UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
FACULTAD DE INGENIERÍA
ESCUELA DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

TAREA No. ____3____

____

__________________Transformadas de Fourier___________

DESCRIPCIÓN DE CALIFICACIÓN	
Presentación	
Ejercicios resueltos	
Ejercicio(s) calificado(s)	
CALIFICACIÓN TOTAL	

Nombre: Renato Josue Flores Pérez
Carné: 201709244
Profesor(a): Ing. Jose Squimux
Fecha: 23/10/2020

Definiciones - Transformada de Fourier

|#1|

|Ejercicio #1|

a) $f(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t} & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = F(\omega)$$

$$F(\omega) = \int_{0}^{\infty} e^{-\alpha t}\, e^{-j\omega t}\, dt$$

$$= \int_{0}^{\infty} e^{-t(j\omega + \alpha)}\, dt = \frac{e^{-(\alpha + j\omega)t}}{-(\alpha + j\omega)} \Bigg|_{0}^{\infty}$$

$$= \frac{1}{\alpha + j\omega}$$

$$f(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t} & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \; ; \; \mathcal{F}\{f(t)\} = \frac{1}{\alpha + j\omega}$$

b) $f(t) = \begin{cases} e^{-t}\cos(t) & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-jwt}\, dt$$

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{0}^{\infty} e^{-t} \cdot e^{-jwt} \cos(t)\, dt$$

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{0}^{\infty} \cos(t) e^{-t(1+j\omega)}\, dt$$

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(\omega) = \frac{2j\pi\omega + 1}{(2j\pi\omega + 1)^2 + 1}$$

Algunas propiedades de la transformada de Fourier

$\boxed{\#1}$ $\boxed{\#2}$

$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)$

$$\mathcal{F}\{e^{jat} f(t)\} = F(\omega - a)$$

$$\mathcal{F}\{e^{jat} f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{jat} e^{-jwt} f(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-tj(w-a)} f(t)\, dt$$

Sustituyendo: $\nu = \omega - a$ entonces:

$$\mathcal{F}\{e^{jat} f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\nu t} f(t)\,dt$$

$$\mathcal{F}\{e^{jat} f(t)\} = F(\nu) = \boxed{F(\omega - a)}$$

Ejercicio # 2

3

$$f(t) = \begin{cases} 1 - t^2 & |t| \leq 1 \\ 0 & |t| > 1 \end{cases}$$

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(\omega) = \int_{-1}^{1} (1-t^2) e^{-j\omega t}\,dt$$

$$F(\omega) = \left. \frac{(-j t^2 \omega^5 - 2t\omega^4 + j\omega^5 + 2j\omega^3) e^{-jt\omega}}{\omega^6} \right|_{-1}^{1}$$

$$F(\omega) = \frac{2(-\omega - (\omega + j) e^{2j\omega} + j) e^{-j\omega}}{\omega^3}$$

$$F(\omega) = \frac{2(-\omega - (\omega + j) e^{2j\omega} + j) e^{-j\omega}}{\omega^3}$$

$$g(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t}(1-t^2) & |t| \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

La función $g(t)$ No está bien definida, o bien, NO es una función.

Esto porque para un mismo valor de t, existen 2 puntos o imágenes distintas.

La prueba es que $g(t) = e^{-\alpha t}(1-t^2)$ par $|t| \geq 0$, sin embargo

ya que $t \in \mathbb{R}$, $|t| \geq \emptyset$ es verdadero para cualquier número real!

Al mismo tiempo el valor de $\emptyset$ está definido para $t < 0$ lo cual ocurre con los negativos, pero estos tambien satisfacen la condición anterior, por lo que hay 2 imágenes para un mismo valor y por tanto NO es función //

Ejercicio #3 #4

$$F(\omega) = \frac{1}{(\omega+7)j+1}$$

Sabemos que

$$f(t)=\begin{cases} e^{-t} & t>0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$$

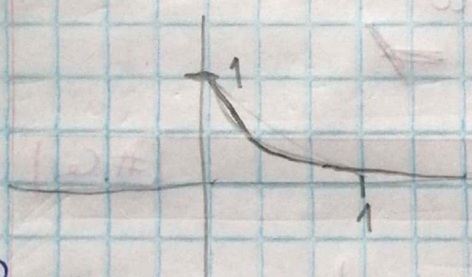
Tiene una Transformada de Fourier

$F(\omega)=\dfrac{1}{\omega j+1}$, por tanto, si

se traslada a la Izquierda se Obtiene:

$F(\omega--7)=\dfrac{1}{(\omega+7)j+1}$, por tanto la

Funcion original ___ función $f(t)$ a la que pertenece tal transformada es:



$$f(t)=\begin{cases} e^{-t(1+7j)} & t>0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$$

Ejercicio # 4 | #5

$\mathcal{F}\{u(t+4)\, e^{-(t+4)}\}$

Claramente se observa que es la función $u(t)\, e^{-t}$ desplazada con $a = -4$,

Por tanto, aplicando el 2do Teorema de Corrimiento:

$$\mathcal{F}\{f(t-\alpha)\} = e^{-j\alpha w} F(w) \;;\; \text{entonces}$$

$$\mathcal{F}\{u(t+4)\, e^{-(t+4)}\} = e^{4jw}\, \mathcal{F}\{u(t)\, e^{-t}\}$$

$$= e^{4jw}\left(\frac{1}{1+jw}\right) = \frac{e^{4jw}}{1+jw}$$

$$\boxed{\mathcal{F}\{u(t+4)\, e^{-(t+4)}\} = \frac{e^{4jw}}{1+jw}}$$

Ejercicio # 1 | #6

Espectro y Modulación

Ejercicio #1 | #6

$$F(w) = \frac{2}{1+2(w-1)j}$$

a) Ver Anexos

b) Ver Anexos.

Ejercicio # 2 # 7

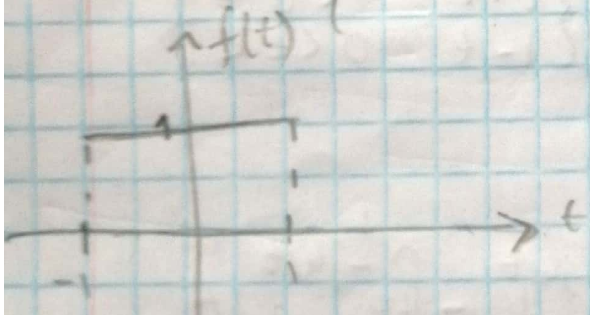
$$f(t) = \begin{cases} 1 & |t| \le 1 \\ 0 & |t| > 1 \end{cases}$$

$$F(w) = \frac{2\,\text{sen}(w)}{w}$$

a) Ver anexos
b) Ver anexos.

Ejercicio # 3 # 8

$$f(t) = \begin{cases} 1 & |t| \le 1 \\ 0 & |t| > 1 \end{cases}$$



$$\mathcal{F}\{f(t)\cos(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(t)e^{-jwt}\,dt$$

$$= \int_{-1}^{1} \cos(t)e^{-jwt}\,dt = -\frac{(-jw\cos(t)+\text{sen}(t))e^{-jwt}}{w^2-1}\Bigg|_{-1}^{1}$$

$$= \left[\frac{(-jw\cos(1)-\text{sen}(1))e^{jw}}{w^2-1} + \frac{(jw\cos(1)-\text{sen}(1))e^{-jw}}{w^2-1}\right]$$

Escaneado con CamScanner

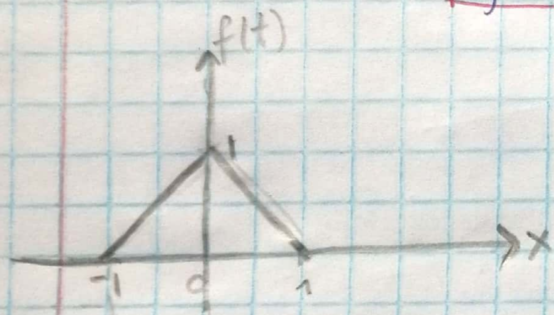
$$\mathcal{F}\{f(t)\cos(t)\} = \frac{(-j\omega\cos(1) - \mathrm{sen}(1))e^{j\omega}}{\omega^2 - 1} + \frac{(j\omega\cos(1) - \mathrm{sen}(1))e^{-j\omega}}{\omega^2 - 1}$$

$$\boxed{\mathcal{F}\{f(t)\cos(t)\} = \frac{(-j\omega\cos(1) - \mathrm{sen}(1))e^{j\omega}}{\omega^2 - 1} + \frac{(j\omega\cos(1) - \mathrm{sen}(1))e^{-j\omega}}{\omega^2 - 1}}$$

b) Espectro de amplitud: Ver Anexos.

Ejercicio # 4

#9



$$f(t) = \begin{cases} t+1 & -1 < t < 0 \\ 1-t & 0 < t < 1 \end{cases}$$

$$F(\omega) = \int_{-1}^{0} t e^{-j\omega t}\,dt + \int_{-1}^{0} e^{-j\omega t}\,dt + \int_{0}^{1} e^{-j\omega t}\,dt - \int_{0}^{1} t e^{-j\omega t}\,dt$$

a) Ver anexos

b) $\Phi(\omega) = \int_{-1}^{0} (t+1)\cos(2\pi) e^{-j\omega t}\,dt + \int_{0}^{1} (1-t)\cos(2\pi) e^{-j\omega t}\,dt$

c) Ver anexos

Como se puede observar en la gráfica, la energía se distribuye en $\pm 2\pi$ y el resto de frecuencias se eliminan

Ej Principio de Dualidad

#10

Ejercicio # 1

#10

$f(t) = u(t)e^{-2t}$; $F(w) = \frac{1}{2+jw}$

corregir en la tarea, $F(w) = \frac{1}{2+jw}$ es la transformada de $u(t)e^{-2t}$ no de $u(t)e^{2t}$.

para $f(t) = \frac{1}{2+jt}$; su transformada

$F(w) = 2\pi f(-w) = 2\pi u(-w)e^{-2wt}$

$$\mathcal{F}\left\{\frac{1}{2+jt}\right\} = 2\pi u(-w)e^{+2wt}$$

(Principio de Dualidad)

Transformada de Funciones Especiales.

Ejercicio #1

#11

$\mathcal{F}\{\delta(t+8)\} = e^{j8w}$

Por el teorema de dualidad

$\mathcal{F}\{e^{j8t}\} = 2\pi\delta(8-w)$

$$\mathcal{F}\{e^{j8t}\} = 2\pi\delta(8-w)$$

Ejercicio #2

$$\mathcal{F}\{\cos(\kappa t)\} = F(\omega)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(\kappa t) e^{-j\omega t}\, dt \quad ; \text{ Por Euler:}$$

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} (e^{j\kappa t} + e^{-j\kappa t}) e^{-j\omega t}\, dt$$

$$\frac{1}{2}\left[\mathcal{F}\{e^{j\kappa t}\} + \mathcal{F}\{e^{-j\kappa t}\}\right]$$

Transformada de un fasor rotativo

$$= \frac{1}{\cancel{2}}\left[\cancel{2}\pi\,\delta(\omega+\kappa) + \cancel{2}\pi\,\delta(\omega-\kappa)\right]$$

$$= \pi[\delta(\omega+\kappa) + \delta(\omega-\kappa)]$$

R: $\mathcal{F}\{\cos(\kappa t)\} = \pi[\delta(\omega+\kappa) + \delta(\omega-\kappa)]$

Transformada Inversa

Ejercicio #1

#13

$$F(\omega) = \frac{j\omega\pi}{2} e^{|\omega|}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t}\, d\omega$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{j\omega\pi}{2} e^{j\omega t} e^{|\omega|}\, d\omega$$

Por definición: $e^{|\omega|} = \begin{cases} e^{\omega} & \omega >= 0 \\ e^{-\omega} & \omega < 0 \end{cases}$

Por tanto

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{0} \frac{j\omega\pi}{2} e^{j\omega t} e^{-\omega}\, d\omega + \int_{0}^{\infty} \frac{j\omega\pi}{2} e^{j\omega t} e^{\omega}\, d\omega\right]$$

$$f(t) = \frac{1}{4\pi}\left[\int_{-\infty}^{0} j\omega\pi e^{\omega(jt+1)}\, d\omega + \int_{0}^{\infty} j\omega\pi e^{\omega(jt-1)}\, d\omega\right]$$

$$f(t) = \frac{1}{4\cancel{\pi}}\left[\frac{\cancel{\pi}}{it^2-2t-i} \quad \frac{-\cancel{\pi}}{it^2+2t-i}\right]$$

$$f(t) = \left[\frac{1}{i(t^2-1)-2t} - \frac{1}{i(t^2-1)+2t}\right]\frac{1}{4}$$

$$f(t) = \frac{\cancel{-i(t^2-1)}-2t+\cancel{i(t^2-1)}-2t}{-((t^2-1)^2+4t^2)} = \frac{\cancel{-}4t}{\cancel{-}((t^2-1)^2+4t^2)} = \frac{4t}{t^4+2t^2+}$$

Escaneado con CamScanner

$$f(t) = \frac{1}{4}\left(\frac{4t}{t^4+2t^2+1}\right)$$

$$f(t) = \frac{t}{t^4+2t^2+1}$$

$$F(\omega) = \frac{j\omega\pi}{2} e^{|\omega|} \Rightarrow f(t) = \frac{t}{t^4+2t^2+1}$$

| Ejercicio # 2 | | # 14 |

$$F(\omega) = \frac{1}{(1+i\omega)(1+2i\omega)}$$

Por fracciones parciales

$$F(\omega) = \frac{2}{2j\omega+1} - \frac{1}{1+j\omega}$$

$$F(\omega) = \frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{2}\left(\frac{1}{2}+j\omega\right)} - \left(\frac{1}{1+j\omega}\right)$$

$$F(\omega) = \frac{1}{1/2+j\omega} - \frac{1}{1+j\omega}$$

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{1/2+j\omega}\right\} - \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{1+j\omega}\right\}$$

$$f(t) = e^{-t/2}H(t) - e^{-t}H(t) = H(t)\left[e^{-t/2} - e^{-t}\right]$$

$$F(\omega) = \frac{1}{(1+j\omega)(1+2j\omega)} \Rightarrow f(t) = \left[e^{-t/2} - e^{-t}\right]H(t)$$

Ejercicio # 3

15

$$F(\omega) = \frac{j\omega}{(1+j\omega)(1+2j\omega)}$$

Por fracciones parciales:

$$F(\omega) = \frac{1}{j\omega+1} \quad \frac{-1}{2j\omega+1}$$

$$F(\omega) = \frac{1}{j\omega+1} - \frac{1}{2(j\omega+1/2)}$$

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{j\omega+1}\right\} - \frac{1}{2}\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{j\omega+1/2}\right\}$$

$$f(t) = \frac{-e^{-t/2}}{2} H(t) + e^{-t} H(t)$$

$$f(t) = \left[e^{-t} - \frac{e^{-t/2}}{2}\right] H(t)$$

R

$$\boxed{F(\omega) = \frac{j\omega}{(1+j\omega)(1+2j\omega)} \Rightarrow f(t) = \left[e^{-t} - \frac{e^{-t/2}}{2}\right] H(t)}$$

#

Ecuaciones diferenciales

Ejercicio #1 — #16

Resuelva

$$y' + 2y = e^{-t}$$

$$\mathcal{F}\{y' + 2y\} = \mathcal{F}\{e^{-t}\}$$

$$jw\,Y(w) + 2Y(w) = \mathcal{F}\{e^{-t}\}$$

$$Y(w) = \frac{\mathcal{F}\{e^{-t}\}}{2+jw} \Rightarrow y(t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{\mathcal{F}\{e^{-t}\}}{2+jw}\right\}$$

$\mathcal{F}\{e^{-t}\}$ <u>no</u> existe porque $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t} e^{-iwt}\,dt$ diverge.

Sin embargo $\mathcal{F}\{H(t)e^{-t}\} = \int_{0}^{\infty} e^{-t} e^{-iwt}\,dt$ sí está definida. Asumiendo que el problema surge de un circuito donde la señal solo existe para $t>0$ y por tanto $H(t)$ aparece naturalmente, se procederá a sustituir e^{-t} por $H(t)e^{-t}$.

$$y(t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{(jw+1)(2+jw)}\right\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{jw+1} - \frac{1}{2+jw}\right\}$$

$$y(t) = u(t)e^{-t} - u(t)e^{-2t} = u(t)[e^{-t} - e^{-2t}]$$

R:

$$y(t) = u(t)[e^{-t} - e^{-2t}]$$

Ejercicio # 2

\# 17

$$Ry' + \frac{y}{C} = \delta(t)$$

$$\mathcal{F}\left\{Ry' + \frac{y}{C}\right\} = \mathcal{F}\{\delta(t)\}$$

$$Rj\omega Y(\omega) + \frac{Y(\omega)}{C} = 1$$

$$Y(\omega) = \frac{1}{Rj\omega + 1/C}$$

$$y(t) = \mathcal{F}^{-1}\{Y(\omega)\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{Rj\omega + 1/C}\right\}$$

$$= \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{R\left(\frac{1}{CR} + j\omega\right)}\right\} = \frac{1}{R}\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{\frac{1}{CR} + j\omega}\right\}$$

$$y(t) = \frac{1}{R} u(t) e^{-t/CR}$$

R

$$\boxed{y(t) = u(t)\frac{e^{-t/CR}}{R}}$$

\#

Ejercicio # 3 # 18

$V_i(t) = \delta(t)$

$V_i(t) = Rq' + \frac{q}{C}$

donde V_i es el voltaje de entrada al circuito

$V_o = \frac{q}{C}$ = voltaje de salida = Tensión en los terminales del Capacitor

$$Rq' + \frac{q}{C} = \delta(t)$$

$$\mathcal{F}\left\{ Rq' + \frac{q}{C} \right\} = \mathcal{F}\left\{ \delta(t) \right\}$$

$$Ri\omega Q(\omega) + \frac{Q(\omega)}{C} = 1$$

$$Q_1(\omega) = \frac{1}{Rj\omega + 1/C} = \frac{1}{R(i\omega + 1/RC)}$$

$$Q(\omega) = \frac{Q_1}{C} = \frac{1}{Rj\omega C + 1} = \frac{1}{RC\omega j + 1}$$

a) $Q(\omega) = \frac{1}{RC\omega j + 1}$ = Tensión en las terminales del Capacitor en la frecuencia

b) Ver Anecos.

1. Apendices

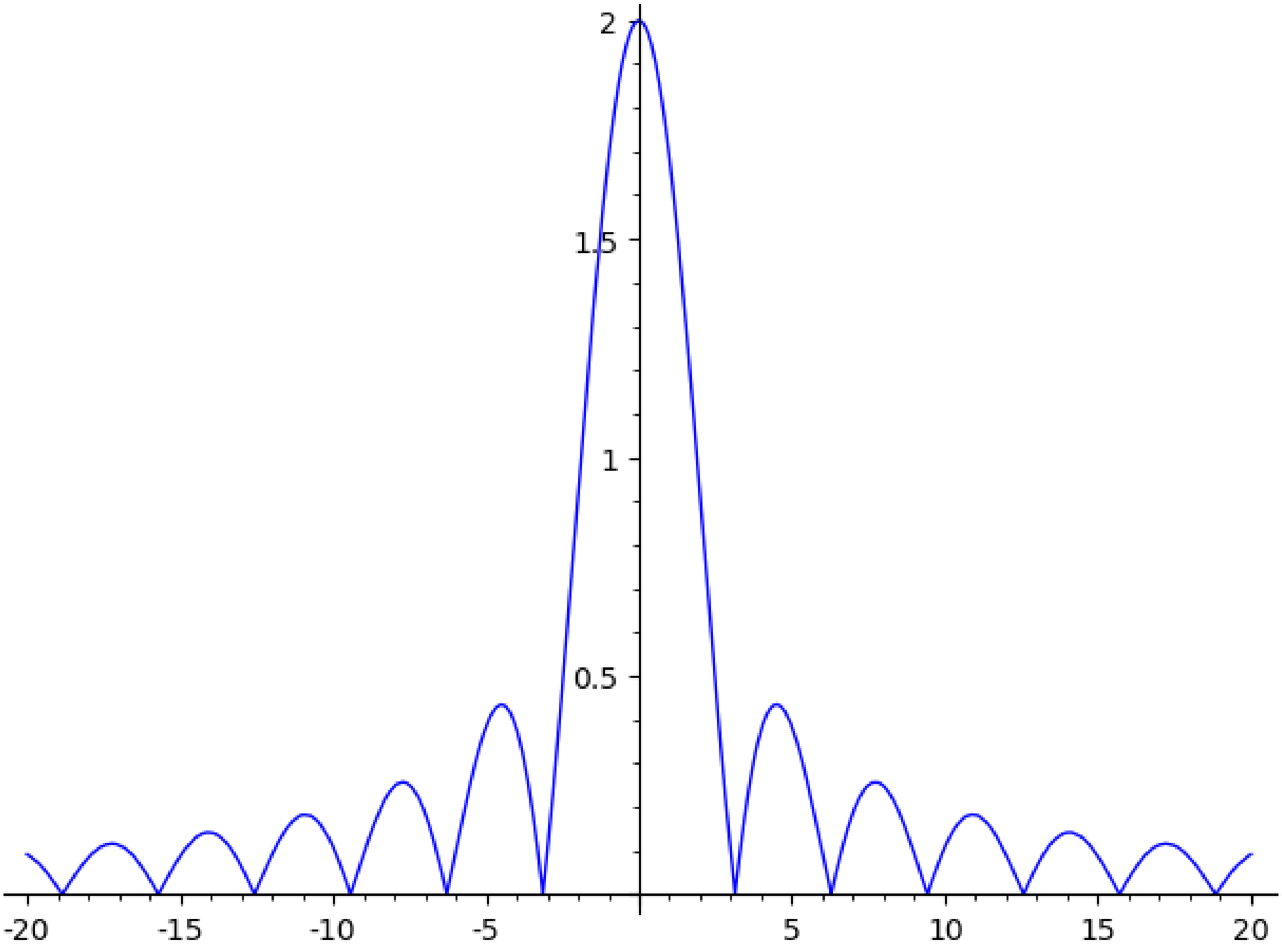


Figura 1: Ejercicio correlativo 7, inciso 1. Espectro de amplitud para $F(w) = \frac{2\ \sin(\omega)}{\omega}$

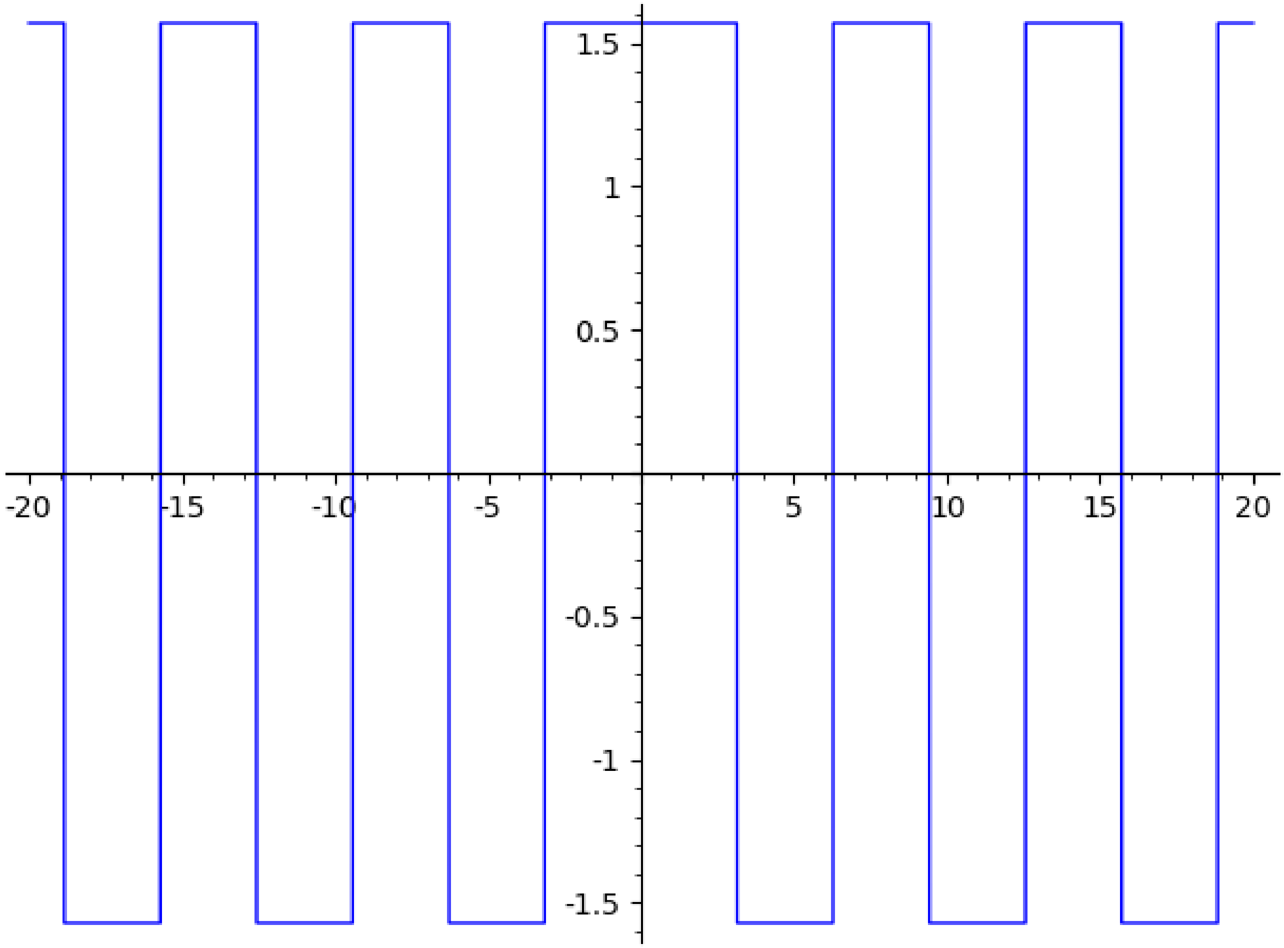


Figura 2: Ejercicio correlativo 7, inciso 2. Espectro de fase para $F(w) = \frac{2\,\sin(\omega)}{\omega}$

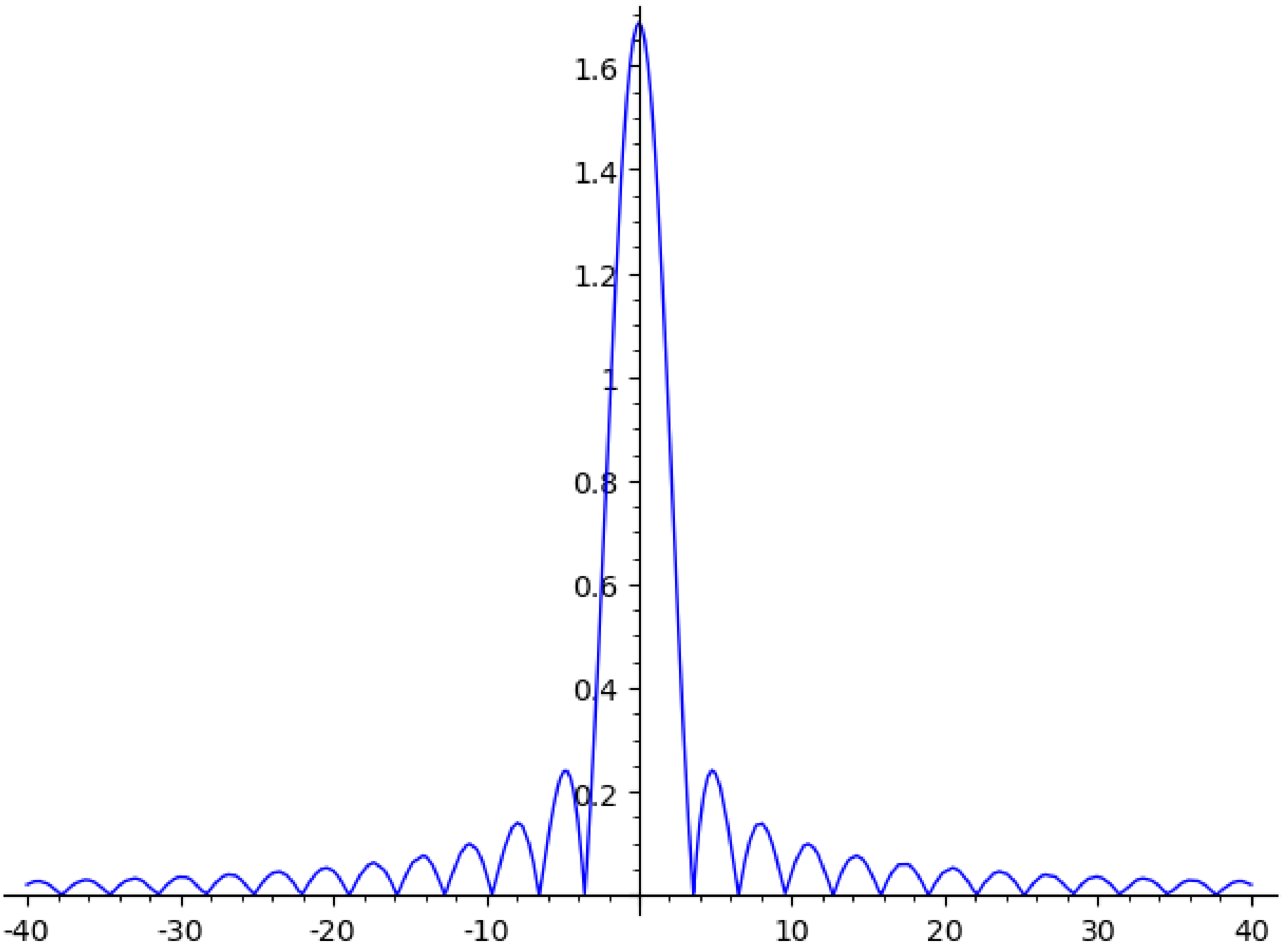


Figura 3: Ejercicio correlativo 8. Espectro de Amplitud para $F\{f(t)cos(t)\}$

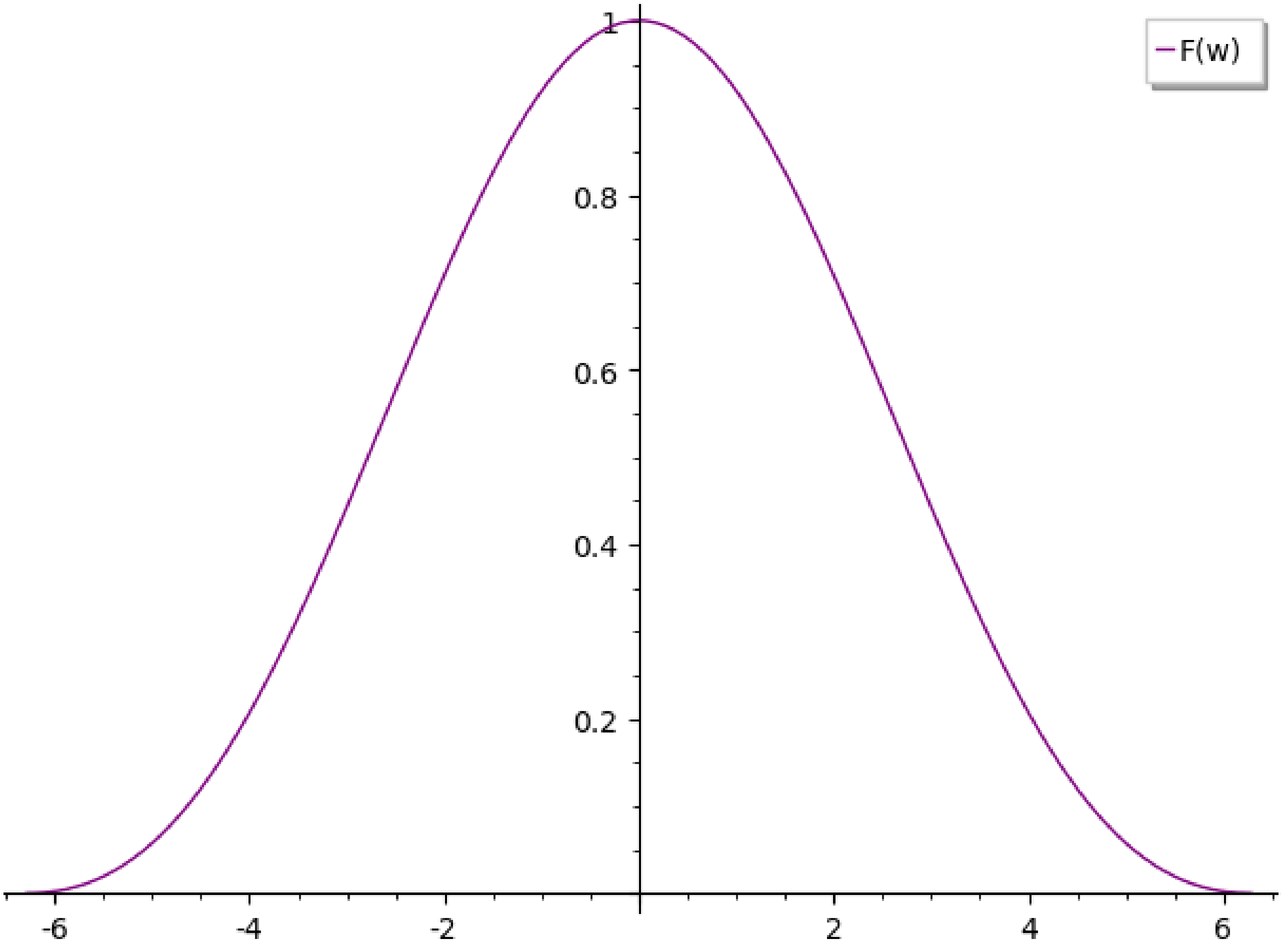


Figura 4: Ejercicio correlativo 9, inciso 1. Espectro de amplitud para $F(w) = -\frac{2\,(\cos(\omega)-1)}{\omega^2}$

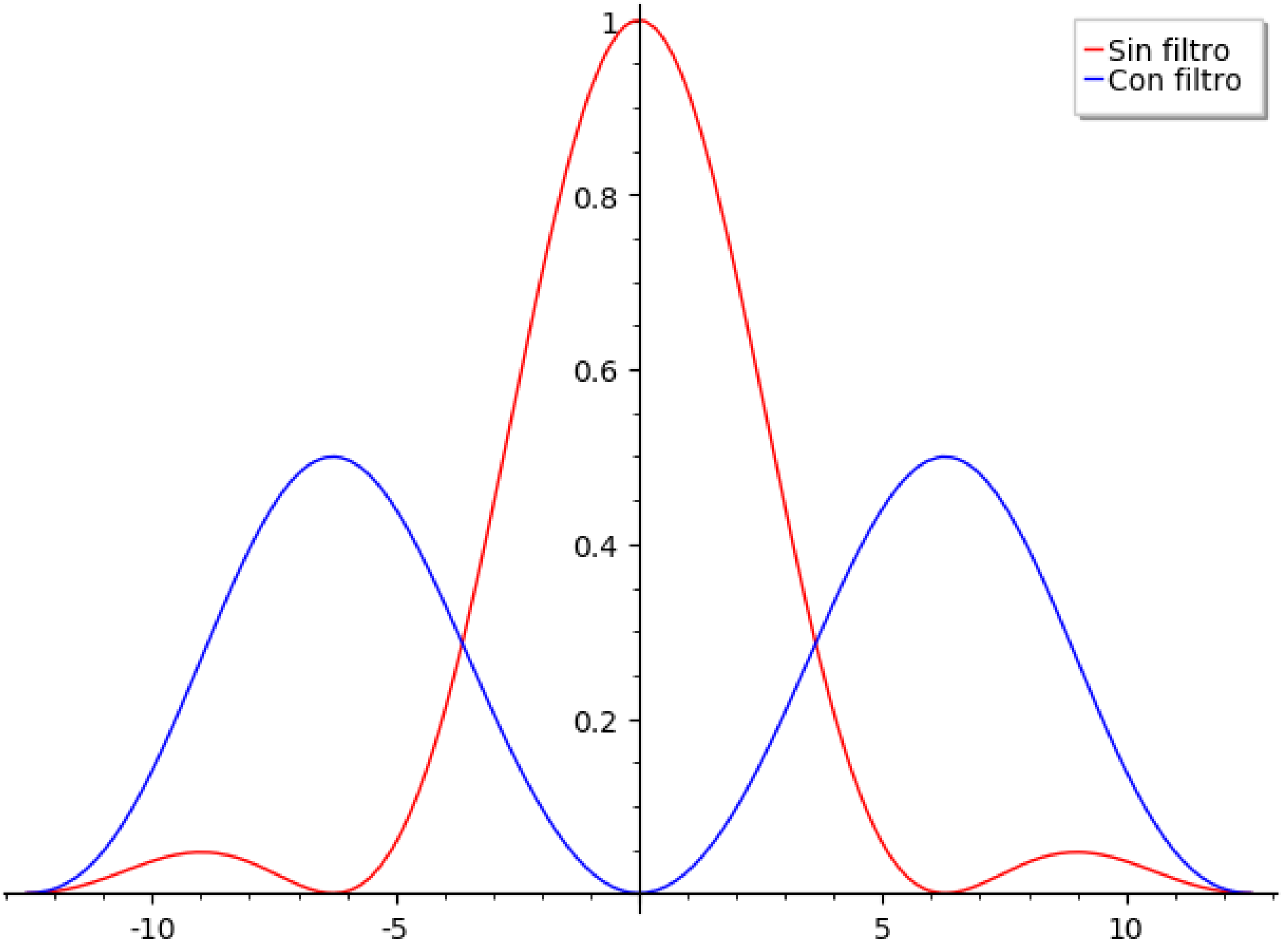


Figura 5: Ejercicio correlativo 9, inciso 3.

Espectro de Amplitud comparando F(w) original y F(w) luego de aplicar el filtro

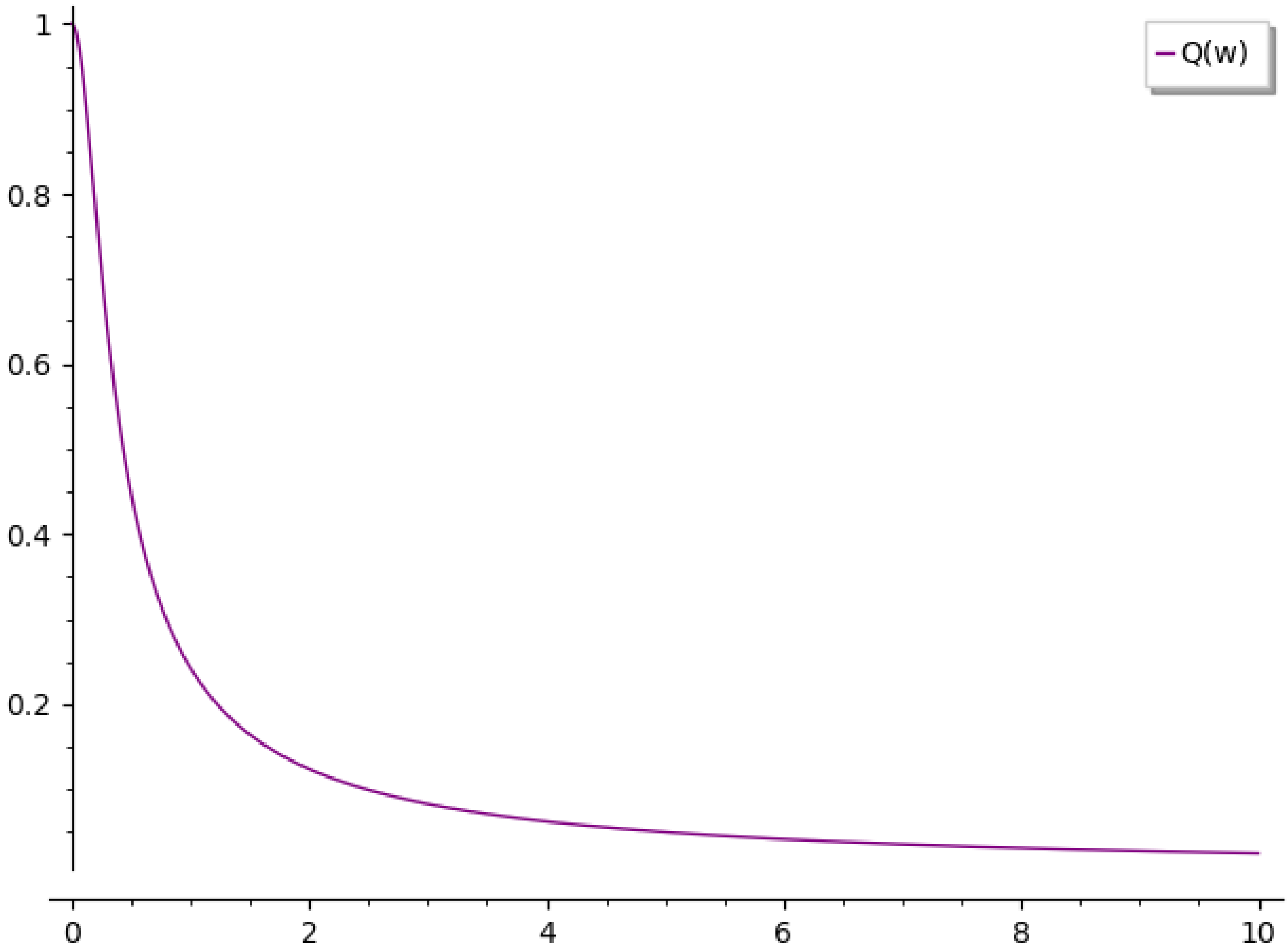


Figura 6: Ejercicio correlativo 18. Grafica del espectro de Amplitud de Q(w)