

Lab 4 - Projeto de Controladores Parte 2: Controle Proporcional

Para projeto do controlador proporcional, a mesma planta utilizada na experiência anterior será utilizada:

$$G_p(s) = k \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

onde para este sistema foram obtidos os seguintes valores no laboratório 3:

- $k = 1$
- $\omega_n = 1,049820150401$
- $\zeta = 1,030083531574$

Nesta etapa, será projetado um controlador proporcional $C(s) = K_p$ para controlar o sistema em malha fechada. Na Figura 1, um diagrama contínuo de controle com realimentação unitária é mostrado e está sujeito a um distúrbio na entrada.

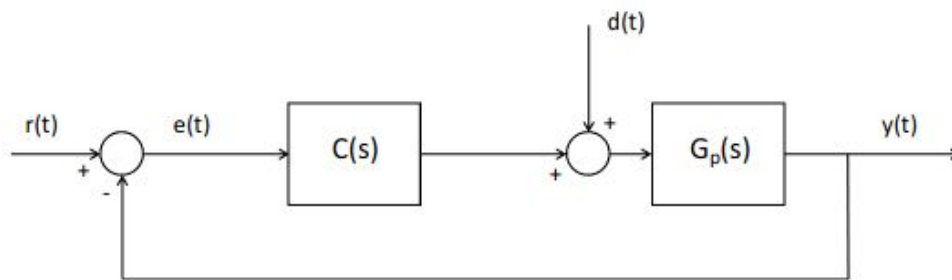


Figura 1 - Malha com realimentação unitária

Desconsiderando o distúrbio na entrada da planta, a função contínua de malha fechada do sistema é dada por:

$$G_{MF}(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{C(s)G_p(s)}{1 + C(s)G_p(s)}$$

O erro do sistema em relação ao sinal de referência da malha fechada é dado por:

$$E(s) = R(s) - Y(s) = R(s) \left(1 - \frac{C(s)G_p(s)}{1 + C(s)G_p(s)} \right) = \frac{R(s)}{1 + C(s)G_p(s)}$$

Assim, para um sinal de referência do tipo degrau de amplitude u :

$$R(s) = \frac{u}{s}$$

e o erro pode ser dado por:

$$E(s) = \frac{u}{s(1 + C(s)G_p(s))}$$

O erro em regime permanente em valor absoluto, desconsiderando distúrbio na entrada da planta, considerando uma entrada degrau, planta do sistema de segunda ordem, e controlador proporcional, pode ser calculado através do teorema do valor final:

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \frac{u}{1 + K_p}$$

A Figura 2 mostra algumas medidas da resposta degrau de um sistema que geralmente são usadas como requisito de projeto de controladores. É considerado que a entrada de referência degrau é aplicada no instante de tempo $t = 0$. Para um sistema com resposta em regime permanente $y_{ss} = 1$, temos:

1. Tempo de subida (rise time), t_r é o tempo que a saída do sistema leva para ir de 0.1 até 0.9;
2. Tempo de acomodação (settling time), t_s é o tempo que o sistema leva até que a saída fique completamente contida entre a faixa $\pm 1\%$, $\pm 2\%$ ou $\pm 5\%$, por exemplo.
3. Sobressinal (overshoot), M_p é o valor máximo que o sistema supera seu valor final dividido pelo valor final (geralmente expresso em porcentagem).
4. Tempo de pico (peak time), t_p é o tempo em que o sistema atinge o seu valor máximo.

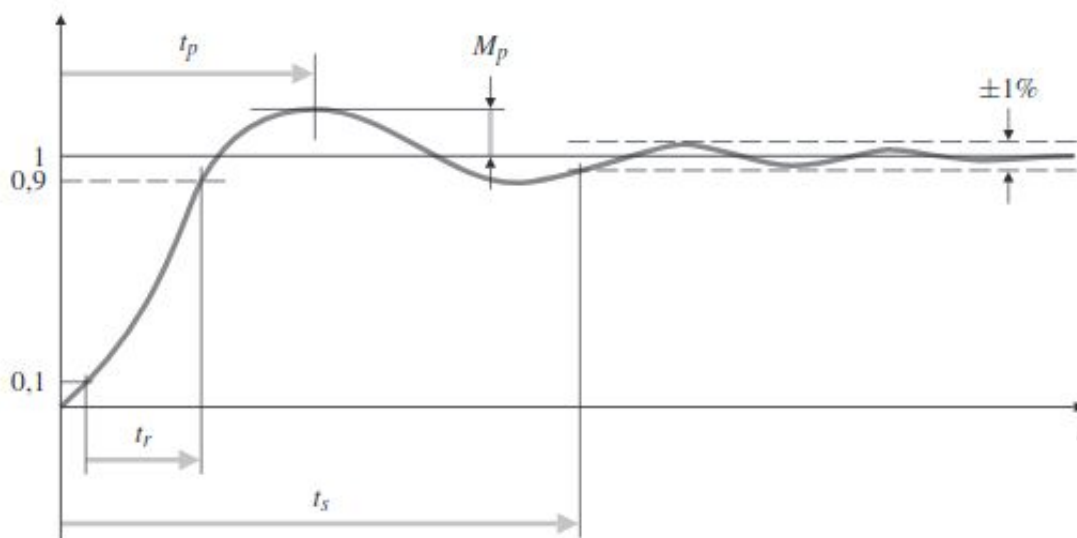


Figura 2 - Medidas de desempenho da resposta a uma entrada degrau, com tempo de acomodação na faixa entre $\pm 1\%$. [3]

Além disso, por sermos do grupo 13, temos que considerar os seguintes valores:

R_1 (k Ω)	C_1 (μ F)	R_2 (k Ω)	C_2 (μ F)	u (V)	d (V)	t_1 (s)	$e_{ss\%}$ (%)
553	2.20	339	2.20	1.13	-0.14	12	12.5

Q.01

Implemente no **xcos** um sistema de realimentação unitária contínuo (FT) para um controlador proporcional $C(s) = K_p = 1$.

- 1.1 Qual o tempo de subida da resposta do sistema de malha fechada antes do distúrbio?

Utilizando o diagrama abaixo feito com a ferramenta xcos, foi possível obter uma curva para a saída contínua da função de transferência com um controlador proporcional $K_p = 1$.

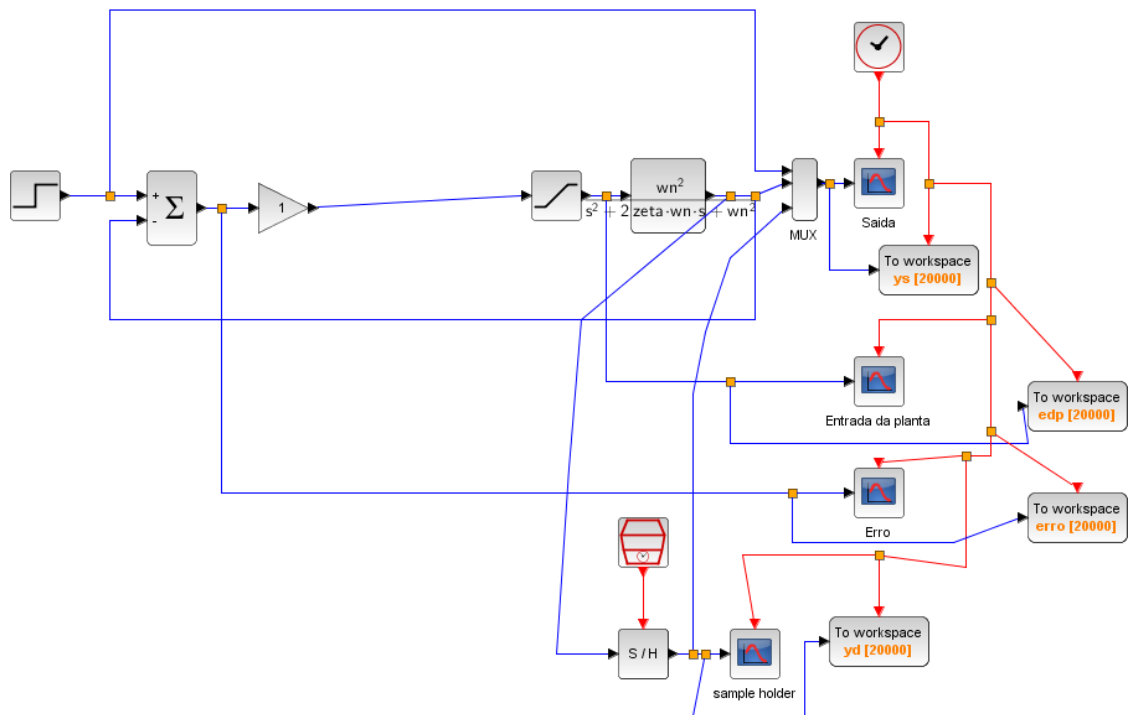


Figura 3 - Modelagem do xcos de um sistema de realimentação unitária contínuo (FT) para um controlador proporcional $C(s)=K_p=1$.

Assim, foi possível obter o gráfico abaixo para a saída:

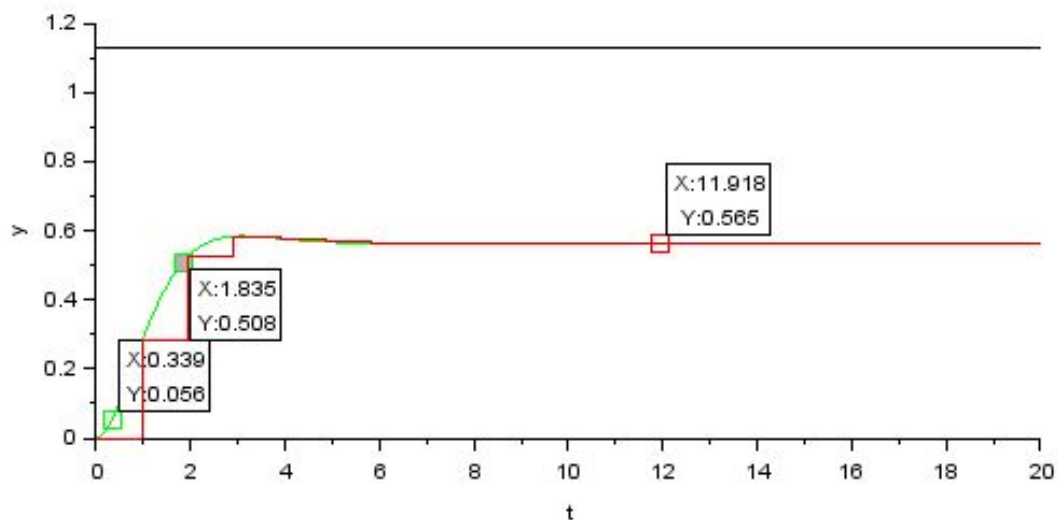


Figura 4 - Saída do sistema, com os valores de 10% e 90% marcados.

Como já foi afirmado, o tempo de subida é o tempo que a saída leva para ir de 10% até 90% do valor que converge. Na Figura 4, vemos que o valor que o sistema converge é de 0.565, 10% desse valor é 0.0565, sendo que este valor ocorre no tempo $t_1 = 0.339s$ e 90% é 0.5085, que ocorre no tempo $t_2 = 1.835s$. Assim, temos que o tempo de subida é dado por:

$$t_r = t_2 - t_1$$

$$t_r = 1.835 - 0.339$$

$$t_r = 1.496s$$

- **1.2** Qual o tempo de acomodação (5%) do sistema de malha fechada antes do distúrbio?

Para realizar o cálculo do tempo de acomodação, deve-se considerar a seguinte relação [1]:

$$e^{-\zeta\omega_n t_s} = \text{tolerancia}$$

Como sabemos que a tolerância é de 5%, temos:

$$e^{-\zeta\omega_n t_s} = 0.05$$

$$\zeta\omega_n t_s = -\ln 0.05 \approx 3$$

$$t_s = \frac{3}{\zeta\omega_n}$$

Utilizando os valores já conhecidos, obtemos:

$$t_s \approx 2,774s$$

o que pode ser comprovado ao realizar uma análise gráfica pela saída obtida a partir do scilab:

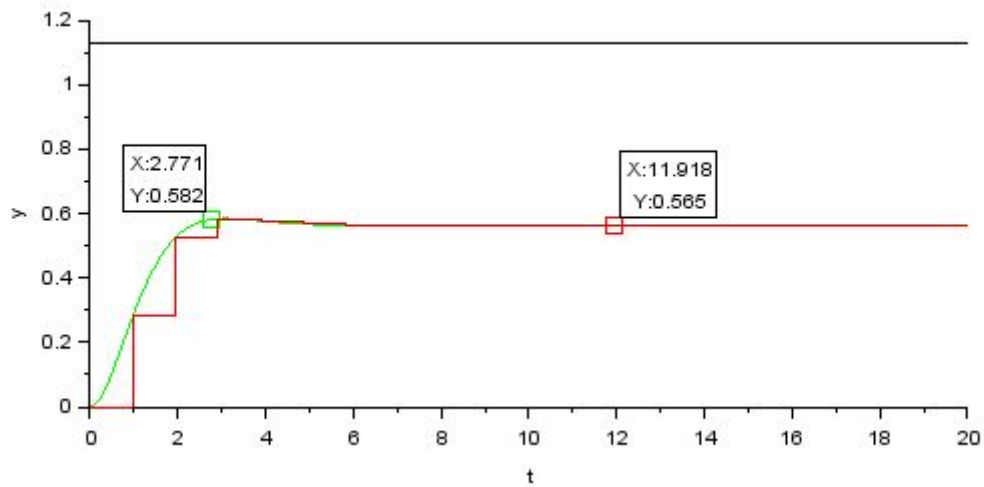


Figura 5 - tempo de acomodação

Como temos que o valor final é 0.565 e a tolerância de tempo de acomodação é de $\pm 5\%$, vemos que está de acordo com o esperado, pois 0.582 está dentro da faixa de $0.565 \pm 5\%$.

- **1.3** Qual o erro em regime absoluto do sistema antes de ser aplicado o distúrbio?

Conforme já foi visto, pode-se obter o erro em regime absoluto antes de um distúrbio a partir da seguinte relação:

$$e_{ss} = \frac{u}{1 + K_p}$$

Sabendo que $u = 1,13V$ e $K_p = 1$, temos:

$$e_{ss} = \frac{1,13}{2}$$

$$e_{ss} = 0,565V$$

- **1.4** Qual o erro em regime absoluto após o distúrbio ser aplicado?

Considerando o distúrbio na Figura 1, temos que o erro total é dado por:

$$E(s) = R(s) - Y(s) = R(s) - [E(s)C(s)G_p(s) + D(s)G_p(s)]$$

$$E(s)[1 + C(s)G_p(s)] = R(s) - D(s)G_p(s)$$

$$E(s) = R(s) \frac{1}{1 + C(s)G_p(s)} - D(s) \frac{G_p(s)}{1 + C(s)G_p(s)}$$

$$E(s) = R(s) \frac{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2(1 + K_p)} - D(s) \frac{\omega^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2(1 + K_p)}$$

O erro em regime absoluto devido a um distúrbio constante é dado pelo Teorema do Valor Final:

$$e_{ss,d} = \lim_{s \rightarrow 0} s(-D(s) \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2(1 + K_p)})$$

$$e_{ss,d} = \lim_{s \rightarrow 0} \left(-s \frac{d}{s} \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2(1 + K_p)} \right)$$

$$e_{ss,d} = -d \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2(1 + K_p)}$$

$$e_{ss,d} = -\frac{d}{1 + K_p}$$

$$e_{ss,d} = 0.07V$$

Assim, o erro total é dado pela soma do erro antes do distúrbio com o erro depois do distúrbio, obtendo:

$$e = 0.565 + 0.07 = 0.635V$$

Analisando pelos gráficos dos erros sem e com distúrbios, percebe-se que esses valores calculados estão corretos, como pode-se ver nas Figuras abaixo:

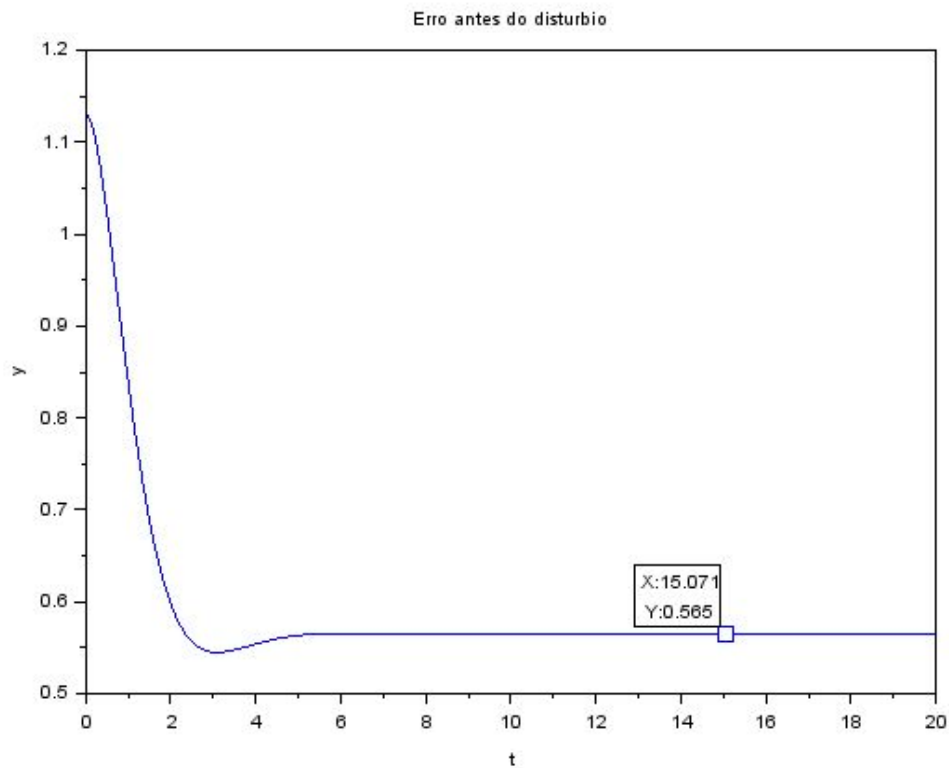


Figura 6 - Gráfico do erro antes do distúrbio

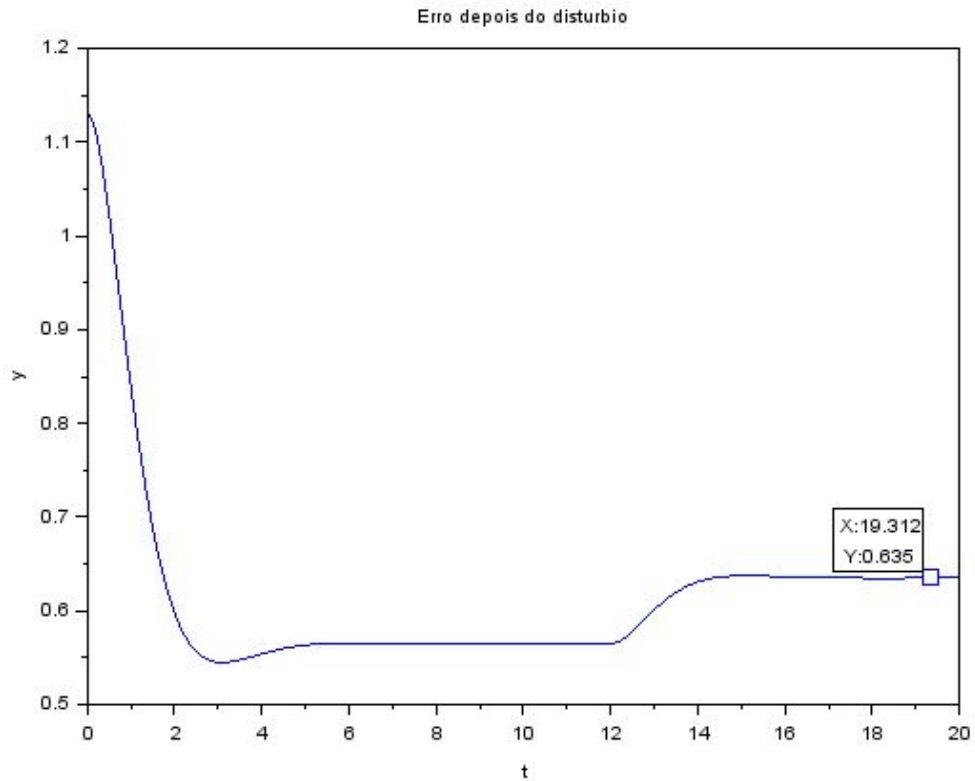


Figura 7 - Gráfico do erro depois do distúrbio

- **1.5** Defina um período de amostragem T_0 adequado, e implemente também o equivalente discreto com zero holder (FTD) do sistema de malha fechada (considere para a malha discreta que o controle proporcional $C(z) = K_p$). Mostra as curvas de resposta do sistema.

Aplicando o distúrbio temos a seguinte modelagem:

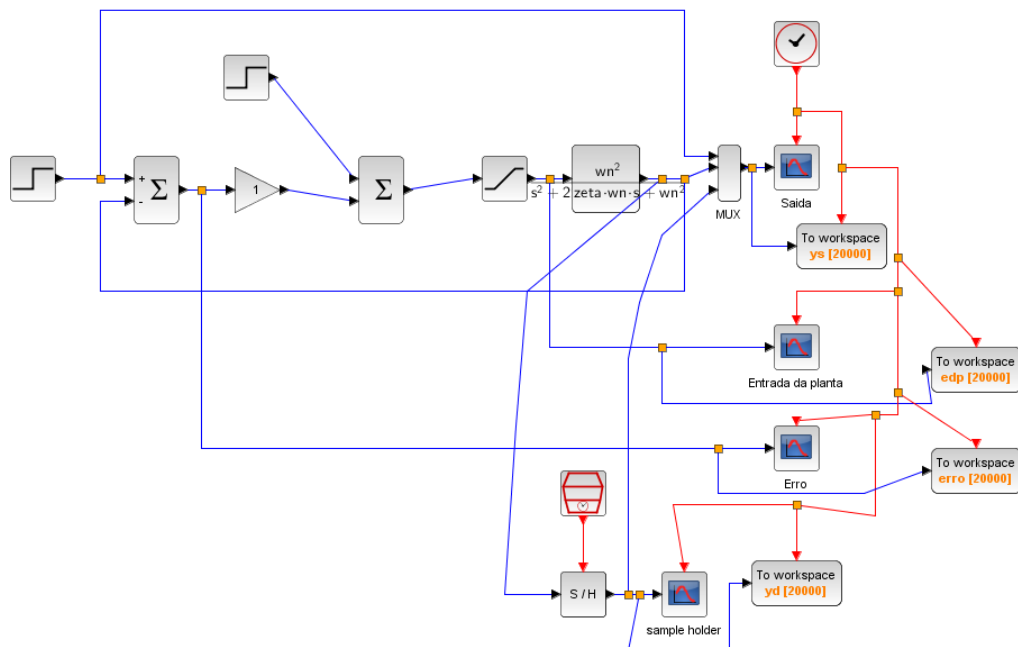


Figura 8 - Modelagem do sistema após aplicar o distúrbio

Para que um sinal com banda limitada F_n (isto é, componentes espectrais para frequências maiores que F_n) possa ser reconstruído completamente, ele deve ser amostrado a uma frequência $F > 2F_n$.

$F = 1/T$ é a frequência de amostragem

F_n é a frequência de Nyquist (largura da banda)

Para determinarmos a largura de banda, ω_b , do sistema, medimos quando o ganho do sistema cai 3dB em relação ao ganho do sistema referente a $\omega \rightarrow 0$. Podemos verificar na figura abaixo:

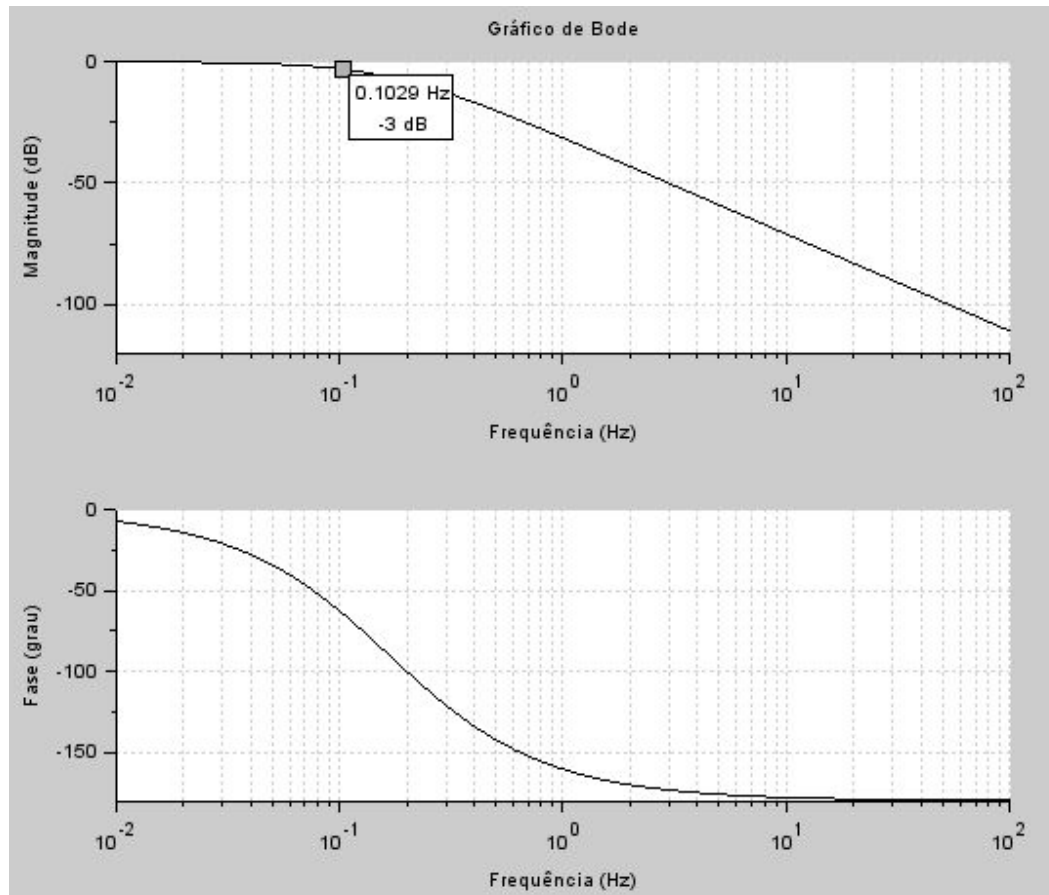


Figura 9 - Diagrama de Bode utilizado para encontrar ω_b

Obtendo, então, $\omega_b = 0.1029$ [Hz] ou $0,0163$ [rad/s]. Considerando $F_n = 10\omega_b$, foi escolhido o coeficiente 10 para multiplicar o ω_b , pois é um valor que está incluído no teorema da amostragem e reconstrói o sinal muito bem. “Reconstrói muito bem” quer dizer que as componentes frequenciais do sinal original podem ser identificadas e recuperadas a partir do sinal amostrado. Não que vá ser recuperado totalmente, uma representação perfeita do sinal original, mas sim uma boa reconstrução. Temos:

- $F_n = 1.0290$ Hz
- $F_n = 0.1623$ rad/s
- $T_0 = 1/F_n = 0.9718$ s

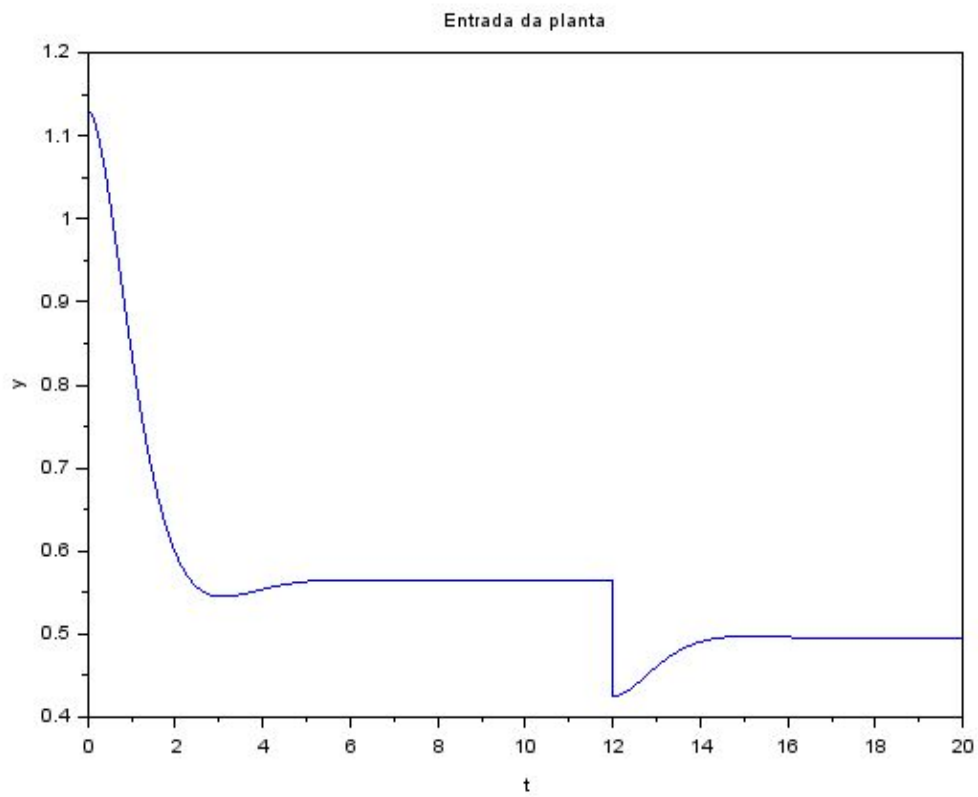


Figura 10 - Gráfico da entrada de planta

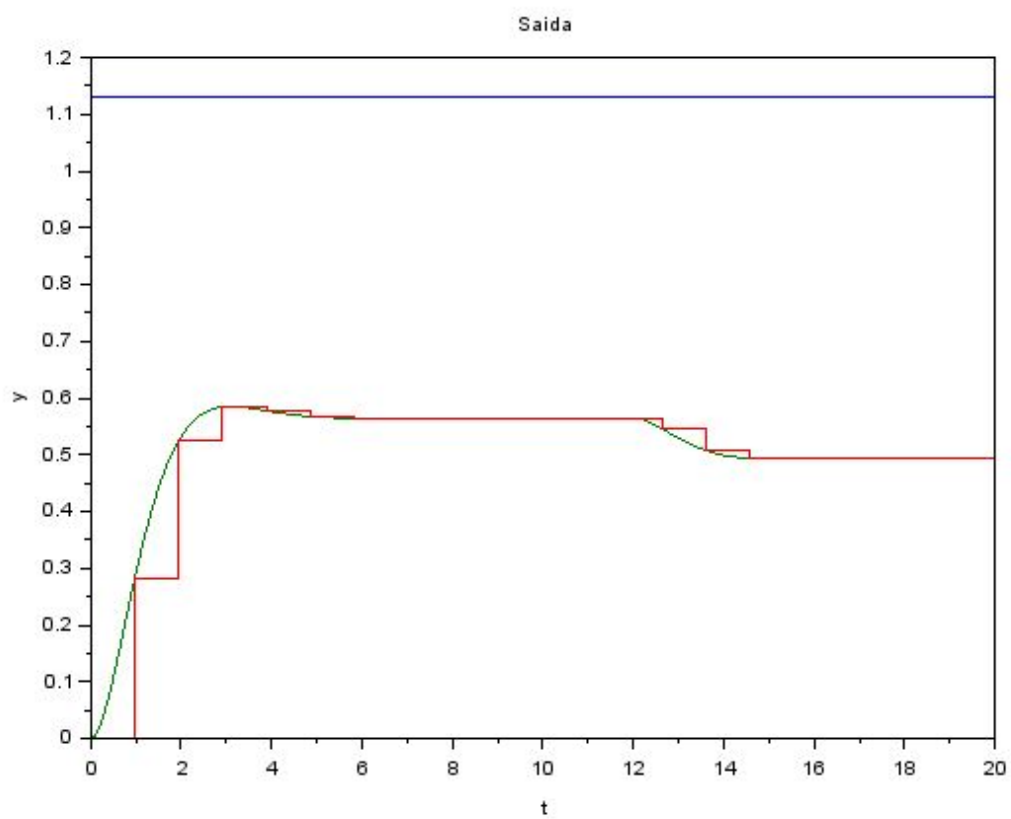


Figura 11 - Gráfico da saída

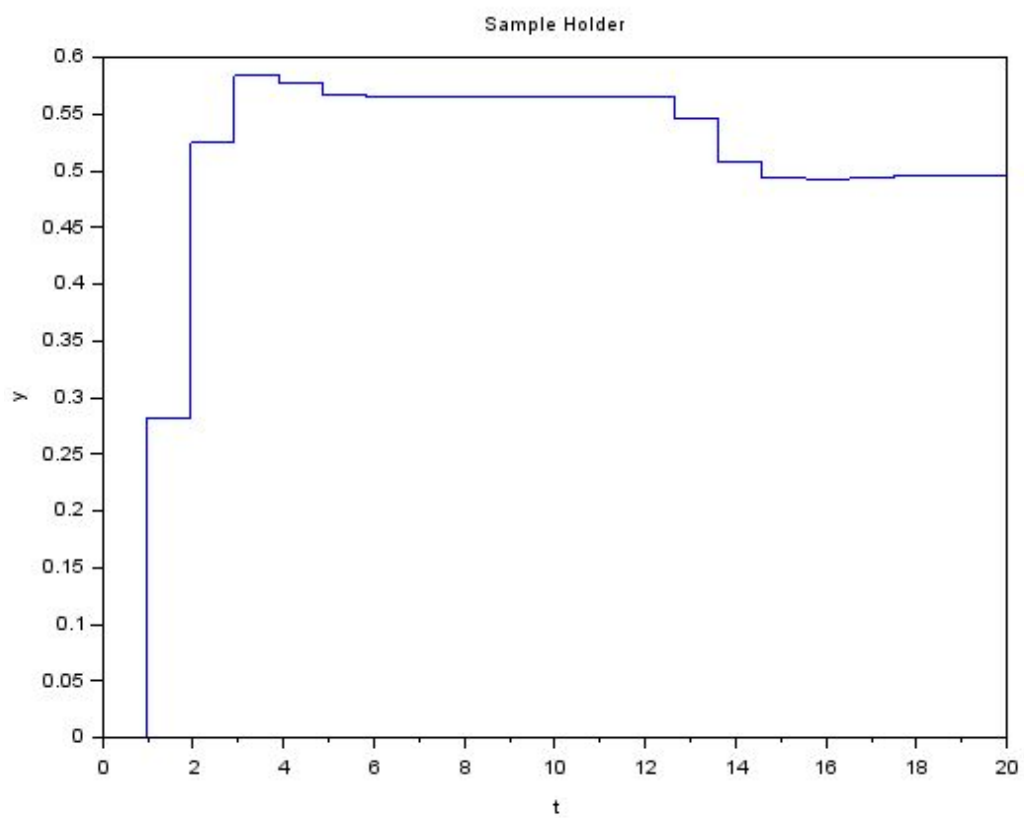


Figura 12 - Gráfico da resposta do Sample Holder

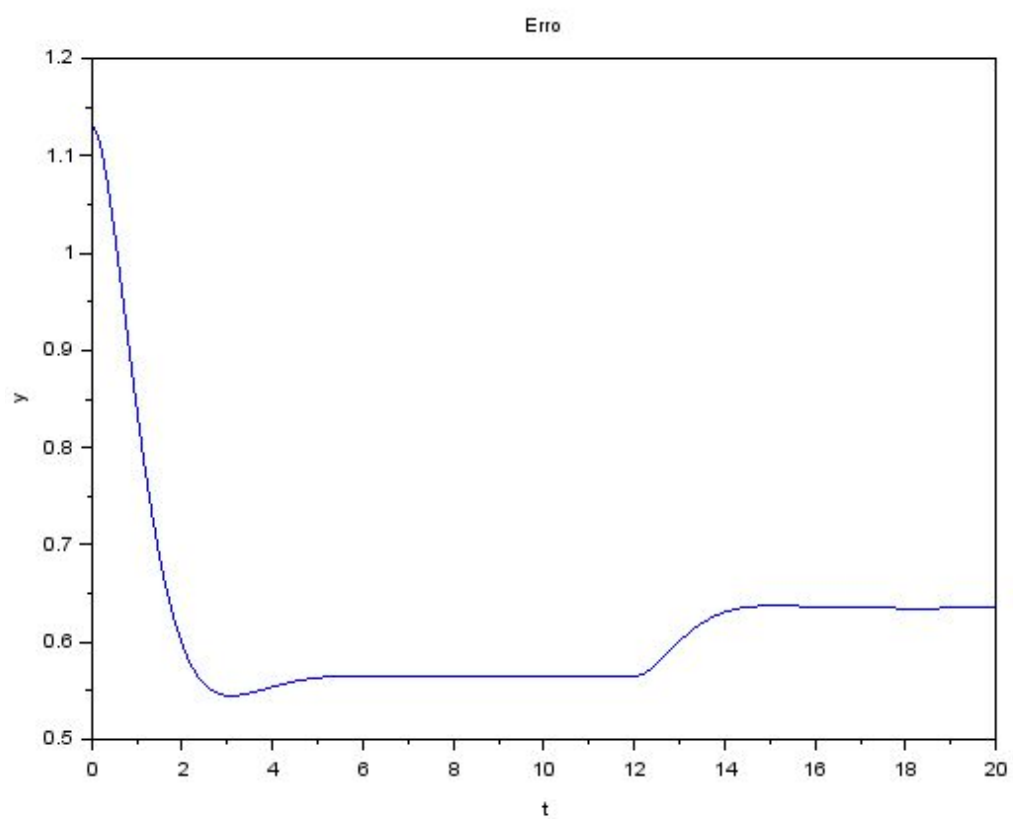


Figura 13 - Gráfico do erro

Q.02

Considere agora os seguintes casos: $K_p = 5$ e $K_p = 8$.

- **2.1** Qual o erro em regime absoluto do sistema para cada caso antes de ser aplicado o distúrbio?

Conforme já visto, pode-se obter o erro em regime absoluto antes de um distúrbio a partir da seguinte relação:

$$e_{ss} = \frac{u}{1 + K_p}$$

Sabendo que $u = 1,13V$, temos:

- $K_p = 5$:

$$e_{ss} = \frac{1.13}{1 + 5} = \frac{1.13}{6}$$
$$e_{ss} = 0.1883V$$

- $K_p = 8$:

$$e_{ss} = \frac{1.13}{1 + 8} = \frac{1.13}{9}$$
$$e_{ss} = 0.1255V$$

É possível notar que, conforme K_p aumenta, o erro diminui.

- **2.2** Qual o erro em regime absoluto para cada caso após o distúrbio ser aplicado?

Conforme já visto, pode-se obter o erro em regime absoluto depois de um distúrbio a partir da seguinte relação:

$$e_{ss,d} = -\frac{d}{1 + K_p}$$

Sabendo que $d = -0.14V$, temos:

- $K_p = 5$:

$$e_{ss,d} = -\frac{-0.14}{1 + 5} = \frac{0.14}{6}$$
$$e_{ss,d} = 0.0233V$$

Assim, o erro total é dado pela soma do erro antes do distúrbio com o erro depois do distúrbio, obtendo:

$$e = 0.1883 + 0.0233$$
$$e = 0.2116V$$

- $K_p = 8$:

$$e_{ss,d} = -\frac{-0.14}{1+8} = \frac{0.14}{9}$$

$$e_{ss,d} = 0.0155$$

Assim, o erro total é dado pela soma do erro antes do distúrbio com o erro depois do distúrbio, obtendo:

$$e = 0.1255 + 0.0155$$

$$e = 0.141$$

- **2.3** Mostre as curvas de resposta do sistema para cada caso.
 - $K_p = 5$:

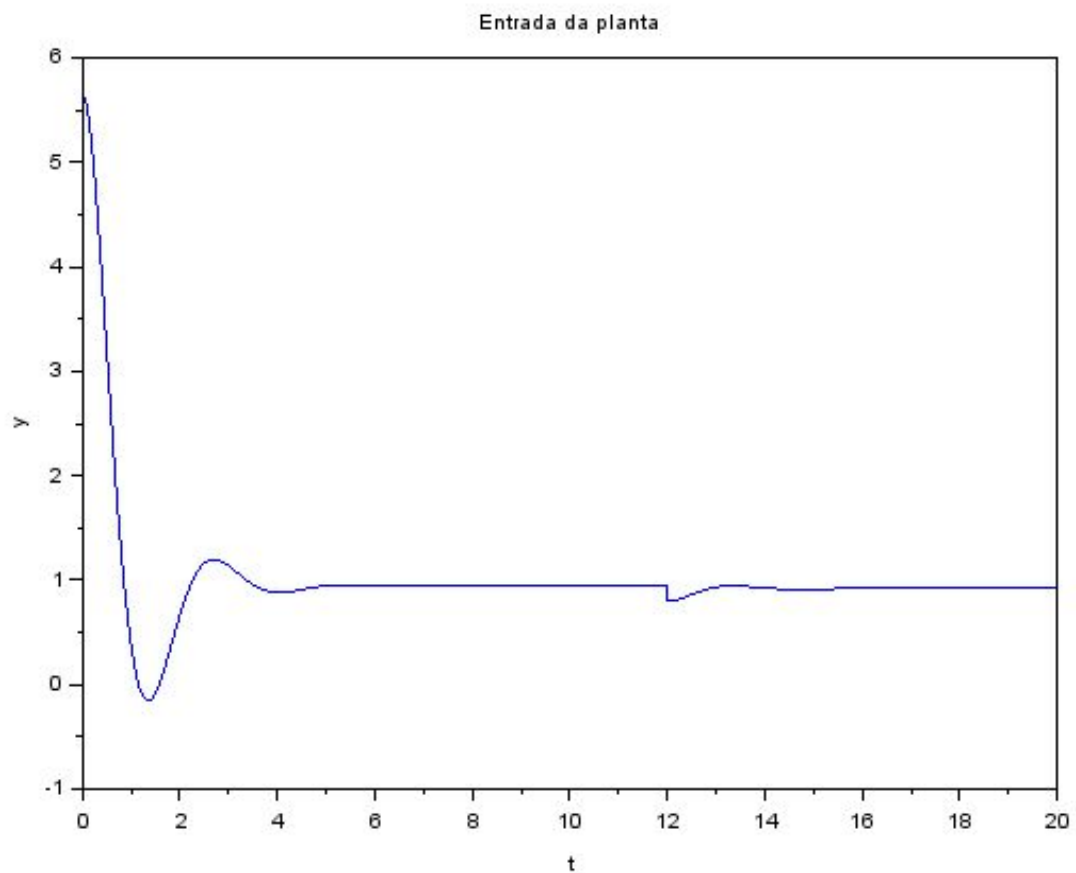


Figura 14 - Gráfico da entrada de planta para $K_p = 5$.

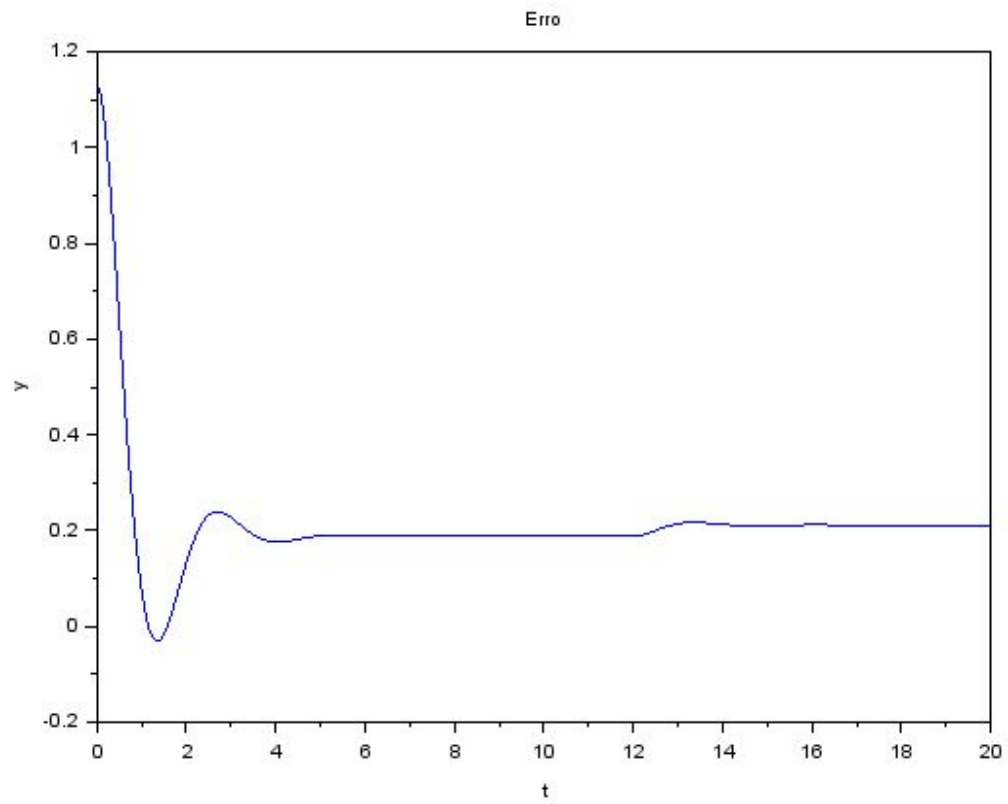


Figura 15 - Gráfico do erro para $K_p = 5$.

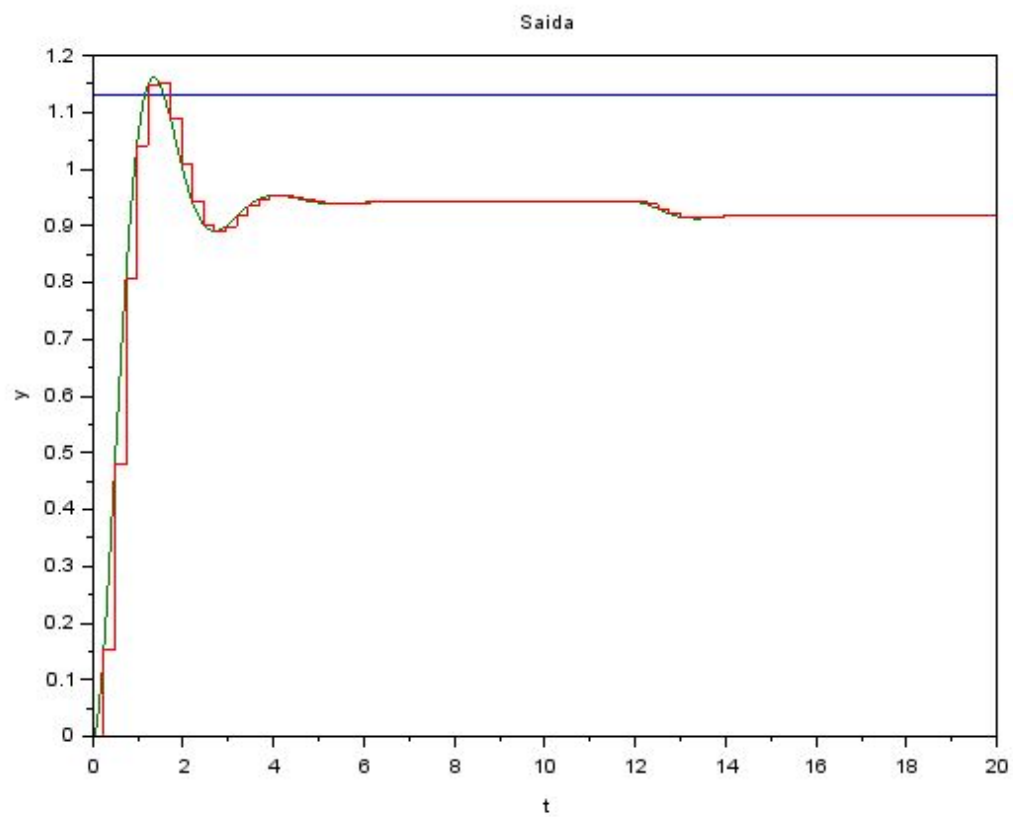


Figura 16 - Gráfico da saída para $K_p = 5$.

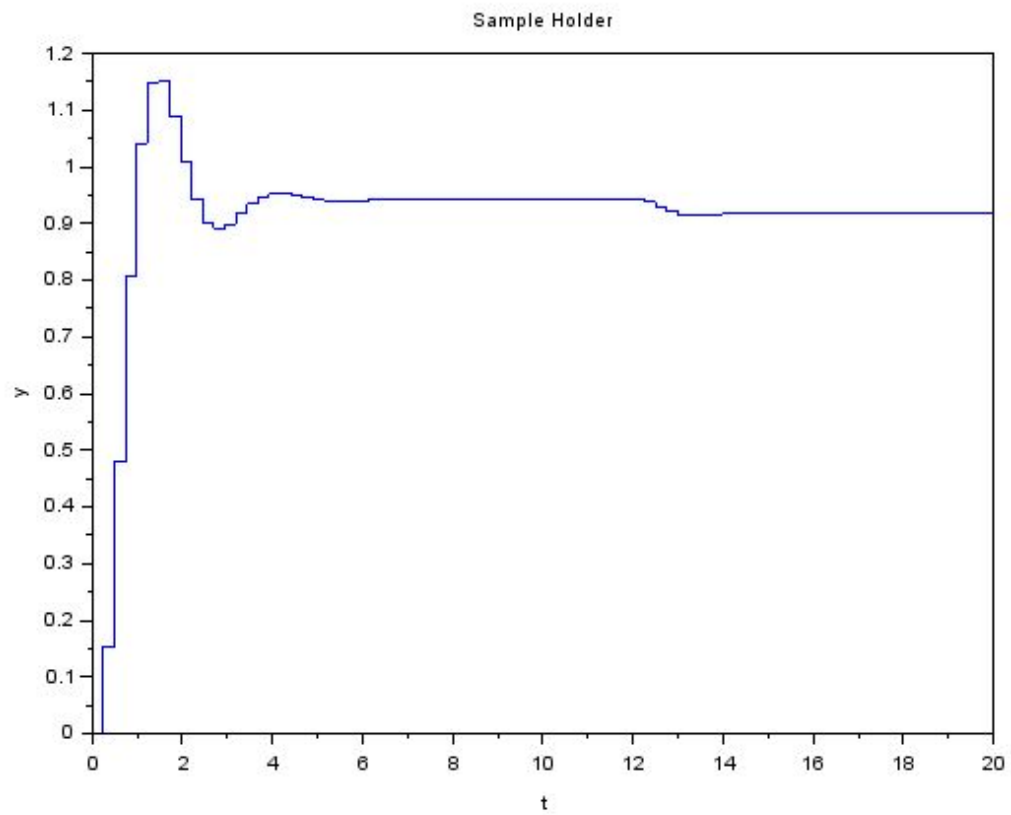


Figura 17 - Gráfico da resposta do Sample Holder para $K_p = 5$.

- $K_p = 8$:

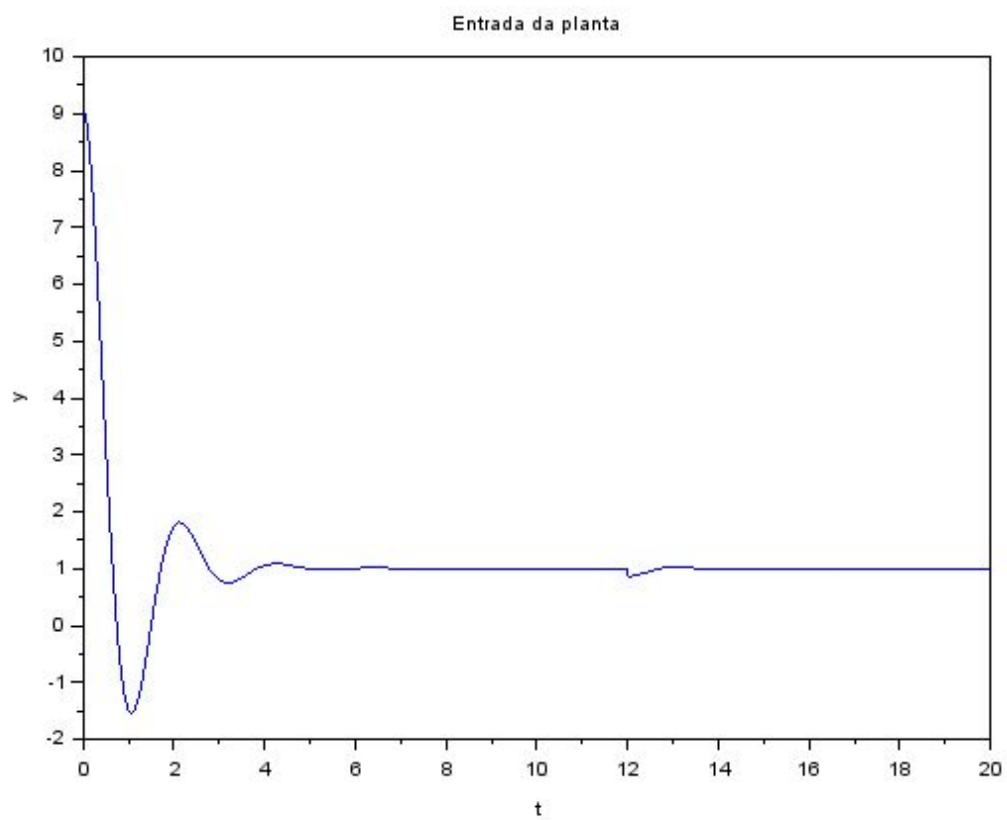


Figura 18 - Gráfico da entrada para $K_p = 8$.

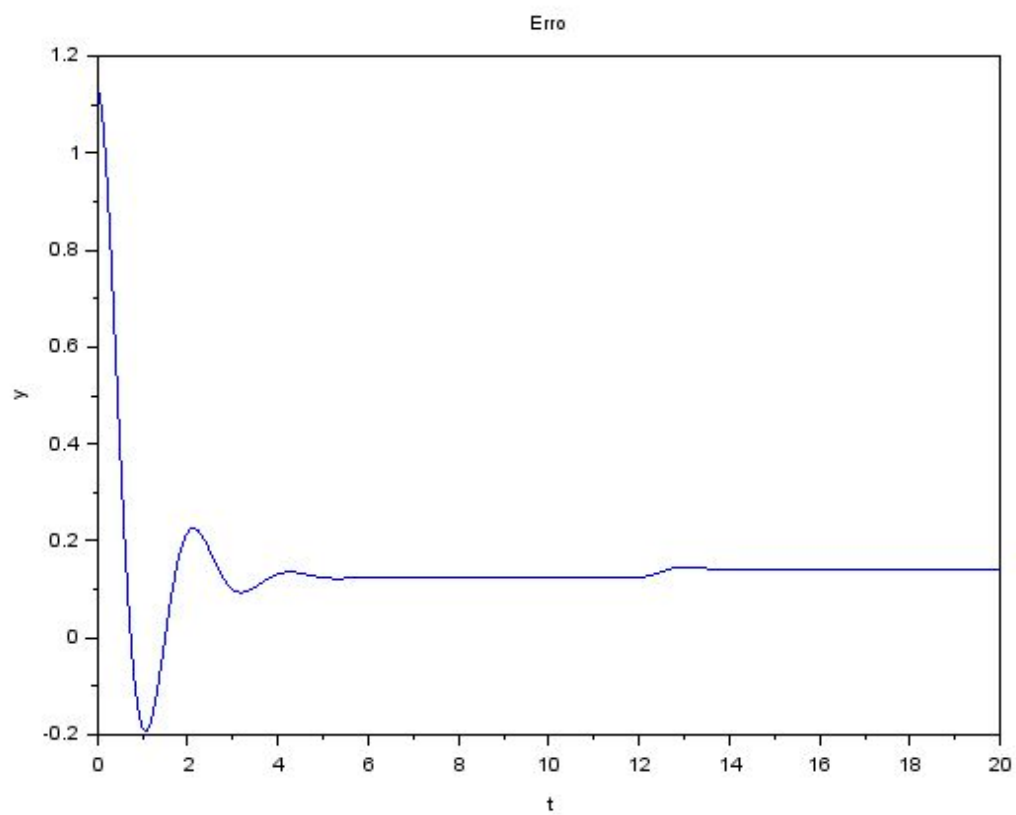


Figura 19 - Gráfico do erro para $K_p = 8$.

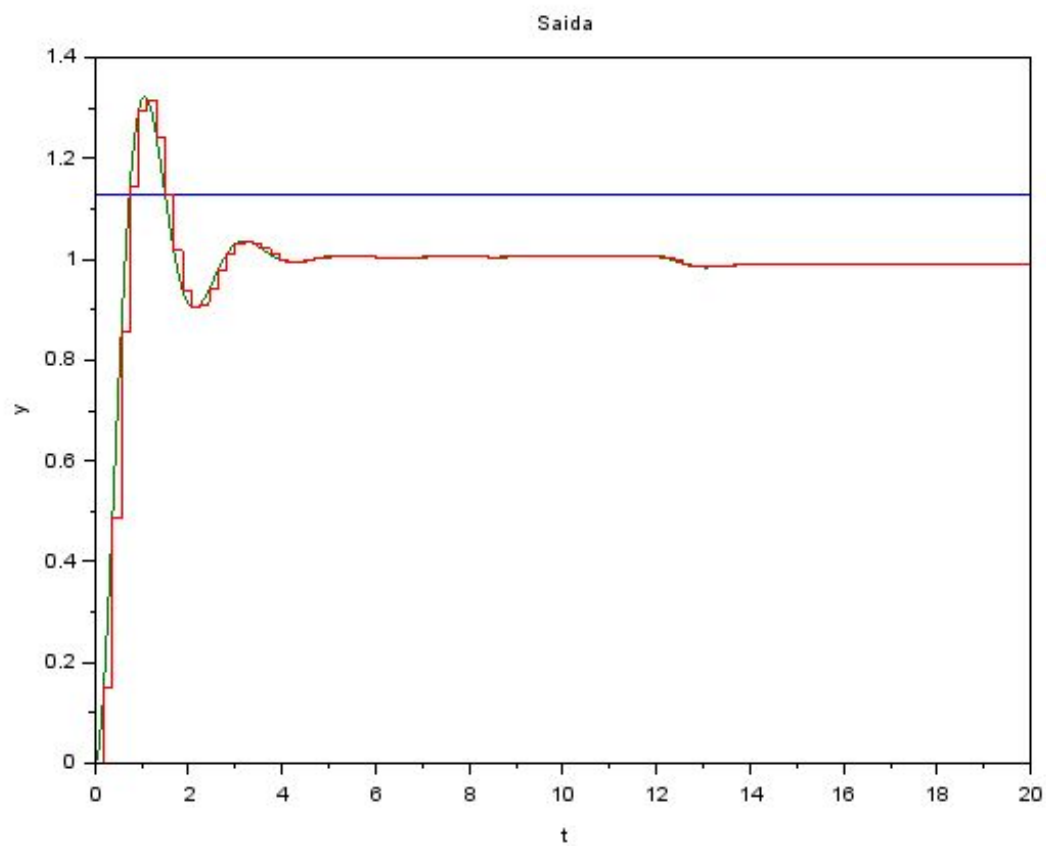


Figura 20 - Gráfico da saída para $K_p = 8$.

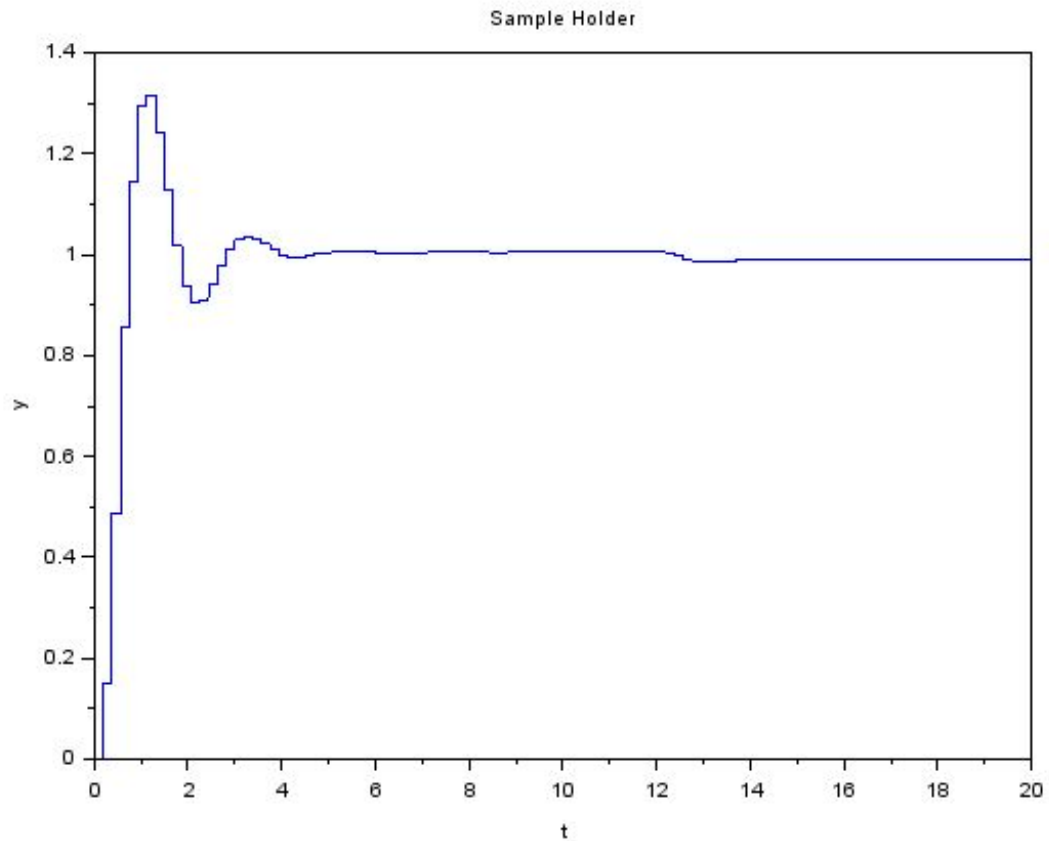


Figura 21 - Gráfico da resposta do Sample Holder para $K_p = 8$.

- **2.4** Comente se houve saturação na entrada da planta.

Diz-se que o controlador fica saturado quando a sua saída chega a um limite, c_{\min} ou c_{\max} [4]. Conforme a especificação, a entrada da planta é um sinal de tensão limitado entre $-10V \leq u(t) \leq +10V$, e como pode se notar pelas figuras 14 e 18, o sinal de entrada não ultrapassa esses limites, e com isso não temos saturação.

- **2.5** Comente sobre o efeito do aumento do ganho proporcional no valor do erro em regime, no tempo de subida e de acomodação (5%) antes do distúrbio.

Antes do distúrbio, percebe-se que os valores no erro em regime permanente diminuem, como é possível notar nas Figuras 14 e 18.

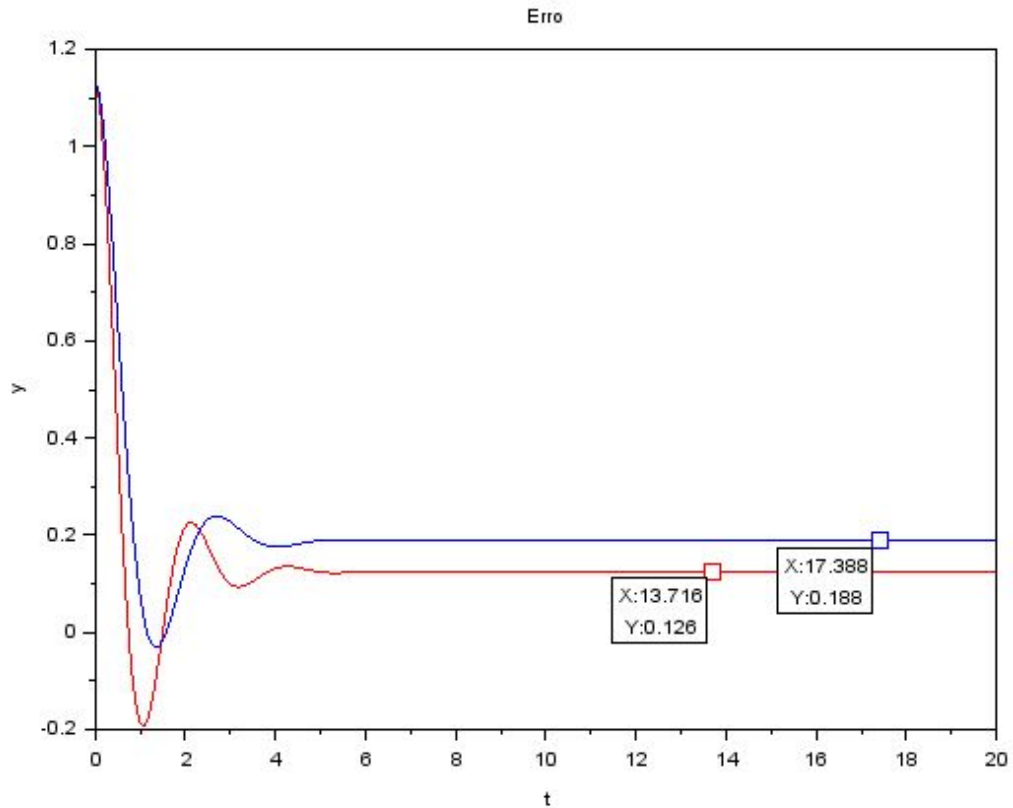


Figura 22 - Valores do erro para $K_p = 5$ (azul) e $K_p = 8$ (vermelho).

Como já foi afirmado, o tempo de subida é o tempo que a saída leva para ir de 10% até 90% do valor que converge. Na Figura 23, vemos que o valor que o sistema com $K_p = 5$ converge é de 0.942, 10% desse valor é 0.0942, sendo que este valor ocorre no tempo $t_1 = 0.188s$ e 90% é 0.8478 que ocorre no tempo $t_2 = 0.769s$. O valor que sistema com $K_p = 8$ converge é de 1, 10% desse valor é 0.1, $t_3 = 0.151s$ e 90% é 0.9, que ocorre no tempo $t_4 = 0.587s$, sendo que este valor ocorre no tempo. Assim, temos que o tempo de subida dos sistemas são dados por:

$$t_r = t_2 - t_1$$

$$t_r = 0.769 - 0.188$$

$$t_r = 0.581s$$

$$t_r = t_4 - t_3$$

$$t_r = 0.587 - 0.151$$

$$t_r = 0.436s$$

Assim, pode-se afirmar que, conforme K_p aumenta, o tempo de subida diminui.

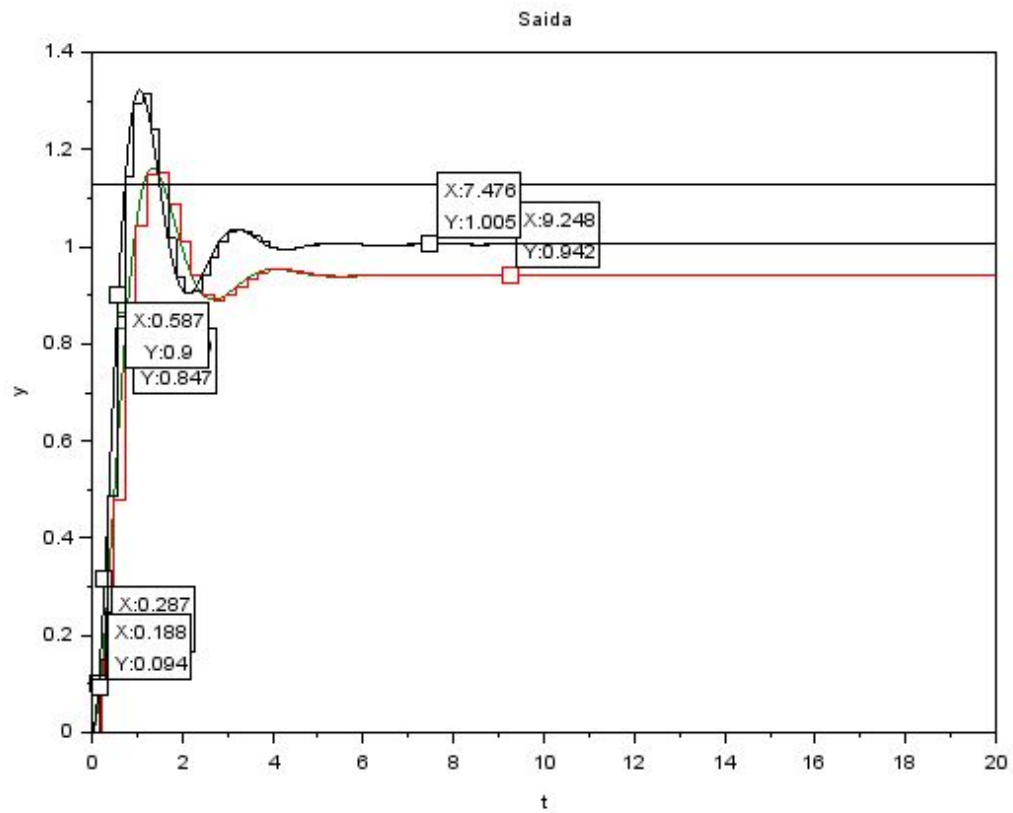


Figura 23 - Tempos de subida para $K_p = 5$ (verde) e $K_p = 8$ (preto)

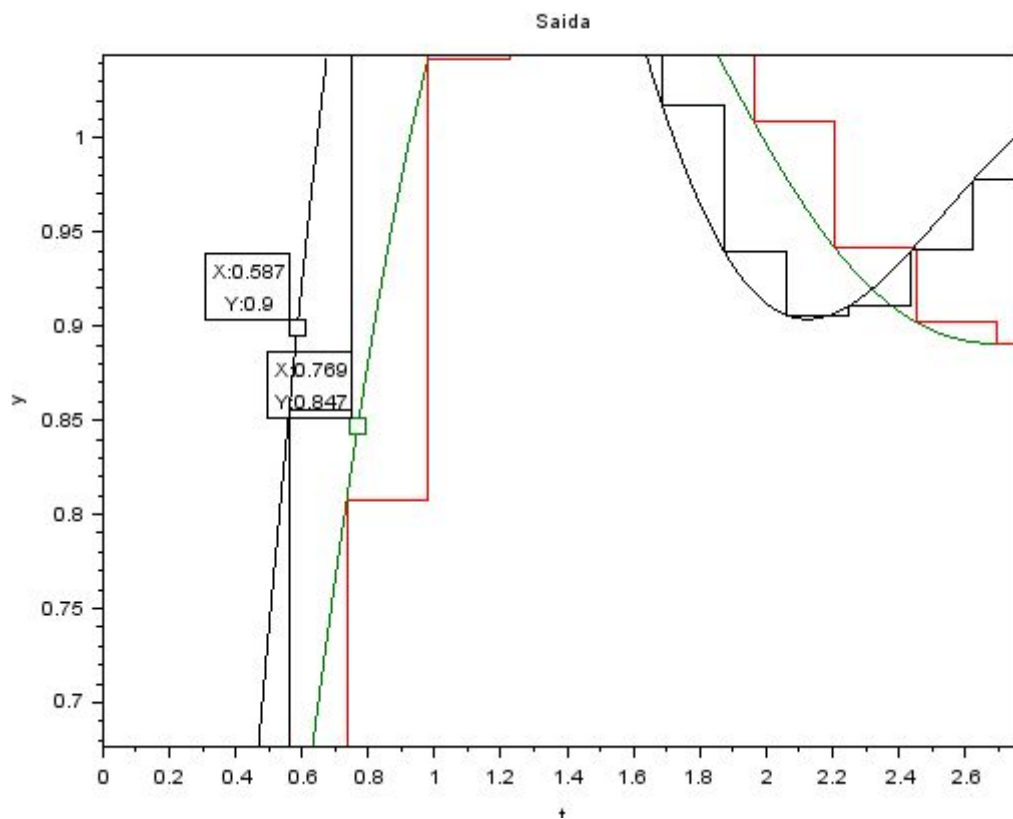


Figura 24 - 10% dos valores finais para $K_p = 5$ (verde) e $K_p = 8$ (preto)

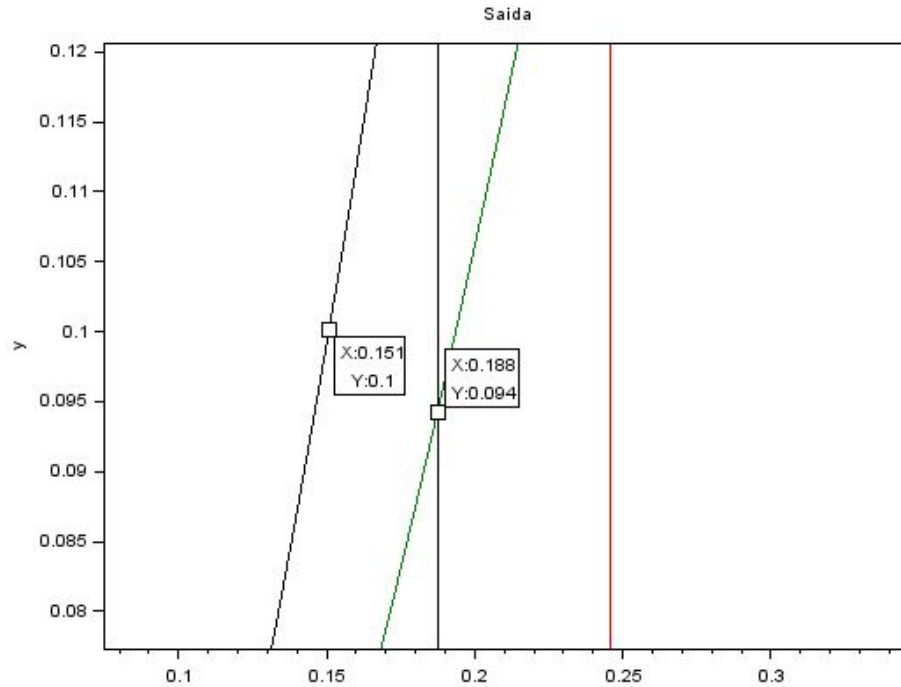


Figura 25 - 90% dos valores finais para K_p = 5 (verde) e K_p = 8 (preto)

De acordo com a Figura 23, pode-se perceber que as mudanças de K_p geram pequenas mudanças no tempo de acomodação, isto é, quando K_p = 5, vemos que o valor no tempo de acomodação está na faixa dos 5% de y = 0.942, e quando K_p = 8, o valor no tempo de acomodação é exatamente igual ao valor final.

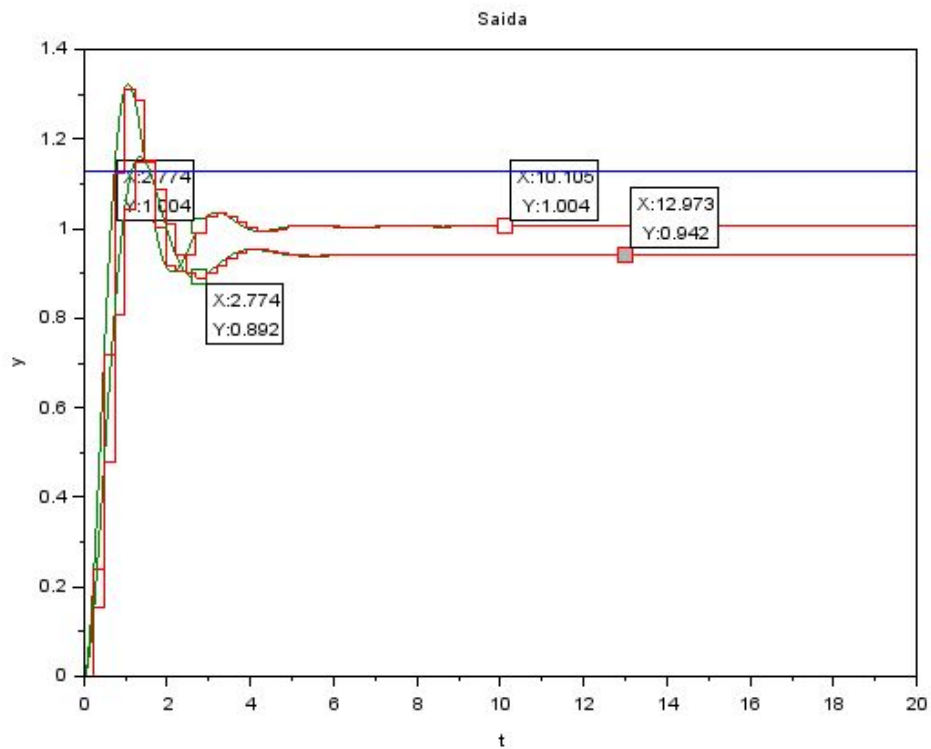


Figura 26 - Saídas sobrepostas para análise dos tempos de acomodação, curva mais abaixo K_p = 5 e curva mais acima K_p = 8.

- **2.6** Comente se foi possível utilizar o período de amostragem T_0 definido no item anterior para estes casos. Justifique qualquer mudança no valor de T_0 .

Com $K_p = 5$ temos o seguinte gráfico de bode:

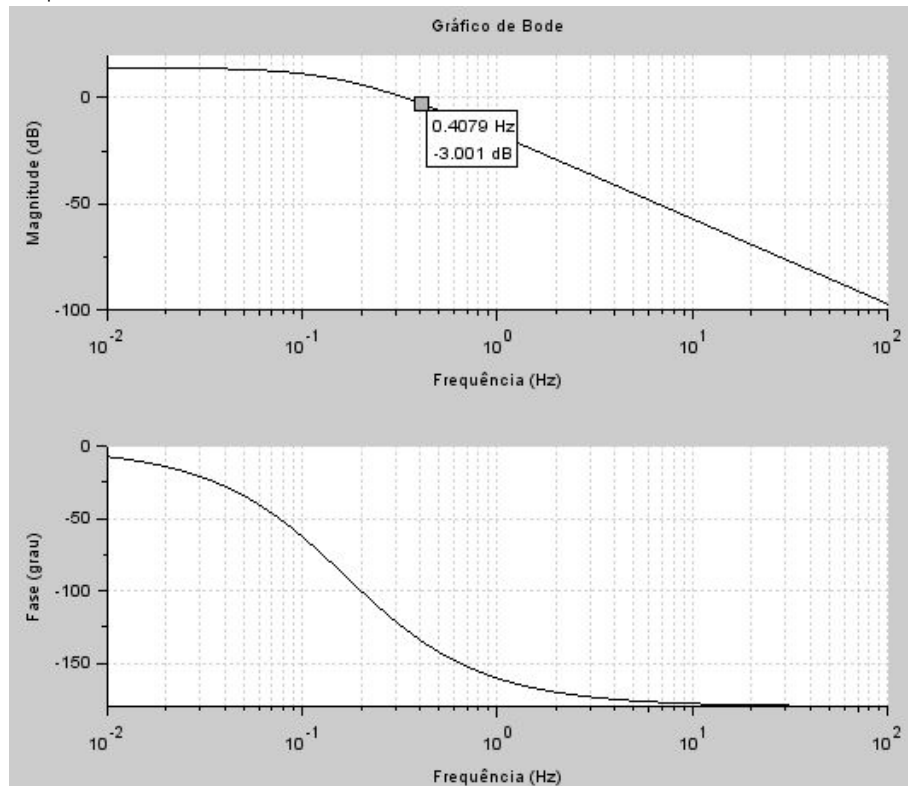


Figura 27 - Diagrama de Bode para $K_p = 5$.

Não foi possível utilizar o período de amostragem T_0 definido no item anterior, pois o ganho do sistema que cai 3dB em relação ao ganho do sistema referente a $\omega \rightarrow 0$ é diferente. Obtendo, então, $\omega_b = 0.4079$ [Hz] ou 0.0649 [rad/s]. Considerando $F_n = 10\omega_b$, temos:

- $F_n = 4.0790$ Hz
- $F_n = 0.6490$ rad/s
- $T_0 = 1/F_n = 0.2451$ s

Com $K_p = 8$, temos o seguinte gráfico de bode:

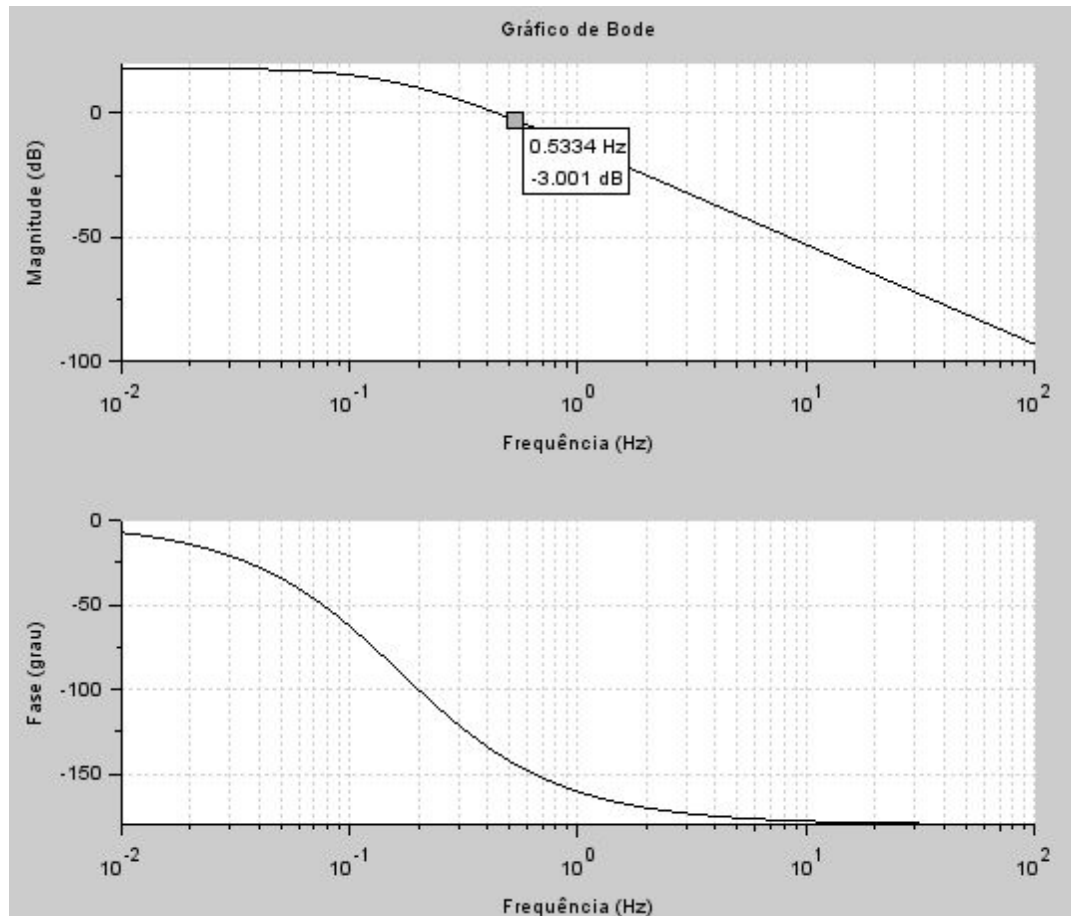


Figura 28 - Diagrama de Bode para $K_p = 8$.

Não foi possível utilizar o período de amostragem T_0 definido no item anterior pois o ganho do sistema que cai 3dB em relação ao ganho do sistema referente a $\omega \rightarrow 0$ é diferente. Obtendo, então, $\omega_b = 0.5334$ [Hz] ou 0.0848 [rad/s]. Considerando $F_n = 10\omega_b$, temos:

- $F_n = 5.3340$ Hz
- $F_n = 0.8480$ rad/s
- $T_0 = 1/F_n = 0.1874$ s

Q.03

- **3.1** Encontre o valor de K_p necessário para que o erro de regime permanente (antes do distúrbio) seja igual a $e_{ss}\%$ dado em porcentagem do valor de u . Por exemplo, se $e_{ss}\% = 10\%$ e $u = 1V$, então o valor absoluto do erro deve ser 0.1.

Como no nosso caso $u = 1.13V$, então $e_{ss}\% = 11.3\%$, o valor do erro absoluto deve ser 0.113. Da fórmula do erro, podemos isolar K_p e ter seu resultado como:

$$e_{ss} = \frac{u}{1 + K_p}$$

$$K_p = \frac{u - e_{ss}}{e_{ss}}$$

$$K_p = \frac{1.13 - 0.113}{0.113}$$

$$K_p = 9$$

- **3.2** Verifique se a taxa de amostragem estabelecida no primeiro item é adequada para o processo de malha fechada com este valor de ganho. Explique.

Com $K_p = 9$ temos o seguinte gráfico de bode:

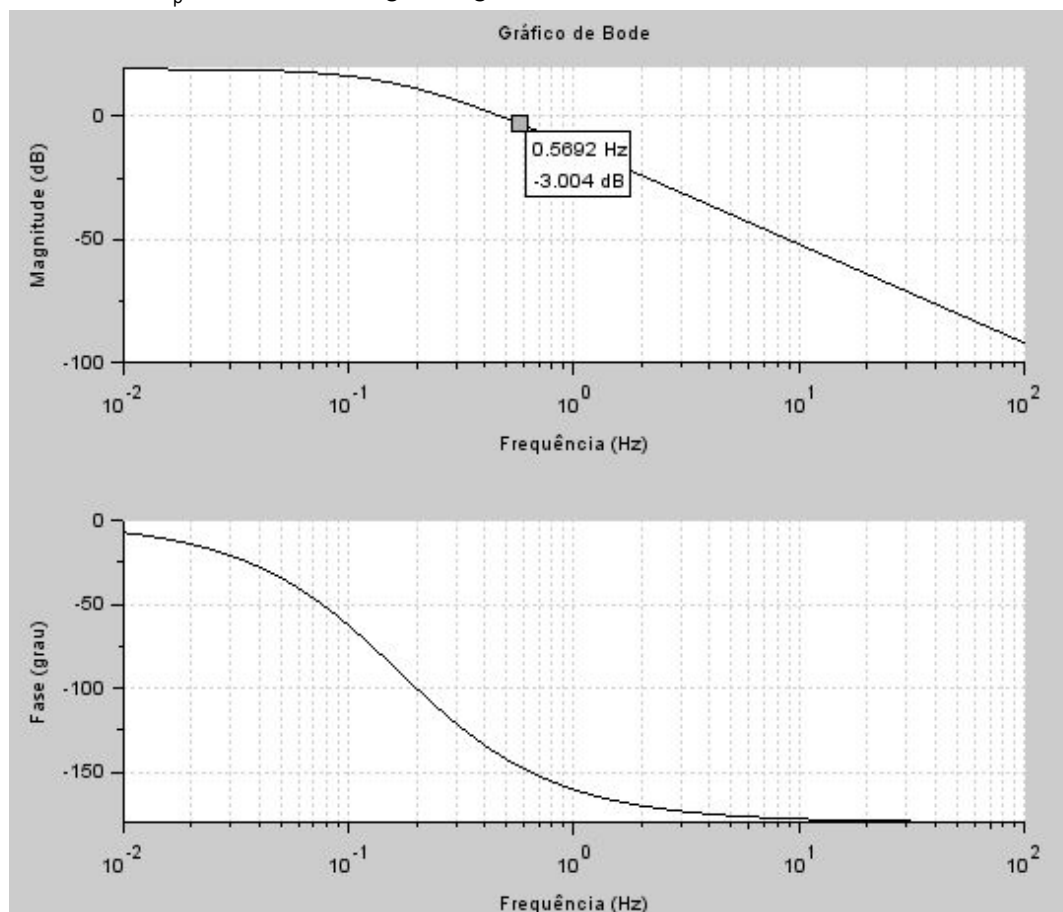


Figura 29 - Diagrama de Bode para $K_p = 9$.

Com isso é necessário fazer uma alteração na taxa de amostragem estabelecida no primeiro item. Obtendo, então, $\omega_b = 0.5692$ [Hz] ou 0.09059 [rad/s]. Considerando $F_n = 10\omega_b$, temos:

- $F_n = 5.6920$ Hz
- $F_n = 0.9059$ rad/s
- $T_0 = 1/F_n = 0.1756$ s

- **3.3** Mostra as curvas de resposta do sistema.

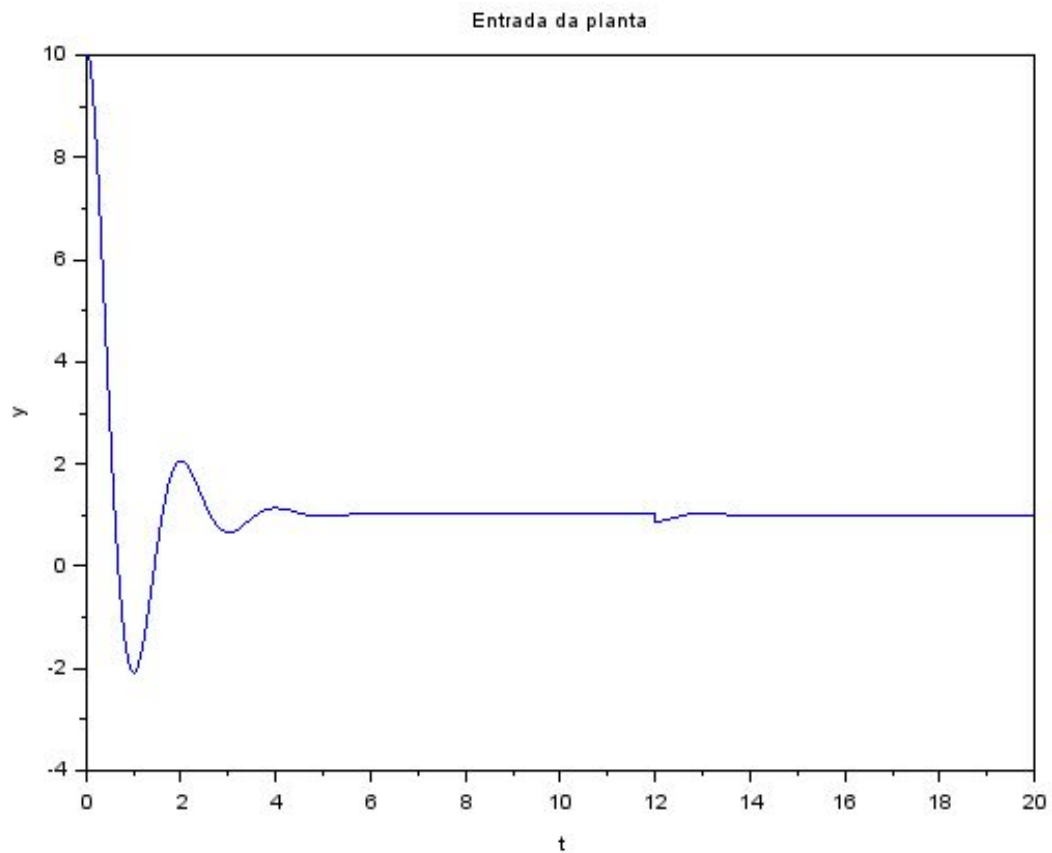


Figura 30 - Gráfico da entrada da planta para $K_p = 9$.

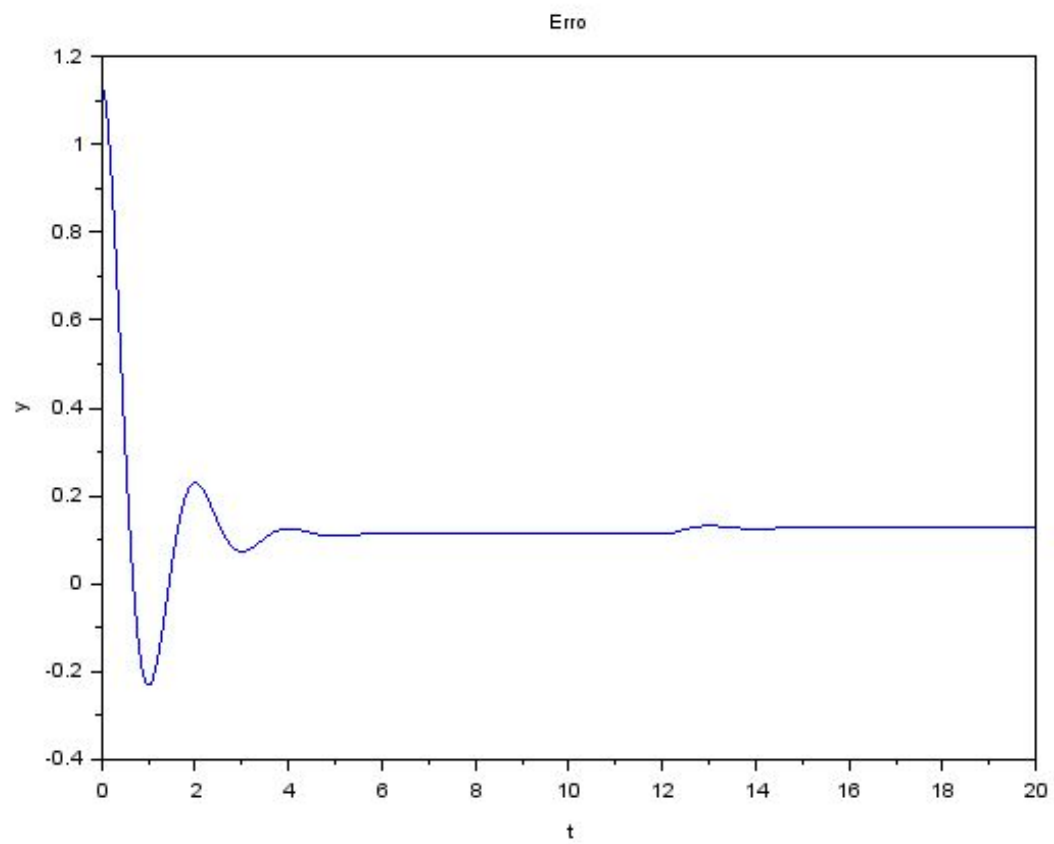


Figura 31 - Gráfico do erro para $K_p = 9$.

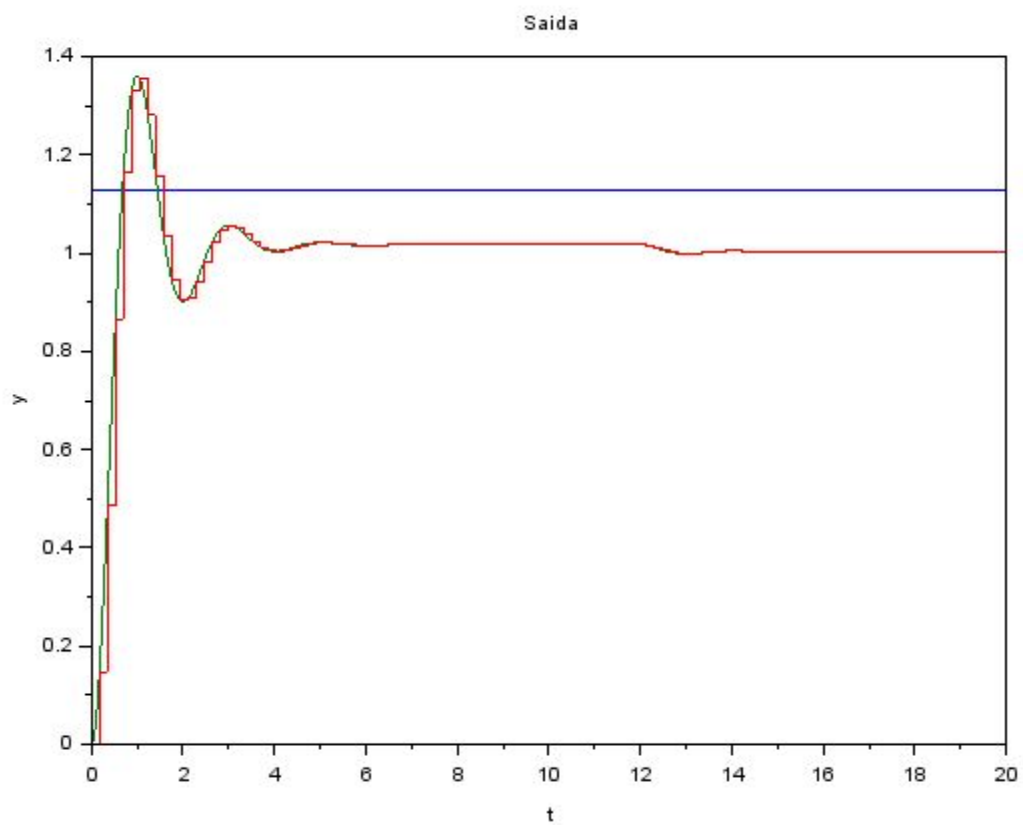


Figura 32 - Gráfico da saída para $K_p = 9$.

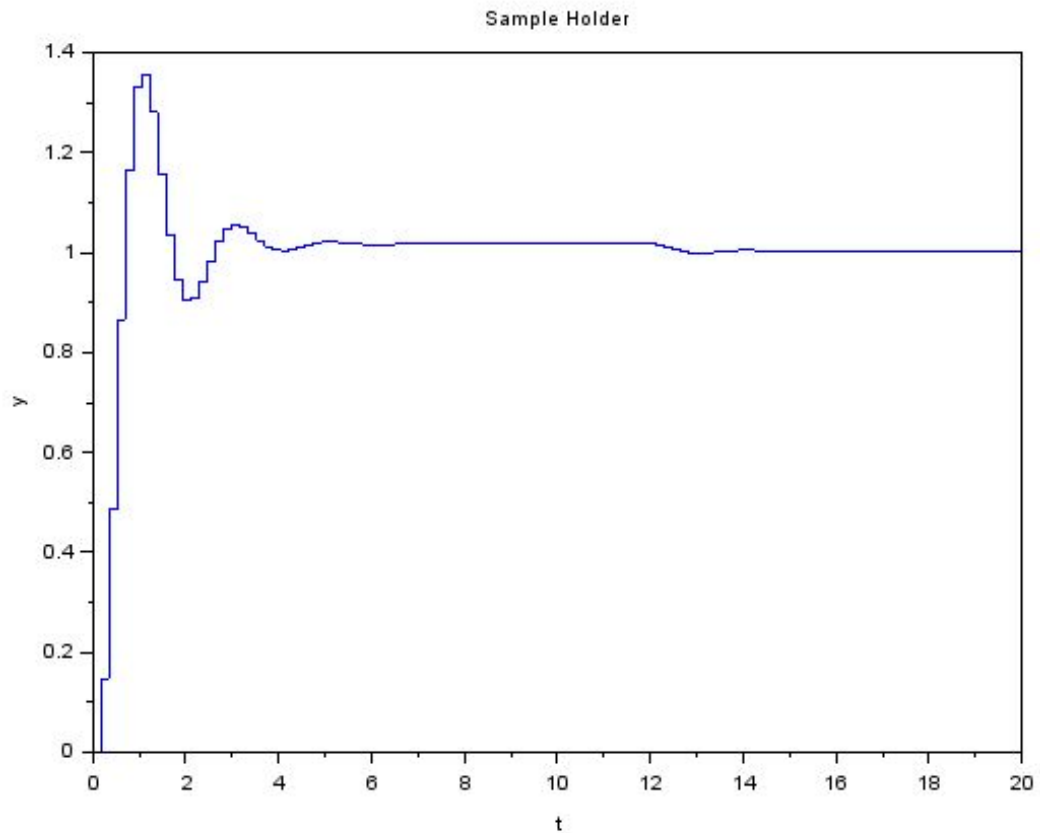


Figura 33 - Gráfico da resposta do Sample Holder para $K_p = 9$.

- **3.4** Qual o tempo de subida da resposta do sistema de malha fechada antes do distúrbio?

O tempo de subida é o tempo que a saída leva para ir de 10% até 90% do valor que converge. Na Figura 25, vemos que o valor que o sistema converge é de 1.017, 10% desse valor é, aproximadamente, 0.1, sendo que este valor ocorre no tempo $t_1 = 0.142s$ e 90% é, aproximadamente, 0.9, que ocorre no tempo $t_2 = 0.544s$. Assim, temos que o tempo de subida é dado por:

$$t_r = t_2 - t_1$$

$$t_r = 0.544 - 0.142$$

$$t_r = 0.402s$$

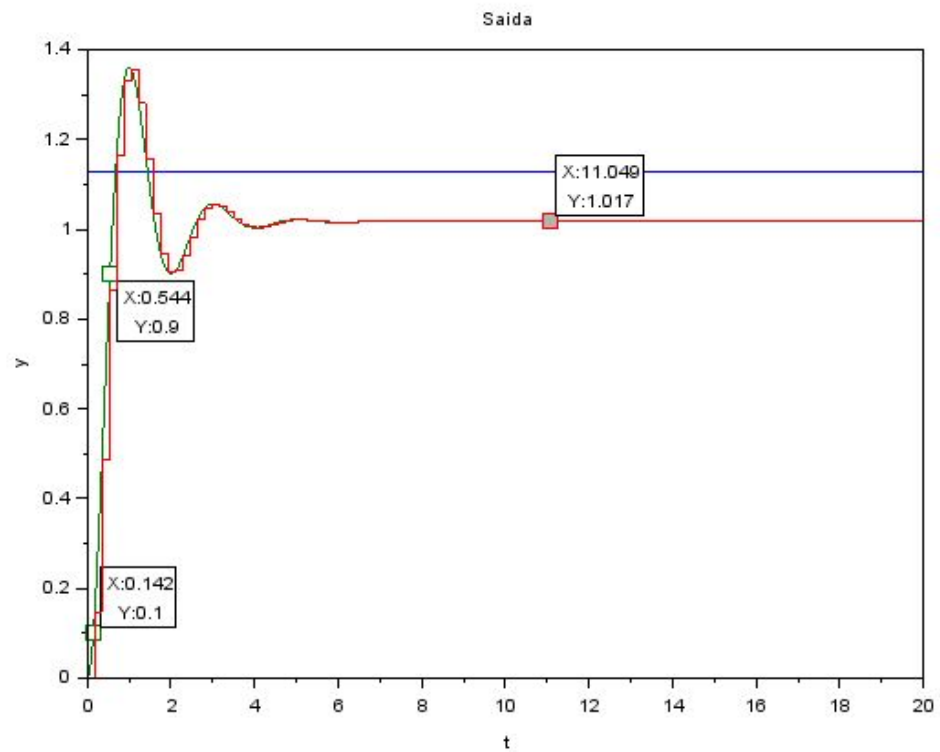


Figura 34 - Gráfico da saída com os valores de 10% e 90% marcados.

- **3.5** Qual o tempo de acomodação do sistema de malha fechada (critério de 5%) antes do distúrbio?

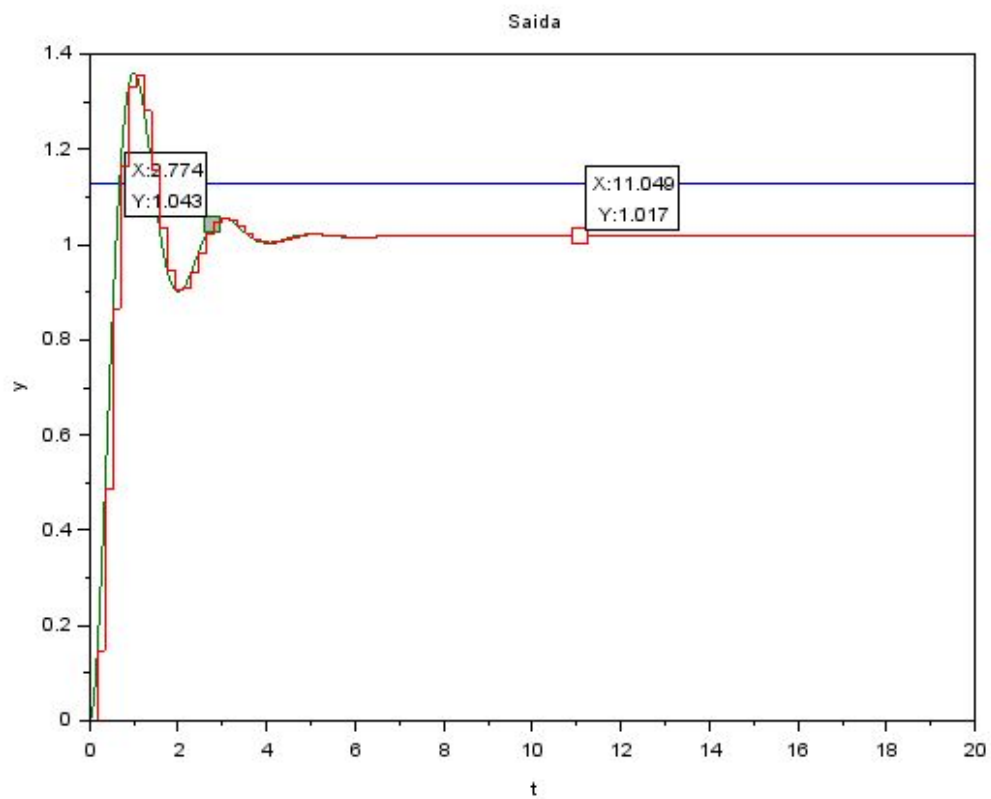


Figura 35 - tempo de acomodação

Referências Bibliográficas:

[1]:

<http://www.ece.ufrgs.br/~fetter/eng04037/spec.pdf>

[2]:

https://www.google.com/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=&ved=2ahUKEwiJmcfHmIXsAhU5ELkGHbdXDS0QFjAAegQIBRAB&url=http%3A%2F%2Fpaginapessoal.utfpr.edu.br%2Furig%2Fcontrole%2520II%2Fespecificacoes.pdf%2Fat_download%2Ffile&usg=AOvVaw3VqRurhcz67QfIE1afcStO

[3]:

Gene F. Franklin, J. David Powell, and Abbas Emami-Naeini. Sistemas de Controle para Engenharia. Grupo A / Bookman, 6 edition, 2013.

[4]:

https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/4197122/mod_resource/content/1/4-feedback.pdf