Formas de Onda Periodicas

Ejercicio 1. #1

a) $f(t) = 3\,\text{sen}(2\pi \cdot 2t) - 4\,\text{sen}(2\pi\, 4t) + 0.7\,\text{sen}(2\pi \cdot 5t)$

$f(t) = 3\text{sen}(4\pi t) - 4\text{sen}(8\pi t) + 0.7\,\text{sen}(10\pi t)$

$MCD(4\pi, 8\pi, 10\pi) = 2\pi$

$w_1 = 2\pi$ = Fundamental

$$\boxed{f(t) = 3\text{sen}(2w_1 t) - 4\text{sen}(4w_1 t) + 0.7\,\text{sen}(5w_1 t)}$$

Fundamental $= 2\pi$

2ª Armonica:

$3\text{sen}(4\pi t)$

Amplitud $= 3 = T$
Frecuencia angular $= 4\pi = w$
frecuencia: $2 = f$
Angulo de fase $= 0 = \phi$
periodo $= 1/2 = T$

4ª Armonica:

$-4\text{sen}(8\pi t)$

$A = 4$
$w = 8\pi$
$f = 4$
$\phi = 0$
$T = 1/4$

5°_{π} Armonica

$0.7\,sen(10\pi t)$

$A = 0.7$
$w = 10\pi$
$f = 5$
$T = 1/5$
$\phi = 0$

$f(t) = 3\,sen(4\pi t) - 4\,sen(8\pi t) + 0.7\,sen(10\pi t)$

Fundamental $= 2\pi$

Periodo de la señal $= 1$

frecuencia de la señal $= 1$

Armonicas Presentes:

- 2°_{π} Armonica
  - $A = 3$
  - $w = 4\pi$
  - $f = 2$
  - $T = 1/2$
  - $\phi = 0$
- 4°_{π} Armonica
  - $A = 4$
  - $w = 8\pi$
  - $f = 4$
  - $T = 1/4$
  - $\phi = 0$
- 5°_{π} Armonica.
  - $A = 0.7$
  - $w = 10\pi$
  - $f = 5$
  - $T = 1/5$
  - $\phi = 0$

Armonicas faltantes: 1°_{π}, 3°_{π}.

*nota: para la grafica ver apendices, fig 1

Escaneado con CamScanner

b) $f(t) = 5 + \frac{3}{2}\cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{8}\right)$

$+ 6\cos(600\pi t + \pi/2)$

Dado que: $\cos(\theta + \pi/2) = -\text{sen}(\theta)$; entonces:

$$\boxed{f(t) = 5 - 6\,\text{sen}(600\pi t) + \frac{3}{2}\cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{8}\right)}$$

Fundamental $= 100\pi$
Periodo $= 1/50$
frecuencia $= 50$

Armónicas presentes: 1ª, 6ª
Armonicas faltantes: 2ª, 3ª, 4ª, 5ª

1ª Armonica:

$\frac{3}{2}\cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{8}\right)$

$A = \frac{3}{2}$; $\omega = 100\pi$; frecuencia $= 50$; $T = 1/50$

$\phi = \frac{\pi}{8}$

6ª Armonica:

$-6\,\text{sen}(600\pi t)$

$A = 6$; $\omega = 600\pi$; $T = 1/300$; $f = 300$;
$\phi = 0$

b) $f(t) = 5 - 6\,sen(600\pi t) + \frac{3}{2}\cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{8}\right) + 5$

Fundamental = 100π
periodo = $1/50$
frecuencia = 50

Armónicas faltantes: 2^{a}, 3^{a}, 4^{a}, 5^{a}

Armónicas presentes:

- 1^{a} Armónica
- 6^{a} Armónica

1^{a} Armónica	6^{a} Armónica
$A = 3/2$	$A = 6$
$\omega = 100\pi$	$\omega = 600\pi$
$f = 50$	$f = 300$
$T = 1/50$	$T = 1/300$
$\phi = \pi/8$	$\phi = 0$

* Ver Apéndices, fig 2 para la gráfica.

c) $x(t) = 2\,sen\left(\frac{t}{100}\right) + \frac{2}{3}\,sen\left(\frac{t}{300}\right) + \frac{2}{5}\,sen\left(\frac{t}{500}\right)$

$\omega_1 = \frac{1}{1500}$; $\frac{1}{1500} * 15 = \frac{1}{100}$ ✓

$\frac{1}{1500} * 3 = \frac{1}{500}$ ✓

$\frac{1}{1500} * 5 = \frac{1}{300}$ ✓

Fundamental = $1/1500$
periodo = $2\pi/(1/1500) = 3000\pi$
frecuencia = $1/3000\pi$

Armónicas Presentes:

3ª Armónica:

$\frac{2}{5} \operatorname{sen}\left(\frac{t}{500}\right)$

$\omega = \frac{1}{500}$

$T = 1000\pi$
$f = 1/1000\pi$
$A = 2/5$
$\phi = 0$

5ª Armónica:

$\frac{2}{3} \operatorname{sen}\left(\frac{t}{300}\right)$

$\omega = \frac{1}{300}$; $T = 600\pi$; $f = 1/600\pi$; $A = 2/3$
$\phi = 0$

15ª Armónica:

$2 \operatorname{sen}\left(\frac{t}{100}\right)$

$\omega = \frac{1}{100}$; $T = 200\pi$; $f = 1/200\pi$; $A = 2$; $\phi = 0$

$$x(t) = 2\,\text{sen}\left(\frac{t}{100}\right) + \frac{2}{3}\,\text{sen}\left(\frac{t}{300}\right) + \frac{2}{5}\,\text{sen}\left(\frac{t}{500}\right)$$

Fundamental $= \dfrac{1}{1500}$

Periodo $= 3000\pi$
frecuencia $= 1/3000\pi$

Armónicas Presentes:

3º Armónica

$A = 2/5$
$\omega = 1/500$
$T = 1000\pi$
$f = (1000\pi)^{-1}$
$\phi = 0$

5º Armónica

$A = 2/3$
$\omega = 1/300$
$T = 600\pi$
$f = 1/600\pi$
$\phi = 0$

15º Armónica

$A = 2$
$\omega = 1/100$
$T = 200\pi$
$f = 1/200\pi$
$\phi = 0$

* Ver apéndices, fig 3 para la gráfica

Ejercicio # 2

2

$$x(t) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos(3x)}{3^2} + \frac{\cos(5x)}{5^2} \ldots\right)$$

$$x(t) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\cos((2n-1)(1)(x))}{(2n-1)^2}\right]$$

Al observar la forma compacta de la serie es evidente que la fundamental $\omega_1 = 1$.
Tambien se observa que unicamente las Armonicas Impares estan presentes.

Fundamental = 1

Periodo = 2π

frecuencia = $1/2\pi$

$\boxed{\text{Periodo} = 2\pi}$

* Ver Apéndices, fig 4 para la gráfica.

Ejercicio # 3

3

$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{1\pi}\,\text{sen}\left(\frac{\pi t}{5}\right) + \frac{2}{3\pi}\,\text{sen}\left(\frac{3\pi t}{5}\right)$$

$$+ \frac{2}{5\pi}\,\text{sen}\left(\frac{5\pi t}{5}\right) + \frac{2}{7\pi}\,\text{sen}\left(\frac{7\pi t}{5}\right) + \ldots$$

cte　　cte　　impar = $2n-1$ = Armonicas.

$$x(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{(2n-1)\pi} * \operatorname{sen}\left((2n-1)\left(\frac{\pi}{5}\right)t\right)\right]$$

$\uparrow_{\omega_1}$

Tras Observar la forma compacta de la serie es evidente que la fundamental es $\frac{\pi}{5}$. Asimismo se observa que únicamente las armonicas impares estan presentes.

Fundamental $= \pi/5 = \omega$

Periodo $= \frac{2\pi}{1} \div \frac{\pi}{5} \quad \frac{10}{1} = 10 = T$

frecuencia $= 1/10 = f$

$\boxed{\text{Periodo} = 10}$

* Ver apendices, fig 5 para la grafica.

Ejercicio #4 | #4

a) $f(t) = 0.5\cos(t) + 3.2\operatorname{sen}(t)$

* $\cos(\theta) = \operatorname{sen}(\pi/2 - \theta)$

$f(t) = -0.5\operatorname{sen}(t - \pi/2) + 3.2\operatorname{sen}(t)$

Fundamental = 1

Armonicas Presentes 1^{a}

$\boxed{R\cos(wt - \theta) = a\cos(wt) + b\operatorname{sen}(wt)}$

donde: $R = \sqrt{a^2+b^2}$, $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) \approx 1.4157$

$R \approx 3.23882$

$f(t) \approx 3.239 \cos(t - 1.4157)$

$A \approx 3.239$
$\phi \approx 1.4157$ rad

$$\boxed{\begin{gathered} f(t) = 3.2 \operatorname{sen}(t) - 0.9 \operatorname{sen}(t - \pi/2) \\ A \approx 3.239 \\ \phi \approx 1.4157 \text{ rad} \end{gathered}}$$

b) $f(t) = 3\cos(3t)$

$\boxed{f(t) = -3 \operatorname{sen}(3t - \pi/2)}$

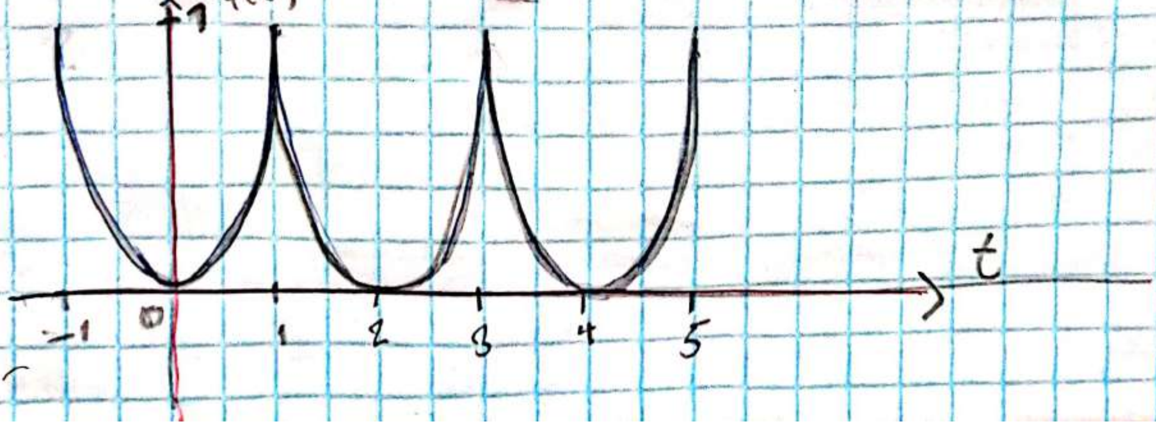
$\omega = 3$
$A = 3$
$\phi = \pi/2$

$$\boxed{\begin{gathered} f(t) = -3 \operatorname{sen}(3t - \pi/2) \\ A = 3 \\ \phi = \pi/2 \end{gathered}}$$

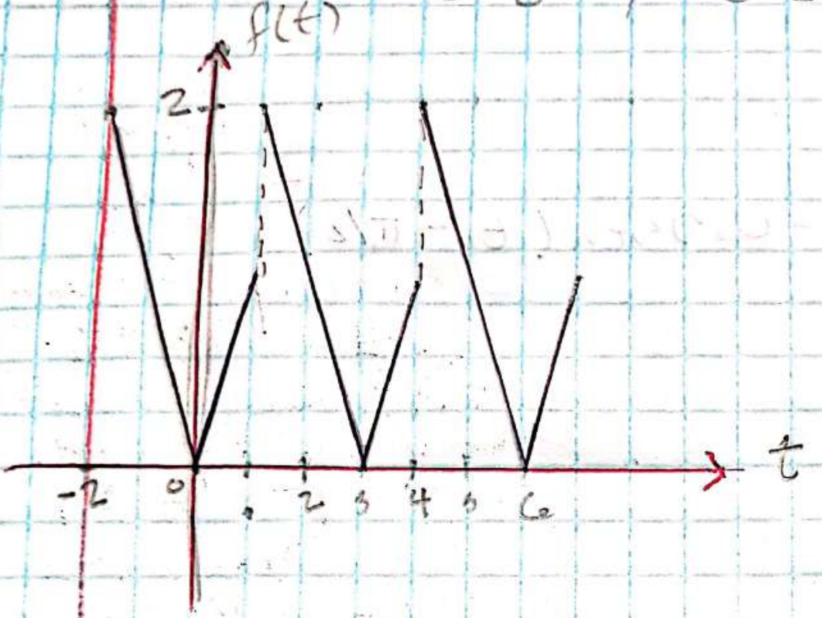
Ejercicio # 5

#5

a) $f(t) = t^2, \ -1 \leq t < 1 \ ; \quad T = 2$



b) $f(t) = \begin{cases} -t & ; -2 \leq t < 0 \\ t & ; 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$



Ejercicio #6

#6

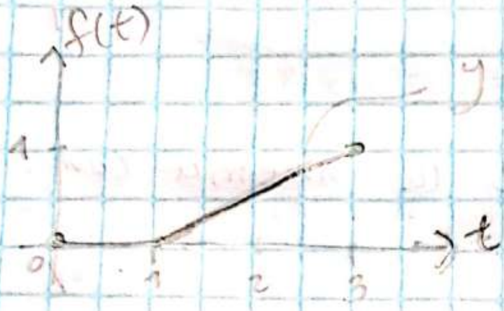
a) $f(t) = \begin{cases} 1 & ; 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & ; 1 < t < 2 \end{cases}$

donde f(t) es periodica con periodo $T = 2$

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & 1 < t < 2 \end{cases}$$

$T = 2$

b)



$$f(t) = \begin{cases} 0 & ; \ 0 \leq t \leq 1 \\ 0.5t - 0.5 & ; \ 1 < t < 3 \end{cases}$$

$$f(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t \leq 1 \\ 0.5t - 0.5 & 1 < t < 3 \end{cases}$$

$T = 3$

Funciones Pares e Impares

Ejercicio # 1 — # 7

a) i. f(t) es impar.
* Es posible notar la simetria con respecto al origen de coordenadas.

ii. f(t) es par.

* Es facil notar la simetria respecto al eje y.

b) i. f(t) NO tiene ninguna simetria.

* Si bien parece que f(t) es impar a simple vista, esto es falso ya que esta desplazada y no conserva simetria con el origen.

ii. $f(t)$ es impar.

* Es facilmente notable la simetria con el Origen

c) i. $f(t)$ NO es ni par ni impar.

* parece impar, pero esta desfazada y no mantiene simetria con el origen.

d) $f(t)$ es par.

Es fácilmente notable la simetria con el eje y.

e) $f(t) = sen(t) - 0.5(t)^2$

$f(-t) = -sen(t) - 0.5t^2$

$f(t) \neq f(-t) \Rightarrow$ NO es par X

$f(t) \neq -f(t) \Rightarrow$ NO es impar X

$f(t)$ No es ni par ni impar.

*$f(t)$ no cumple con ninguno de los criterios necesarios.

Ejercicio # 2 # 8

a) $t^3 \operatorname{sen}(wt) = f(t)$

$f(-t) = -t^3(-\operatorname{sen}(wt)) = t^3 \operatorname{sen}(wt) = f(t)$

a) $f(t)$ es par.

b) $g(t) = t\cos(t)$

$g(-t) = -t\cos(t) = -g(t)$

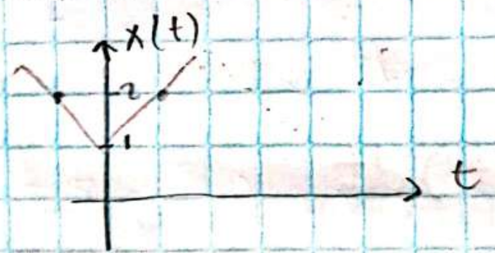
b) $g(t)$ es impar

c) $\cos(wt)\operatorname{sen}(wt) = h(t)$

$h(-t) = \cos(wt)(-\operatorname{sen}(wt)) = -\cos(wt)\operatorname{sen}(wt)$
$= -h(t)$.

c) $h(t)$ es impar

d) $x(t) = |t| + 1,\ -2 < t < 2,\ T = 4$



$x(-t) = |-t| + 1 = |t| + 1 = x(t) \Rightarrow$

d) $x(t)$ es par.

a) Es Par c) Es Impar
b) Es Impar d) Es Par

Ejercicio # 3 | #9

a) $\int_{-5}^{5} t^3\, dt$;

El integrando t^3 es Impar. Por propiedades de funciones Impares :

$\int_{-a}^{a} f(t)\, dt$ donde $f(t)$ es Impar $= \varnothing$.

$$\int_{-5}^{5} t^3\, dt = \varnothing$$

b) $\int_{-\pi}^{\pi} t^3 \operatorname{sen}(t)\, dt$

El Integrando $t^3\operatorname{sen}(t)$ es una función Par.

Por tanto:

$$\int_{-\pi}^{\pi} t^3 \operatorname{sen}(t)\, dt = 2\int_{0}^{\pi} t^3 \operatorname{sen}(t)\, dt$$

$$= 2\left[-t^3\cos(t) + 3t^2\operatorname{sen}(t) + 6t\cos(t) - 6\operatorname{sen}(t)\Big|_0^{\pi}\right]$$

$$= 2\left[-\pi^3\overset{-1}{\cancel{\cos(\pi)}} + \cancel{3\pi^2\operatorname{sen}(\pi)}^{\,0} + 6\pi\overset{-1}{\cancel{\cos(\pi)}} - 6\overset{0}{\cancel{\operatorname{sen}(\pi)}}\right]$$

$$= 2\left[\pi^3 - 6\pi\right] = \boxed{2\pi^3 - 12\pi} \rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} t^3 \operatorname{sen}(t)\, dt = 2\pi^3 - 2\pi$$

Ejercicio # 2 # 8

a) $t^3 \operatorname{sen}(wt) = f(t)$

$f(-t) = -t^3(-\operatorname{sen}(wt)) = t^3 \operatorname{sen}(wt) = f(t)$

a) $f(t)$ es par.

b) $g(t) = t\cos(t)$

$g(-t) = -t\cos(t) = -g(t)$

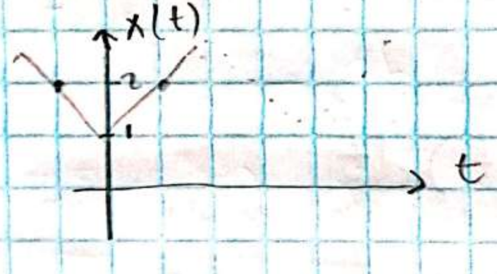
b) $g(t)$ es impar

c) $\cos(wt)\operatorname{sen}(wt) = h(t)$

$h(-t) = \cos(wt)(-\operatorname{sen}(wt)) = -\cos(wt)\operatorname{sen}(wt)$
$= -h(t)$.

c) $h(t)$ es impar

d) $x(t) = |t| + 1, \; -2 < t < 2, \; T = 4$



$x(-t) = |-t| + 1 = |t| + 1 = x(t) \Rightarrow x$

d) $x(t)$ es par.

a) Es par c) Es Impar
b) Es Impar d) Es Par

a) $\int_{-5}^{5} t^3 \, dt$;

El integrando t^3 es Impar. Por propiedades de funciones Impares:

$\int_{-a}^{a} f(t)\,dt$ donde $f(t)$ es Impar $= \emptyset$.

$\int_{-5}^{5} t^3 \, dt = \emptyset$

b) $\int_{-\pi}^{\pi} t^3 \operatorname{sen}(t)\, dt$

El Integrando $t^3 \operatorname{sen}(t)$ es una función par.

Por tanto:

$$\int_{-\pi}^{\pi} t^3 \operatorname{sen}(t)\,dt = 2\int_{0}^{\pi} t^3 \operatorname{sen}(t)\,dt$$

$$= 2\left[-t^3\cos(t) + 3t\operatorname{sen}(t) + 6t\cos(t) - 6\operatorname{sen}(t)\Big|_0^{\pi}\right]$$

$$= 2\left[-\pi^3 \overset{-1}{\cos(\pi)} + 3\pi \overset{0}{\cancel{\operatorname{sen}(\pi)}} + 6\pi \overset{-1}{\cos(\pi)} - 6\overset{0}{\cancel{\operatorname{sen}(\pi)}}\right]$$

$$= 2\left[\pi^3 - 6\pi\right] = \boxed{2\pi^3 - 12\pi} \rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} t^3 \operatorname{sen}(t)\,dt = 2\pi^3 - 2\pi$$

c) $\int_{-1}^{1} t^3 \cos(3t)\, dt$

El integrando $(t^3\cos(3t))$ es una función Impar. Dado que el intervalo de Integración es simétrico respecto al eje $f(t)$ entonces la integral definida es $\emptyset$.

$$\int_{-1}^{1} t^3 \cos(3t)\, dt = \emptyset$$

d) $\int_{-T}^{T} \operatorname{sen}\left(\frac{n 2\pi}{T} \cdot t\right) \cos\left(\frac{n 2\pi}{T} \cdot t\right) dt$

Donde n, T son constantes.

El Integrando $\left[\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n t}{T}\right)\cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right)\right]$

es Impar. Ya que el Intervalo de Integración es simétrico $(-T, T)$ entonces el valor de la Integral definida es $\emptyset$.

$$\int_{-T}^{T} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n t}{T}\right)\cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt = \emptyset$$

a) $\int_{-5}^{5} t^3\, dt = \emptyset$ b) $\int_{-\pi}^{\pi} t^3 \operatorname{sen}(t)\, dt = 2\pi^3 - 2\pi$

c) $\int_{-1}^{1} t^3 \cos(3t)\, dt = \emptyset$ c) $\int_{-T}^{T} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n t}{T}\right)\cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt = \emptyset$

Ortogonalidad e Identidades de Integrales

Ejercicio # 1 | # 10

$$\int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\pi/\omega} \cos(m\omega t)\cos(n\omega t)\,dt$$

Utilizando la identidad:

$$2\cos(A)\cos(B) = \cos(A+B) + \cos(A-B)$$

Se expresa la integral como:

$$\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\pi/\omega} \cos[(m+n)\,\omega t] + \cos[(m-n)\,\omega t]\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\operatorname{sen}[(m+n)\cancel{\omega}^{1} t]}{(m+n)\cancel{\omega}} + \frac{\operatorname{sen}[(m-n)\cancel{\omega}^{1} t]}{(m-n)\cancel{\omega}}\right]\Bigg|_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega}$$

$$= \varnothing$$

$$\int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\pi/\omega} \cos(m)\omega t \cdot \cos(n)\omega t\,dt = \varnothing$$

#

Ejercicio # 2

11

$$\int_0^T \cos\left(\frac{2\pi m t}{T}\right)\cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ T/2 & m = n \neq \emptyset \end{cases}$$

ya que el intedvando es par, entonces:

$$\frac{1}{2}\int_{-T}^{T} \cos\left(\frac{2\pi m t}{T}\right)\cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt$$

Se observa entonces: $\omega = \frac{2\pi}{T}$ por lo que

se reduce:

$$\boxed{\frac{1}{2}\int_{-T}^{T} \cos(m\omega t)\cos(n\omega t)\, dt}$$

En vista que el integrando es Ortogonal,

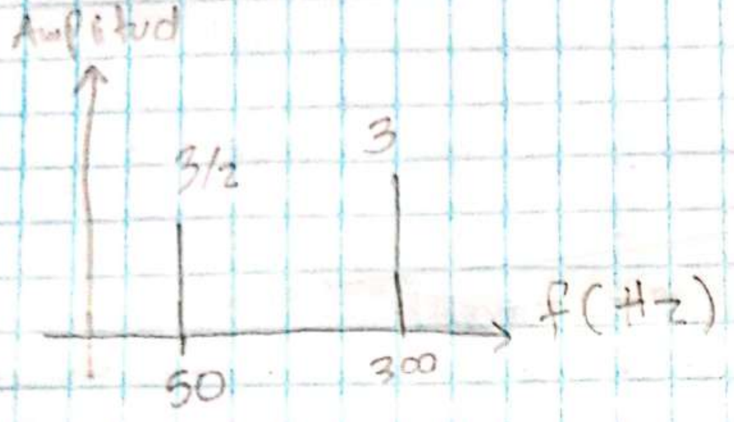
Se obtiene entonces:

$$\frac{1}{2}\int_{-T}^{T} \cos(m\omega t)\cos(n\omega t)\, dt = \int_0^T \cos\left(\frac{2\pi m t}{T}\right)\cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt = \emptyset$$

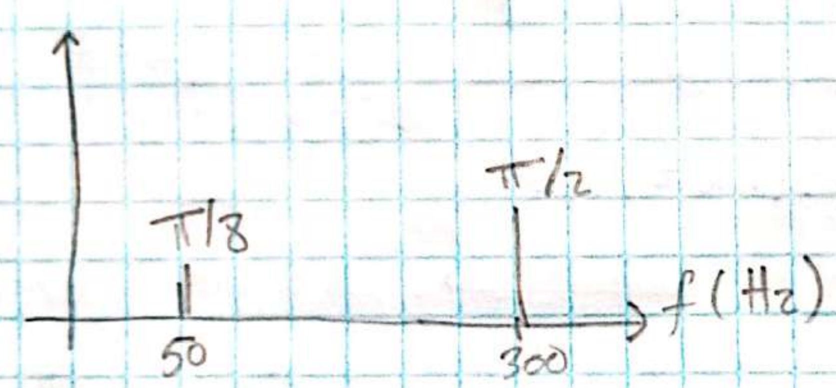
Donde $\omega = \frac{2\pi}{T}$

Series Trigonométricas de Fourier

Ejercicio # 1 | # 13



Fase (rad)



$f = 50 \Rightarrow T = 1/50 \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{1} \div \frac{1}{50} = 100\pi$

$A = 3/2$

$\phi = \pi/8$

Para $f = 50$: $\frac{3}{2}\cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{8}\right)$ = 1ª Armonica.

$f = 300 \Rightarrow T = 1/300 \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{1} \div \frac{1}{300} = 600\pi$

$A = 3$; $\phi = \pi/2$

Para $f = 300 \Rightarrow 3\cos(600\pi + \pi/2)$ = 6ª Armonica

$f(t) = \frac{3}{2}\cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{8}\right) + 3\cos\left(600\pi t - \frac{\pi}{2}\right)$

* Ver fig 6 para la gráfica.

Ejercicio # 2 | # 14

$f(t) = \begin{cases} 0 & -5 < t < 0 \\ 1 & 0 < t < 5 \end{cases} \quad , T = 10$

$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,dt = \frac{2}{10}\left\{\int_0^5 1\,dt + \int_5^{10} 0\,dt\right\}$

$a_0 = 1$

$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\left(\frac{2n\pi t}{T}\right)dt$

$a_n = \frac{2}{10}\int_0^{10} f(t)\cos\left(\frac{2n\pi t}{10}\right)dt = \frac{\operatorname{sen}(\pi n)}{\pi n}$

$b_n = \frac{2}{10}\int_0^{10} f(t)\cos\left(\frac{2n\pi t}{10}\right)dt = \frac{1}{\pi n} - \frac{\cos(\pi n)}{\pi n}$

$f(t) = \frac{2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{5}\right)}{\pi} + \frac{2\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi t}{5}\right)}{3\pi} + \frac{2\operatorname{sen}(\pi t)}{5\pi} + 0.5 + \dots$

Escaneado con CamScanner

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2\,\text{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi t}{5}\right)}{(2n-1)\pi} \right] + 0.5$$

8) $$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2\,\text{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi t}{5}\right)}{(2n-1)\pi} \right] + 0.5$$