вершины графа:

$V = \{v_0,\ldots,v_5, u\}$ – множество вершин графа.

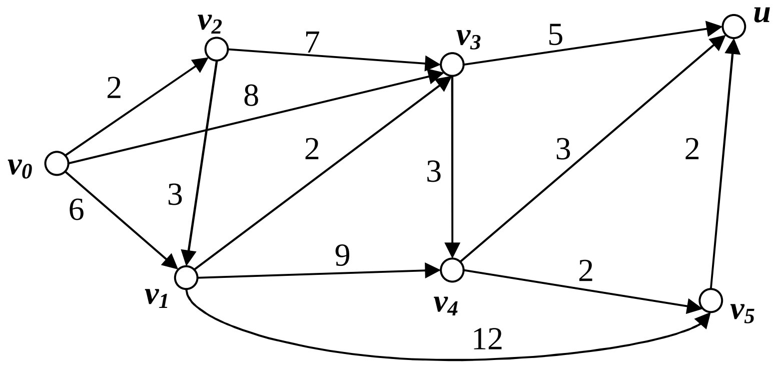


Рис. 4.11. Означенный простой граф $G=(V,E)$

Построим таблицу, описывающую шаги реализации метода поиска в ширину.

шаги \ вершины	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	u
0	$\boxed{0}$	∞	∞	∞	∞	∞	∞
1		6	$\boxed{2}$	8	∞	∞	∞
2		$\boxed{5}$		8	∞	∞	∞
3				$\boxed{7}$	14	17	∞
4					$\boxed{10}$	17	12
5						12	$\boxed{12}$

Таким образом, кратчайший путь проходит через вершины: v_0, v_2, v_1, v_3, u. Его длина равна 12.

4.5. ПОСТРОЕНИЕ МИНИМАЛЬНОГО ОСТОВНОГО ДЕРЕВА

Пусть $G = (V, E)$ - неориентированный связный взвешенный граф. При этом веса прописаны ребрам. Граф G может содержать несколько остовных деревьев, т. е. связных суграфов $T = (V, U)$, $U \subseteq E$, не содержащих циклов. Сумму весов ребер остовного дерева будем называть весом этого дерева. Дерево называется минимальным, если его вес минимален.

Наиболее просто описывается построение остовного дерева с помощью жадного алгоритма (алгоритма Краскала).

Пусть граф G имеет n вершин. Тогда, как это было показано выше, число ребер в остовном дереве будет содержать $n-1$ ребро.

Алгоритм имеет следующий вид.

Шаг 1. Построим 0-граф $T = (V, \varnothing)$.

Шаг 2. Составить список ребер графа, упорядоченных по возрастанию весов.

Шаг 3. Добавить очередное ребро e_i из списка в граф T.

Шаг 4. Проверить, не появился ли в графе T цикл.

Шаг 5. Если цикл появился, то ребро e_i из графа T исключить.

Шаг 6. Если число ребер в графе T равно $n-1$, то T - искомое минимальное остовное дерево. Иначе - переход к *шагу 3*.

Теорема (Краскала). Приведенный алгоритм приводит к построению минимального остовного дерева.

Покажем способ нахождения минимального остовного дерева с помощью жадного алгоритма (алгоритма Краскала) на примере.

Пусть задан неориентированный мультиграф, ребрам которого приписаны веса.

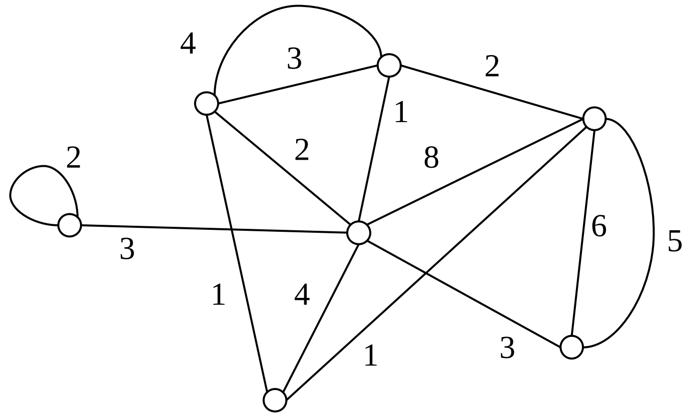


Рис. 4.24. Исходный неориентированный взвешенный граф

Обозначим вершины и ребра графа:

$V = \{v_1,\dots,v_7\}$ – множество вершин графа.

$E = \{e_1,\dots,e_{14}\}$ – множество ребер графа.

.

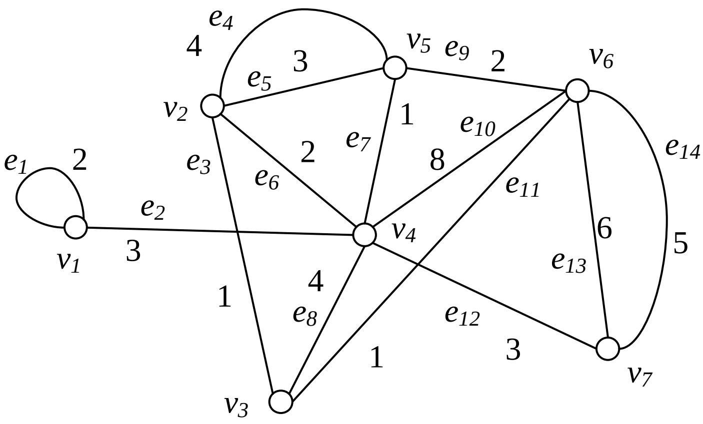


Рис. 4.25. Означенный граф $G=(V,E)$

Составим таблицу на основе матрицы инциденций графа $G=(V,E)$, в которой

1) все ребра упорядочены по возрастанию весов;

2) указаны веса ребер;

3) отмечен признак «+» образования цикла при добавлении данного ребра.

	e_3	e_7	e_{11}	e_1	e_9	e_6	e_2	e_{12}	e_5	e_8	e_4	e_{14}	e_{13}	e_{10}
v_1	0	0	0	2	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
v_2	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0
v_3	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
v_4	0	1	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	1
v_5	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0
v_6	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1
v_7	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0

Вес	1	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4	5	6	8
Образ. цикла	-	-	-	+	-	+	-	-						

На основе таблицы построим минимальное остовное дерево:

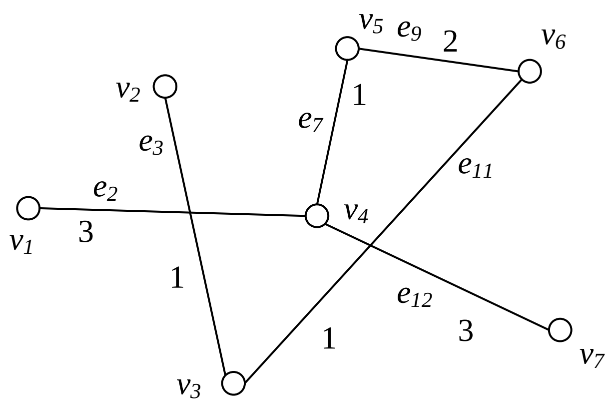


Рис. 4.26. Минимальное остовное дерево графа *G=(V,E)*

Меньшую вычислительную сложность имеет алгоритм ближайшего соседа (алгоритм Прима), построенный по схеме поиска в ширину.

Пусть граф G имеет n вершин. Тогда, как это было показано выше, число ребер в остовном дереве будет содержать $n-1$ ребро.

Алгоритм имеет следующий вид.

Шаг 1. Выбирается произвольная вершина v_i и строится граф из одной изолированной вершины $T=(v_i,\varnothing)$.

Шаг 2. Среди всех ребер, не включенных в граф T и инцидентных вершинам графа T, выбирается ребро $e=(v_j,v_k)$, где v_j предполагается включенным в граф T. Если таких ребер несколько, то выбирается любое.

Шаг 3. Ребро e и вершина v_k включаются в граф T.

Шаг 4. Если число ребер в графе T равно $n-1$, то T - искомое минимальное остовное дерево. Иначе - переход к *шагу 2*.

Теорема (Прима). Приведенный алгоритм приводит к построению минимального остовного дерева.

Покажем способ нахождения минимального остовного дерева с помощью алгоритма ближайшего соседа (алгоритма Прима) на примере.

Пусть задан неориентированный мультиграф, ребрам которого приписаны веса.

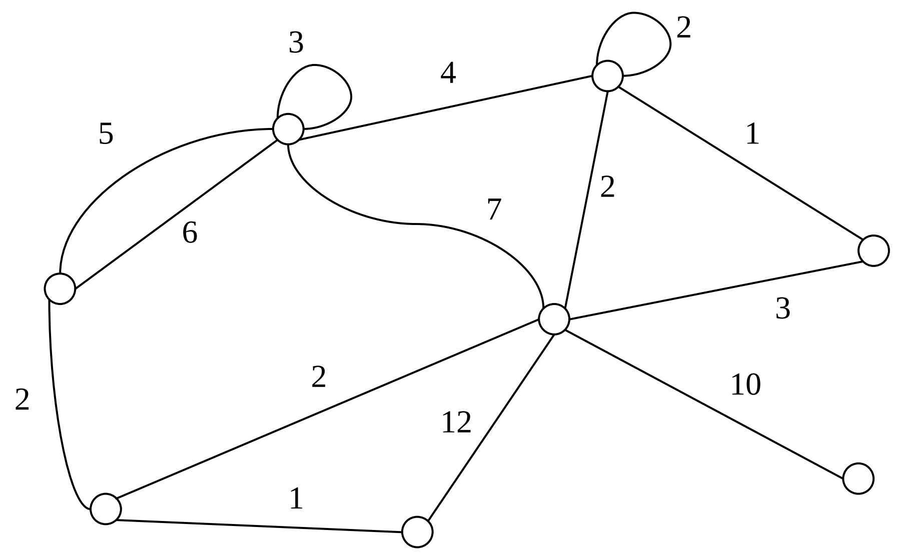


Рис. 4.27. Исходный неориентированный взвешенный мультиграф

Обозначим вершины графа:

$V = \{v_1,\ldots,v_8\}$ – множество вершин графа.

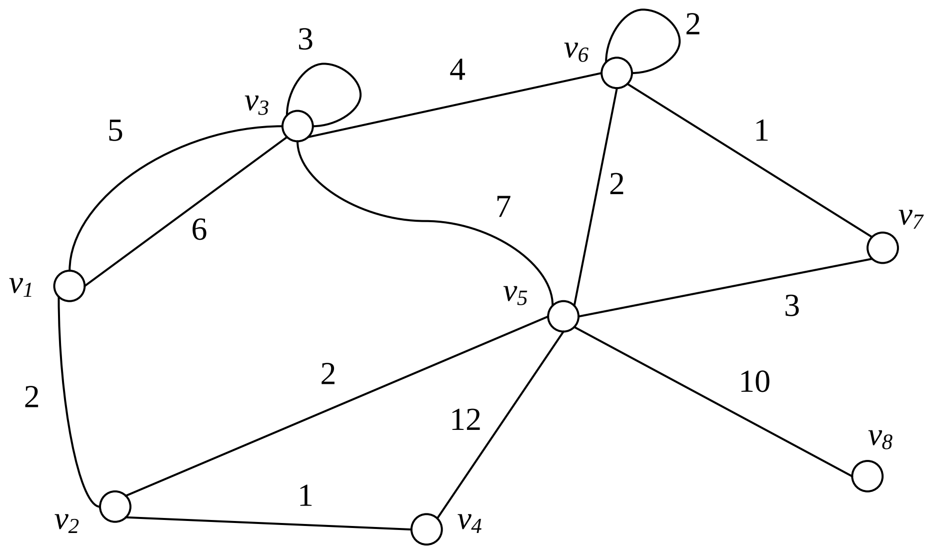


Рис. 4.28. Означенный граф $G=(V,E)$

Построим таблицу, описывающую шаги реализации метода поиска в ширину.

Шаг / Вершина	1	2	3	4	5	6	7
v_1	-	-	-	-	-	-	-
v_2	$(v_1,2)^*$	-	-	-	-	-	-
v_3	$(v_1,5)$	$(v_1,5)$	$(v_1,5)$	$(v_1,5)$	$(v_6,4)$	$(v_6,4)^*$	-
v_4	∞	$(v_2,1)^*$	-	-	-	-	-
v_5	∞	$(v_2,2)$	$(v_2,2)^*$	-	-	-	-
v_6	∞	∞	∞	$(v_5,2)^*$	-	-	-
v_7	∞	∞	∞	$(v_5,3)$	$(v_6,1)^*$	-	-
v_8	∞	∞	∞	$(v_5,10)$	$(v_5,10)$	$(v_5,10)$	$(v_5,10)$

На основе таблицы построим минимальное остовное дерево:

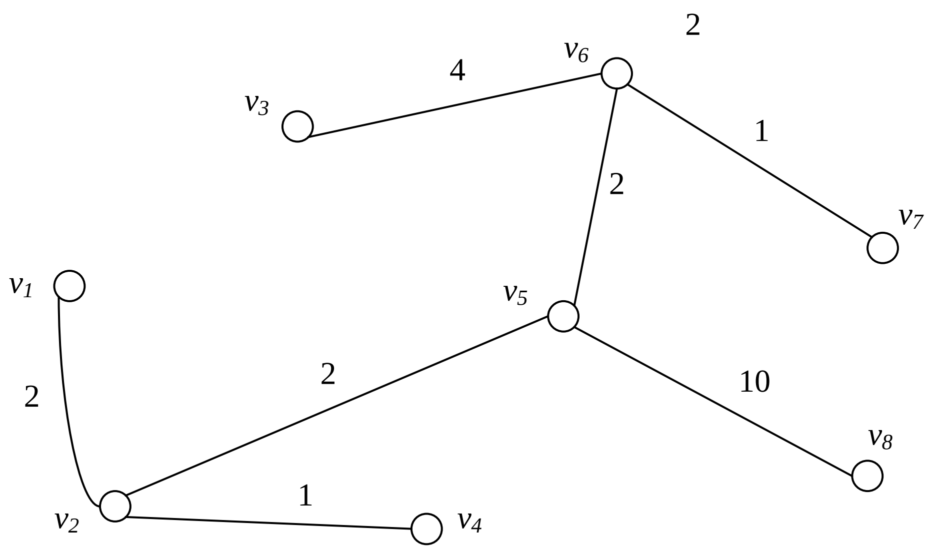


Рис. 4.29. Минимальное остовное дерево графа $G=(V,E)$

5. КОНЕЧНЫЕ АВТОМАТЫ

5.1. АВТОМАТЫ-ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ

Абстрактным конечным автоматом называется пятерка $A=(X,Y,S,\lambda,\mu)$, где

- X - конечное множество, называемое входным алфавитом,
- Y - конечное множество, называемое выходным алфавитом,
- S - конечное множество, называемое алфавитом состояний,
- $\lambda: X \times S \to S$ - функция переходов,
- $\mu: X \times S \to Y$ - функция выходов.

Произвольные конечные последовательности символов

- алфавита X называются входными словами,
- алфавита Y - выходными словами,
- алфавита S - словами состояний.

Число символов в слове называется его длиной. Допускается существование пустых слов Λ.

При функционировании автомата по входному слову x и начальному состоянию s_0 находятся выходное слово y и слово состояний s.

Если в автомате выделено начальное состояние s_0, то он называется инициальным. Инициальный автомат задается шестеркой $A=(X,Y,S,\lambda,\mu,s_0)$.

2^0. *Способы задания конечных автоматов.*

Конечные автоматы можно задавать с помощью таблиц, определяющих функции f и g или графически с помощью диаграммы Мура, представляющей собой взвешенный ориентированный мультиграф. При этом

- вершины графа соответствуют состояниям,
- дуги - переходам из состояния в состояние;
- веса дуг – пары $\{x_i / y_j\}$, где x_i - входной, а y_j соответствующий выходной символ при данном переходе.

Если автомат является инициальным, то начальное состояние обычно помечают символом «*».

Обычно выделяют два основных класса задач, решаемых с помощью автоматов:

1) распознавание принадлежности входных слов данному множеству (автоматы-распознаватели);

2) преобразование входных слов в выходные в соответствии с основным предназначением автомата (автоматы-преобразователи).

Точно провести границу между этими типами автоматов не всегда оказывается просто.

Приведем пример функционирования автомата-преобразователя.

Пусть функция переходов f и функция выходов g заданы таблично:

Входные символы \ Состояния	$\boldsymbol{S_0}$	$\boldsymbol{S_1}^*$	$\boldsymbol{S_2}$
А	$(S_2, 1)$	$(S_1, 0)$	$(S_2, 0)$
Ш	$(S_1, 0)$	$(S_0, 0)$	$(S_0, 1)$
Л	$(S_1, 1)$	$(S_2, 1)$	$(S_0, 0)$

Составим по данной таблице полное описание автомата с помощью кортежа

$$A_s = (X, S, Y, f, g, s).$$

Входной алфавит: X = {А, Ш, Л},

алфавит состояний $S = \{s_0, s_1, s_2\}$,

выходной алфавит $Y = \{0, 1\}$,

функция переходов $f : X \times S \to S$:

f	s_0	s_1	s_2
А	s_2	s_1	s_2
Ш	s_1	s_0	s_0
Л	s_1	s_2	s_0

функция выходов $g : X \times S \to Y$:

g	s_0	s_1	s_2
А	1	0	0
Ш	0	0	1
Л	1	1	0

начальное состояние s_1.

По заданному описанию построим диаграмму Мура.

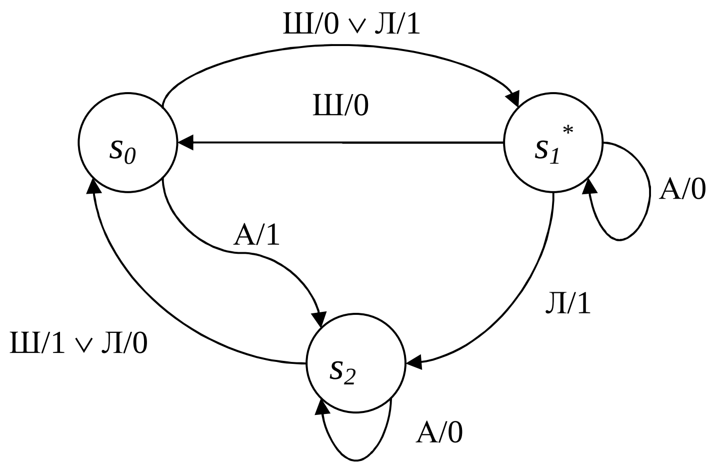


Рис. 5.1. Диаграмма Мура автомата-преобразователя

Для заданного начального состояния автомата s_1 и заданного входного слова $\boldsymbol{x}$ = ШАЛАШ найдем выходное слово $\boldsymbol{y}$ и конечное состояние, в котором будет находиться автомат:

$\boldsymbol{x}$		Ш	А	Л	А	Ш
$\boldsymbol{y}$		0	1	0	1	1
$\boldsymbol{s}$	s_1	s_0	s_2	s_0	s_2	s_0

Конечное состояние - s_0, выходное слово $\boldsymbol{y} = 01011$.

5.2. АВТОМАТЫ-РАСПОЗНАВАТЕЛИ

Автомат-распознаватель позволяет распознать принадлежность входного слова данному множеству. Его описание аналогично описанию автомата-преобразователя.

Приведем пример построения автомата-распознавателя, осуществляющего подсчет количества троек последовательно следующих символов «К». Для этого необходимо найти функции выходов g и переходов f автомата-распознавателя и построить для него диаграмму Мура.

Пусть входной алфавит представляет собой множество $X = \{\#, K\}$, где # - любой символ, кроме «K»;

выходной алфавит – множество $Y =\{0, 1, 2, \ldots N\}$, где N – максимальная длина входного слова.

Для решения задачи достаточно использовать алфавит состояний, включающий 3 состояния:

- s_0 – начальное состояние или состояние, в котором находится автомат после ввода #,
- s_1 – состояние, в котором находится автомат после ввода «K», если предыдущий символ был # или пустой,
- s_2 – состояние, в котором находится автомат после ввода не менее двух «K».

Таким образом, алфавит состояний представляет собой множество $S = \{s_0, s_1, s_2\}$.

Из описания состояний вытекает, что функция переходов f имеет следующий вид:

f	s_0	s_1	s_2
#	s_0	s_0	s_0
K	s_1	s_2	s_2

Для описания функции выходов g необходимо описать алгоритм подсчета числа троек n последовательно следующих символов «K». Первый выходной символ $n=0$. Выражение $n:=n+1$ означает, что текущий выходной символ увеличивается на *1*. В дальнейшем используется новое значение *n*.

Таким образом, функция выходов *g* имеет вид:

g	s_0	s_1	s_2
#	n	n	n
K	n	n	$n:=n+1$

Полученное описание автомата-распознавателя позволяет построить его диаграмму Мура:

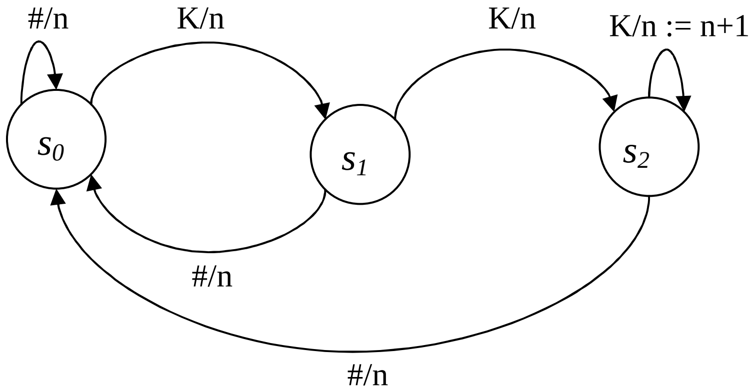


Рис. 5.2. Диаграмма Мура автомата-распознавателя

ЧАСТЬ III. КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

1. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Написание контрольной работы является составной частью самостоятельной работы слушателя-заочника. Ее выполнение предполагает демонстрацию слушателем сведений и знаний, полученных из учебной и методической литературы. При подготовке контрольной работы необходимо показать глубокое знание теоретического материала и грамотное применение его для решения практических задач. Кроме этого, следует стремиться к выработке навыков грамотного выбора и использования учебной и методической литературы.

Прежде чем приступать к выполнению контрольных заданий, необходимо внимательно изучить теоретический материал по указанным в рабочей программе разделам.

Слушатель-заочник выполняет контрольную работу строго в соответствии со своим вариантом. Номер варианта определяется по номеру в списке группы, предоставляемым преподавателем. Произвольный выбор варианта контрольных работ не допускается.

Контрольная работа № 1 включает в себя 17 заданий по всем разделам курса.

При оформлении контрольной работы следует обратить внимание на следующие моменты:

- условие каждой задачи записывается полностью;
- решение задач излагается подробно, при необходимости делаются ссылки на учебную литературу;
- с левой стороны страницы необходимо оставить поля для пометок и замечаний преподавателя.

Контрольная работа оценивается преподавателем по системе «зачтено» или «незачтено». Если контрольная работа не зачтена, слушатель должен внимательно изучить рецензию на контрольную работу, исправить все недостатки, указанные преподавателем, и прислать на повторную проверку исправленные задания совместно с первоначальной работой.

К итоговому зачету слушатель-заочник допускается только при наличии зачтенной контрольной работы.

2. ЗАДАНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

ЗАДАНИЕ 1.

Для заданных множеств A, B и C найти следующие множества:

$A \cup B$, $A \cap \overline{B}$, $A \cup B \cap C$, $A \setminus B$, $(B \setminus A) \cap C$.

(Здесь использованы следующие обозначения:
N – множество натуральных чисел,
Z – множество целых чисел).

№ варианта	A	B	C
1.	$\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$	$\{x: x \in N, x < 12\}$	{*четные числа*}
2.	$\{-2, 0, 4, 6, 33, 99\}$	$\{x: x \in Z, \|x\| < 3\}$	{*числа кратные трем*}
3.	$\{-3.4, -3.6, 3.7, 4.5\}$	$\{x: x \in N, x \le 13\}$	{*отрицательные числа*}
4.	$\{-5, -4, -3, -2, -1, 0\}$	$\{x: x \in Z, \|x\| < 2\}$	{*нечетные числа*}
5.	$\{a, b, c, d, f, g\}$	$\{c, d, f, g, h, e, j\}$	{*первые 12 букв латинского алфавита*}
6.	$\{1, 3, 5, R, s, Q\}$	$\{c, R, y, S, e, Q\}$	{*прописные буквы латинского алфавита*}
7.	$\{6, 7, 9, w, r, t, z\}$	$\{t, D, G, R, q, s, f\}$	$\{g, o, p, z, r, W, K\}$
8.	$\{Q, T, R, p, v, s\}$	$\{Q, g, u, s, v, e\}$	$\{q, e, T, a, R, k, l\}$
9.	$\{-7, -2, -1, 0, 7, 9\}$	$\{x: x \in N, 14 < x < 20\}$	{*неположительные действительные числа*}
10.	$\{11, 12, 13, -10, -1\}$	$\{x: x \in N, x < 13\}$	{*четные положительные числа*}

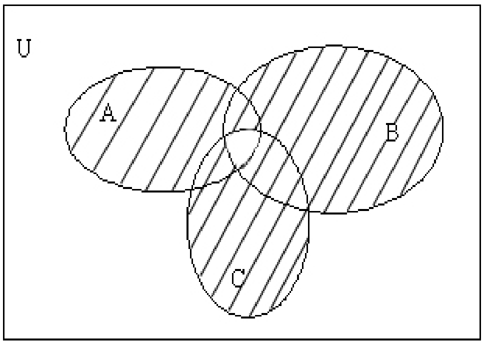
№ варианта	A	B	C
11.	$\{-5, 0, 5, 10, 15\}$	$\{x$: $x = 3n$, $n \in N$, $2 < n < 5\}$	{*положительные рациональные числа*}
12.	$\{-14, -7, 0, 7, 14, 21\}$	$\{x$: $x = 7n$, $n \in Z$, $-1 < n < 2\}$	{*неотрицательные целые числа*}
13.	$\{3, 7, 11, 17, 18, 23\}$	$\{x$: $x \in 3n$, $n \in N$, $n < 6\}$	{*числа, не являющиеся простыми*}
14.	$\{0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5\}$	$\{x$: $x \in 0.1n$, $n \in N$, $n < 4\}$	{*рациональные числа*}
15.	$\{\Delta, \Psi, \Omega, \Sigma, \Xi, \Theta\}$	$\{\Pi, T, \Psi, \Omega, \Theta\}$	{*буквы греческого алфавита*}
16.	$\{A, B, \Gamma, P, \Sigma, \pi\}$	$\{\Gamma, \psi, P, \zeta, \rho, \pi\}$	{*прописные буквы греческого алфавита*}
17.	$\{A, 1, 3, \delta, \varepsilon, \zeta\}$	$\{\eta, \varepsilon, A, 1, \lambda, 3\}$	{*буквы греческого алфавита*}
18.	$\{\pi, \rho, \sigma, \tau, \upsilon, \varphi\}$	$\{\varphi, Y, \pi, B, \tau, A\}$	{*строчные буквы греческого алфавита*}
19.	$\{0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3\}$	$\{x$: $x \in Z$, $4 > x > 1.5\}$	{*рациональные числа*}
20.	$\{-1.2, -0.5, 0, 1, 2, 2.5\}$	$\{x$: $x \in N$, $\lvert x\rvert < 2\}$	{*положительные рациональные числа*}
21.	$\{-2, -1, 1, 2, 3, 6\}$	$\{-2, 0, 2, 4, 6, 8, a, b, c\}$	{*числа*}
22.	$\left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{10}, \frac{1}{12}\right\}$	$\{x$: $x = \frac{1}{n}, \in Q$, $n \in Z, -3 < n < 10\}$	{*положительные рациональные числа*}
23.	$\left\{-\frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \frac{4}{6}, \frac{5}{7}, -\frac{6}{8}\right\}$	$\{x$: $x = \frac{1+n}{3+n}$, $n \in N$, $2 \le n \le 4\}$	{*отрицательные рациональные числа*}
24.	$\left\{\frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{4}{7}, \frac{5}{9}, \frac{6}{11}, \frac{7}{13}\right\}$	$\{x$: $x = \frac{2+n}{3+2n}$, $n \in N$, $2 \le n \le 4\}$	{*рациональные числа меньше 0.5*}

№ варианта	*A*	*B*	*C*
25.	$\{0, -1, -2, -3, -4, -5\}$	$\{x: x\in Z, \lvert x\rvert \le 2\}$	{*четные неотрицательные числа*}
26.	$\{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$	$\{x: x\in Z, 20> x > 10\}$	{*числа, кратные трем*}
27.	$\{5.4, -5.6, 5.7, 5.5, -5.7\}$	$\{x: x\in Z, \lvert x\rvert \ge 5.7\}$	{*отрицательные числа*}
28.	$\left\{-\frac{4}{11}, \frac{5}{10}, -\frac{6}{9}, \frac{7}{8}, -\frac{7}{7}, \frac{8}{6}\right\}$	$\{x: x = -\frac{4+n}{11-n}, n\in N, 2 \le n \le 4\}$	{*целые неположительные числа*}
29.	$\{15, 24, 33, 42, 51, 60\}$	$\{x: x\in Z, \lvert x\rvert < 40\}$	{*нечетные числа, кратные трем*}
30.	$\{2, -3, 4, -5, 6, -7\}$	$\{x: x\in N, x < 7\}$	{*неотрицательные четные числа*}
31.	$\{d, r, y, 2, 6, 1, a\}$	$\{x: x\in N, 6 > x > 2\}$	{*буквы*}

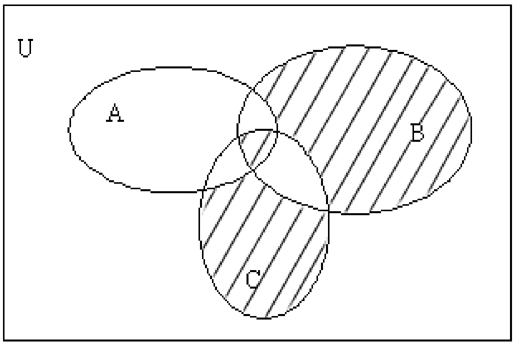
ЗАДАНИЕ 2.

По заданной диаграмме Эйлера–Венна описать множество, заданное штриховкой.

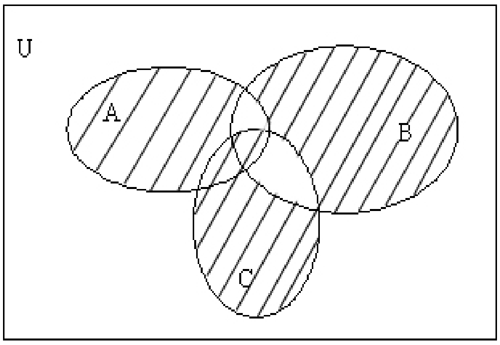
1.



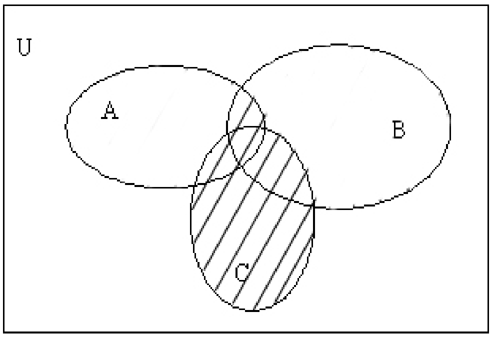
2.



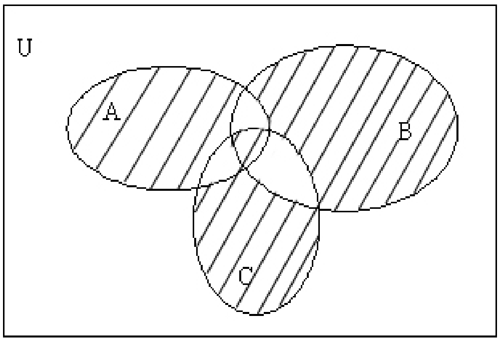
3.



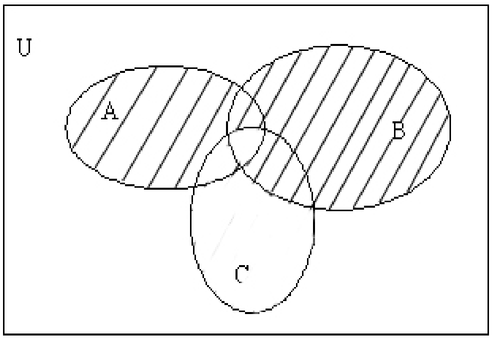
4.



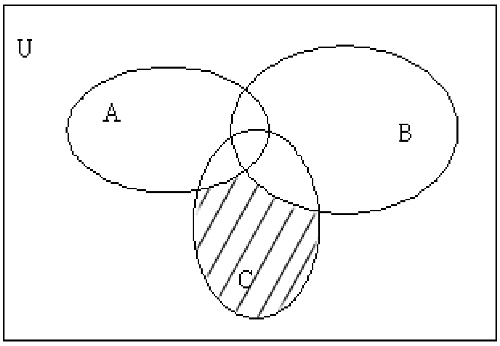
5.



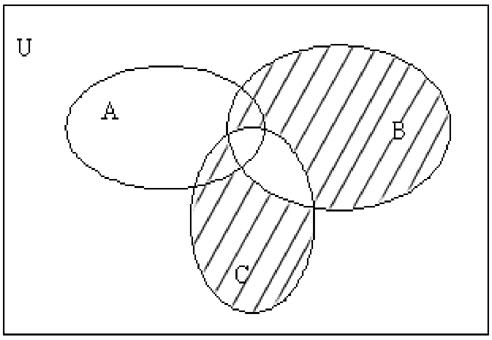
6.

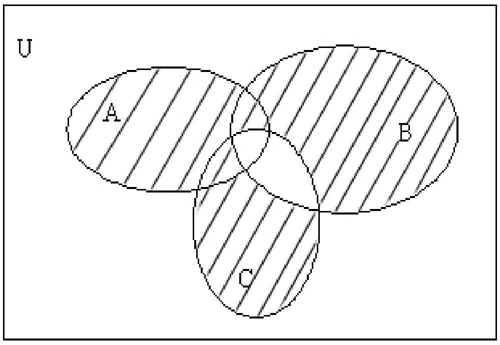


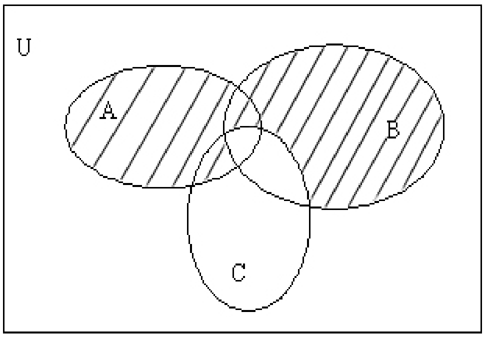
7.

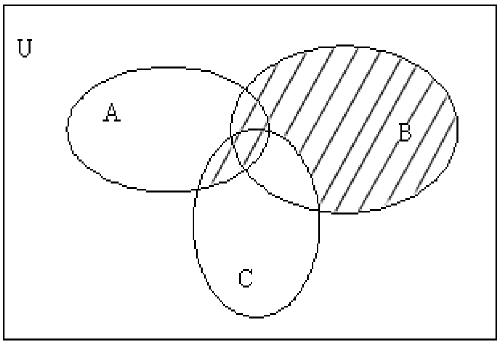


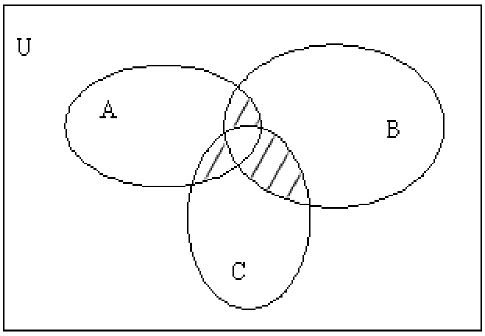
8.

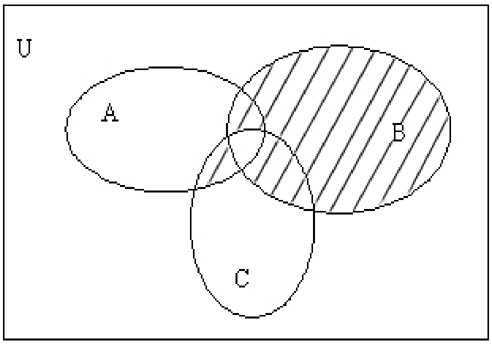


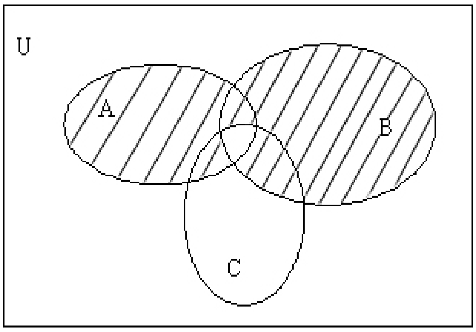
9.


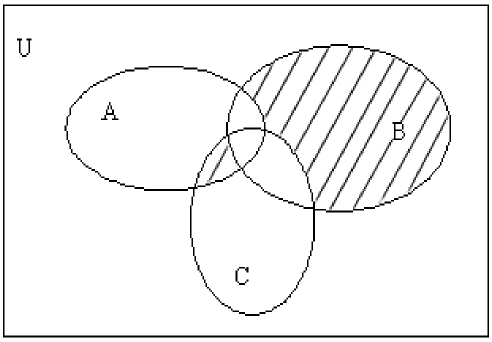
10.


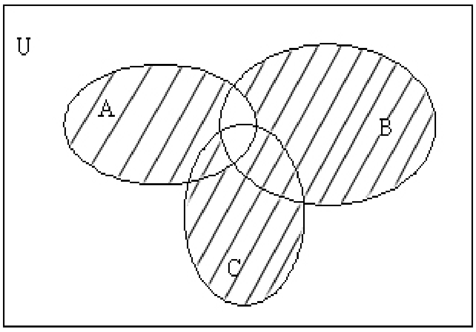
11.


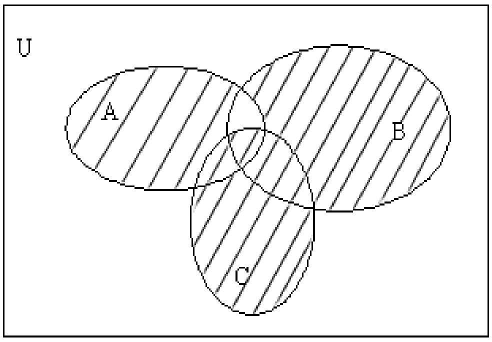
12.


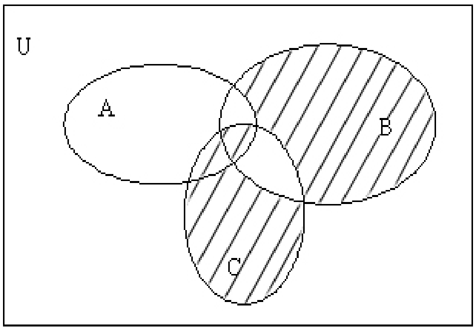
13.


14.


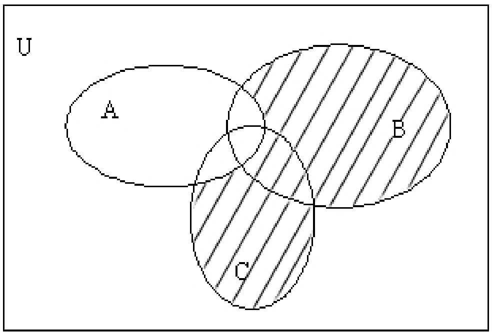
15.


16.


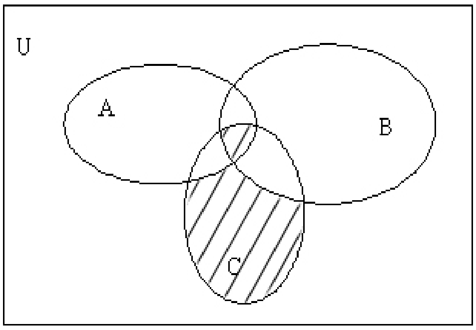
17.


18.


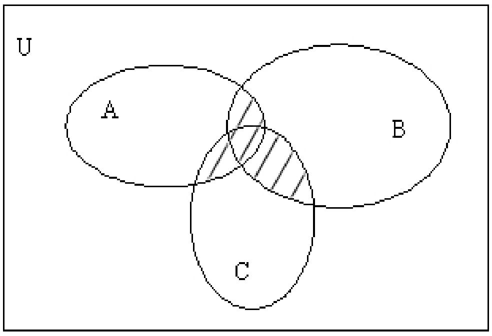
19.



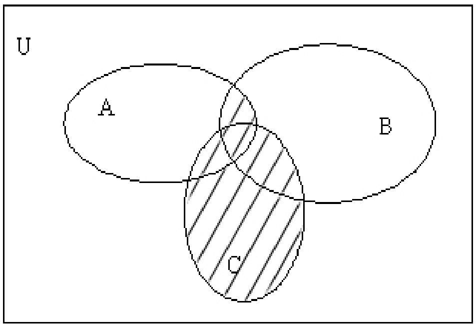
20.



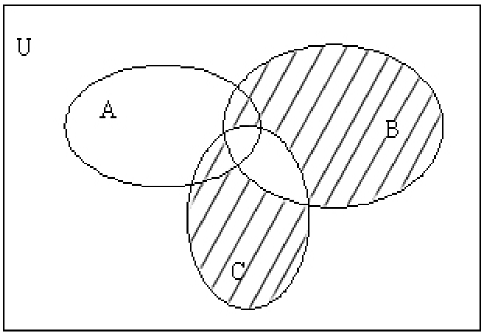
21.



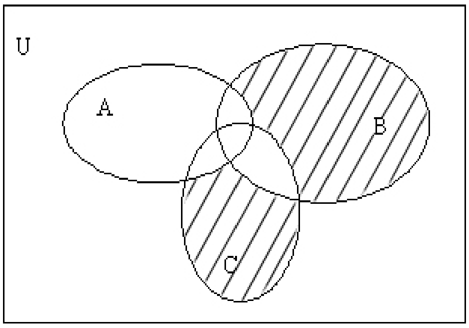
22.



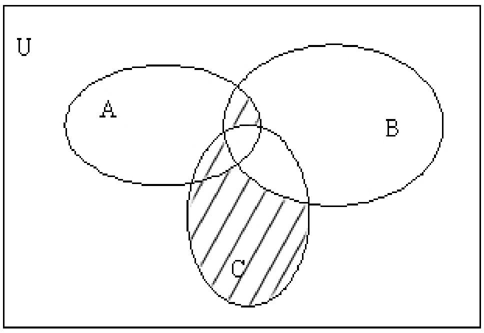
23.



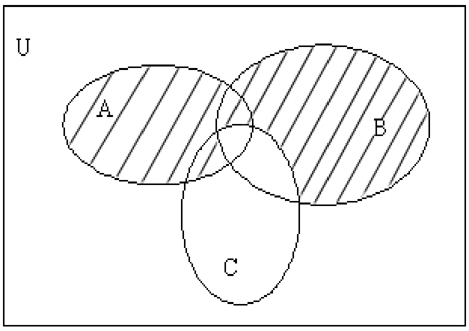
24.



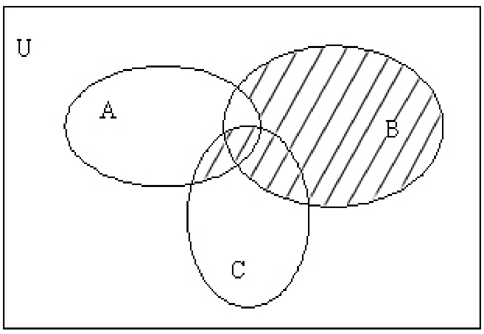
25.



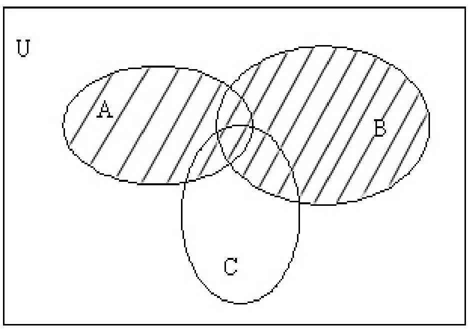
26.

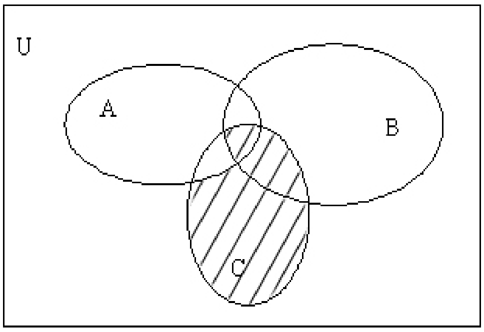


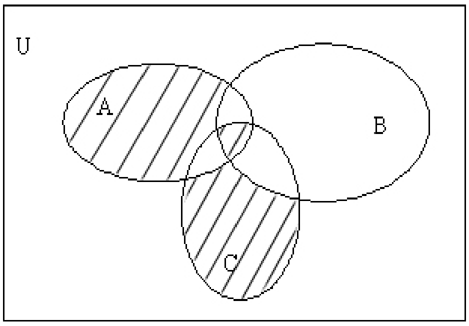
27.

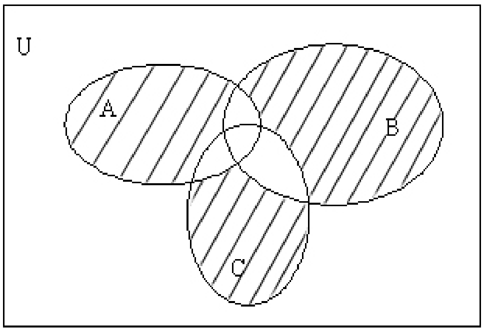


28.



29. 

30. 

31. 

ЗАДАНИЕ 3.

Решите следующие задачи, используя диаграммы Эйлера–Венна.

№ варианта	Задание
1.	Из 20 студентов группы 14 посещают дополнительные курсы английского языка, 11 – одновременно дополнительные курсы английского языка и информатики, 4 не посещают дополнительных курсов. Сколько студентов посещают дополнительные курсы информатики?
2.	12 учеников класса имеют отличные оценки, 13 - хорошие, 16 – удовлетворительные, 4 – только отличные и хорошие, 3 – только отличные и удовлетворительные, 2 - только хорошие и удовлетворительные, 5 – и отличные, и хорошие, и удовлетворительные, только на отлично не учится никто, только на хорошо – 2 ученика, только на удовлетворительно – 6 учеников, 1 ученик оценок не имеет. Сколько учеников в классе?
3.	Из группы 60 туристов английским языком владеют 19 человек, немецким – 20 человек, испанским – 4 человека, английским и немецким – 2 человека, английским и испанским – 1 человек, немецким и испанским – 3 человека, все три языка не знает никто. Сколько человек не знают ни одного из перечисленных языков?
4.	Из 220 школьников 163 играют в баскетбол, 175 – в футбол, 24 не играют в эти игры. Сколько человек одновременно играют в баскетбол и футбол?
5.	Из 64 студентов на вопрос, занимаются ли они в свободное время спортом, утвердительно ответили 40 человек; на вопрос, любят ли они слушать музыку, 30 человек ответили утвердительно, причем 22 студента занимаются спортом и любят слушать музыку. Сколько человек не увлекается ни спортом, ни музыкой?

№ варианта	Задание
7.	В камеру помещен 31 заключенный, известно, что 20 заключенных отбывают наказание по 105 ст. УК РФ, по ст. 111 – 14 заключенных, по ст. 116 – 11 человек. Одновременно по двум статьям 105 и 111 осуждено 6 человек, по 105 и 116 – 5 человек, по 111 и 116 – 3 человека. Сколько человек в камере осуждено по 3 статьям одновременно?
8.	Известно, что во взводе 13 курсантов ежемесячно ходят в наряды по столовой, 4 – в наряд по загородной учебной базе, 12 – по курсу, причем 3 курсанта ходят и по столовой, и по курсу, 2 – по курсу и на загородную учебную базу. Во все три наряда не сходил ни один из курсантов. Во взводе 26 курсантов. Сколько курсантов не ходит ни в один из нарядов?
9.	При заступлении в наряд 32 курсантов 28 получили палки резиновые, из них 20 человек также получили бронежилет и 6 – фонарик. 3 курсанта получили только бронежилет, а фонарик (кроме 6 курсантов) больше никто не получил. Сколько курсантов не получило спецсредств?
10.	В группе 26 курсантов из трех городов: Липецк, Курск, Белгород. Периодически они ездят домой и друг к другу в гости. В результате в Липецк съездили 12 человек, в Курск 14 человек, в Белгород 11 человек. Побывали только в Липецке 5 человек, в Курске - 4 человека, в Белгороде - 6 человек. В Курске и Липецке побывали 6 человек, а в Курске и Белгороде – 4 человека. Во всех трех городах не побывал никто. Сколько курсантов побывало в Липецке и Белгороде?
11.	В группе у 11 студентов имеются водительские права на категорию «А», у 11 студентов – на категорию «В», у 11 – на категорию «С», у 2 студентов имеются права на все три категории. Категории «А» и «В» имеют 3 студента, «А» и «С» – 5 студентов, «В» и «С» – 4 студента. Сколько студентов в группе?

№ варианта	Задание
13.	Из 17 человек в шахматы умеют играть 7 человек, в нарды – 11 человек, в шашки – 7 человек, причем в шашки и шахматы умеет играть 4 человека, в нарды и шахматы – 4 человека, в шашки и нарды – 5 человек. Сколько человек умеет играть во все три игры?
14.	В группе 28 студентов, на первую пару пришли 9 студентов, на вторую – 14 студентов, на третью – 16 студентов; на первой и второй парах присутствовали 3 студента, на второй и третьей – 9 студентов, на первой и третьей – 3 студента, 2 студента не были ни на одной из пар. Сколько студентов присутствовало на трех занятиях?
15.	При наступлении холодов из 40 студентов 13 человек пришли в институт в шапках, 15 – в шарфах, и 29 – в перчатках; причем одновременно надели шапки и перчатки 6 студентов, шарф и перчатки – 9 студентов, шарф и шапку – 4 студента, все три предмета одежды надели 2 студента. Сколько человек было одето только в один из предметов?
16.	Из 26 зажиточных семей города N-ск у 20 было как минимум по одной машине, у 8 семей имелся катер, и у 6 семей самолет. Известно, что 4 семьи одновременно владели машиной и катером, 3 семьи – катером и самолетом и 3 семьи – машиной и самолетом. Сколько семей одновременно обладает машиной, катером и самолетом?
17.	Для сбережения доходов 56% людей покупают валюту других стран (доллары), 42% – акции различных компаний и 42% приобретают золото. Известно также, что 6% покупают золото и валюту, 4% - акции и золото, 12% – золото, акции и валюту. Сколько процентов людей скупает только валюту?

№ варианта	Задание
19.	Из всего состава кафедры 95% преподавателей ведут занятия на радиотехническом факультете, 20% - на юридическом, 80% - на факультете заочного обучения. На двух факультетах: РТ и ЮФ ведут занятия 15% преподавателей; ФЗО и РТ – 75%; ЮФ и ФЗО – 10%. На трех факультетах работает 5%. Известно также, что только на ФЗО никто не работает. Сколько процентов преподавателей кафедры работает только на РТФ?
20.	В группе 30 курсантов. У 17 из них имеются задолженности по математике, у 11 – по физике, у 13 – по информатике, причем две задолженности по математике и физике имеют 4 курсанта, по математике и информатике – 5 курсантов, по физике и информатике – 6 курсантов. Из всей группы только 2 курсанта не имеют задолженностей по этим предметам. Сколько курсантов имеют задолженности по трем предметам?
21.	В библиотеку записаны 87 читателя. Известно, что 46 читателей периодически берут романы, 46 – научно-техническую литературу, 51 - фантастику, причем читают и романы, и научно-техническую литературу 12 человек, романы и фантастику – 14, фантастику и научно-техническую литературу – 31 читатель. Сколько человек в библиотеке читает только романы?
22.	Известно, что в семьях, в которых содержат домашних животных, 50% кошек, 40% собак, 35% попугаев, причем собак и кошек содержат лишь 10% семей, собак и попугаев – 15%, кошек и попугаев – 10%. Сколько процентов семей содержат только одного животного?
23.	Из 56 опрошенных фермеров 20 заявили, что выращивают только свеклу, 15 – только подсолнечник, 10 – только рожь. Выращивают рожь и подсолнечник 8 фермеров, рожь и свеклу – 7 фермеров, свеклу и подсолнечник – 6 фермеров. Сколько фермеров выращивает рожь?

№ варианта	Задание
25.	В ходе опроса был задан вопрос: Каким способом Вы добираетесь до работы? И даны три варианта ответа: пешком, на личном автомобиле, на маршрутном такси. 22% ответили, что добираются на личном автомобиле, 55% - на такси, 45% - пешком. Совмещают различные способы прибытия: 7% - на автомобиле и такси, 10% - на такси и пешком, 2% - используют все три вида транспорта. Сколько процентов добирается только пешком?
26.	В институте имеется 24 кафедры, в распоряжении которых находятся кабинеты и аудитории, расположенные на трех этажах. Известно, что на первом этаже имеют кабинеты 7 кафедр, на втором этаже – 8 кафедр, на третьем этаже – 15 кафедр, причем на первом и втором этажах расположены кабинеты 2 кафедр, на первом и третьем – 3 кафедр, на втором и третьем – 3 кафедр. Сколько кафедр имеют кабинеты только на третьем этаже?
27.	55% опрошенных ответили, что используют бытовую технику фирмы Phillips, 37% - технику фирмы LG, 55% - технику фирмы Samsung. Также они заявили, что пользуются техникой от разных производителей: LG и Samsung - 22%, LG и Phillips – 12%, Samsung и Phillips – 20%. Каков процент пользующихся техникой только от LG?
28.	При создании флага используются три цвета: красный, белый, синий. Известно, что красный цвет используется на 55% всех флагов, синий – на 50%, белый – на 35%. Сочетаются синий и красный цвета на 20% всех флагов, белый и синий – на 15%, белый и красный – на 10%. На скольких процентах всех флагов используется только один цвет?

№ варианта	Задание
30.	По результатам опроса пользователей мобильной связи выяснилось, что абонентами сети Билайн является 35% опрошенных, сети МТС – 40%, сети Мегафон – 50%. Также выяснилось, что периодически абоненты пользуются услугами и других сетей, так, пользуются Билайном и МТС – 15%, Билайном и Мегафоном – 15%, МТС и Мегафоном – 10%. Сколько процентов абонентов пользуется услугами только сети МТС?
31.	На контрольной работе было дано три задания. Правильно выполнили первое задание 18 студентов, второе задание – 9 студентов, третье задание – 13 студентов, причем правильно выполнивших первое и второе задания, оказалось 3 студента, первое и третье – 7 студентов, второе и третье – 5 студентов. Все три задания правильно выполнили 2 студента. Сколько студентов неправильно выполнило все три задания?

ЗАДАНИЕ 4.

Описать на языке теории множеств запрос к базе данных о нахождении указанного множества.

№ варианта	Задание
1.	Найти множество охраняемых 2 комнатных квартир по улице Перхоровича, расположенных выше 7-го этажа, с указанием фамилий владельцев и номеров договоров.
2.	Найти множество антивирусных программ, выпущенных «Лабораторией Касперского» не более одного года назад, содержащих встроенную службу помощи с указанием их названий и датой последнего выпуска обновления.
3.	Найти множество учебных групп в институте с количеством курсантов не более 25 человек, средним баллом группы ниже 3.2 и не находящихся на выпускном курсе, с указанием факультета и специальности данных групп.
4.	Найти множество курсантов института ростом выше 185 см, имеющих средний балл выше 3,7 и не проживающих в общежитии института, с указанием их фамилий и учебных групп, в которых они учатся.
5.	Найти множество иногородних студентов института, поступивших по результатам единого государственного экзамена, обучающихся на втором курсе, с указанием их фамилий и результатами ЕГЭ по каждому из вступительных испытаний.
6.	Найти множество учебных пособий по дисциплине «Дискретная математика», выпущенных в институте не более трех лет назад, с указанием фамилий авторов и количества страниц.
7.	Найти множество курсантов радиотехнического факультета с фамилией Иванов, имеющих спортивный разряд по любому виду спорта, с указанием их имени, отчества и даты рождения.

№ варианта	Задание
8.	Найти множество городов, в которых родились курсанты радиотехнического факультета не старше 20 лет, имеющие специальное милицейское звание младшего начальствующего состава, с указанием расстояния до этих городов от г. Воронежа и субъектов Российской Федерации, в которых эти города расположены.
9.	Найти множество дисциплин, преподаваемых на втором курсе радиотехнического факультета сотрудниками кафедры «Высшая математика», включающих в себя выполнение типового расчета, с указанием количества часов, отводимых на данную дисциплину и формой отчета (экзамен, зачет).
10.	Найти множество персональных компьютеров, хранящихся на складе более 3 лет, с диагональю монитора менее 17 дюймов, с указанием фамилий ответственных лиц, сдавших и принимавших компьютер на склад.
11.	Найти множество элементарных частиц с периодом полураспада менее 2 сек, открытых в XX веке российскими учеными, с указанием даты открытия и фамилий открывателей.
12.	Найти множество сотрудников института, имеющих автомобиль российского производства не старше трех лет с года выпуска. Указать должность данных сотрудников и год рождения.
13.	Найти множество песен, исполняемых на строевом смотре курсантами радиотехнического факультета за последние три года, с указанием названий песен и фамилий их авторов.
14.	Найти множество элементарных функций, обладающих периодичностью, являющихся четными, с указанием обозначений и названий этих функций.
15.	Найти множество уголовных дел, возбужденных по ст. 105 УК РФ в Советском РОВД г. Воронежа за последние 3 года, с указанием фамилий следователей.

№ варианта	Задание
16.	Найти множество легковых автомобилей, угнанных за прошедшие два года в г. Воронеже и находящихся в розыске до сих пор, с указанием фамилий владельцев и марки автомобилей.
17.	Найти множество паспортов, выданных в текущем году, владельцы которых проживают по улице Южно-Моравская, с указанием фамилии владельца, серии и номера паспорта.
18.	Найти множество Интернет-сайтов, тематикой которых являются исследования в области нанотехнологий, имеющих домен второго уровня, с указанием URL-адреса и организаций, поддерживающих данный сайт.
19.	Найти множество однокомнатных квартир, расположенных в 10-этажных домах по улице О. Дундича г. Воронежа, фамилия владельцев которых «Иванов», с указанием номера дома и этажа.
20.	Найти множество курсантов радиотехнического факультета, обучающихся по специальности «Информационная безопасность телекоммуникационных систем», комплектующим регионом которых является Липецкая область, с указанием фамилий курсантов и номера учебной группы.
21.	Найти множество курсантов радиотехнического факультета, не имеющих спортивный разряд, старше 20 лет, с указанием фамилий и учебных групп.
22.	Найти множество граждан, задержанных за последние три года за административные нарушения в Центральном районе г. Воронежа, с указанием даты задержания и фамилий граждан.
23.	Найти множество водителей г. Воронежа, наказанных за управление автомобилем в нетрезвом состоянии за последние два года лишением водительских прав, с указанием фамилий водителей, даты лишения и срока лишения.

№ варианта	Задание
24.	Найти множество персональных компьютеров института, приобретенных за последний год в фирме «Рет» стоимостью более 20 тысяч рублей, с указанием характеристики ПК: емкость жесткого диска, объем оперативной памяти, частота процессора.
25.	Найти множество курсовых работ, выполненных курсантами радиотехнического факультета в прошлом году и оцененных не ниже четырех баллов, с указанием фамилий авторов работ и лиц, их проверивших.
26.	Найти множество дипломников за последние 5 лет, выполнявших дипломную работу на кафедре высшей математики и поступивших в адъюнктуру института, с указанием фамилий дипломников и тем дипломных работ.
27.	Найти множество поездов, идущих через г. Воронеж в южном направлении по нечетным числам, с указанием номера поезда и времени отправления.
28.	Найти множество аттестованных сотрудников института, имеющих ученую степень кандидата наук, старше 45 лет, с указанием фамилий сотрудников и занимаемых должностей.
29.	Найти множество футбольных клубов, занимавших первое место на чемпионате Европы в XX веке, с указанием года чемпионата и фамилии тренера.
30.	Найти множество однокомнатных квартир в Советском районе г. Воронежа, сдающихся в наем на длительный срок, с указанием суммы оплаты и адреса.
31.	Найти множество учебных групп в институте с количеством курсантов более 28 человек, средним баллом группы выше 3.5 и находящихся на втором или третьем курсе, с указанием факультета и фамилии командира взвода.

ЗАДАНИЕ 5.

Для заданных множеств A и B установить тип соответствия.
$G=\{(x,y), x\in A, y\in B,\ y=f(x)\}$

№ варианта	A	B	y=f(x)
1.	$\{3k+2: k=0, 1, 2, \ldots\}$	$\{6m+5: m=0, 1, 2, \ldots\}$	$y=\dfrac{x+7}{3}$
2.	$\{2k+1: k=0, 1, 2, \ldots\}$	$\{2m: m=0, 1, 2, \ldots\}$	$y=x-1$
3.	$\{2^k: k=0, 1, 2,\ldots\}$	$\{2n: n=0, 1, 2,\ldots\}$	$y=2^x$
4.	$\{x: \sin x=0\}$	$\{x: \cos x=1\}$	$y=x-\pi$
5.	$\{x: \lvert x-1\rvert \le 1\}$	$\{x: \lvert x\rvert \le 2\}$	$y=2(x+1)$
6.	$\{(x,y): y\ge x^2+1\}$	$\{(x,y): y\le 2-x^2\}$	$(x,y)\to(x,-y)$ *симметрия относительно оси Ox*
7.	$R_{\ge 0}$	R	$y=\lvert x\rvert+1$
8.	$R_{\ge 0}$	R	$y=3\lg x$
9.	R	R	$y=2^x-11$
10.	N	N	$y=3x+1$
11.	R	R	$y=\lvert x+1\rvert$
12.	R	$R_{>0}$	$y=3^{x+1}$
13.	R	R	$y=x-1$
14.	R	R	$y=5x$
15.	N	N	$y=x+1$
16.	R	$R_{>0}$	$y=2^X+1$
17.	N	N	$y=2x$
18.	$\{x: \sin 2x=0\}$	$\{y: \cos y=-1\}$	$y=x+\pi/2$
19.	$\{x: \lvert 2x-1\rvert \le 1\}$	$\{y: \lvert y\rvert \le 2\}$	$y=2x-1$
20.	$\{2^{k+1}: k=0, 1, 2,\ldots\}$	$\{2(n+1): n=0,1,2,\ldots\}$	$y=2^x$

№ варианта	*A*	*B*	*y=f(x)*
21.	$\{x: \sin x=-1\}$	$\{y: \cos y=1\}$	$y=x-\pi$
22.	$\{x: \left\lvert x-\frac{1}{2}\right\rvert \le 1\}$	$\{y: \lvert y\rvert \le 2\}$	$y=2(x+1)$
23.	$R_{\ge 0}$	R	$y=\lvert x-11\rvert+1$
24.	$R_{\ge 0}$	R	$y=\lg x-12$
25.	R	R	$y=2^{x+1}-3$
26.	N	N	$y=3x-10$
27.	R	$R_{>0}$	$y=\lvert x+1\rvert-5$
28.	R	$R_{>0}$	$y=3^{x+1}-5$
29.	$R_{>0}$	R	$y=x^2-1$
30.	R	$R_{>0}$	$y=5^x-2$
31.	N	N	$y=x-6$

ЗАДАНИЕ 6.

Построить матрицу и граф бинарного отношения и определить тип этого отношения.

№ варианта	Задание
1.	Быть в сумме четным числом на множестве {1, 2, 4, 5, 6}
2.	Быть меньше на множестве {2, 5, 6, -1}
3.	Быть отцом на множестве {внук, сын, отец, дед, прадед}
4.	Быть в сумме действительным числом на множестве {1+2i, 3-2i, 5, 2-2i, 6}
5.	Быть в сумме чисто мнимым числом на множестве {1+2i, -1-3i, -2+4i, 2-5i, 6}
6.	Быть больше по длине на множестве векторов {(-1, -1, 2), (-2, -1, 1), (-2, 1, 0), (-3, 2, 1)}
7.	Быть младше на множестве воинских званий {майор, капитан, подполковник, лейтенант, полковник}
8.	Быть меньшим по мощности на множестве множеств { {0, 1. 2}, {2, 4, 8. 16}, {2, 4, 6}, {0, 1} }
9.	Быть в сумме нечетным числом на множестве {-1, -2, 9, -7, -6}
10.	Быть делителем на множестве {2, 3, 4, 6, 9}
11.	Иметь различное количество букв на множестве слов {король, ферзь, ладья, слон, конь}
12.	Быть раньше в календаре на множестве месяцев { декабрь, июнь, июль, май, март }
13.	Быть в сумме четным числом на множестве {-1, -2, 3, -7, 6}
14.	Быть меньше по длине на множестве векторов {(-1, 0, 2), (-2, -1, 1), (-2, 1, 0), (-3, 2, 1)}
15.	Быть больше по модулю на множестве из комплексных чисел {1+2i, 3-i, 5, 2-i}
16.	Относиться к одному времени года на множестве месяцев { декабрь, июнь, июль, май, март }

№ варианта	Задание
17	Быть в сумме числом, принадлежащим множеству {1, 2, 3,4, 5, 6} на этом множестве
18.	Быть в сумме нечетным числом на множестве {1, 2, 4, 5, 6}
19.	Иметь одинаковое количество букв на множестве слов { декабрь, июнь, июль, май, март }
20.	Быть больше по модулю на множестве из комплексных чисел {-2+2i, 3-2i, 5, 2-2i}
21.	Быть делимым на множестве {2, 3, 4, 6, 9}
22.	Быть старше на множестве воинских званий {майор, капитан, подполковник, лейтенант, полковник}
23.	Иметь одинаковое количество букв на множестве слов {король, ферзь, ладья, слон, конь}
24.	Быть потомком на множестве {внук, сын, отец, дед, прадед}
25.	Быть большим по мощности на множестве множеств { {0, 1. 2}, {2, 4, 8. 16}, {2, 4, 6}, {0, 1} }
26.	Быть в сумме кратным 3 на множестве чисел{1, 2, 4, 5, 6}
27.	Быть в сумме отрицательным числом на множестве {-1, -5, 6, 2}
28.	Начинаться с одной буквы на множестве слов {король, ферзь, ладья, слон, конь}
29.	Быть расположенным в одном государстве на множестве городов {Москва, Воронеж, Киев, Минск, Одесса, Новгород}
30	Быть подчиненным на множестве {командир отделения, командир взвода, начальник курса, начальник факультета}
31.	Быть меньше по мощности на множестве из множеств {множество курсантов, множество учащихся, множество людей младше 25 лет, множество людей}

ЗАДАНИЕ 7.

Раскрыть скобкив заданном выражении, пользуясь полиномиальной формулой.

№ варианта	Задание
1.	$(a – b + 2)^3$
2.	$(a – 4b + 3)^2$
3.	$(a – b + 3)^3$
4.	$(–5a – b + 1)^2$
5.	$(–5a – b + 3)^2$
6.	$(a –2b + 2)^2$
7.	$(a – b + 3 + 2c)^2$
8.	$(a – b + 3 – c)^2$
9.	$(a – 2b + 3 – c)^2$
10.	$(a – b + 3)^3$
11.	$(– a – 2b + 3)^2$
12.	$(5a + 3b - 1)^2$
13.	$(6a – b + 1)^2$
14.	$(– a – b + 3)^3$
15.	$(a – b + 1)^4$
16.	$(a – 6b + 2)^2$
17.	$(a + b – 11)^2$
18.	$(–2a – b + 5)^2$
19.	$(6a – b + 13)^2$
20.	$(a – b + 3)^3$
21.	$(a – b + 3 + c)^2$
22.	$(–a – 7b + 3)^2$
23.	$(a – b + 3)^2$
24.	$(3a – b – 3)^2$
25.	$(2a – b – 13)^2$

№ варианта	Задание
26.	$(a - b + 4)^2$
27.	$(11a - 3b + 2)^2$
28.	$(a - b + 2)^3$
29.	$(3a - 4b + 5)^2$
30	$(2a - b + 3)^3$
31.	$(a - b - 9)^2$

ЗАДАНИЕ 8.

Решите следующие задачи по комбинаторике (в случае возможности различных толкований условий выбрать любое и пояснить).

№ варианта	Задание
1.	На должности командиров отделений требуется поставить 3 курсантов. Сколькими способами можно их выбрать, если в группе 27 человек?
2.	На плацу были построены взвода с различных курсов: 4 взвода с 1-го курса, 7 взводов со 2-го курса, 3 взвода с 3-го курса и 1 взвод с 4-го курса. Сколько способов повзводного убытия с плаца можно составить?
3.	На концерт из 10 отличников требуется отобрать 6. Сколькими способами можно их выбрать?
4.	Студент купил 7 шоколадок и повстречал на своем пути 3 девушек? Сколькими способами он мог их угостить?
5.	В портмоне 4 отделения. Сколькими способами можно разложить 2 денежные купюры, чтобы в отделении было не более одной купюры?
6.	В городе N всем семьям военнослужащих выдали двухкомнатные квартиры. Среди льготников – 23 семьи имеют 1 ребенка, у 32 семей есть два ребенка, 4 семьи имеют трех и более детей. Сколькими способами можно распределить между ними квартиры?
7.	В магазине продаются различные виды товаров по одной цене: погоны, звездочки, нашивки, нарукавные знаки, пуговицы, заколки, кокарды. У покупателя денег хватит только на три предмета. Сколько различных наборов товаров он может приобрести?

№ варианта	**Задание**
8.	Сколькими способами можно распределить 6 пистолетов для их чистки между 9 курсантами?
9.	Для создания баскетбольной команды требуется выбрать 8 человек. Сколько различных команд можно составить, если желающих оказалось 13?
10.	Для уборки территории было выдано 12 веников. Сколькими способами можно распределить их между 18 курсантами?
11.	На ужин пришли 16 курсантов, а накрыто было на 19. Сколькими способами можно распределить лишние блюда между всеми курсантами?
12.	В комнате хранения спецсредств имеется 12 пустых мест. После дежурства 6 человек сдали спецсредства. Сколькими способами можно их разложить по местам хранения?
13.	На выдаче вторых блюд в столовой осталось 23 тарелки. Сколькими способами их можно распределить между 8 курсантами, стоящими в наряде?
14.	В группе 16 юношей и 8 девушек. Сколько возможно вариантов построения их в одну колонну?
15.	В распоряжении инженера 12 извещателей различных типов. На объекте система сигнализации состоит из 3 рубежей. Каждый рубеж оборудуется извещателями только одного типа, причем запрещается использовать на двух и более рубежах извещатели одного типа. Сколько различных вариантов системы сигнализации можно спроектировать?
16.	Сколько различных слов можно написать из букв М,Е,Д,В,Е,Д,Ь?
17.	На дежурство ППС заступает с собаками: 12 овчарок, 4 терьера, 3 добермана. Сколькими способами их можно распределить между милиционерами?

№ варианта	Задание
18.	На линию старта вышли 8 спортсменов. Сколько последовательностей можно составить из результатов их финиширования при условии, что все приходят на финиш поодиночке?
19.	На контрольной работе дано 6 заданий. Выполнять задания можно непоследовательно. Сколько последовательностей выполнения задач можно составить?
20.	В группе 32 студента. В течение занятия половина из них должна отчитаться за домашнюю работу. Сколько последовательностей из отсчитывающихся студентов можно составить?м
21.	К окну выдачи оружия подошли 14 офицеров. Сколькими способами они могут образовать очередь?
22.	В комнате проживают 15 курсантов. Сколькими способами их можно разместить на 15 кроватях?
23.	На взвод курсантов из 23 человек возложено 14 обязанностей по совершению общественных поручений. Сколькими способами их можно распределить между курсантами?
24.	В строю стоят 25 курсантов. Сколькими способами можно выбрать 6 из них для проверки строевой подготовки?
25.	В патруль по охране на 8 трехсменных постов заступили 26 курсантов. На каждый пост заступает 1 человек. Сколькими способами можно распределить курсантов между постами для несения службы?
26.	На складе имеется 16 персональных компьютеров. Сколькими различными способами их можно распределить между 22 кафедрами, но так, чтобы никто не получил более одного компьютера?
27.	В столовой предлагается комплексный обед из 4 блюд. На обед поварами было приготовлено 12 различных блюд. Сколькими способами можно пообедать в столовой?

№ варианта	Задание
28.	Палитра состоит из 8 цветов. Требуется раскрасить «Боевой листок» в 3 цвета. Сколькими способами это можно выполнить?
29.	На группу в количестве 28 курсантов дано 12 нарядов. Сколькими способами можно распределить их между курсантами?
30	В оружейной комнате находится 23 автомата, 24 пистолета, 12 бронежилетов, 23 каски, 42 палки резиновых. Разрешается взять два предмета. Сколькими способами можно вооружиться?
31.	Сколькими способами можно распределить 6 автоматов между 30 курсантами?

ЗАДАНИЕ 9.

Построить таблицу истинности для следующих выражений и представить их в СДНФ и СКНФ.

№ варианта	Задание
1.	$\overline{P \wedge \overline{Q \oplus \overline{P}}} \vee (R \to Q)$
2.	$(R \vee \overline{P}) \downarrow (R \oplus Q)$
3.	$\overline{\overline{P} \wedge R} \mid (R \vee Q)$
4.	$R \oplus \overline{P \vee Q} \to (\overline{R} \vee Q)$
5.	$P \oplus \overline{R \vee \overline{Q}} \downarrow (R \wedge Q)$
6.	$\overline{\overline{R} \wedge \overline{P}} \oplus \left(R \to \overline{Q \vee \overline{P}}\right)$
7.	$\overline{R} \wedge P \to \left(\overline{Q \oplus R}\right)$
8.	$P \mid \overline{Q \to R} \oplus \left(R \wedge \overline{Q}\right)$
9.	$\left(\overline{P} \vee Q\right) \oplus \left(\overline{R \to Q \mid P}\right)$
10.	$\overline{P \mid \overline{Q}} \oplus \left(R \vee \overline{P}\right)$
11.	$\overline{P \to \overline{Q}} \mid \left(\overline{R \oplus \overline{P}} \vee Q\right)$
12.	$\overline{P \mid R} \oplus Q \to \left(\overline{R} \vee Q\right)$
13.	$\overline{P \wedge \overline{Q}} \downarrow \overline{P} \to \overline{R}$
14.	$\overline{P \oplus R} \wedge (R \vee Q)$
15.	$R \wedge \left(\overline{P \to \overline{Q} \mid R}\right) \oplus (R \vee Q)$
16.	$\overline{(P \vee \overline{R}) \wedge \overline{Q}} \mid (R \wedge Q)$
17.	$\overline{P \wedge \overline{Q \vee R}} \oplus \left(\overline{R} \vee Q\right)$
18.	$\overline{P \wedge \overline{R}} \oplus (R \vee Q)$
19.	$\overline{Q \wedge \overline{P}} \leftrightarrow (R \mid Q)$
20.	$\overline{R \wedge \overline{Q}} \oplus R \mid \overline{P}$

№ варианта	**Задание**
21.	$R \to \overline{P} \mid \left(Q \oplus \overline{R}\right)$
22.	$\overline{P \to \overline{Q}} \downarrow \left(R \oplus \overline{Q}\right)$
23.	$P \wedge \overline{R \oplus \overline{P}} \mid \overline{P} \leftrightarrow Q$
24.	$\overline{P \wedge \overline{R}} \downarrow \left(R \leftrightarrow Q\right)$
25.	$\overline{\overline{P} \wedge \overline{Q}} \oplus \left(R \to Q\right)$
26.	$Q \wedge \left(P \mid \overline{R}\right) \to \left(R \oplus \overline{Q}\right)$
27.	$\overline{R} \oplus \left(P \wedge \overline{Q}\right) \to \left(R \vee Q\right)$
28.	$R \oplus \left(\overline{P \wedge \overline{Q}}\right) \mid \left(P \vee Q\right)$
29.	$P \to \left(\overline{R} \mid P\right) \downarrow \left(R \vee Q\right)$
30	$\overline{\overline{\overline{Q}} \wedge \overline{R}} \oplus \left(P \leftrightarrow Q\right)$
31.	$\overline{Q \mid \overline{R}} \to \left(\overline{P} \leftrightarrow Q\right)$

ЗАДАНИЕ 10.

Упростить логическое выражение. Осуществить переход к стандартному базису (отрицание только над логическими переменными) и построить схему из функциональных элементов.

№ варианта	Задание
1.	$\psi = \left(\overline{A_2} \to \left(\overline{\overline{A_1}} \wedge A_2\right)\right) \vee \overline{\overline{A_3} \vee \overline{A_2}}$
2.	$\psi = \left(\left(\overline{\overline{A_2}} \wedge A_1\right) \to A_2 \wedge A_1\right) \wedge \overline{\overline{A_3}}$
3.	$\psi = A_2 \wedge \overline{A_1 \wedge \overline{A_2}} \downarrow A_3 \wedge \overline{A_2}$
4.	$\psi = \left(\overline{A_1} \to A_2 \wedge \overline{\overline{A_2 \vee A_1}}\right) \wedge \overline{\overline{A_1} \wedge \overline{A_2}}$
5.	$\psi = \left(\overline{A_1 \vee \overline{A_2}} \downarrow A_2\right) \wedge \overline{\overline{A_1} \wedge \overline{A_2}}$
6.	$\psi = \left(\overline{A_1} \downarrow \left(\overline{\overline{A_2}} \mid A_1\right)\right) \wedge \overline{A_2 \wedge \overline{A_1}}$
7.	$\psi = \left(\overline{A_1} \downarrow \left(\overline{\overline{A_2}} \vee A_1\right)\right) \vee \overline{\overline{A_3} \wedge \overline{A_1}}$
8.	$\psi = \left(\overline{A_1} \wedge \left(\overline{\overline{A_2}} \to A_1\right)\right) \downarrow \overline{\overline{A_3}}$
9.	$\psi = \left(\overline{A_3} \to \left(\overline{\overline{A_2}} \downarrow A_3\right)\right) \mid \overline{\overline{A_3} \wedge \overline{A_1}}$
10.	$\psi = \overline{\overline{A_3}} \downarrow \left(\overline{A_3} \to A_1 \wedge A_2\right)$
11.	$\psi = \overline{A_1} \to \overline{\overline{A_2} \wedge A_1 \vee \overline{A_3}}$
12.	$\psi = \overline{\overline{A_1} \wedge \overline{A_2}} \vee A_1 \to A_2 \wedge A_3$
13.	$\psi = \overline{\overline{A_3} \wedge \overline{A_2}} \to \left(A_2 \wedge A_3\right) \vee \overline{A_1}$
14.	$\psi = \left(\overline{A_1 \wedge A_2} \to A_1\right) \downarrow \overline{\overline{A_2} \vee A_3}$
15.	$\psi = \left(A_3 \downarrow A_1 \wedge \overline{\overline{A_2}}\right) \to \overline{\overline{A_3}}$
16.	$\psi = \left(\overline{A_3} \to \left(\overline{\overline{A_2}} \wedge A_1\right)\right) \mid \overline{\overline{A_1} \wedge \overline{A_2}}$
17.	$\psi = A_1 \wedge \overline{A_2 \to \overline{\overline{A_3 \vee \overline{A_1}}}}$
18.	$\psi = \left(\overline{A_1} \wedge A_2 \to A_3\right) \wedge \overline{\overline{A_3} \wedge A_2}$

№ варианта	Задание
19.	$\psi = \left(\overline{A_1} \downarrow \left(\overline{\overline{A_2}} \wedge A_1\right)\right) \to \overline{\overline{A_3}}$
20.	$\psi = A_1 \mid \left(A_2 \vee \overline{\overline{A_3}}\right) \vee \overline{\overline{A_3} \wedge \overline{A_1}}$
21.	$\psi = \left(\overline{A_1} \to A_2\right) \wedge \overline{\overline{A_3} \wedge \overline{A_1 \vee A_2}}$
22.	$\psi = \left(\overline{A_1} \to \left(\overline{\overline{A_2 \wedge \overline{A_1}}}\right)\right) \mid \overline{\overline{A_3}}$
23.	$\psi = \left(\overline{A_1} \mid \overline{A_1 \wedge \overline{A_2}}\right) \to \overline{\overline{A_3}}$
24.	$\psi = \left(\overline{\overline{A_1}} \to \left(\overline{\overline{A_2}} \vee A_1\right)\right) \mid \overline{\overline{A_3} \vee \overline{A_2}}$
25.	$\psi = \left(\overline{A_1} \vee A_1 \wedge \overline{\overline{A_2}}\right) \wedge \overline{\overline{A_3} \mid \overline{A_2}}$
26.	$\psi = \left(\overline{A_1} \to A_2\right) \wedge \overline{\overline{A_3} \wedge \overline{A_2 \vee A_3}}$
27.	$\psi = A_1 \to \left(A_2 \mid \left(A_3 \downarrow \overline{A_2}\right)\right)$
28.	$\psi = \left(\overline{A_1} \to A_2\right) \downarrow \overline{\overline{A_3}} \mid A_1$
29.	$\psi = \left(\overline{A_1 \wedge \overline{A_1 \vee \overline{A_2}}}\right) \to \overline{\overline{A_3} \wedge \overline{A_2}}$
30	$\psi = \left(\overline{A_1 \wedge \overline{A_2}} \to \overline{\overline{A_2}}\right) \mid \overline{\overline{A_3}}$
31.	$\psi = \left(\overline{A_2 \wedge \overline{A_3}} \to \overline{\overline{A_2}}\right) \mid \overline{\overline{A_3 \wedge \overline{A_1}}}$

ЗАДАНИЕ 11.

Найти МДНФ и МКНФ для логической функции $f(x_1,x_2,x_3)$, заданной таблицей истинности

а) методом Квайна-Мак-Клосски;

б) методом карт Вейча.

№ варианта / **Переменные**			1.	2.	3.	4.
x_1	x_2	x_3	$f(x_1,x_2,x_3)$	$f(x_1,x_2,x_3)$	$f(x_1,x_2,x_3)$	$f(x_1,x_2,x_3)$
0	**0**	**0**	1	1	1	1
0	**0**	**1**	1	1	1	0
0	**1**	**0**	1	0	1	0
0	**1**	**1**	1	1	0	1
1	**0**	**0**	1	1	0	1
1	**0**	**1**	0	1	1	1
1	**1**	**0**	0	0	1	1
1	**1**	**1**	0	0	0	0

№ варианта / **Переменные**			5.	6.	7.	8.
x_1	x_2	x_3	$f(x_1,x_2,x_3)$	$f(x_1,x_2,x_3)$	$f(x_1,x_2,x_3)$	$f(x_1,x_2,x_3)$
0	**0**	**0**	1	1	1	1
0	**0**	**1**	0	1	0	1
0	**1**	**0**	0	1	1	0
0	**1**	**1**	0	1	1	0
1	**0**	**0**	1	0	0	0
1	**0**	**1**	1	0	0	1
1	**1**	**0**	1	0	1	1
1	**1**	**1**	1	1	1	1

№ варианта / Переменные			9.	10.	11.	12.
x_1	x_2	x_3	$f(x_1,x_2,x_3)$	$f(x_1,x_2,x_3)$	$f(x_1,x_2,x_3)$	$f(x_1,x_2,x_3)$
0	**0**	**0**	0	0	0	0
0	**0**	**1**	1	1	0	0
0	**1**	**0**	1	1	1	1
0	**1**	**1**	1	0	1	1
1	**0**	**0**	0	1	1	0
1	**0**	**1**	0	1	1	1
1	**1**	**0**	1	0	0	1
1	**1**	**1**	1	1	1	1

№ варианта / Переменные			13.	14.	15.	16.
x_1	x_2	x_3	$f(x_1,x_2,x_3)$	$f(x_1,x_2,x_3)$	$f(x_1,x_2,x_3)$	$f(x_1,x_2,x_3)$
0	**0**	**0**	0	0	0	0
0	**0**	**1**	1	1	0	1
0	**1**	**0**	0	1	1	1
0	**1**	**1**	1	1	1	1
1	**0**	**0**	1	0	1	1
1	**0**	**1**	1	1	1	1
1	**1**	**0**	1	1	1	0
1	**1**	**1**	0	0	0	0

№ варианта / **Переменные**			17.	18.	19.	20.
$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{x_3}$	$f(x_1,x_2,x_3)$	$f(x_1,x_2,x_3)$	$f(x_1,x_2,x_3)$	$f(x_1,x_2,x_3)$
0	**0**	**0**	0	0	0	0
0	**0**	**1**	0	1	0	0
0	**1**	**0**	0	1	1	1
0	**1**	**1**	0	1	1	1
1	**0**	**0**	1	0	1	0
1	**0**	**1**	1	0	0	0
1	**1**	**0**	1	0	0	1
1	**1**	**1**	0	0	0	0

№ варианта / **Переменные**			21.	22.	23.	24.
$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{x_3}$	$f(x_1,x_2,x_3)$	$f(x_1,x_2,x_3)$	$f(x_1,x_2,x_3)$	$f(x_1,x_2,x_3)$
0	**0**	**0**	0	0	0	0
0	**0**	**1**	0	0	0	1
0	**1**	**0**	1	0	0	1
0	**1**	**1**	1	0	0	0
1	**0**	**0**	0	0	1	0
1	**0**	**1**	0	1	1	0
1	**1**	**0**	0	1	0	0
1	**1**	**1**	1	1	1	1

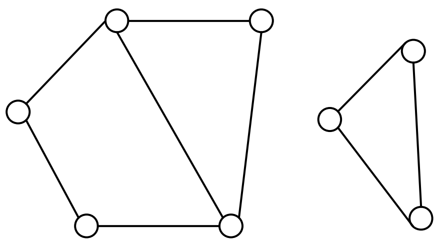
Переменные \ № варианта			25.	26.	27.	28.
x_1	x_2	x_3	$f(x_1,x_2,x_3)$	$f(x_1,x_2,x_3)$	$f(x_1,x_2,x_3)$	$f(x_1,x_2,x_3)$
0	**0**	**0**	1	1	1	1
0	**0**	**1**	0	0	1	0
0	**1**	**0**	1	0	0	1
0	**1**	**1**	1	0	0	0
1	**0**	**0**	0	0	0	1
1	**0**	**1**	0	1	0	0
1	**1**	**0**	0	1	1	0
1	**1**	**1**	0	0	0	0

Переменные \ № варианта			29.	30.	31.
x_1	x_2	x_3	$f(x_1,x_2,x_3)$	$f(x_1,x_2,x_3)$	$f(x_1,x_2,x_3)$
0	**0**	**0**	1	1	1
0	**0**	**1**	1	0	0
0	**1**	**0**	0	0	0
0	**1**	**1**	0	0	0
1	**0**	**0**	0	0	1
1	**0**	**1**	0	0	0
1	**1**	**0**	0	1	0
1	**1**	**1**	1	1	1

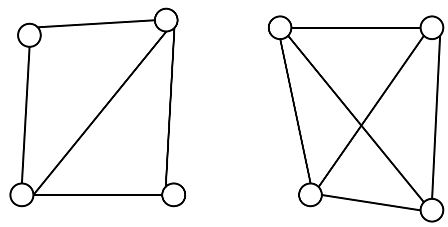
ЗАДАНИЕ 12.

Найти инварианты неориентированных графов (число вершин, число ребер, число компонент связности, цикломатическое число, хроматическое число, плотность графа, вектор степеней вершин, матрицу смежности, матрицу инциденций).

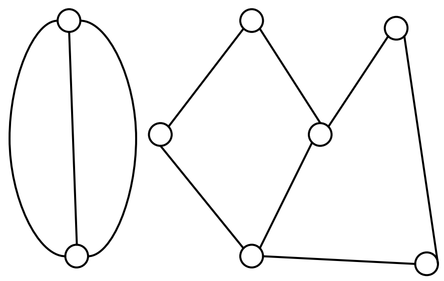
1.



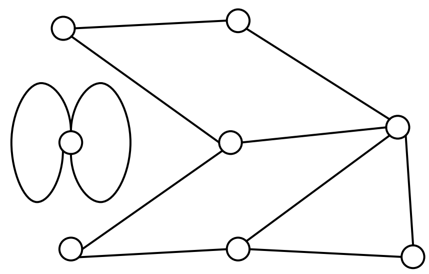
2.



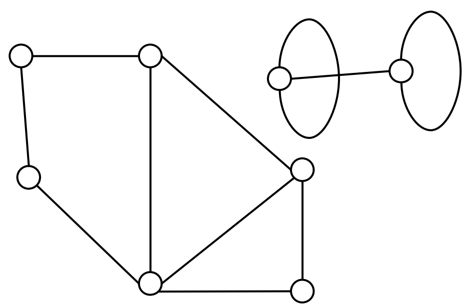
3.



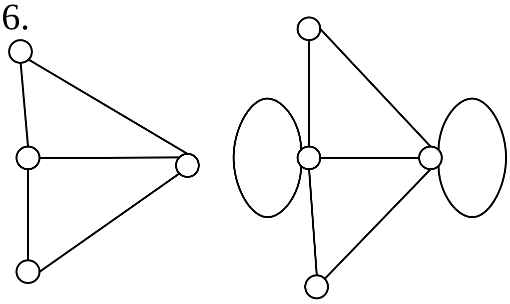
4.



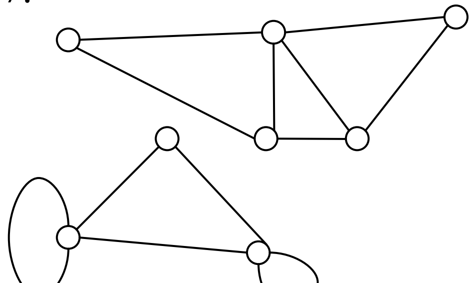
5.



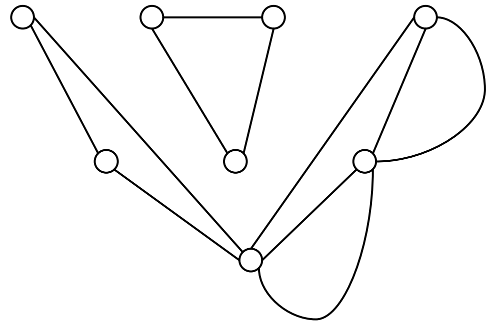
6.

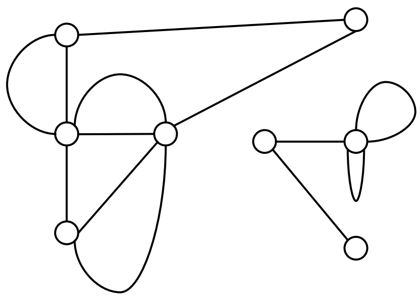


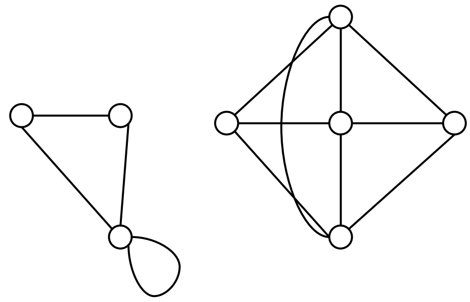
7.



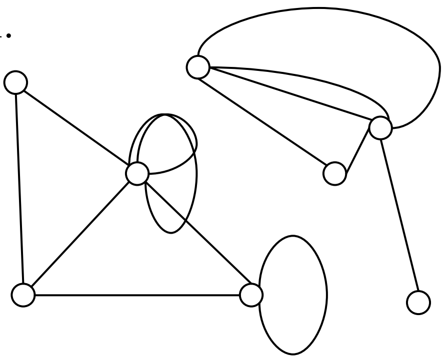
8.



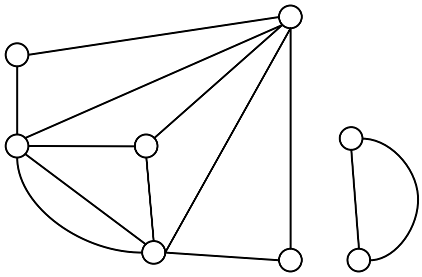




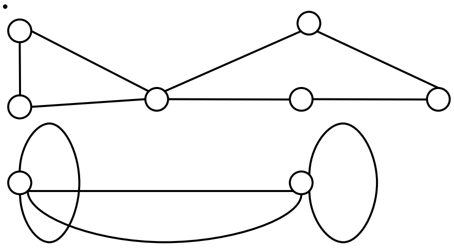
11.



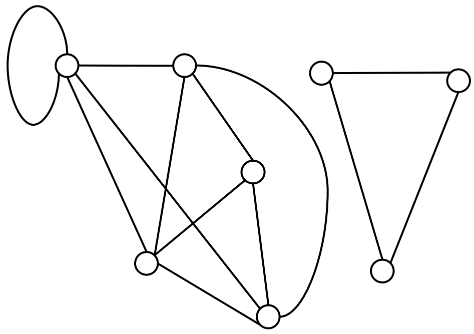
12.



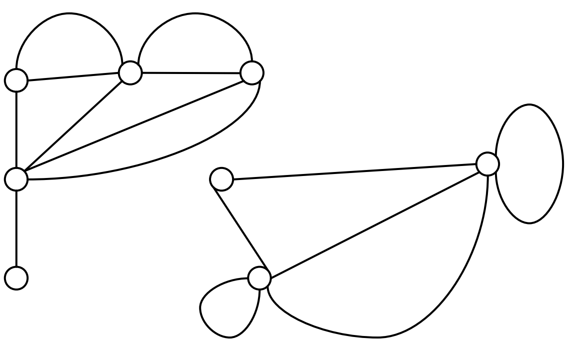
13.



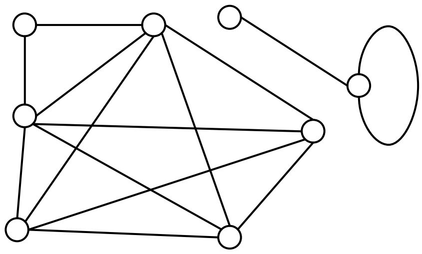
14.



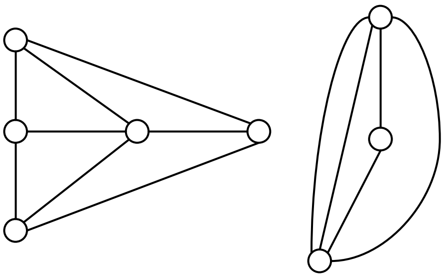
15.



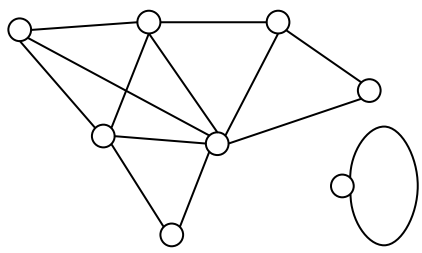
16.



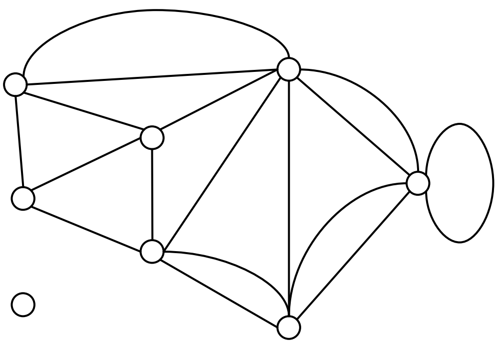
17.



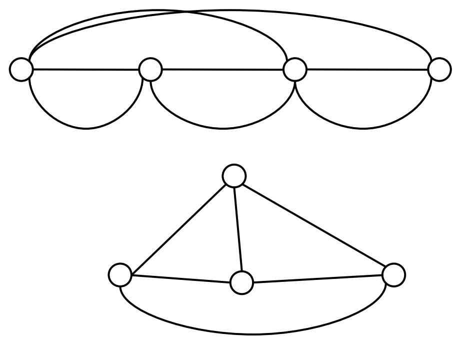
18.



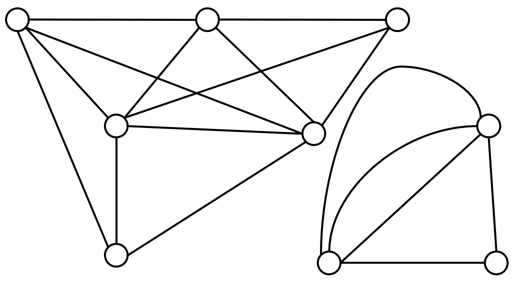
19.



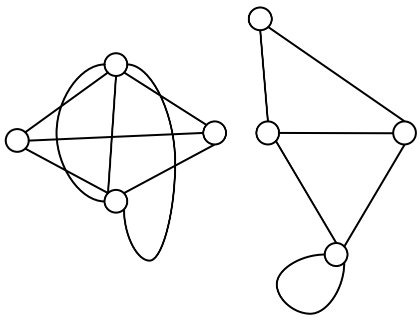
20.



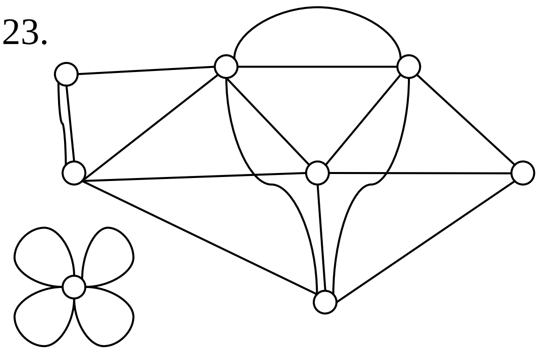
21.



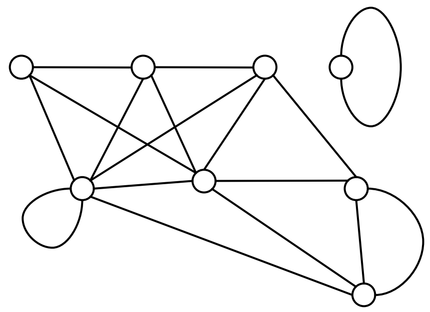
22.



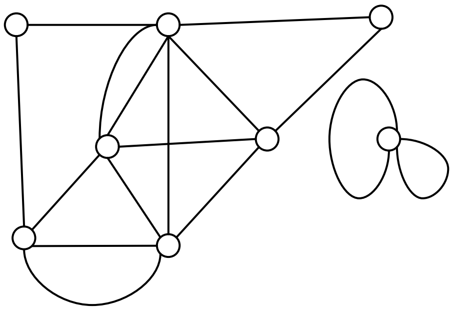
23.



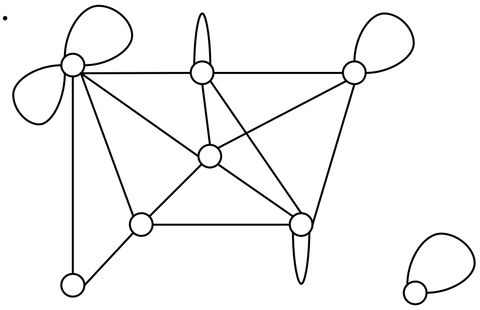
24.



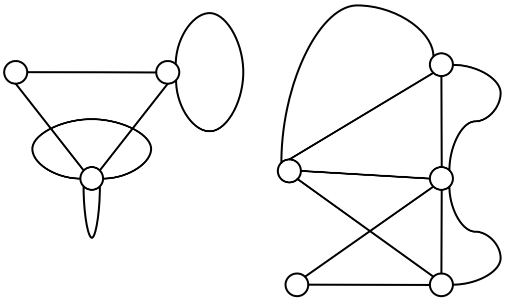
25.



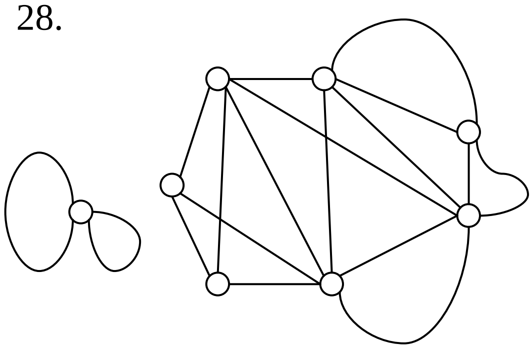
26.



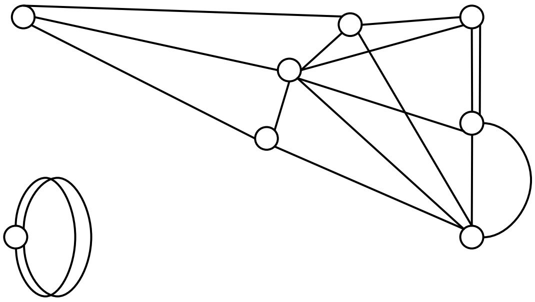
27.



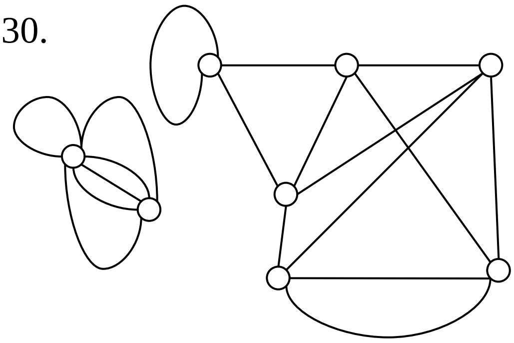
28.



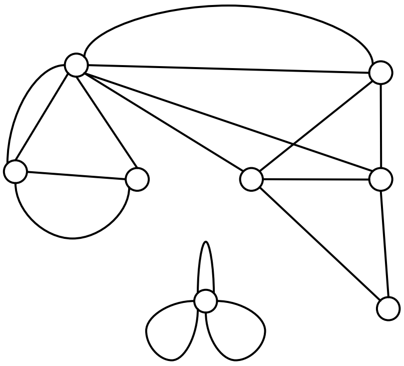
29.



30.



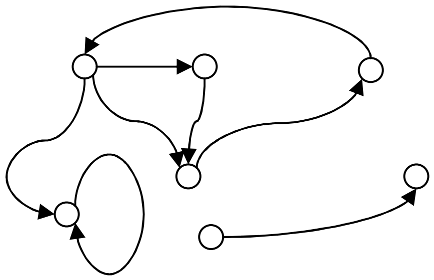
31.



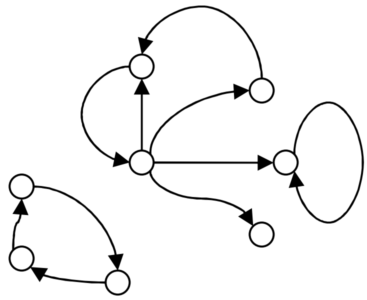
ЗАДАНИЕ 13.

Найти инварианты ориентированного графа (число вершин, число дуг, число компонент связности, цикломатическое число, хроматическое число, плотность графа, вектор степеней и полустепеней вершин, матрицу смежности, матрицу инциденций).

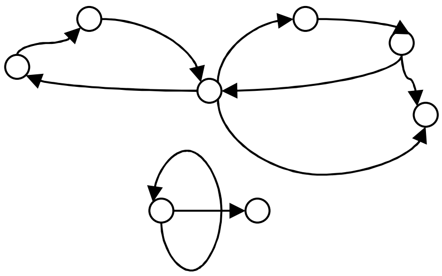
1.



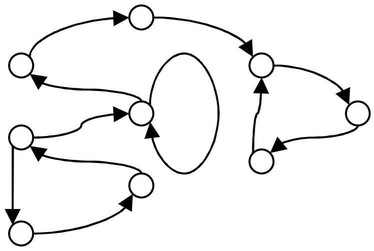
2.



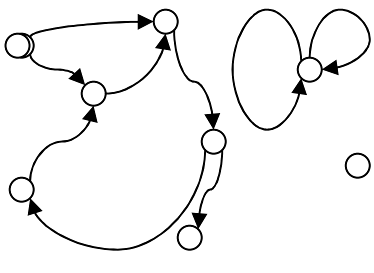
3.



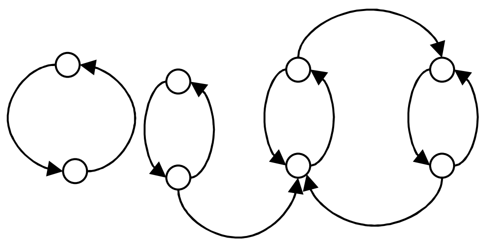
4.



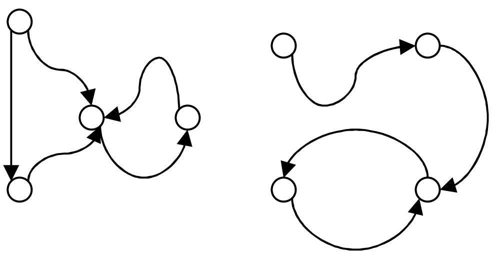
5.



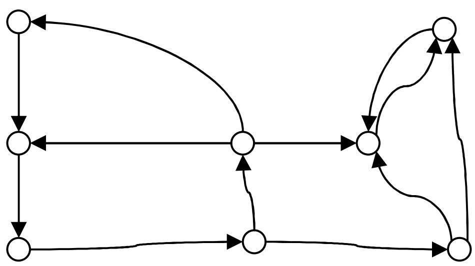
6.



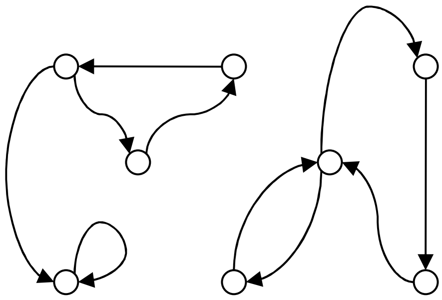
7.



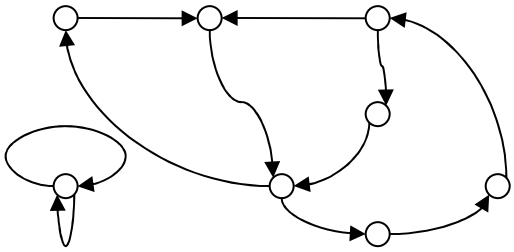
8.



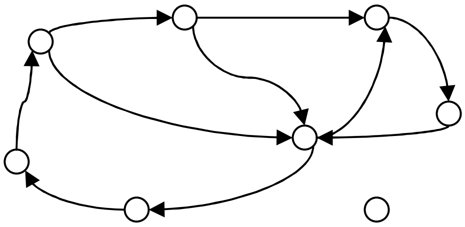
9.



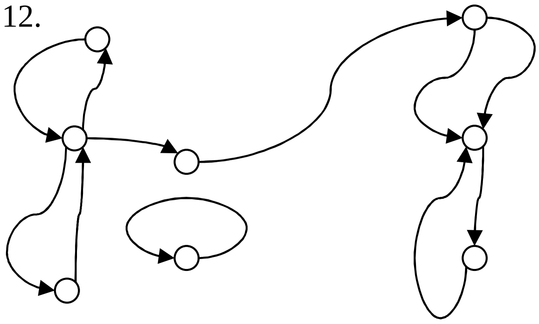
10.



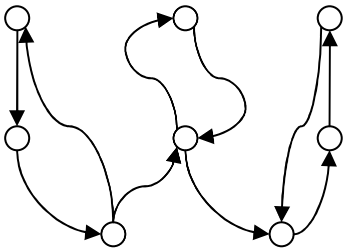
11.



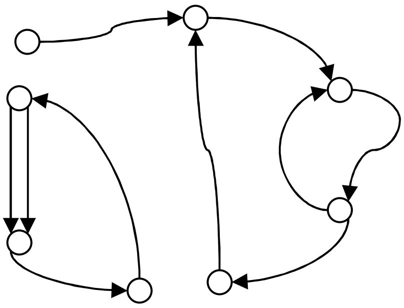
12.



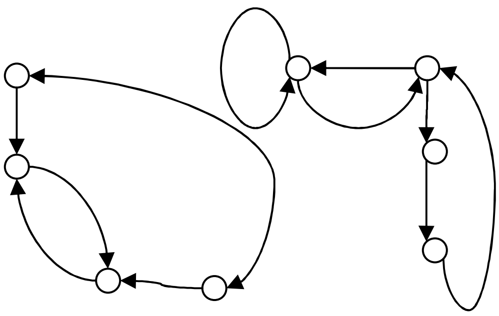
13.



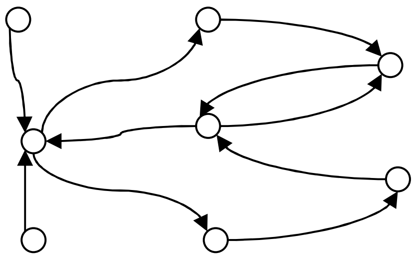
14.



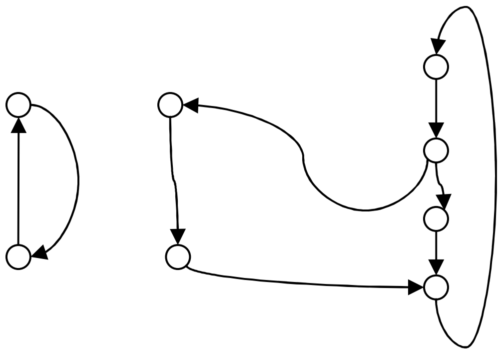
15.

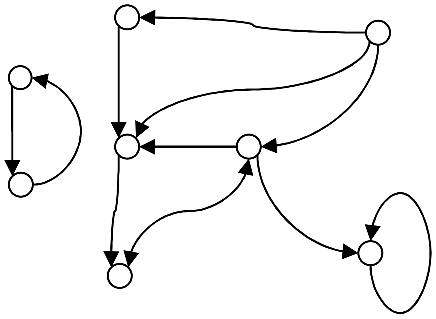


16.

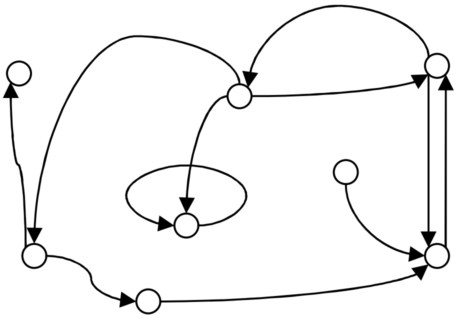


17.

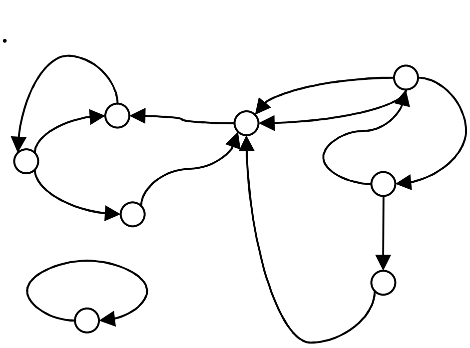




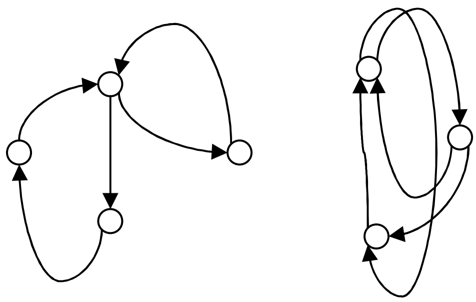
19.



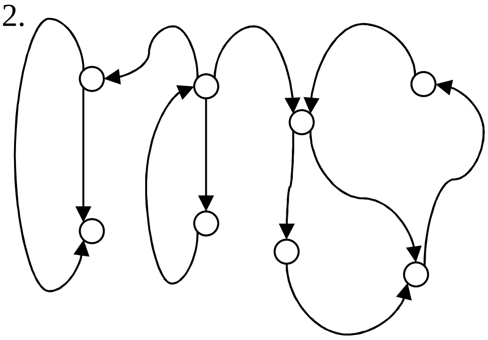
20.



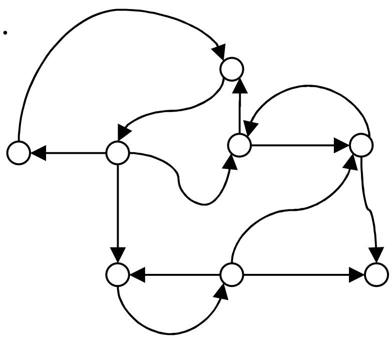
21.



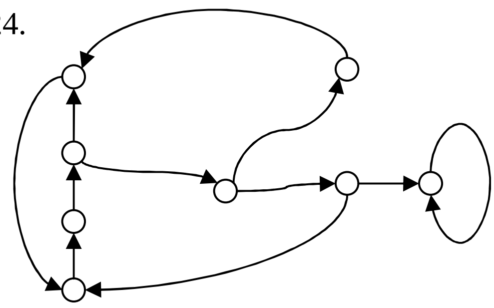
22.



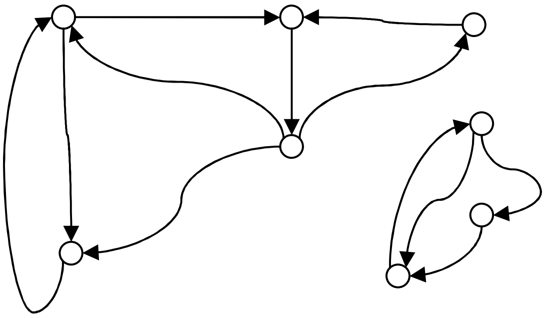
23.



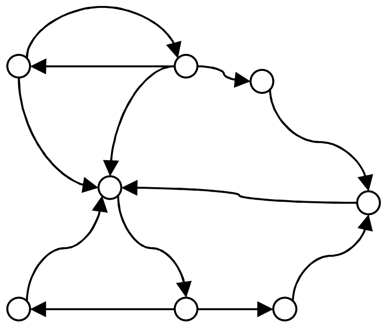
24.



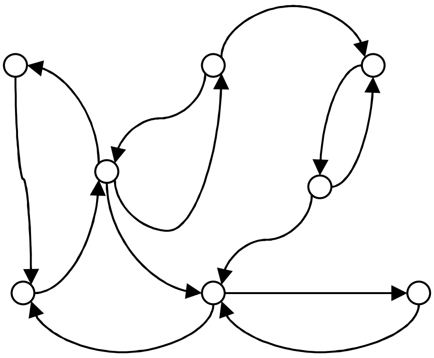
25.



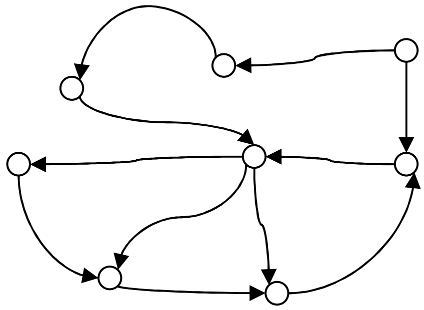
26.



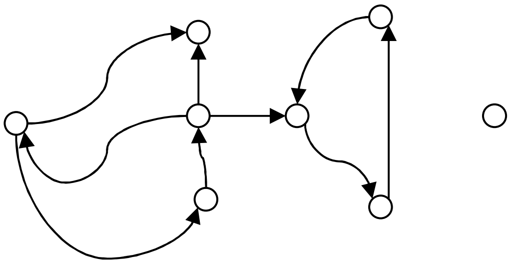
27.



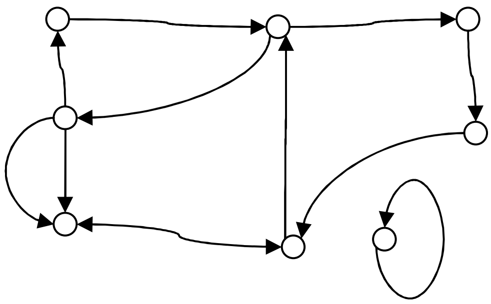
28.



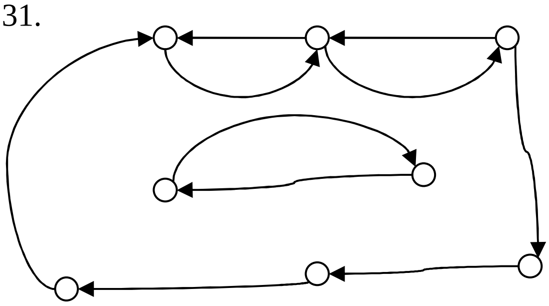
29.



30.



31.



ЗАДАНИЕ 14.

1. Проверить, является ли граф, изображенный на рисунке, эйлеровым или полуэйлеровым.

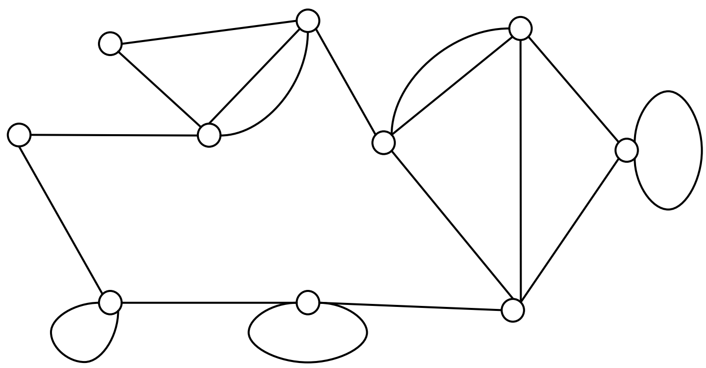
2. Найти эйлеров путь или эйлеров цикл.

3. Проверить достаточное условие гамильтоновости графа, изображенного на рисунке (теорему Г. Дирака).

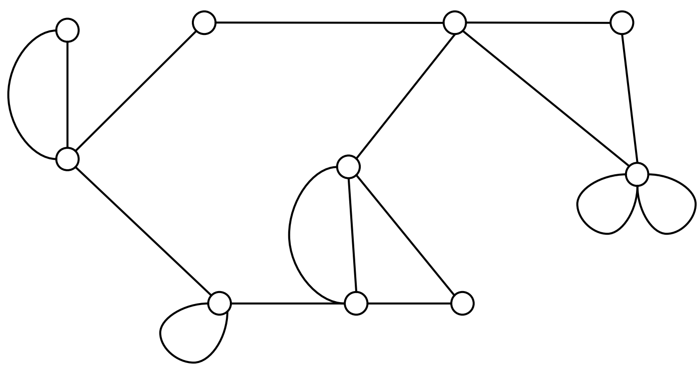
4. Найти гамильтонов путь или цикл, если они существуют.

5. Сделать вывод о гамильтоноввости или полугамильтоновости заданного графа.

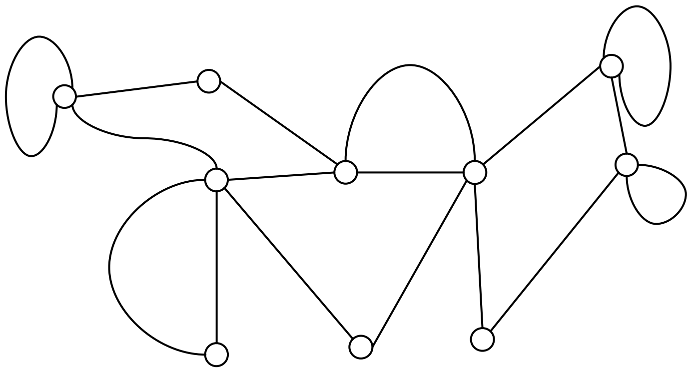
1.



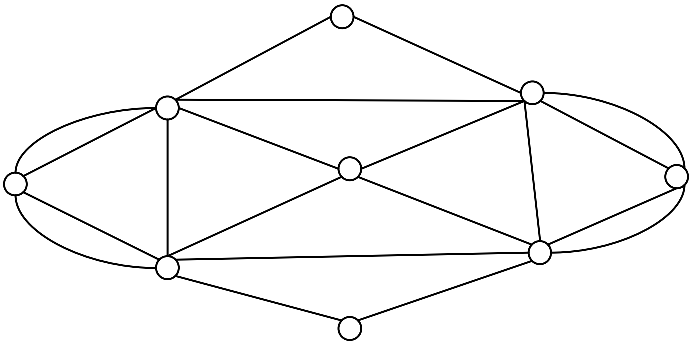
2.



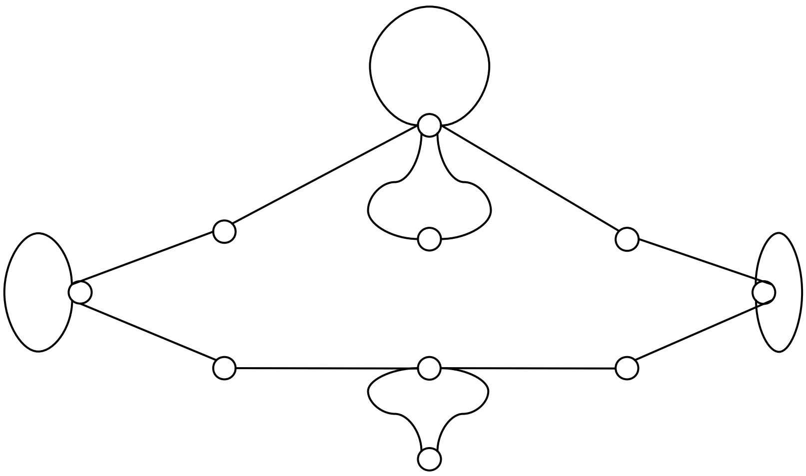
3.



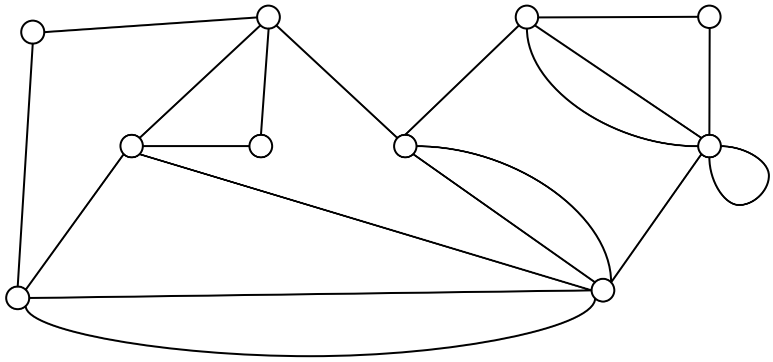
4.



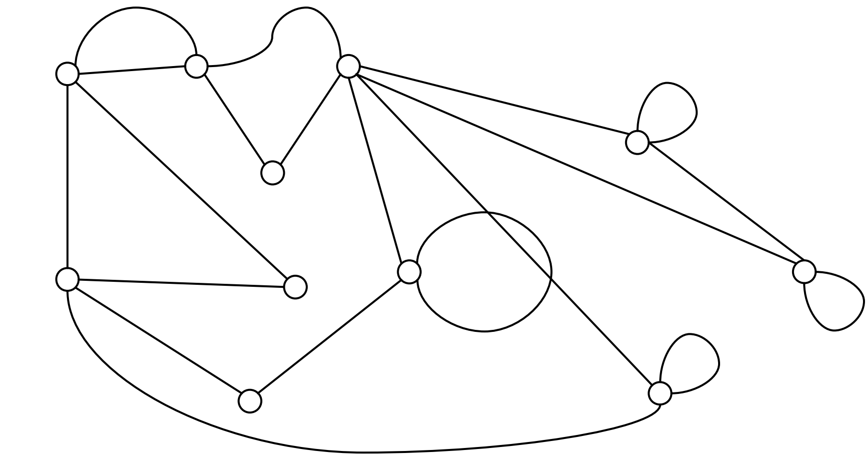
5.



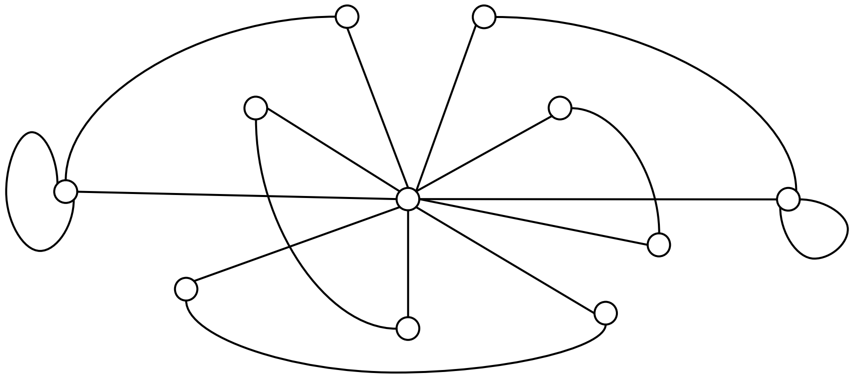
6.



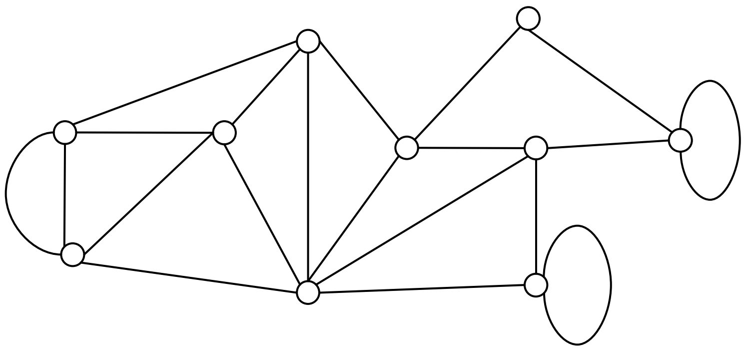
7.



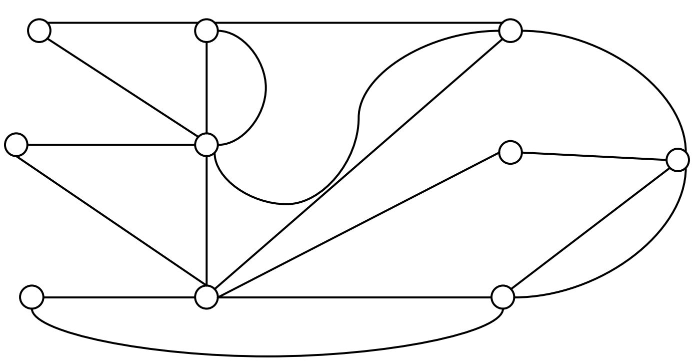
8.



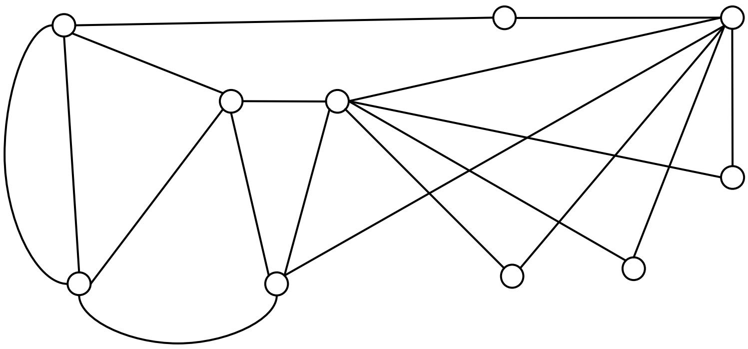
9.



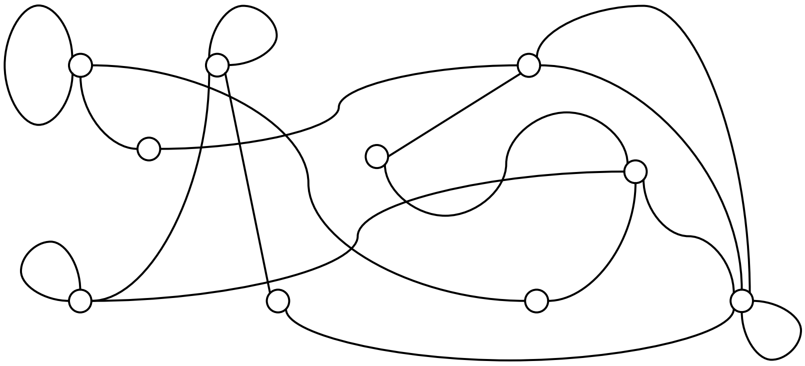
10.



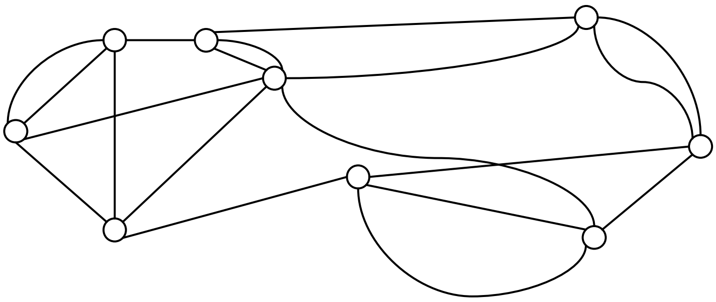
11.



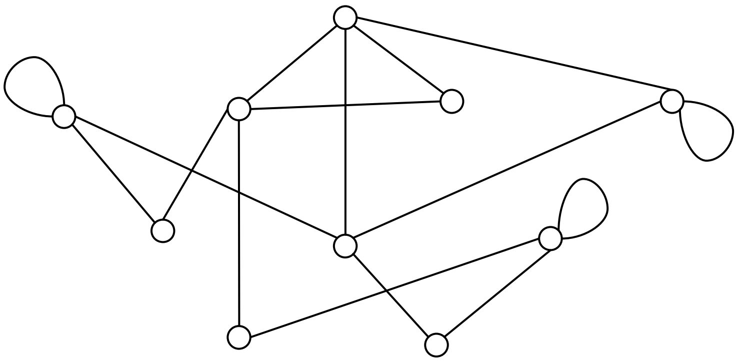
12.



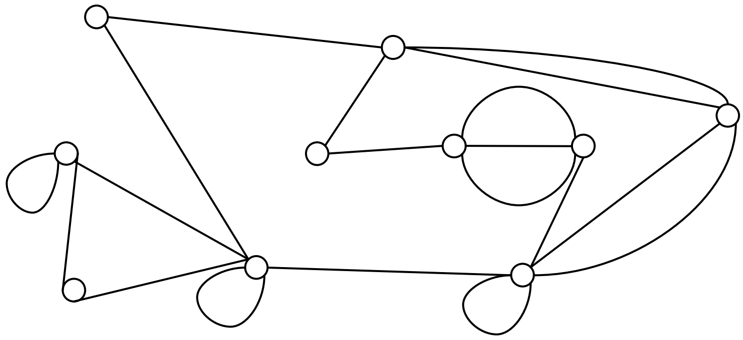
13.



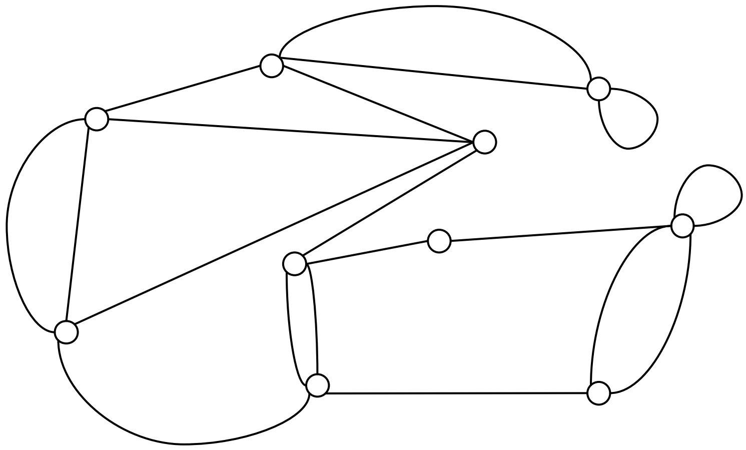
14.



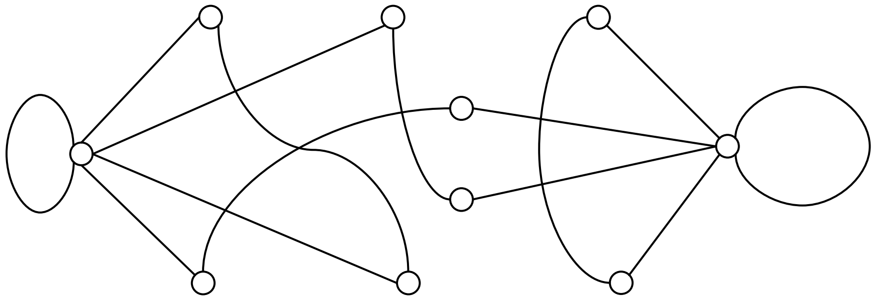
15.



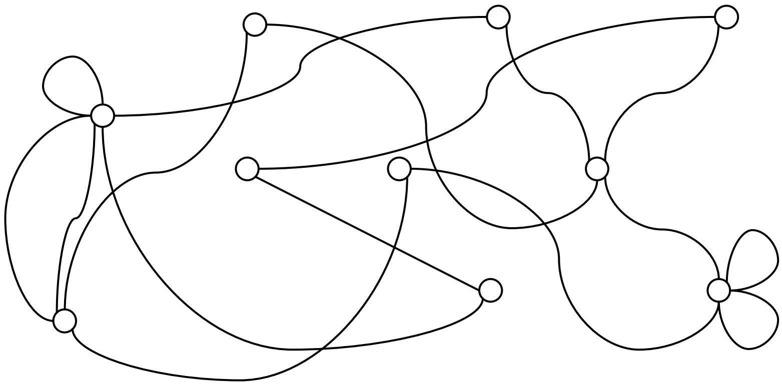
16.



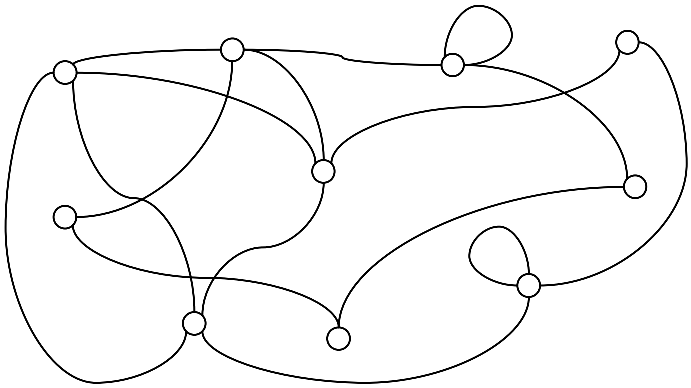
17.



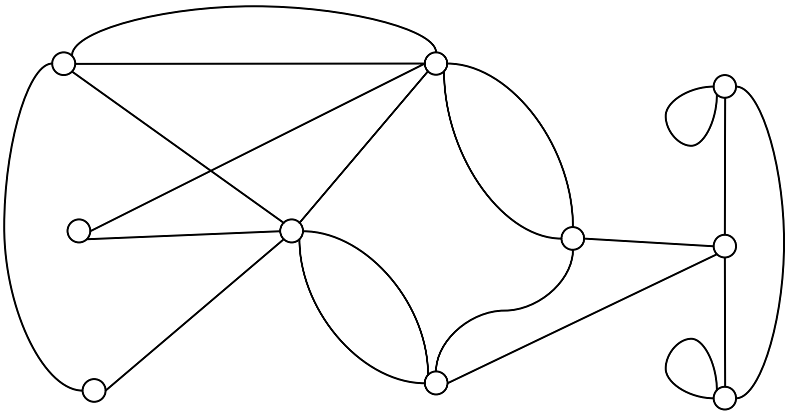
18.



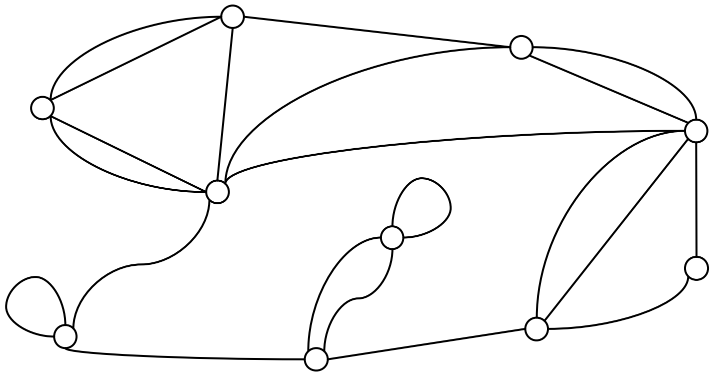
19.



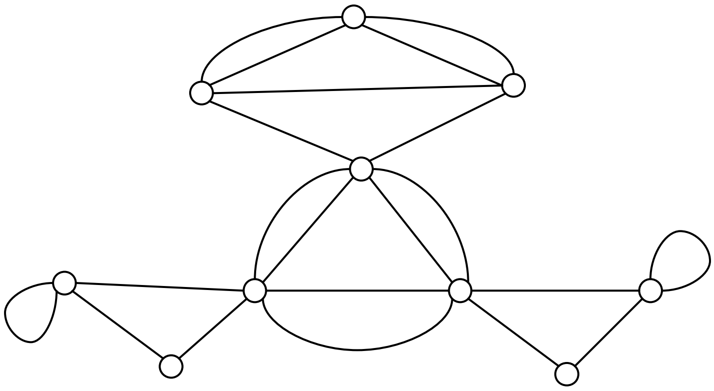
20.



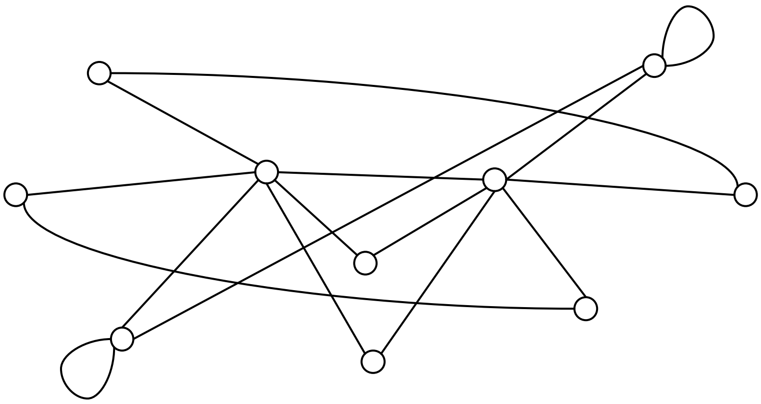
21.



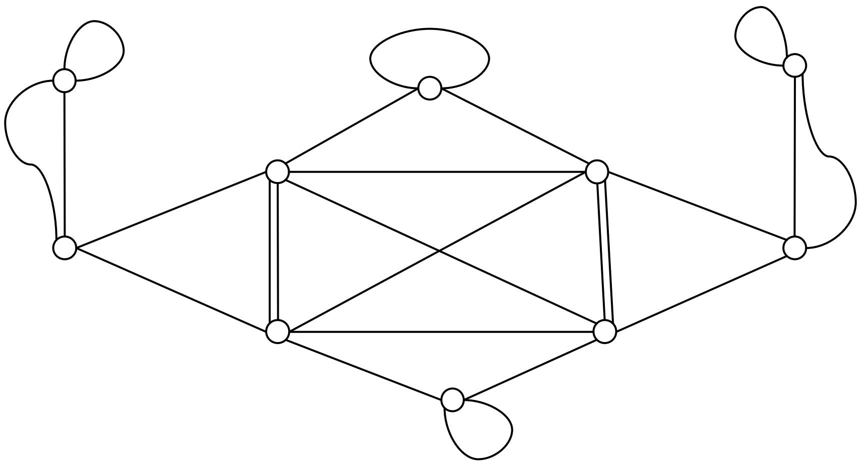
22.



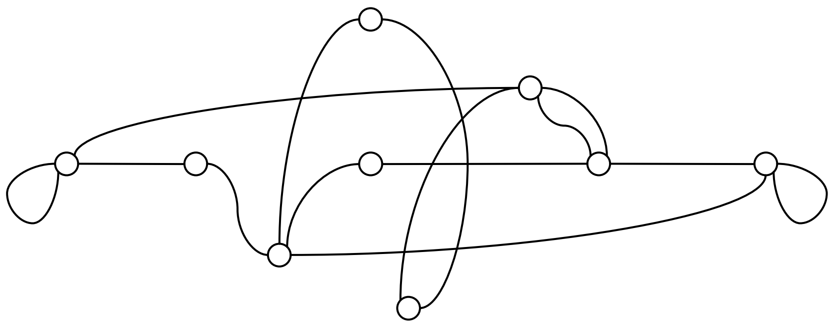
23.



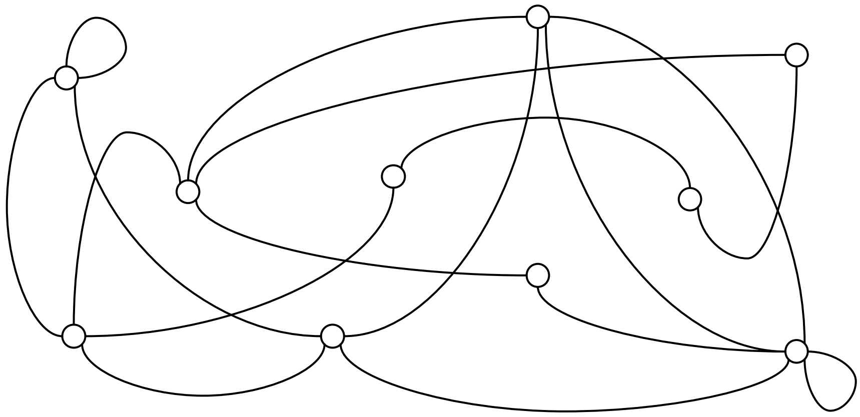
24.



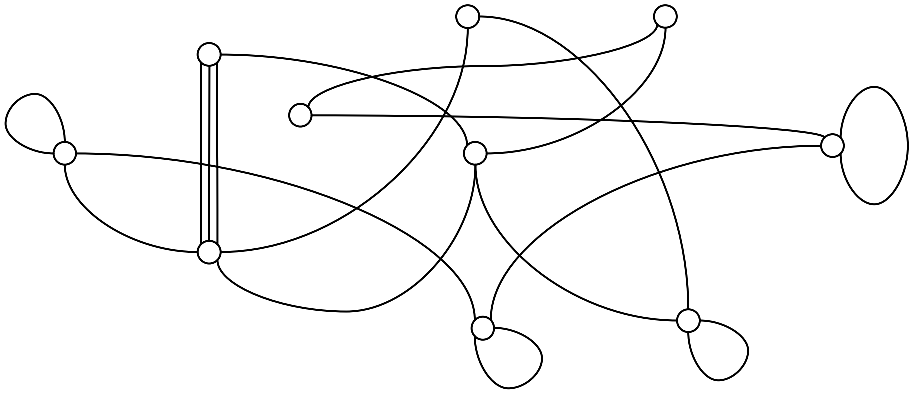
25.



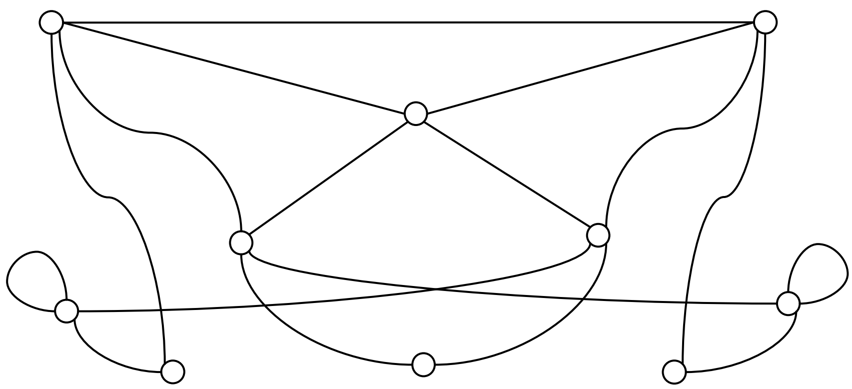
26.



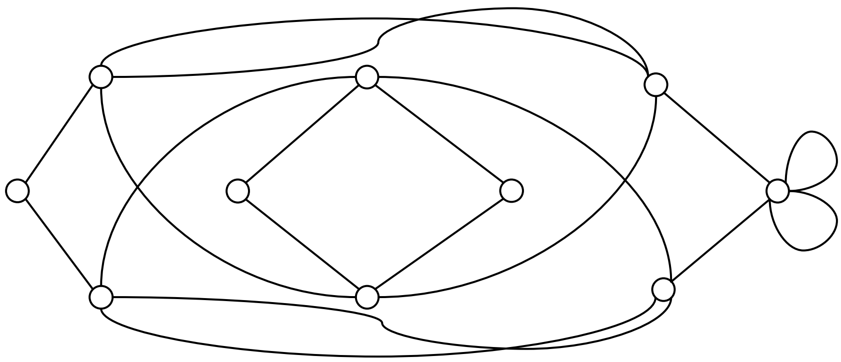
27.



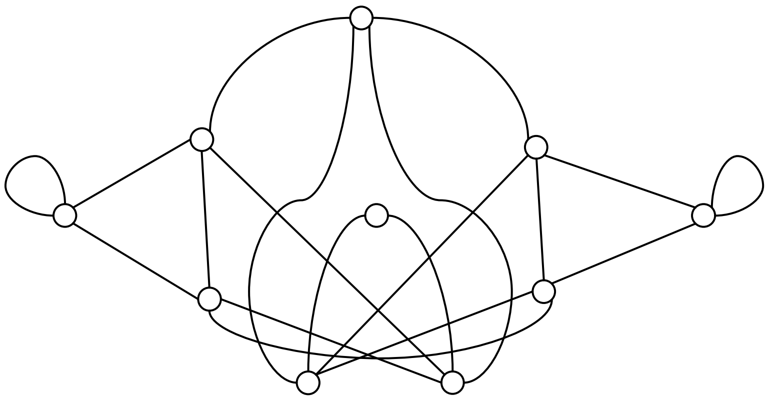
28.



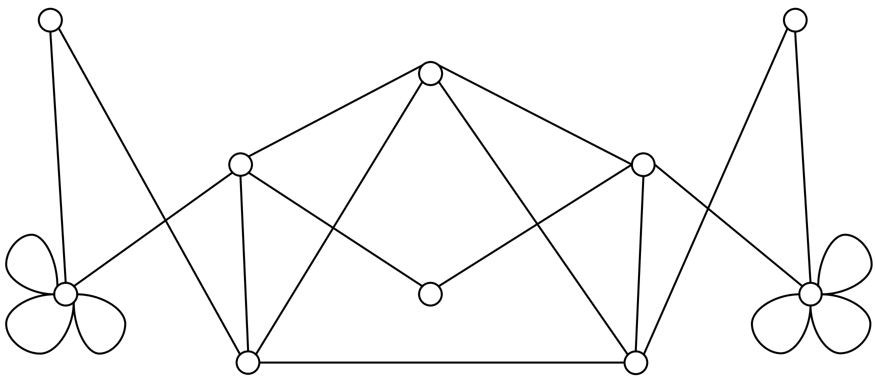
29.



30.



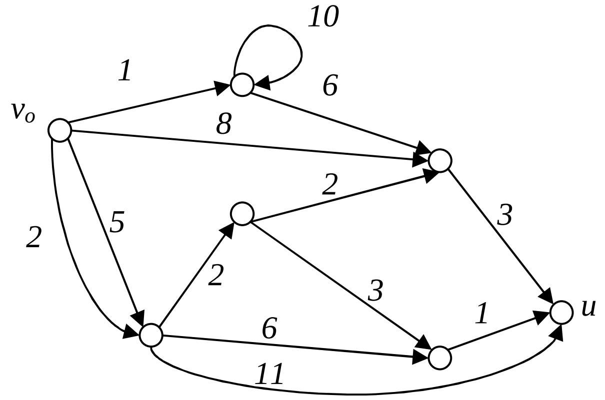
31.



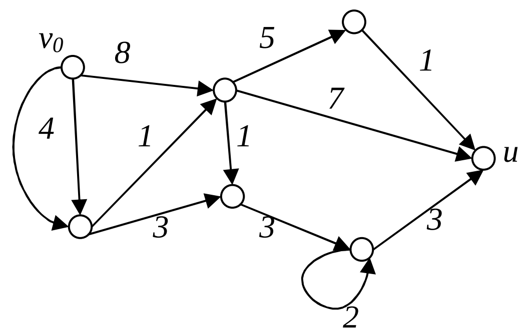
ЗАДАНИЕ 15.

Найти кратчайший путь и его длину из вершины v_0 в вершину u.

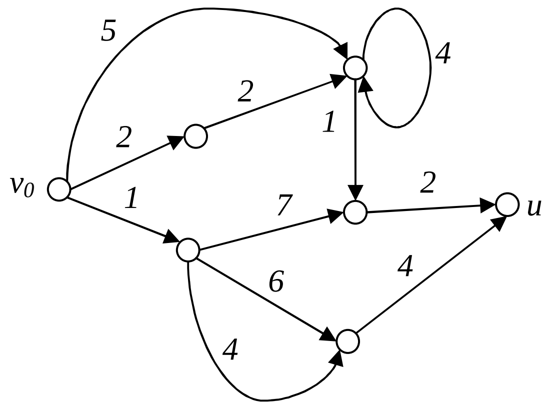
1.



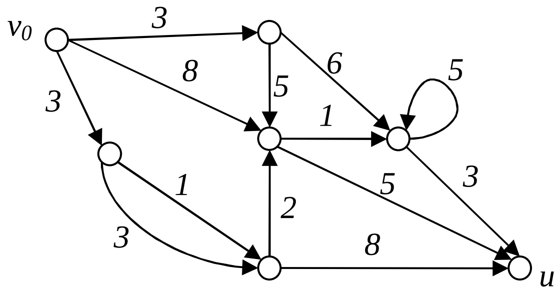
2.



3.

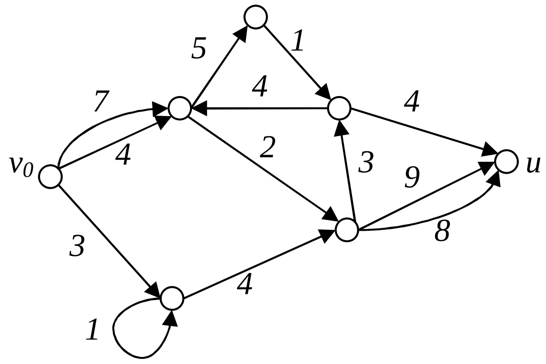


4.



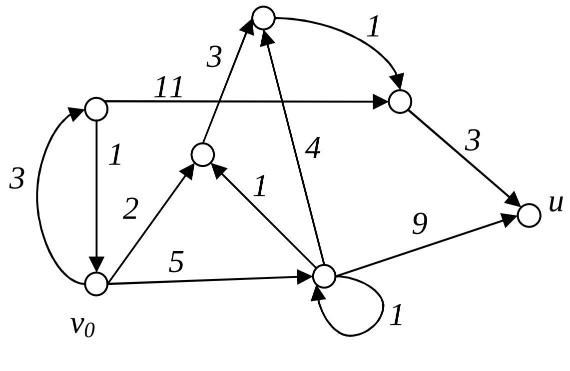
v_0
3
8
3
6
5
5
1
1
2
5
3
3
8
u

5.



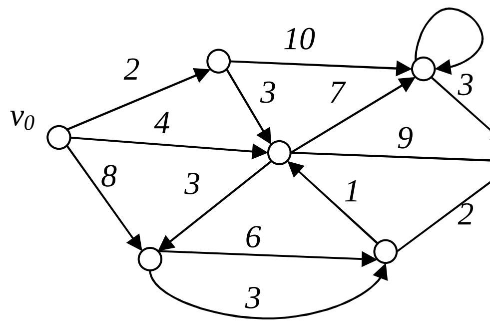
5
1
7
4
4
v_0
4
2
3
9
u
3
8
4
1

6.



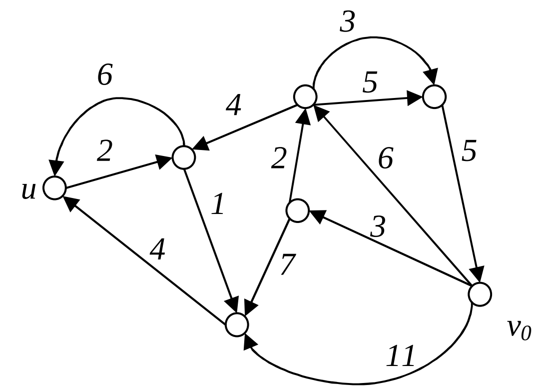
1
3
11
3
1
4
3
1
u
2
9
5
v_0
1

7.

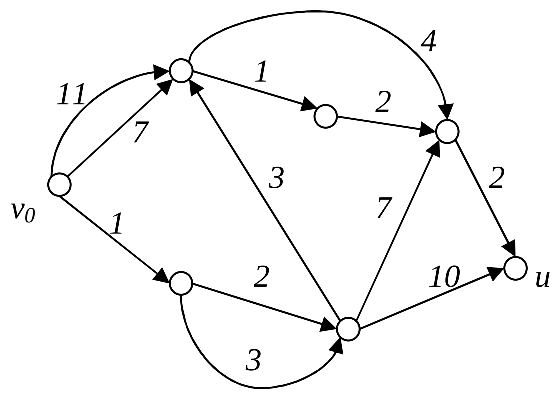


10
2
3
7
3
v_0
4
9
u
8
3
1
2
6
3

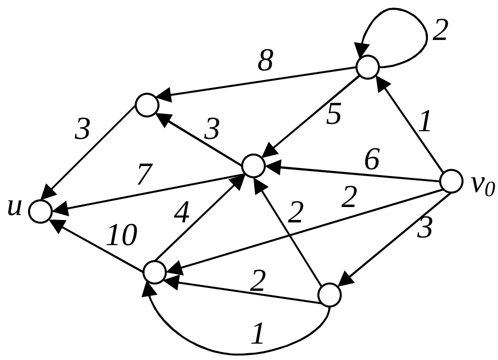
8.


3
6
5
4
2
2
6
5
u
1
3
4
7
v_0
11

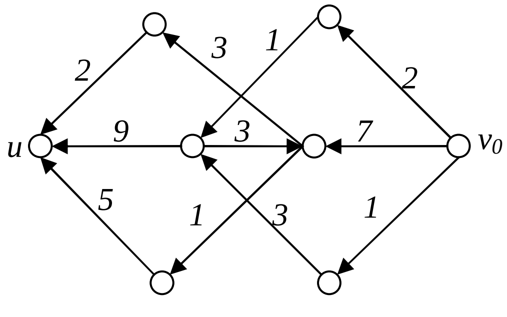
9.


4
1
11
2
7
3
2
7
v_0
1
2
10
u
3

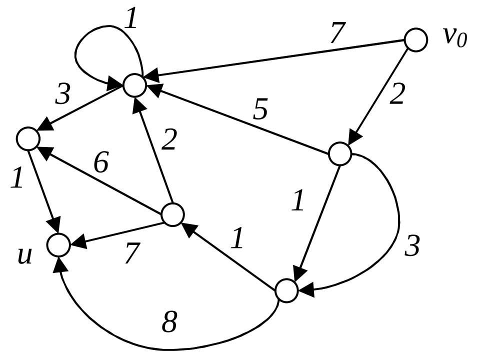
10.


2
8
5
1
3
3
6
v_0
7
2
u
4
2
3
10
2
1

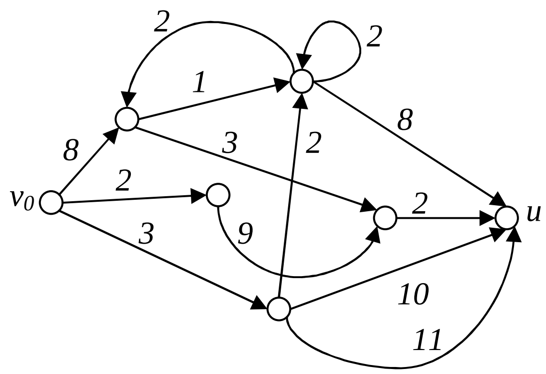
11.


3
1
2
2
9
3
7
u
v_0
5
1
3
1

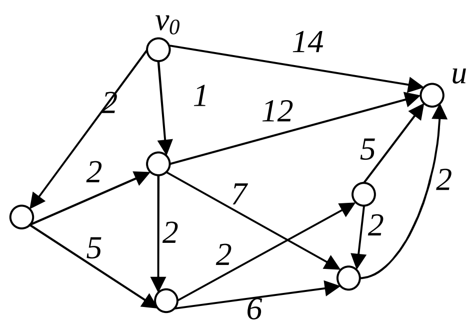
12.


1
7
v_0
3
2
5
2
6
1
1
u
7
1
3
8

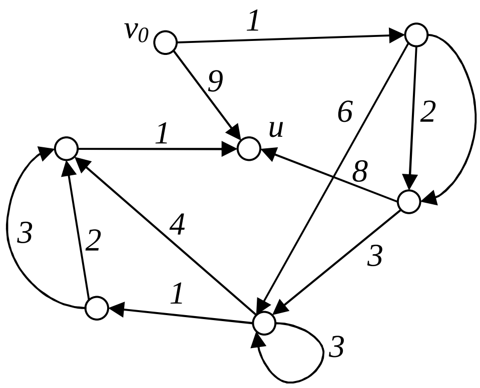
13.


2
2
1
8
8
3
2
v_0
2
2
u
3
9
10
11

14.

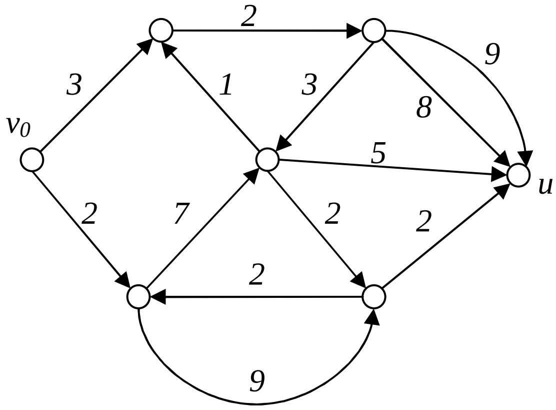

v_0
14
u
2
1
12
5
2
2
7
2
2
5
2
6

15.



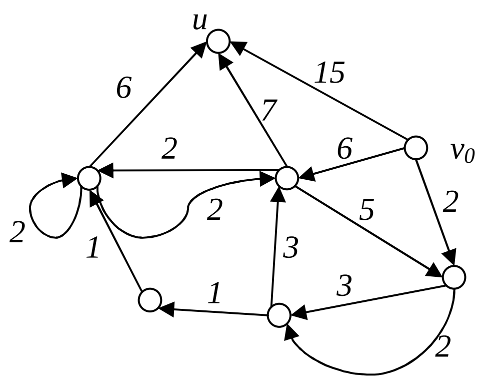
v_0
1
9
6
2
4
u
1
8
3
2
4
3
1
3

16.



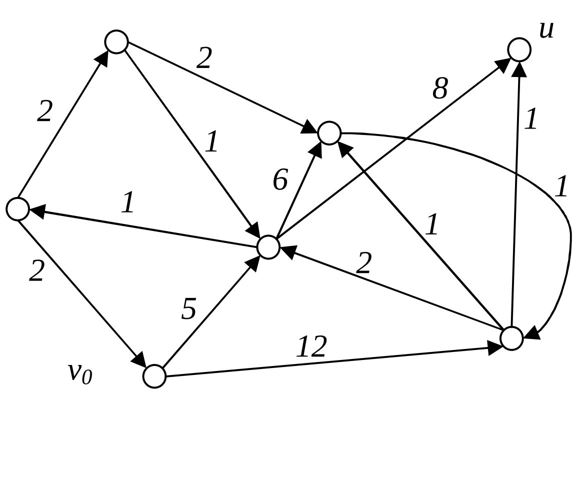
2
9
3
1
3
8
v_0
5
u
2
7
2
2
2
9

17.



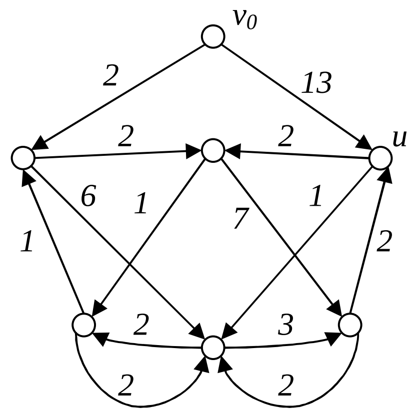
u
6
15
7
2
6
v_0
2
5
2
2
1
3
1
3
2

18.

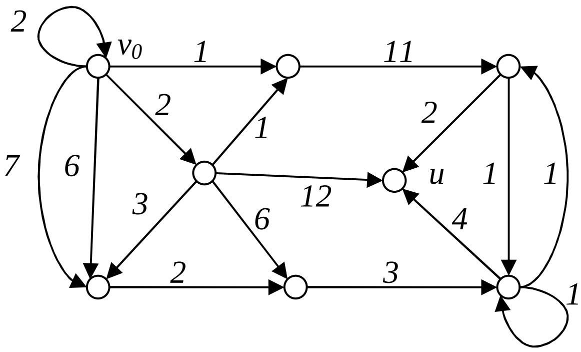


u
2
2
8
1
1
6
1
1
1
2
2
5
12
v_0

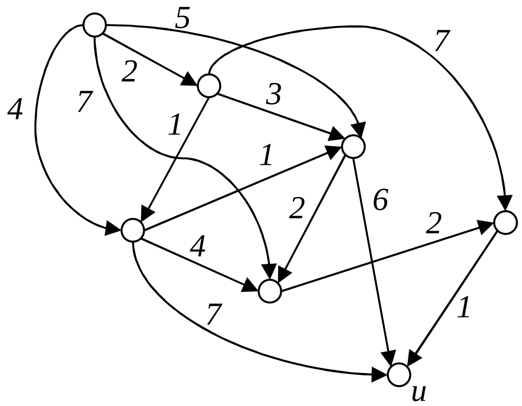
19.


v_0
2
13
2
2
u
6
1
7
1
1
2
2
3
2
2

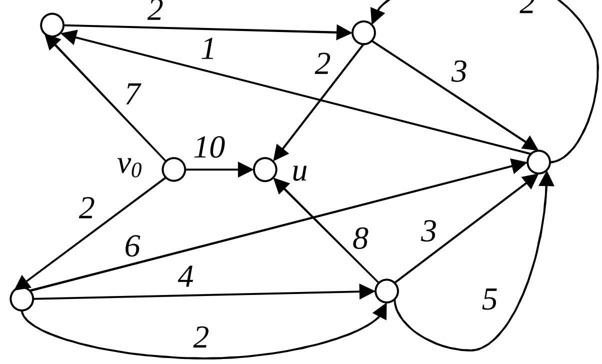
20.


2
v_0
1
11
2
1
2
7
6
u
1
1
12
3
6
4
2
3
1

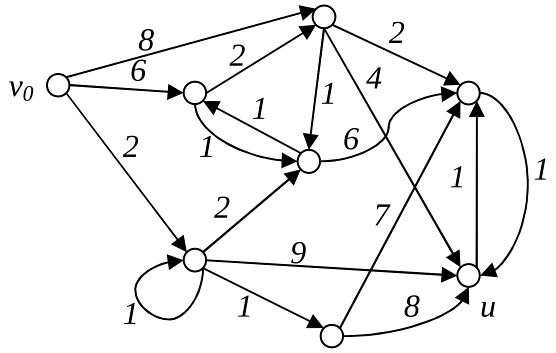
21.


5
7
2
4
7
3
1
1
6
2
2
4
7
1
u

22.

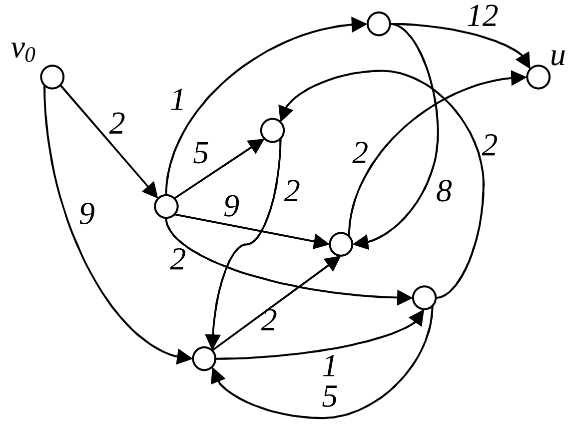

2
2
1
2
3
7
10
v_0
u
2
8
3
6
4
5
2

23.



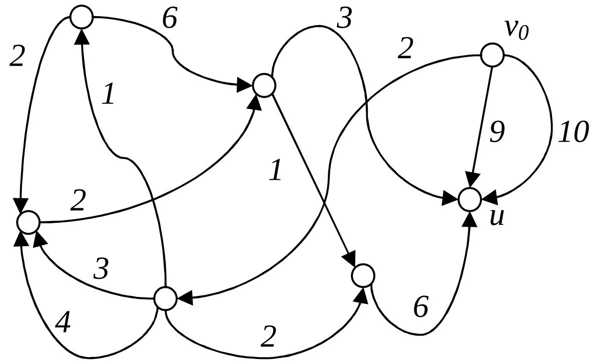
8
2
2
6
v_0
4
1
1
1
6
2
1
1
2
7
9
1
1
8
u

24.



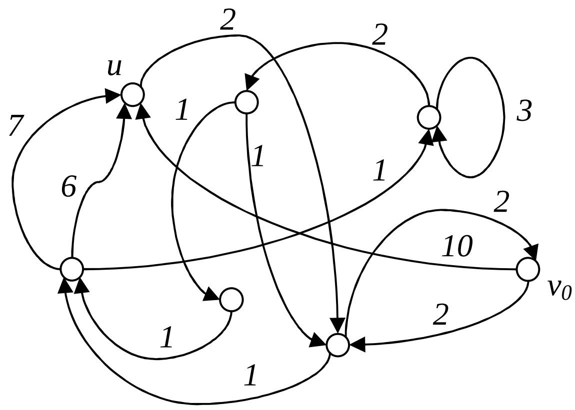
12
v_0
u
1
2
5
2
2
8
2
9
9
2
2
2
1
5

25.



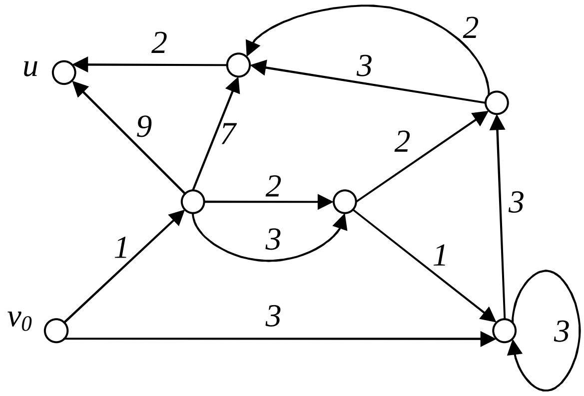
6
3
v_0
2
2
1
9
10
1
2
u
3
6
4
2

26.



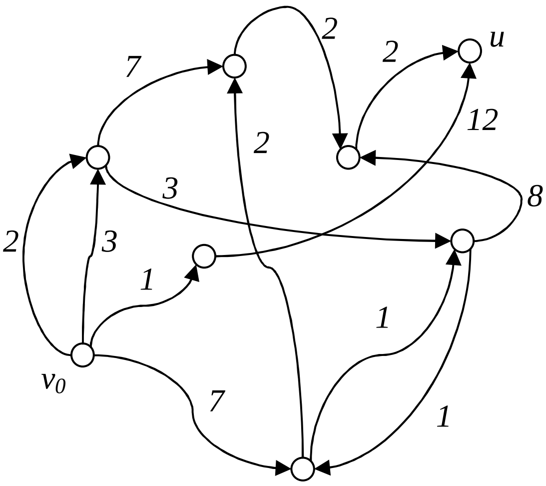
2
2
u
1
3
7
1
1
6
2
10
v_0
2
1
1

27.



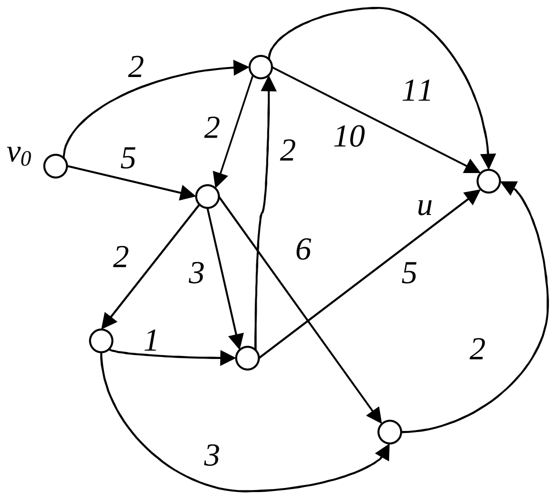
u
v0
2
3
2
9
7
2
2
3
1
3
1
3
3

28.



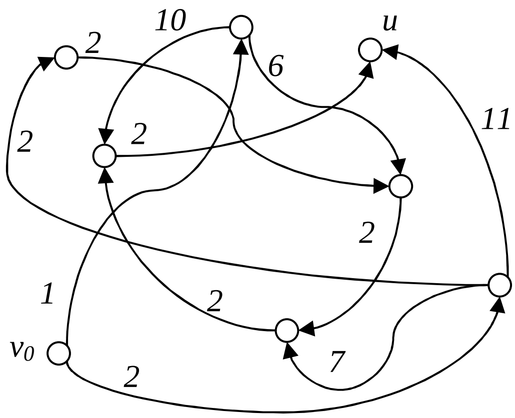
u
v0
2
2
7
2
12
3
8
2
3
1
1
7
1

29.

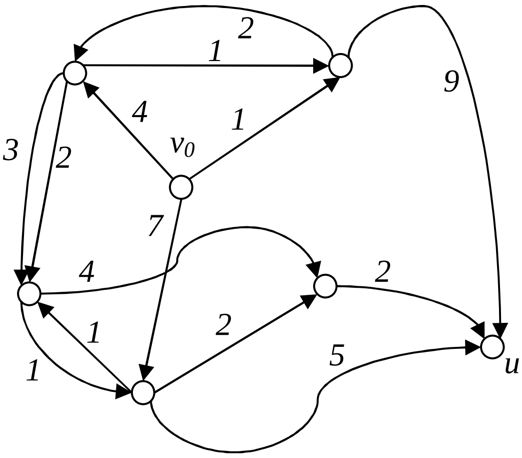


v0
u
2
11
2
2
10
5
2
6
3
5
1
2
3

30.



31.



ЗАДАНИЕ 16.

Найти минимальное остовное дерево

- **для четных номеров вариантов** - с помощью жадного алгоритма (алгоритма Краскала);
- **для нечетных номеров вариантов** - с помощью алгоритма ближайшего соседа (алгоритма Краскала).

Для выполнения этого задания используйте графы из задания 15, предварительно заменив дуги на рёбра.

ЗАДАНИЕ 17.

Для заданной таблицы конечного абстрактного инициального автомата выполнить следующие действия:

1) описать автомат;

2) построить диаграмму Мура;

3) для заданного начального состояния автомата, отмеченного символом «*» и заданного входного слова ***x***, найти выходное слово ***y*** и конечное состояние, в котором будет находиться автомат.

<table>
<tr><th>№ варианта</th><th colspan="4">Переходная и выходная функции</th></tr>
<tr><td rowspan="5">1.</td><td>Состояния / Входные символы</td><td>S_0</td><td>S_1^*</td><td>S_2</td></tr>
<tr><td>В</td><td>$(S_1, 1)$</td><td>$(S_1, 0)$</td><td>$(S_2, 0)$</td></tr>
<tr><td>О</td><td>$(S_1, 0)$</td><td>$(S_2, 0)$</td><td>$(S_0, 1)$</td></tr>
<tr><td>Л</td><td>$(S_0, 1)$</td><td>$(S_2, 1)$</td><td>$(S_0, 0)$</td></tr>
<tr><td>Входное слово</td><td colspan="3">ОЛОВО</td></tr>
<tr><td rowspan="5">2.</td><td>Состояния / Входные символы</td><td>S_0^*</td><td>S_1</td><td>S_2</td></tr>
<tr><td>Т</td><td>$(S_2, 1)$</td><td>$(S_0, 0)$</td><td>$(S_1, 0)$</td></tr>
<tr><td>О</td><td>$(S_0, 0)$</td><td>$(S_2, 0)$</td><td>$(S_0, 1)$</td></tr>
<tr><td>Р</td><td>$(S_1, 1)$</td><td>$(S_2, 1)$</td><td>$(S_0, 0)$</td></tr>
<tr><td>Входное слово</td><td colspan="3">РОТОР</td></tr>
<tr><td rowspan="5">3.</td><td>Состояния / Входные символы</td><td>S_0</td><td>S_1</td><td>S_2^*</td></tr>
<tr><td>А</td><td>$(S_2, 1)$</td><td>$(S_1, 0)$</td><td>$(S_2, 0)$</td></tr>
<tr><td>Л</td><td>$(S_1, 0)$</td><td>$(S_0, 0)$</td><td>$(S_0, 1)$</td></tr>
<tr><td>О</td><td>$(S_1, 1)$</td><td>$(S_2, 0)$</td><td>$(S_1, 0)$</td></tr>
<tr><td>Входное слово</td><td colspan="3">ЛОЛЛА</td></tr>
</table>

№ варианта	Переходная и выходная функции			
4.	Состояния Входные символы	S_0	S_1^*	S_2
	М	$(S_1, 1)$	$(S_0, 0)$	$(S_2, 0)$
	А	$(S_2, 0)$	$(S_2, 1)$	$(S_0, 0)$
	Й	$(S_1, 1)$	$(S_2, 1)$	$(S_0, 1)$
	Входное слово	МАМАЙ		
5.	Состояния Входные символы	S_0	S_1	S_2^*
	П	$(S_0, 1)$	$(S_0, 0)$	$(S_2, 0)$
	Е	$(S_1, 0)$	$(S_0, 0)$	$(S_1, 1)$
	Л	$(S_1, 1)$	$(S_2, 1)$	$(S_2, 0)$
	Входное слово	ПЕПЕЛ		
6.	Состояния Входные символы	S_0^*	S_1	S_2
	В	$(S_2, 0)$	$(S_1, 1)$	$(S_2, 1)$
	А	$(S_1, 0)$	$(S_2, 0)$	$(S_0, 1)$
	Р	$(S_0, 1)$	$(S_2, 1)$	$(S_1, 0)$
	Входное слово	ВАРВАР		
7.	Состояния Входные символы	S_0	S_1^*	S_2
	Р	$(S_0, 1)$	$(S_0, 0)$	$(S_2, 0)$
	А	$(S_1, 1)$	$(S_2, 0)$	$(S_1, 0)$
	З	$(S_2, 1)$	$(S_0, 1)$	$(S_0, 1)$
	Входное слово	ЗРАЗА		

№ варианта	Переходная и выходная функции			
8.	Состояния / Входные символы	S_0	S_1^*	S_2
	Х	$(S_0, 1)$	$(S_2, 0)$	$(S_2, 1)$
	О	$(S_1, 0)$	$(S_0, 0)$	$(S_0, 1)$
	Т	$(S_2, 1)$	$(S_0, 1)$	$(S_1, 0)$
	Входное слово	ХОХОТ		
9.	Состояния / Входные символы	S_0^*	S_1	S_2
	И	$(S_0, 1)$	$(S_2, 0)$	$(S_1, 0)$
	К	$(S_2, 0)$	$(S_0, 0)$	$(S_1, 1)$
	Р	$(S_1, 1)$	$(S_2, 1)$	$(S_0, 0)$
	Входное слово	КРИКИ		
10.	Состояния / Входные символы	S_0	S_1	S_2^*
	Р	$(S_2, 1)$	$(S_1, 1)$	$(S_1, 0)$
	Ф	$(S_2, 0)$	$(S_0, 0)$	$(S_1, 1)$
	С	$(S_1, 1)$	$(S_2, 0)$	$(S_0, 0)$
	Входное слово	РСФСР		
11.	Состояния / Входные символы	S_0	S_1	S_2^*
	П	$(S_0, 1)$	$(S_1, 0)$	$(S_1, 0)$
	О	$(S_1, 0)$	$(S_0, 1)$	$(S_1, 1)$
	Т	$(S_2, 1)$	$(S_2, 0)$	$(S_0, 0)$
	Входное слово	ТОПОТ		

№ варианта	Переходная и выходная функции			
12.	Состояния / Входные символы	S_0	S_1^*	S_2
	С	$(S_2, 0)$	$(S_2, 0)$	$(S_2, 0)$
	О	$(S_1, 0)$	$(S_0, 1)$	$(S_1, 1)$
	Р	$(S_2, 1)$	$(S_2, 1)$	$(S_0, 0)$
	Входное слово	СОРОС		
13.	Состояния / Входные символы	S_0	S_1	S_2^*
	Р	$(S_2, 0)$	$(S_2, 0)$	$(S_2, 0)$
	О	$(S_1, 0)$	$(S_1, 0)$	$(S_0, 0)$
	К	$(S_0, 1)$	$(S_2, 1)$	$(S_1, 0)$
	Входное слово	ОКОРОК		
14.	Состояния / Входные символы	S_0	S_1	S_2^*
	О	$(S_2, 0)$	$(S_1, 1)$	$(S_1, 0)$
	В	$(S_1, 1)$	$(S_0, 0)$	$(S_1, 1)$
	Д	$(S_1, 0)$	$(S_2, 1)$	$(S_0, 0)$
	Входное слово	ДОВОД		
15.	Состояния / Входные символы	S_0^*	S_1	S_2
	С	$(S_2, 0)$	$(S_1, 0)$	$(S_1, 0)$
	А	$(S_1, 0)$	$(S_1, 1)$	$(S_1, 1)$
	М	$(S_2, 1)$	$(S_2, 1)$	$(S_0, 1)$
	Входное слово	САМСА		

№ варианта	Переходная и выходная функции			
16.	Состояния / Входные символы	S_0	S_1^*	S_2
	Г	$(S_2, 1)$	$(S_2, 0)$	$(S_1, 1)$
	А	$(S_0, 0)$	$(S_1, 0)$	$(S_0, 1)$
	Н	$(S_1, 1)$	$(S_2, 1)$	$(S_0, 0)$
	Входное слово	НАГАН		
17.	Состояния / Входные символы	S_0	S_1^*	S_2
	Х	$(S_1, 1)$	$(S_1, 1)$	$(S_1, 0)$
	О	$(S_2, 0)$	$(S_2, 0)$	$(S_0, 1)$
	Д	$(S_2, 1)$	$(S_2, 1)$	$(S_2, 0)$
	Входное слово	ДОХОД		
18.	Состояния / Входные символы	S_0^*	S_1	S_2
	Д	$(S_1, 1)$	$(S_1, 0)$	$(S_2, 0)$
	А	$(S_2, 1)$	$(S_0, 0)$	$(S_0, 1)$
	Р	$(S_0, 1)$	$(S_2, 0)$	$(S_0, 0)$
	Входное слово	РАДАР		
19.	Состояния / Входные символы	S_0	S_1	S_2^*
	К	$(S_2, 1)$	$(S_1, 0)$	$(S_2, 0)$
	О	$(S_0, 0)$	$(S_0, 1)$	$(S_1, 1)$
	М	$(S_1, 0)$	$(S_2, 1)$	$(S_1, 0)$
	Входное слово	КОМОК		

№ варианта	Переходная и выходная функции			
20.	Состояния / Входные символы	S_0	S_1^*	S_2
	К	$(S_0, 1)$	$(S_1, 1)$	$(S_1, 0)$
	А	$(S_2, 0)$	$(S_1, 0)$	$(S_1, 1)$
	П	$(S_1, 1)$	$(S_2, 0)$	$(S_0, 0)$
	Входное слово	ПАПКА		
21.	Состояния / Входные символы	S_0	S_1	S_2^*
	Г	$(S_2, 1)$	$(S_1, 0)$	$(S_2, 0)$
	О	$(S_0, 0)$	$(S_0, 0)$	$(S_0, 1)$
	Т	$(S_1, 0)$	$(S_1, 1)$	$(S_1, 0)$
	Входное слово	ГОГОТ		
22.	Состояния / Входные символы	S_0	S_1	S_2^*
	К	$(S_2, 1)$	$(S_1, 0)$	$(S_2, 0)$
	О	$(S_0, 0)$	$(S_0, 1)$	$(S_1, 1)$
	М	$(S_1, 0)$	$(S_2, 1)$	$(S_1, 0)$
	Входное слово	КОМОК		
23.	Состояния / Входные символы	S_0^*	S_1	S_2
	Х	$(S_2, 0)$	$(S_1, 0)$	$(S_2, 0)$
	О	$(S_1, 0)$	$(S_0, 1)$	$(S_0, 1)$
	Л	$(S_1, 1)$	$(S_2, 1)$	$(S_1, 0)$
	Входное слово	ХОХОЛ		

№ варианта	Переходная и выходная функции			
24.	Состояния / Входные символы	S_0	S_1	S_2^*
	Е	$(S_2, 1)$	$(S_1, 0)$	$(S_1, 0)$
	Т	$(S_2, 0)$	$(S_2, 0)$	$(S_1, 1)$
	А	$(S_1, 1)$	$(S_2, 1)$	$(S_0, 0)$
	Входное слово	ТЕТТА		
25.	Состояния / Входные символы	S_0	S_1^*	S_2
	Ш	$(S_2, 1)$	$(S_1, 0)$	$(S_1, 0)$
	И	$(S_2, 0)$	$(S_0, 0)$	$(S_0, 1)$
	К	$(S_1, 1)$	$(S_2, 1)$	$(S_0, 0)$
	Входное слово	ШИШКИ		
26.	Состояния / Входные символы	S_0^*	S_1	S_2
	А	$(S_2, 0)$	$(S_1, 0)$	$(S_1, 1)$
	З	$(S_1, 0)$	$(S_0, 1)$	$(S_0, 1)$
	К	$(S_2, 1)$	$(S_2, 1)$	$(S_1, 0)$
	Входное слово	КАЗАК		
27.	Состояния / Входные символы	S_0	S_1	S_2^*
	О	$(S_2, 1)$	$(S_1, 0)$	$(S_2, 0)$
	Р	$(S_1, 0)$	$(S_0, 0)$	$(S_0, 1)$
	З	$(S_1, 1)$	$(S_2, 1)$	$(S_0, 0)$
	Входное слово	ЗОРРО		

№ варианта	Переходная и выходная функции			
28.	Состояния / Входные символы	S_0	S_1^*	S_2
	Б	(S_2, 1)	(S_2, 0)	(S_2, 0)
	А	(S_1, 0)	(S_0, 0)	(S_1, 1)
	К	(S_0, 1)	(S_2, 1)	(S_0, 0)
	Входное слово	КАБАК		
29.	Состояния / Входные символы	S_0	S_1^*	S_2
	К	(S_0, 1)	(S_2, 0)	(S_1, 0)
	А	(S_1, 0)	(S_0, 0)	(S_1, 1)
	Р	(S_2, 1)	(S_2, 1)	(S_0, 1)
	Входное слово	КАРРА		
30.	Состояния / Входные символы	S_0	S_1	S_2^*
	Н	(S_0, 1)	(S_2, 0)	(S_1, 0)
	А	(S_1, 0)	(S_0, 0)	(S_1, 1)
	М	(S_2, 1)	(S_2, 1)	(S_0, 1)
	Входное слово	МАННА		
31.	Состояния / Входные символы	S_0	S_1	S_2^*
	С	(S_2, 0)	(S_1, 0)	(S_0, 1)
	О	(S_1, 0)	(S_0, 0)	(S_1, 1)
	К	(S_2, 1)	(S_2, 0)	(S_0, 0)
	Входное слово	КОКОС		

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Основная литература

1. Горбатов В.А. Дискретная математика: Учебное пособие для студентов втузов / В.А. Горбатов, А.В. Горбатов, М.В. Горбатова. – М.: ООО «Издательство АСТ», ООО «Издательство Астрель», 2003. – 447 с.

2. Кузнецов О.П. Дискретная математика для инженера / О.П. Кузнецов - СПб.: Издательство «Лань», 2004 г.- 400 с.

3. Гончарова Г.А. Элементы дискретной математики: Учебное пособие / Г.А. Гончарова, А.А. Мочалин. – М.: ФОРУМ: ИНФРА-М, 2004. – 128 с.

4. Плотников А.Д. Дискретная математика / А.Д. Плотников – М.: Новое знание, 2005. – 288 с.

5. Трофимов В.Г., Бобров О.П. Дискретная математика. Часть 1. (Теория множеств. Математическая логика). Учебное пособие. ВИ МВД РФ, 2000г.

6. Трофимов В.Г., Бобров О.П. Дискретная математика. Часть 2. (Минимизация булевых функций. Теория графов. Алгоритмы и автоматы) Учебное пособие. ВИ МВД РФ, 2001 г.

7. Меньших В.В., Пьянков О.В. Дискретная математика. Типовой расчет. Учебное пособие. – Воронеж: ВИ МВД России, 2007. – 96 с.

Дополнительная литература

1. Горбатов В.А. Фундаментальные основы дискретной математики. Информационная математика / В.А. Горбатов – М.: Наука. Физматлит, 2002. – 544 с.

2. Белоусов А.И., Ткачев С.В. Дискретная математика: Учебник для вузов /А.И. Белоусов, С.В. Ткачев/ Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. – 744 с.

3. Иванов Б.Н. Дискретная математика. Алгоритмы и программы / Б.И. Иванов - М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2002 г. – 288 с.

4. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов / Ф.А. Новиков – СПб.: Питер, 2005. – 364 с.

5. Акимов О.Е. Дискретная математика. Логика, группы, графы. / О.Е. Акимов – М.: Лаборатория базовых знаний, 2003. – 376 с.

Учебное издание

Меньших Валерий Владимирович
Пьянков Олег Викторович

Дискретная математика

Учебно-методическое пособие

Редактор Н.В. Соболева
Компьютерная верстка В.В. Павлов

Подписано в печать 12.03.07. Формат 60x84 $^{1}/_{16}$
Бумага офсетная. Гарнитура Таймс Новая. Печать офсетная
Усл. печ. л. 6,5. Усл. кр.-отт.6,63. Уч.-изд. л. 6,0.
Тираж 344 экз. Заказ №

Воронежский институт МВД России
394065 Воронеж, просп. Патриотов, 53

Типография Воронежского института МВД России
394065 Воронеж, просп. Патриотов, 53