

Задание №4. Интерполирование функций

Цель задания: практическое освоение методов интерполирования функций

Часть 1. Полиномы Лагранжа и Ньютона

1. Программно реализуйте процесс построения:

– интерполяционного полинома в форме Лагранжа:

в двух вариантах:

1) по n равноотстоящим узлам для функции $f(x)$ на интервале $[a, b]$
(обозначение: $L_n(x)$);

2) по n «оптимальным» узлам (см. (3.2)) для функции $f(x)$ на интервале $[a, b]$
(обозначение: $L_{opt_n}(x)$):

– интерполяционного полинома в форме Ньютона

в двух вариантах:

1) по n равноотстоящим узлам для функции $f(x)$ на интервале $[a, b]$
(обозначение: $N_n(x)$);

2) по n «оптимальным» узлам (см. (3.2)) для функции $f(x)$ на интервале $[a, b]$
(обозначение: $N_{opt_n}(x)$):

$$x_i = \frac{1}{2} \left[(b - a) \cos \frac{(2i + 1)}{2(n + 1)} \pi + (b + a) \right], \quad i = \overline{0, n}. \quad (3.2)$$

Примечание:

1) интерполируемая функция $f(x)$ указана в Вашем варианте задания (см. Приложение). № варианта = Ваш № в списке группы.

2) $[a, b]$ – любой интервал непрерывности из области определения функции $f(x)$ на Ваш выбор.

2. Найти максимальные отклонения интерполяционных полиномов (Лагранжа, Ньютона) от функции $f(x)$ для разного количества узлов. Максимальное отклонение определяется по формуле:

$$RL_n = \max (|f(t_i) - L_n(t_i)|), \quad i = 1..m, \quad m \gg n.$$

$$RN_n = \max (|f(t_i) - N_n(t_i)|), \quad i = 1..m, \quad m \gg n.$$

где

n – количество узлов интерполирования, по которым строится интерполяционный полином;

m – количество точек разбиения интервала интерполирования, в которых определяется отклонение полинома от функции $f(x)$ ($m \gg n$).

Заполнить таблицы (автоматически в Вашей программной реализации) :

Таблица №1. Поведение интерполяционного полинома Лагранжа при увеличении количества узлов интерполирования.

Количество узлов (n)	Количество проверочных точек (m)	Максимальное отклонение (RL_n)	Максимальное отклонение (RL_{opt_n})

Таблица №2. Поведение интерполяционного полинома Ньютона при увеличении количества узлов интерполирования.

Количество узлов (n)	Количество проверочных точек (m)	Максимальное отклонение (RN_n)	Максимальное отклонение (RN_{opt_n})

3. Построить графики интерполируемой функции $f(x)$ и интерполяционных полиномов для разного количества узлов интерполирования, например:

График №1: $f(x), L_3(x), L_{10}(x), \dots, L_{50}(x)$

График №2: $f(x), L_{opt_3}(x), L_{opt_{10}}(x), \dots, L_{opt_{50}}(x)$

...

или

График №1: $f(x), L_3(x), L_{opt_3}(x)$

График №2: $f(x), L_{10}(x), L_{opt_{10}}(x)$

...

Аналогичные графики построить для полиномов Ньютона.

Часть 2. Сплаины

1. Программно реализуйте процесс построения:

– интерполяционных сплайнов $S_{1,0}(x)$, $S_{2,1}(x)$, $S_{3,2}(x)$:

по n равноотстоящим узлам для функции $f(x)$ на интервале $[a, b]$ (обозначение: $S_{m,p}^n$);

2. Найти максимальные отклонения интерполяционных сплайнов ($S_{1,0}(x)$, $S_{2,1}(x)$, $S_{3,2}(x)$) от функции $f(x)$ для разного количества узлов. Максимальное отклонение определяется по формуле:

$$RS_{m,p}^n = \max (|f(t_i) - S_{m,p}^n(t_i)|), \quad i = 1 \dots k, \quad k \gg n.$$

где

n – количество узлов интерполирования, по которым строится интерполяционный сплайн;

k – количество точек разбиения интервала интерполирования, в которых определяется отклонение сплайна от функции $f(x)$ ($k \gg n$).

Заполнить таблицы (автоматически в Вашей программной реализации) :

Таблица №3. Поведение интерполяционных сплайнов при увеличении количества узлов интерполирования.

Количество узлов (n)	Количество проверочных точек (k)	Максимальное отклонение ($RS_{m,p}^n$)

3. Построить графики интерполяционных сплайнов ($S_{1,0}(x)$, $S_{2,1}(x)$, $S_{3,2}(x)$) для некоторых значений n .

4. Построить графики распределения абсолютной погрешности на интервале интерполирования для кубического сплайна $S_{3,2}$ и полинома Лагранжа (или Ньютона) по равноотстоящим узлам при некоторых значениях n .

Варианты функций для выполнения задания

- | | |
|---|---|
| 1. $f(x) = x - \sin x - 0.25$; | 13. $f(x) = x \ln(x + 1)$; |
| 2. $f(x) = x^3 - e^x + 1$; | 14. $f(x) = x^2 - \sin 10x$; |
| 3. $f(x) = \sqrt{x} + \cos x$; | 15. $f(x) = \operatorname{ctg} x - x$; |
| 4. $f(x) = x^2 + 1 - \arccos x$; | 16. $f(x) = \operatorname{tg} 3x + 0.4 - x^2$; |
| 5. $f(x) = \lg x + \frac{7}{2x+6}$; | 17. $f(x) = x^2 + 1 - \operatorname{tg} x$; |
| 6. $f(x) = \operatorname{tg}(0.5x + 0.2) - x^2$; | 18. $f(x) = x^2 - 1 - \ln x$; |
| 7. $f(x) = 3x - \cos x - 1$; | 19. $f(x) = 0.5^x + 1 - (x - 2)^2$; |
| 8. $f(x) = x + \lg x.5$; | 20. $f(x) = (x + 3) \cos x - 1$; |
| 9. $f(x) = x^2 - \arcsin(x - 0.2)$; | 21. $f(x) = x^2 \cos 2x + 1$; |
| 10. $f(x) = x^2 + 4 \sin x - 2$; | 22. $f(x) = \cos(x + 0.3) - x^2$; |
| 11. $f(x) = \operatorname{ctg} x + x^2$; | 23. $f(x) = 2^x(x - 1)^2 - 2$; |
| 12. $f(x) = \operatorname{tg} x - \cos x + 0.1$; | 24. $f(x) = x \ln(x + 1) - 0.5$. |