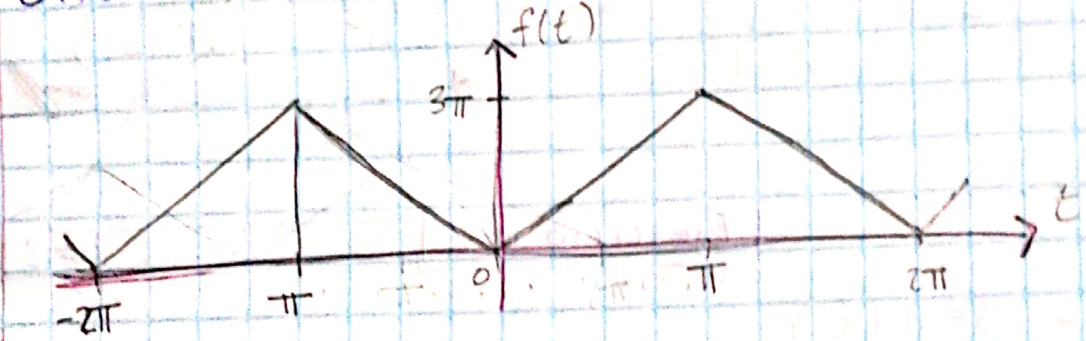
Series de Medio Rango

Ejercicio #1 — #1

$f(t) = 3t \quad , \quad 0 < t < \pi$

Extensión Periódica adecuada:



$T = 2\pi$

Serie de medio rango en Cosenos

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2n\pi t}{T}\right)$$

donde: $a_0 = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\,dt$

$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos\left(\frac{2n\pi t}{T}\right)dt$$

$T = 2\pi$

Sustituyendo

$$a_0 = \frac{4}{2\pi}\int_0^{\pi} 3t\,dt = 3\pi$$

$a_n = \frac{4}{2\pi}\int_0^{\pi} 3t\cos(nt)\,dt$ para $n \in \mathbb{Z} \wedge n \neq \emptyset$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\left[\frac{3(-1)^n}{n^2} - \frac{3}{n^2}\right]$$

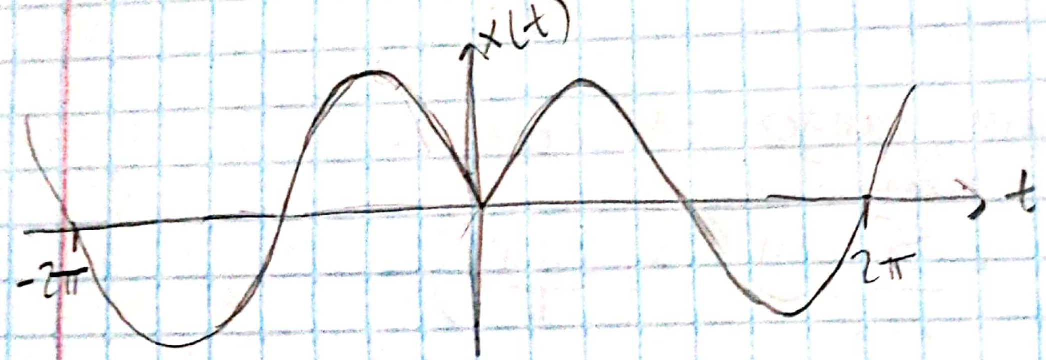
$$f(t) = \frac{3\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{2\cos(nt)}{\pi}\left[\frac{3(-1)^n}{n^2} - \frac{3}{n^2}\right]\right\}$$

$$f(t) = \frac{3\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{2\cos(nt)}{\pi}\left[\frac{3(-1)^n}{n^2} - \frac{3}{n^2}\right]\right\}$$

Ejercicio # 2

#2

$$x(t) = \text{sen}(t)$$



$T = 4\pi$

Realizamos una extensión periodica par de la función seno para obtener su representación de medio rango en cosenos.

entonces:

$$a_n = \frac{\cancel{4}^{1}}{\cancel{4}\pi}\int_0^{2\pi} \text{sen}(t)\cos\left(\frac{nt}{2}\right)dt$$

$$a_n = \begin{cases} \varnothing & \text{para } n \neq 2 \\ \left(\frac{4(-1)^n}{n^2-4} - \frac{4}{n^2-4}\right) & \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\,dt$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi(2)} sen(t)\,dt = \emptyset$$

$a_n = \emptyset$ para $n = 2$

$a_n = \frac{8}{3\pi}$ para $n = 1$, sustituyendo

$$\frac{8}{3\pi}\cos\left(\frac{t}{2}\right)$$

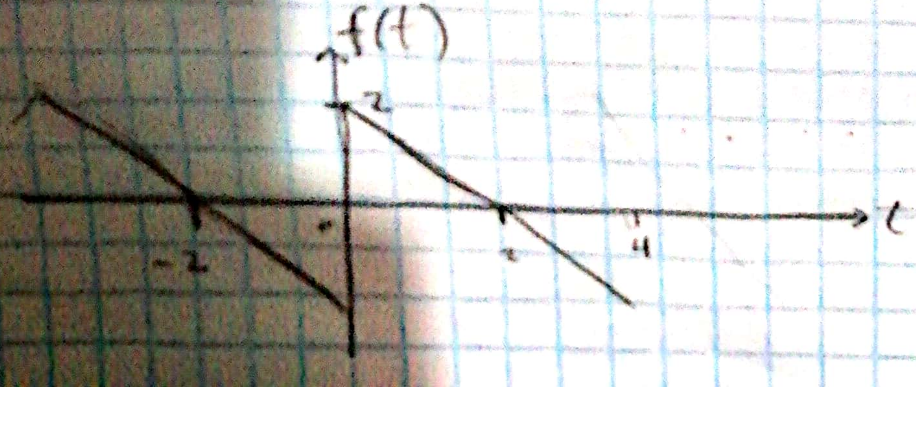
Entonces:

$$f(t) = \frac{8}{3\pi}\cos\left(\frac{t}{2}\right) + \sum_{n=3}^{\infty}\left\{\left[\frac{4(-1)^n}{n^2-4} - \frac{4}{n^2-4}\right]\frac{\cos(nt/2)}{\pi}\right.$$

$$f(t) = \frac{8}{3\pi}\cos\left(\frac{t}{2}\right) + \sum_{n=3}^{\infty}\left\{\left[\frac{4(-1)^n}{n^2-4} - \frac{4}{n^2-4}\right]\frac{\cos(nt/2)}{\pi}\right\}$$

$\boxed{\#3}$

$f(t) = 2 - t$, $0 \le t \le 2$



$T = 4$

Su representacion en series de medio rango en senos:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi t}{T}\right)$$

Donde

$$b_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t) \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) dt$$

$$b_n = \int_0^{2} (2-t) \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi t}{4}\right) dt$$

$$b_n = \frac{4}{\pi n}$$

R

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi n} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{2}\right)$$

Teorema de Parseval

Ejercicio # 1 | # 4

$$V_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T (v(t))^2\,dt}$$

$$V_{r.m.s} = \sqrt{\frac{1}{4}a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)}$$

El Teorema de Parseval dice:

$$\frac{2}{T}\int_0^T f^2(t)\,dt = \frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

Si utilizamos $V(t) = f(t)$, es fácilmente notable que el lado izquierdo del Teorema de Parseval es el argumento de la raíz en la función Vrms. Sin embargo, para cumplir el teorema de Parseval hace falta el el coeficiente 2. Por lo que se modifica la expresión original levemente

$$V.rms = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{T}\right)\int_0^T V^2(t)\,dt}$$

Ahora que ha aparecido totalmente el teorema de Parseval, se puede proceder por sustitución directa

$$V_{rms} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)\right)}$$

Simplificando

$$V_{rms} = \sqrt{\frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)}$$

#

Ejercicio #2 #5

$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cos(t) - 3\,\text{sen}(2t) + \frac{1}{5}\cos(4t)$$

Valor eficaz por definición:

$$F_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)\,dt}$$

$$F_{ef} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cos(t) - 3\,\text{sen}(2t) + \frac{1}{5}\cos(4t)\right)^2 dt}$$

$$F_{ef} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 9\left(0.1666667 + \frac{\cos(4t)}{15} + \frac{\cos(t)}{2} - \text{sen}(2t)\right) dt}$$

$$F_{ef} \approx \sqrt{5.895} \approx 2.4279621$$

Valor eficaz por Parseval:

$$F_{ef} = \sqrt{\left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)}$$

$$F_{ef} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^2 + (-3)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2\right)}$$

$$F_{ef} = \sqrt{5.895}$$

$$F_{ef} \approx 2.4279621$$

$$F_{ef} \approx 2.4279621$$

Escaneado con CamScanner