Título: **Cálculo de fuerzas internas en cables de sustentación vertical del puente colgante Golden Gate**

Tema del proyecto: **Modelo matemático para el cálculo de fuerzas internas en cables de sustentación vertical en puentes colgantes**

Integrantes:

- Integrante 1: ***Jordán O'Connor, Joaquín Francisco - 202110176 - participación 100%***
- Integrante 2: ***Chachi Rodriguez, José Rafael - 202110069 - participación 100%***
- Integrante 3: ***Cernades Ames, Renato Aurelio - 202110068 - participación 100%***
- Integrante 4: ***Zúñiga Nole, Gilmar Gerard - 202020180 - participación 100%***
- Integrante 5: **Borda Arias, Brayan- 202110509 - participación 100%**
- Integrante 6: **Orosco, Gustavo - 202010597 - participación 100%**

Datos adicionales:

- Semestre: 2022-2
- Nombre del curso: Métodos Numéricos
- Docente: Molina Carabaño, Brigida Coromoto
- Sección: 3
- Número de grupo: 1

Resumen

En el presente trabajo se realiza un análisis de las fuerzas internas en los cables de sustentación vertical del puente Golden Gate. Para ello, se utiliza una metología propuesta recientemente, que nos permitirá calcular dichas fuerzas aplicando los métodos numéricos de la Bisección, Newton-Raphson y Punto Fijo. Asimismo, se discute acerca de los resultados hallados y sus implicancias, comparándolos con la literatura actual en el tema.

Índice de contenido

Tabla de Contenidos

Introducción

Tema del proyecto

Los puentes colgantes han obtenido una gran reputación por su aspecto estético. Sin embargo, están en constante expansión, lo que lleva a la optimización del uso de materiales para reducir los costos finales del proyecto. Para este estudio se requiere mayor precisión en las técnicas analíticas para lograr una comprensión plena; al calcular las fuerzas internas de los cables verticales. Un puente colgante es una estructura que puede extenderse más de un kilómetro y que suele usarse para conectar dos puntos separados por agua, por ejemplo, el Golden Gate es un puente colgante ubicado en California, Estados Unidos. Tiene 6 caminos que cruzan el Canal Golden Gate y conectan la península de San Francisco a condado de Marin. Su diseño es complejo, pues requiere la correcta distribución de la carga sobre los cables y los anclajes que los soportan (Zhang et al., 2018).

Figura 1: Vista panorámica de la bahía de San Francisco

Los puentes colgantes resisten diversas fuerzas: el peso del tráfico rodado y su propio peso. En la historia de estas construcciones se han producido derrumbamientos, debido a que el diseño no cumplía con las técnicas necesarias, como ejemplo, el puente Tacoma Narrows. Por ende, al diseñar un puente colgante se deben tener en cuenta no solo el peso del puente y el tráfico rodado, sino todos los fenómenos atmosféricos que lo pueden afectar (movimiento sísmico, vientos y huracanes). Asimismo, la longitud del puente colgante se calcula en función de la distancia entre las dos torres que lo sostienen (Cáceres et al., 2021).

Hoy en día, la mayoría de los puentes colgantes están hechos de acero porque es un material resistente. Además de ello, se suelen utilizar sistemas de amortiguación para evitar posibles movimientos laterales. En este proyecto abordaremos la eficiencia de los métodos numéricos para el análisis estructural de las fuerzas internas mediante el uso de la ecuación de la catenaria.

Identificación del problema

Las tensiones en los cables de sustentación vertical de un puente colgante no están uniformemente distribuidas en el estado final del puente, por lo que estas tensiones no son iguales a la carga muerta de la sección del puente entre dos cables adyacentes (Zhang et al., 2018).

Por lo tanto, se requieren de otros métodos para lograr un cálculo correcto de la tensión de los cables de sustentación vertical.

Objetivos

Objetivo general

Determinar el valor de la tensión en los cables de sustentación vertical del área principal del puente Golden Gate.

Objetivos específicos

1. Modelar el cable principal del puente Golden Gate como una serie de segmentos catenarios unidos.
2. Calcular los parámetros de la ecuación catenaria mediante una aproximación parabólica.
3. Hallar la tensión en los cables de sustentación vertical del área principal del puente.
4. Comparar el valor hallado con lo propuesto por la literatura.
5. Analizar los materiales empleados en la construcción del puente colgante.

Justificación

Actualmente, existe un gran interés en los puentes colgantes para la construcción de puentes largos, dado que optimizan la utilización de materiales sin sacrificar la integridad de la estructura (Zhang et al., 2018).

Por lo tanto, es necesario tener una medida precisa del valor de la tensión en los cables de sustentación vertical de los puentes colgantes, pues es un factor crítico para el equilibrio general de la estructura.

Marco teórico

Antecedentes

Para determinar las fuerzas internas de un puente colgante, se emplearán los parámetros conocidos como la ubicación del tramo, la relación de pandeo del tramo principal entre el tramo principal, la altura del cable en la mitad del tramo principal, la altura de los puntos de cruce del cable por encima los sillines, el espacio entre los colgadores y la altura de la plataforma del puente estudiado. Luego, se usará un modelo de elementos finitos de análisis estructural para calcular la tensión del soporte, pero es difícil simular una silla de pilón en un análisis de detección de forma de cable. Los métodos para determinar la forma de los cables de puentes colgantes se pueden dividir en términos generales en; (1) métodos basados en elementos de líneas aéreas y (2) métodos analíticos. El primer método identifica la forma curva del cable objetivo mediante la actualización de las posiciones nodales y las tensiones de los elementos de la catenaria del cable mediante un análisis estructural no lineal con iteración de Newton (Cao et al., 2017; Chen et al., 2000, 2013 citados por Wen-Ming Zhang).

A diferencia de los métodos basados en elementos de cadena, los métodos analíticos son mucho más eficiente desde el punto de vista computacional y tiene una convergencia más rápida (Cao et al., 2017 citados por Wen-Ming Zhang). En las últimas décadas, los enfoques analíticos para encontrar formas de alambre basados en la teoría de líneas parabólicas o la teoría de cadenas de segmentos de líneas han mejorado significativamente. Como parte del método de Newton-Raphson, Chen et al. (2013) propusieron un enfoque iterativo flexible en el que las ecuaciones subyacentes no lineales se linealizan aproximadamente mediante expansiones de Taylor de primer orden. Basado en la teoría parabólica de segmentos, como menciona Jung et al. (2015) propusieron un método de análisis simple para optimizar el análisis de la forma inicial de los puentes colgantes. A continuación, investigamos numéricamente el puente colgante Golden Gate para demostrar la precisión y la eficiencia del método de análisis de detección de forma propuesto.

An iterative calculation method for hanger tensions and the cable shape of a suspension bridge based on the catenary theory and finite element method (Zhang et al., 2018): A continuación se presenta el modelo matemático a utilizar. Este fue propuesto por Zhang et al. (2018).

Bajo la acción de las fuerzas concentradas/de bulto transferidas a través de las suspensiones, el cable en el estado final del puente está formado por muchos segmentos de catenaria colgados entre las suspensiones adyacentes. Cada segmento de cable y cada péndulo deben cumplir los siguientes requisitos subyacentes:

1. Los materiales trabajan en su rango elástico (es decir, por debajo de su nivel de tensión de fluencia), y sus dependencias de tensión-deformación siguen la ley de Hooke.

2. Se asumen las condiciones de deformación a pequeña escala, lo que implica que la deformación del cable es lo suficientemente pequeña como para no tener en cuenta la contracción transversal del cable.

3. El cable es idealmente flexible, lo que excluye la generación de tensiones de flexión en él.

La rigidez a la flexión del cable principal se desprecia por las siguientes dos razones (Zhang et al., 2018):

1. Durante todo el proceso de construcción de un puente colgante, la rigidez a la flexión del cable principal es insignificante, al igual que el efecto de sujeción de una abrazadera sobre el cable principal.

2. En los puentes colgantes de gran longitud, las abrazaderas ocupan un bajo porcentaje de la longitud total del cable principal en el vano central, alrededor del 6%.

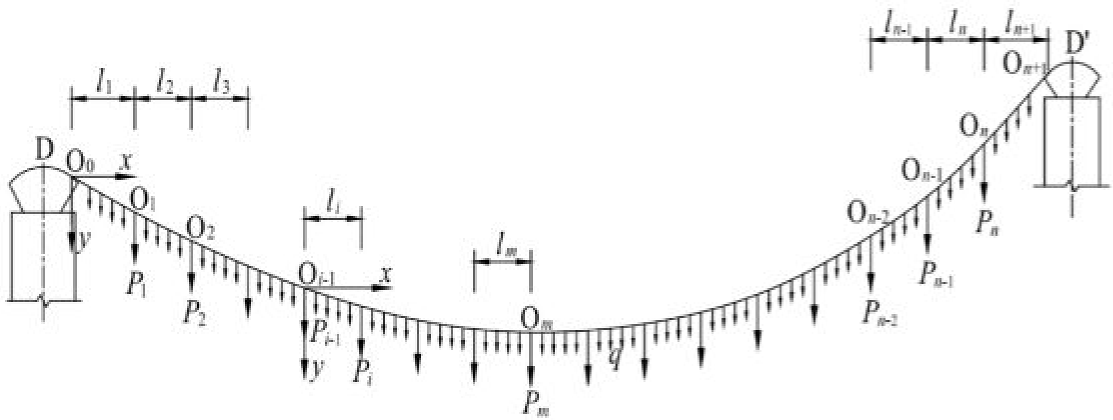


Figura 2: Configuración del cable en el estado de puente completado

En primer lugar, hay que realizar la búsqueda en el vano principal la forma que tiene el cable. Como podemos observar en la figura 2, se establecen varios sistemas de coordenadas, con su origen en el punto tangente izquierdo, O_0, y los puntos de suspensión, $O_1 - O_n$, a lo largo del cable, el eje x positivo apuntando hacia la derecha, y el eje y positivo apuntando hacia abajo. La forma de un segmento de cable arbitrario se deriva de la siguiente ecuación de catenaria: $y = c * cosh\left(\frac{x}{c} + ai\right) + bi \ldots (1)$, donde $c = -\frac{H}{q}$, siendo q el peso del cable por unidad de longitud (kN/m) y H la componente horizontal de la tensión del cable en el estado de puente terminado (kN); a_i y b_i son parámetros de la ecuación catenaria. A partir de la condición de frontera $y(0) = c * cosha_i + b_i = 0$, se obtiene $b_i = -c * cosha_i$. Sustituyendo este término en la ecuación (1), puede reducirse a la siguiente forma: $y = c\left[cosh\left(\frac{x}{c} + a_i\right) - cosha_i\right] \ldots (2)$.

Se introducen tres condiciones de restricción:

1. La diferencia de cota entre el punto de la tangente izquierda y el punto medio del vano es cerrada $\sum_{i=1}^{m} \Delta h_i = \Delta h_{O_0 O_m}$.

2. La diferencia de elevación entre los dos puntos tangentes de los sillines izquierdo y derecho es cerrada $\sum_{i=1}^{n+1} \Delta h_i = \Delta h_{O_0 O_{n+1}}$.

3. La longitud de la proyección ortogonal del segmento de catenaria más a la derecha sobre el plano horizontal, l_{n+1}, cumple el siguiente diseño $l_{n+1} = l_{O_n D'} - \Delta_2$.

En las ecuaciones m es el número de segmentos del cable entre el punto tangente izquierdo, O_0, y el punto intermedio, O_m; n es el número de puntos de suspensión a lo largo del cable; Δh_i denota la diferencia de elevación entre dos puntos extremos de un segmento catenario arbitrario del cable; $\Delta h_{O_0 O_m}$ es la diferencia de elevación entre el punto tangente izquierdo, O_1, y el punto intermedio, O_m; $\Delta h_{O_0 O_{n+1}}$ es la diferencia de elevación entre los puntos tangentes izquierdo (O_0) y derecho (O_{n+1}); $l_{O_n D'}$ es la distancia horizontal diseñada entre la percha más a la derecha y el vértice real de la torre derecha, D', como se muestra en la **figura 3(b)**; Δ_2 es la distancia horizontal entre los puntos O_{n+1} y D', como se muestra en la **figura 3(b)**. Los tres parámetros desconocidos en las tres ecuaciones anteriores de catenaria son H, a_i y $l_{(n+1)}$, que se refieren a la tensión horizontal del cable, al coeficiente de la ecuación de la catenaria para el primer segmento de la catenaria y a la longitud de la proyección ortogonal del segmento de la catenaria más a la derecha en el plano horizontal, respectivamente.

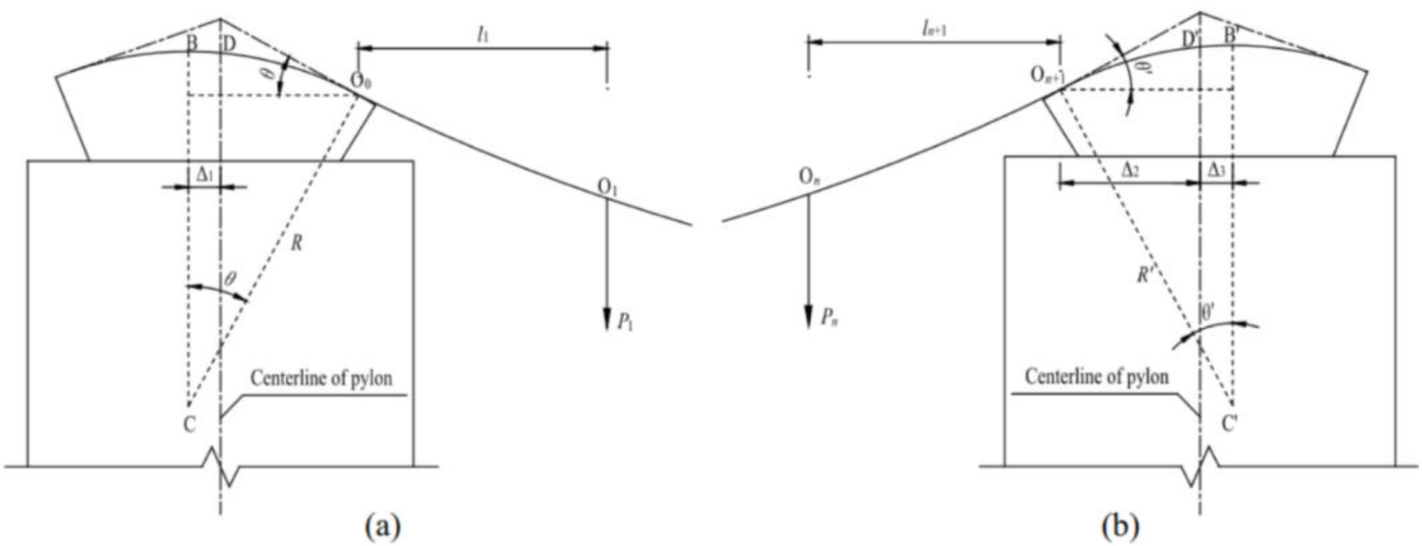


Figura 3: Disposición de los sillines de la torre y parámetros críticos: (a) sillín de la torre izquierda y (b) sillín de la torre derecha

Luego de ello, podemos expresar todos los demás términos de las ecuaciones anteriores como funciones de estos tres parámetros.

Así, Δh_i puede expresarse como $\Delta h_i = y(l_i) - y(0) = c\left[\cosh\left(\frac{l_i}{c} + a_i\right) - \cosh(a_i)\right]$ donde l_i es la longitud de la proyección ortogonal de un segmento arbitrario de catenaria en el plano horizontal, como se muestra en la **figura 2**. Para una determinada elevación diseñada del centro del círculo, C, en el sistema geodésico (denotada como h_C), la elevación del punto tangente izquierdo en el sistema geodésico, h_{O_0}, puede escribirse como $h_{O_0} = h_C + R * \cos(\theta)\ldots(3)$, en donde R es el radio de la parte superior en forma de arco de la torre izquierda, como se muestra en la figura 3(a); θ es el ángulo entre el segmento vertical BC y el segmento que conecta el punto O_0 y el centro del círculo, C. En tanto $\tan(\theta) = \frac{d_y}{d_x}|_{x=0} = \sinh(a_1)$, obtenemos $\cos(\theta) = \text{sech}(a_1)\ldots(4)$. La sustitución de la ecuación (4) en la ecuación (3) da como resultado $h_{O_0} = h_C + R * \text{sech}(a_1)$.

Para una determinada elevación de diseño del punto O_m en el sistema geodésico (denotada como h_{O_m}), la diferencia de elevación entre los puntos O_0 y O_m (denotada como $\Delta h_{O_0 O_m}$) puede reducirse a $\Delta h_{O_0 O_m} = h_{O_0} - h_{O_m} = h_C + R * \mathrm{sech}(a_1) - h_{O_m}$.

Para una elevación de diseño dada del centro del círculo, C', en el sistema geodésico, denotada como hC', la elevación del punto tangente derecho en el sistema geodésico, $h_{O_{n+1}}$, puede expresarse como $h_{O_{n+1}} = h_{C'} + R' * \cos(\theta') \ldots (5)$, en donde R' es el radio de la parte superior en forma de arco de la torre derecha, como se muestra en la figura 3(a); θ' es el ángulo entre el segmento vertical B'C' y el segmento que conecta el punto O_{n+1} y el centro del círculo, C.'

De forma similar, de la ecuación $\tan(\theta') = -\frac{d_y}{d_x}|_{x=l_{n+1}} = -\sinh\left(\frac{l_{n+1}}{c} + a_{n+1}\right)$ se obtienen $\cos(\theta') = \mathrm{sech}\left(\frac{l_{n+1}}{c} + a_{n+1}\right) \ldots (6)$ y $\mathrm{sen}(\theta') = \mathrm{sech}\left(\frac{l_{n+1}}{c} + a_{n+1}\right)$

La sustitución de la ecuación (6) en la ecuación (5) da como resultado $h_{O_{n+1}} = h_{C'} + R' * \mathrm{sech}\left(\frac{l_{n+1}}{c} + a_{n+1}\right)$.

Entonces, la diferencia de elevación entre los puntos O_0 y O_{n+1}, denominada $\Delta h_{O_0 O_{n+1}}$, puede expresarse así $\Delta h_{O_0 O_{n+1}} = h_{O_0} - h_{O_{n+1}} = h_C - h_{C'} + R * \mathrm{sech}(a_1) - R' * \mathrm{sech}\left(\frac{l_{n+1}}{c} + a_{n+1}\right)$. La expresión para Δ_2 es $\Delta_2 = R' * \mathrm{sen}(\theta') - \Delta_3 = -R' * \tanh\left(\frac{l_{n+1}}{c} + a_{n+1}\right) - \Delta_3$. Donde D3 es la distancia horizontal entre los puntos C' y D', como se muestra en la figura 3(b).

En un punto de suspensión arbitrario del cable principal, la fuerza de tracción axial puede descomponerse en una componente vertical y otra horizontal, como podemos observar en la **figura 4** (Zhang et al., 2018). A partir de la condición de equilibrio de fuerzas en la dirección vertical, podemos obtener: $Htan\varphi_i = Htan\varphi_{i+1} + P_i \ldots (7)$

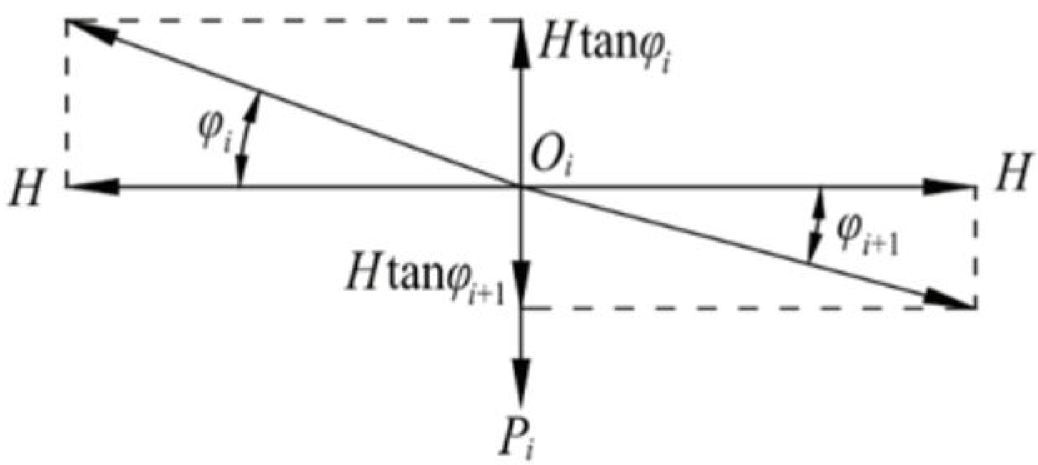


Figura 4: Diagrama de cuerpo libre de las fuerzas en un punto de suspensión O_i

Donde li es la longitud de la proyección ortogonal de un segmento arbitrario de catenaria en el plano horizontal, como podemos observar en la figura 2, P_i es la fuerza de tracción de la suspensión y φ_i y φ_{i+1} son los ángulos de inclinación para los segmentos de cable a la derecha y a la izquierda del de suspensión, O_i, respectivamente. Al sustituir $tan\,(\varphi_i)= sinh\,\left(\frac{l_i}{c}+a_i\right)$ y $tan\,(\varphi_{i+1})= sinh\,(a_{i+1})$ en la ecuación (7), obtenemos:

$Hsinh\,\left(\frac{l_i}{c}+a_i\right)= Hsinh(a_{i+1})+P_i$. Reordenando los términos, obtenemos $P_i\ = H\left(sinh\,\left(\frac{l_i}{c}+a_i\right)- sinh(a_{i+1})\right)$.

Conceptos clave

Conceptos generales

Fuerzas concentradas: Una fuerza concentrada representa el efecto de una carga que se supone actúa en cierto punto de un cuerpo.

Catenaria: En física y geometría, una catenaria es la curva que una cadena o cable colgante idealizado asume bajo su propio peso cuando se apoya sólo en sus extremos en un campo gravitatorio uniforme. La curva catenaria tiene una forma de U, superficialmente similar en apariencia a un arco parabólico, pero no es una parábola.

Rango elástico: El límite elástico o límite de elasticidad es la tensión máxima que un material elastoplástico puede soportar sin sufrir deformaciones permanentes.

Ley de Hooke: La deformación elástica que sufre un cuerpo es proporcional a la fuerza que produce tal deformación, siempre y cuando no se sobrepase el límite de elasticidad.

Contracción transversal: Disminución de la sección del elemento estirado.

Proyección ortogonal: Una proyección ortogonal es aquella que se crea a partir del trazado de la totalidad de las rectas proyectantes perpendiculares a un cierto plano.

Fuerza de tracción axial: En el cálculo de estructuras e ingeniería se denomina fuerza de tracción a las fuerzas externas actúan tratando de "estirar" el cuerpo, intentando producir un alargamiento del mismo.

Rigidez: Propiedad extensiva que mide la capacidad de un cuerpo de resistir deformación, es una medida de la resistencia a las deformaciones elásticas producidas por un material. Depende del módulo de elasticidad y específicamente se habla de rigidez en tracción.

Flexibilidad: Es la inversa de la rigidez. Cuanto más rígido, menos flexible.

Esfuerzo (stress): Es la fuerza sobre la unidad de área perpendicular a dicha fuerza.

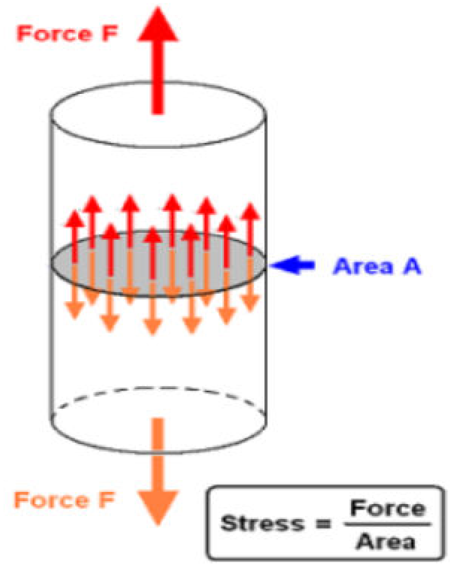


Figura 5: Representación gráfica del cálculo del esfuerzo

Esfuerzo de tracción: La tracción es el esfuerzo al que está sometido un cuerpo por la aplicación de dos fuerzas que actúan en sentido opuesto, y tienden a estirarlo.

Módulo de elasticidad: Es una propiedad intensiva del material.

Deformación unitaria: La deformación unitaria (δ) se define como el cambio de longitud, por unidad de longitud, debido a una carga normal sobre un material. Esta se puede relacionar directamente con el esfuerzo generado sobre el material al dividir la carga que genera la deformación entre el área transversal del material.

Tensión o límite de fluencia: En ciencia e ingeniería de materiales, el punto de fluencia es el punto en una curva de tensión-deformación que indica el límite del comportamiento elástico y el comienzo del comportamiento plástico. Por debajo del límite elástico, un material se deforma elásticamente y volverá a su forma original cuando se elimine la tensión aplicada.

Esfuerzo de fluencia: Indicación del esfuerzo máximo que se puede desarrollar en un material sin causar una deformación plástica. Es el esfuerzo en el que un material exhibe una deformación permanente especificada y es una aproximación práctica de límite elástico.

Silla de pilón: Elemento de un puente colgante en donde se encuentran los cables de sujeción.

Método de los elementos finitos: Es un método de aproximación en donde existe una continuidad entre sus elementos. Estos son de una cantidad finita asociada a determinados puntos denominados como nodos.

Partes de un puente colgante

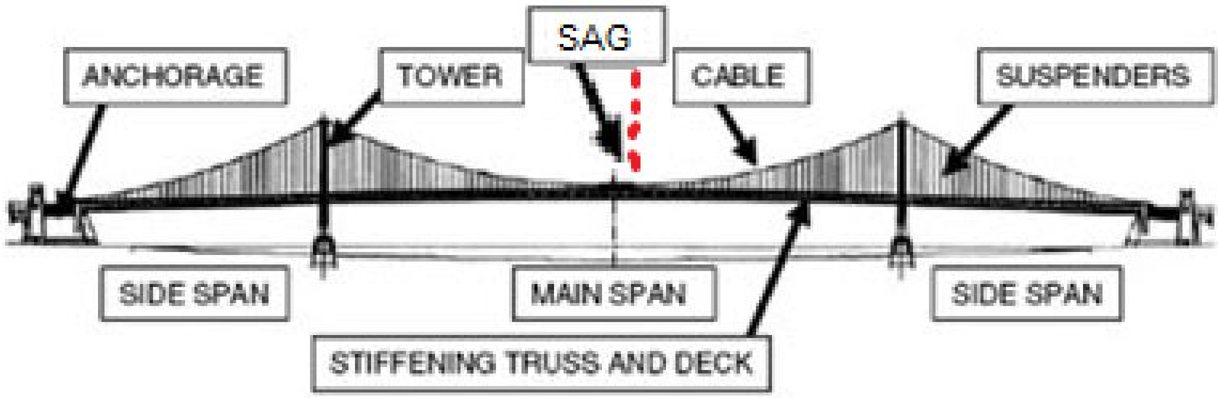


Figura 6: Nombres de algunas partes de un puente colgante en inglés

Anclaje (*anchorage*): Mecanismo de anclaje del puente con el terreno adyacente.

Cable principal (*cable*): Cable que atraviésa horizontalmente toda la extensión del puente colgante.

Cables de sustentación vertical (*suspenders*): Cables situados en el plano de un entramado transversal que transmiten las cargas debidas a la gravedad a la parte superior del casco.

Torre (*tower*): Torre que sostiene mediante sillínes al cable principal.

Tramo principal (*main span*): Sección del puente comprendida entre las torres.

Tramo lateral (*side span*): Sección del puente comprendida entre una torre y el terreno adyacente al puente.

Hundimiento (sag): Curva hacia abajo en una estructura producida por el efecto de una fuerza. En el caso del puente colgante, se refiere al hundimiento en el cable principal.

Armadura de refuerzo (*stiffening truss*): Es una armadura que distrubye uniformemente la carga del tráfico en el puente de suspensión.

Métodos iterativos

Los métodos iterativos para ecuaciones no lineales: El estudio de los métodos iterativos para ecuaciones no lineal es de gran importancia ya que son nuestra única herramienta para resolver estos tipos de problemas, además, necesitamos que estos métodos sean lo más precisos y rápidos posibles, dada la alta complejidad de los problemas en el mundo real. A continuación se explican los métodos para hallar las raíces de ecuaciones no lineales y sus criterios de convergencia para, posteriormente, comparar los resultados hallados en este proyecto con la literatura.

Método de la bisección

El método de la bisección busca hallar las raíces de una función $f(x)$ en base a un intervalo. Este es un método cerrado ya que siempre podemos encontrar una raíz siempre cuando la función sea continua. Este método consiste en ir partiendo un intervalo a la mitad siguiendo las reglas que mostraremos a continuación (Chapra & Canales, 1999).

Este método se desarrolla de la siguiente forma:

Dado un intervalo $[a, b]$ y una función $f(x)$.

1. Verificar si existe un cambio de signo en la función f en el intervalo [a, b]. Para esto evaluamos $f(a) \cdot (b) < 0$. Si dicha condición es verdadera, continuamos, caso contrario, no existe raíz en nuestro en el intervalo $[a, b]$.
2. Se toma un punto medio c del intevalo, es decir, $c = \frac{a+b}{2}$ y se evalua $f(a) \cdot (c) > 0$. Si es verdad, se remplaza a por c y volvemos al paso 1. Caso contrario, se evalua $f(c) \cdot (b) > 0$ y si es cierto se remplaza b por c y volvemoms al paso 1.

Todo este procedimiento se repetira según el número de iteraciones que el matemático considere o según una toleración dada por la siguiente ecuación:

$n \geq \frac{\ln(\frac{b-a}{2 \cdot Tol})}{\ln 2}$, donde n es el menor valor entero que cumpla dicha desigualdad.

Demostración

Este método funciona ya que partimos de un intervalo $[a, b]$ donde $f(a) \cdot f(b) < 0$; gracias al requisito de $f(x)$ de ser una función continua, podemos asegurar que al haber un cambio de signo en la función para dicho intevalo, en algún punto este se intersecta con el eje x, por consecuente, encontraremos una raíz en dicho intervalo (Chapra & Canale, 1999).

Método de Newton-Raphson

El método de Newton-Raphson es un método iterativo que busca hallar las raíces de una función a partir de un iterador inicial. Por lo general, es un método que converge rápidamente, sin embargo, es un método abierto por lo que no encierra necesariamente a la raíz y en algunos casos pueden diverger (Chapra & Canale, 1999).

El método se desarrolla de la siguiente forma:

Dado un iterador incial x_o y una función $f(x)$. Se calcula la siguiente aproximación a de la raíz como $x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$ y luego se vuelve a iterar siendo $x_i = x_{i+1}$.

Deducción

Deduciremos la fórmula del método a partir de la serie de Taylor.

Por la serie de Taylor podemos representar una función como:

$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{f''(\xi)(x_{i+1} - x_i)^2}{2!}$, donde $\xi \in [x_i, x_{i+1}]$ (Ecuación 1)

Y truncando la serie hasta el 2do término tenemos:

$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i)$ (Ecuación 2)

Para hallar las raíces, la intersección con el eje x debe ser cero. Por lo que tenemos:

$0 = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i)$ (Ecuación 3)

Y despejando x_{i+1} nos queda:

$-f'(x_i)(x_{i+1}) = f(x_i) - f'(x_i)(x_i)$

$$x_{i+1} = \frac{f(x_i) - f'(x_i)(x_i)}{-f'(x_i)}$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \quad \text{(Ecuación 4)}$$

Así deducimos la fórmula de Newton-Raphson. De la misma forma podemos deducir el error del método remplazando $x_{i+1} = x_r$, donde suponemos que x_r es el valor real de la raíz, en la ecuación 1 y sustituyendo $f(x_r) = 0$ nos queda:

$$0 = f(x_i) + f'(x_i)(x_r - x_i) + \frac{f''(\xi)(x_r - x_i)^2}{2!} \quad \text{(Ecuación 5)}$$

Se resta la ecuación 5 con la 3 y obtenemos que el error es:

$$0 = f'(x_i)(x_r - x_{i+1}) + \frac{f''(\xi)(x_r - x_i)^2}{2!} \quad \text{(Ecuación 6)}$$

Note que el error es la diferencia entre x_{i+1} y el valor x_r, entonces la ecuación 6 se puede expresar como:

$0 = f'(x_i)E_{i+1} + \frac{f''(\xi)E_i^2}{2!}$, siendo $E = x_r - x_{x+1}$. (Ecuación 7)

Suponiendo hay convergencia, x_i y ξ deben acercarce a la raíz de la función, entonces la ecuación 7 se puede expresar como:

$$E_{i+1} = -\frac{f''(x_r)E_i^2}{2f'(x_r)}$$

Y está ecuación nos dice que el error E_{i+1} está en proporción cuadrática al error anterior E_i. Lo que significa que este método tienen una convergencia cuadrática, por lo que cada iteración duplicara el número de cifras significativas.

Convergencia

No existe realmente un críterio general de convergencia para este método, ya que existen funciones que ningún iterador incial les es útil; por lo que se dice que el críterio de convergencia depende de la naturaleza de la función y la calidad del iterador inicial (Chapra & Canale, 1999).

Método del Punto Fijo

Este método se basa, como su nombre lo dice, en iterar sobre un punto fijo x, el cual se obtiene al despejar x de una función $f(x)$. Este es un método abierto, lo que quiere que no encerramos la raíz en todo momento, de tal forma que en ciertos casos el método puede diverger (Chapra & Canale, 1999).

Desarrollo del método

Sea la función $f(x)$ despejamos x y tendrémos $x = g(x)$. Luego nuestra aproximación está dada por $x_{i+1} = g(x_i)$ y repetimos el proceso hasta cumplir un cierto número de iteración o una tolerancia dada.

El error en este caso está dado por $\epsilon_a = |\frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1}}|$

Convergencia y análisis

Este método requiere de ciertos criterios para converger. Dado $a, b \in \mathbb{R}$ talque a < b y g : $[a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y derivable en $]a, b[$.

1. $|g'(x)| < 1, \forall\ x \in\ ]a, b[$
2. $\forall\ x \in [a, b],\ g(x) \in [a, b]$

Entonces existe un único punto tal que g(p) = p. Entonces al construir una sucesión de la forma $x_{k+1} = g(x_k)$, esta converge al punto fijo p de la función (Chapra & Canales, 1999).

Fórmulas

Fórmula del esfuerzo o presión

La presión o el esfuerzo tiene su propia unidad llamada Pascal que son $(\frac{N}{m^2})$. Esta es expresada como $\sigma = \frac{F}{A}$, donde A es el área, F la fuerza ejercida a dicha area y σ el esfuerzo.

Metodología

Modelo matemático

Métodos de resolución

Interpolación de funciones

- Interpolación polinomial: Se utilizará para aproximar las catenarias sucesivas como un polinomio de grado 2 (parábola).

$$y(l_i) = -\frac{H}{w}\left[\cosh\left(-\frac{w}{H} * l_i + a_i\right) - \cosh(a_i)\right]$$
$$P_i = H\left[\operatorname{senh}\left(-\frac{w}{H} * l_i + a_i\right) - \operatorname{senh}(a_{i+1})\right]$$

Ecuaciones no lineales - Métodos iterativos

- Método de la Bisección: Es un método cerrado que se utilizará para hallar los coeficientes y que nos permitirá hacer un cálculo preciso.
- Método de Newton: Es un método abierto que se utilizará para hallar otra aproximación de los coeficientes y se espera que el cálculo sea de mayor precisión que el de la bisección.

- Método del Punto Fijo: Es otro método abierto que se utilizará para aproximar los coeficientes.

Datos

Zona de estudio

El puente Golden Gate está ubicado en la bahía de San Francisco, California, Estados Unidos. En la bahía se encuentran los ríos Sacramento, San Joaquin, Petaluma, Napa y Guadalupe, además parte del Oceáno Pacífico.

Periodo de estudio: Periodo histórico (1940-1982) y Periodo futuro (2000-2023)

Luego del colapso del puente de Tacoma Narrows en el año 1940, la Encuesta geodésica nacional de EE.UU. decidió mandar un equipo de investigación a nivel nacional para calcular los movimientos verticales de todos los puentes colgantes. Es a mediados del año 1982 que se logró realizar un estudio al puente Golden Gate que estableció un comportamiento segurido a las vibraciones que este mismo posee. Actualmente, la investigación realizada nos entrega una tabla de datos en donde nos muestran las propiedades estructurales del puente. En un futuro se espera realizar simulaciones para determinar el comportamiento del puente en posibles casos sísmicos u otros similares (Abdel-Ghaffar, A. M., & Scanlan, R. H., 1985).

Variables de estudio

Para establecer el dinanismo del puente se decidió analizar principalmente el comportamiento de los cables que lo sostienen. Para ello se utilizó las fuerzas horizontales, pesos, longitud y las distancias entre los distintos cables verticales. Utilizamos la longitud en pies y la fuerza en kips.

Recopilación/obtención de datos

Los datos obtenidos es sobre un estudio de las vibración que posee el puente colgante Golden Bridge de un equipo de investigación de la Sociedad Estadounidense de Ingenieros Civiles, sus siglas en inglés como ASCE.

Tabla de datos

Datos	Medidas
Longitud entre el tramo principal (Main span)	4200 feet
Máxima flexión de un cable	472.2 feet
Peso de un cable por pies	3.34 kips/ft
Componente de la fuerza horizontal de cada cable	53467 kips
Espacio del colgador (Sag)	50 feet
Número de nodos en el cable principal	250

Tabla 1: Datos extraídos del anexo 1 para las operaciones

La tabla de datos nos enseñan otras medidas que fueron utilizadas en el estudio de la NGS. Por el otro lado, las unidades que emplearon son del sistema imperial: *pies (ft), pulgadas (in) y kilo-libra fuerza (kips).*

```
format long
% Separación horizontal de los cables verticales (ft)
li = 50
```

```
li =
    50
```

```
% Maxima distancia entre el punto más bajo y más alto del cable principal
MAX_CABLE_SAG = 472.2
```

```
MAX_CABLE_SAG =
     4.722000000000000e+02
```

```
% Longitud del cable principal
LENGTH_MAIN_SPAN = 4200
```

```
LENGTH_MAIN_SPAN =
        4200
```

```
% Fueza horizontal de cada cable (kips)
H = 53467
```

```
H =
       53467
```

```
% Peso de cable por unidad de longitud (kips/ft)
W = 3.34
```

```
W =
   3.340000000000000
```

Desarrollo

Resultados

Objetivo 1

Para cumplir con el objetivo 1 de modelar el cable principal del puente Golden Gate como una serie de segmentos catenarios unidos, necesitamos utilizar los resultados del objetivo 2 de calcular los parámetros de la ecuación catenaria mediante una aproximación parabólica. A continuación se realiza dicha aproximación, utilizando los datos para el cable principal. El sistema de coordenadas está posicionado según la siguiente figura:

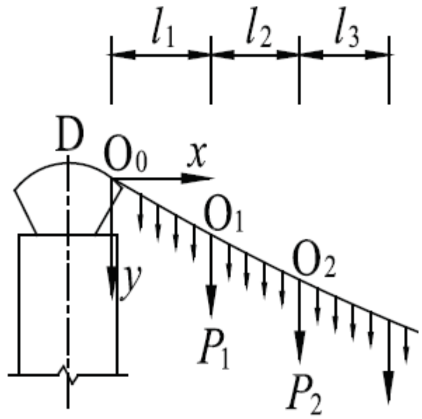


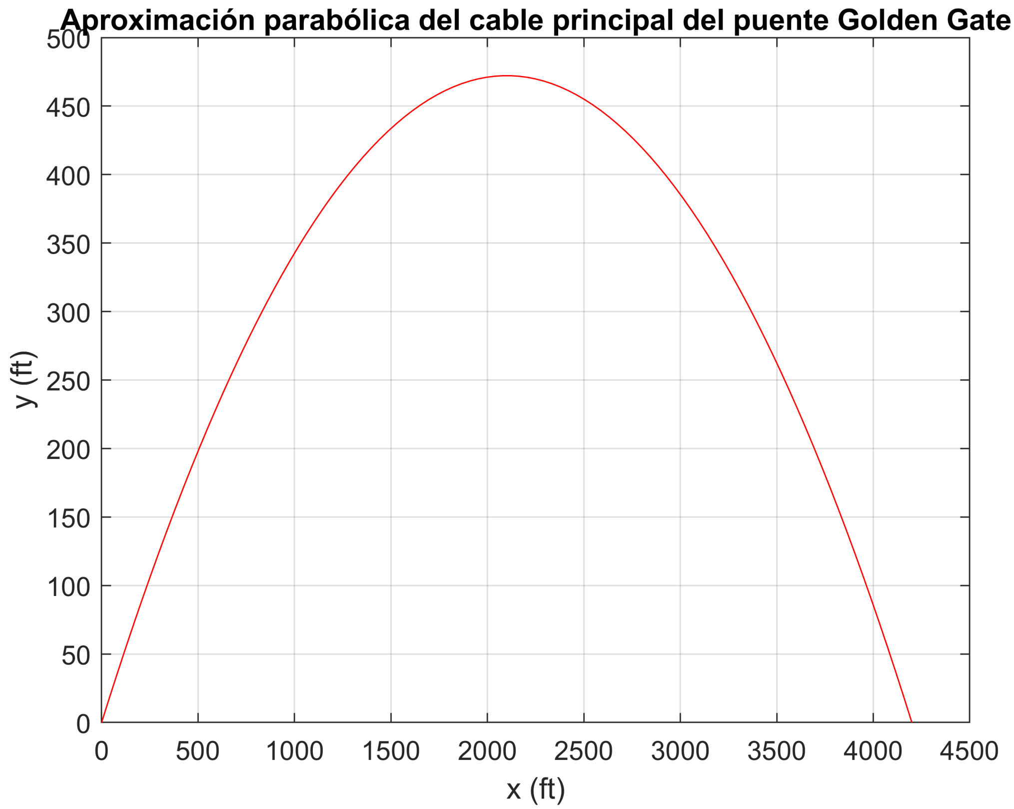
Figura 7: Representación gráfica de los cables (*Oi* es un cable vertical)

```
x = [0 LENGTH_MAIN_SPAN/2 LENGTH_MAIN_SPAN];
y = [0 MAX_CABLE_SAG 0];
p2 = polyfit(x, y, 2)
```

```
p2 = 1×3
  -0.000107074829932   0.449714285714286   0.000000000000091
```

Graficamos la aproximación obtenida. Note que el sistema de coordenadas planteado tiene la coordenada y hacia abajo.

```
xx = linspace(x(1), x(end));
plot(xx, polyval(p2, xx), "r")
title("Aproximación parabólica del cable principal del puente Golden Gate")
xlabel("x (ft)")
ylabel("y (ft)")
grid on
```



Con estos datos, ya podemos estimar la diferencia de altura entre los nodos O_0 y O_1 de la siguiente manera.

```
yl1 = abs(polyval(p2, 0) - polyval(p2, li));
```

A su vez, tambien hallaremos la diferencia de altura entre los nodos O_1 y O_2.

```
yl2 = abs(polyval(p2, li) - polyval(p2, 2*li));
```

Con esta información, ya podemos utilizar la ecuación que modela el cable como una serie de segmentos catenarios unidos. Estimaremos sus parámetros, pues estos serán necesarios para cumplir nuestro tercer objetivo.

Objetivo 2

Hallaremos los parámetros del primer segmento catenario, que nos permitirán hallar posteriormente el valor de la tensión del cable de sustentación vertical unido al punto de suspensión O_1 (P_1). Note que según los datos de Abdel-Ghaffa & Scanlan (1985), P_i es constante para todos los nodos O_i. Por lo tanto, basta con hallar P_1 para hallar P_i. Con los parámetros de la ecuación de la catenaria a_1 y a_2 podemos hallar P_i.
Los problemas a resolver para hallar dichos parámetros son un conjunto de ecuaciones no lineales. Para resolverlas, utilizaremos los tres métodos planteados en el modelamiento matemático: Método de la Bisección, Método de Newton-Raphson y Método del Punto Fijo.

Primero, planteamos las ecuaciones no lineales a resolver, que corresponden a la ecuación de los segmentos catenarios entre O_0 y O_1 y O_1 y O_2.

```
f1 = @(x)(-(H/W)*(cosh(-(W/H)*li+x)-cosh(x))-yl1);
f2 = @(x)(-(H/W)*(cosh(-(W/H)*li+x)-cosh(x))-yl2);
```

Planteadas las ecuaciones en forma de funciones, se procede con su resolución mediante los tres métodos.

Método de la Bisección

Al ser un método cerrado, primero tenemos que encontrar el intervalo en el que se encuentra nuestra raíz. Como primera aproximación para el intervalo, se prueba [0.3,0.6], pues en el trabajo de Cáceres et al. (2021) se encontró los valores en este rango. Graficaremos las funciones en este intervalo y verificaremos nuestra suposición.

```
a = 0.3;
b = 0.6;
xx = linspace(a, b);
yy = f1(xx);
yy2 = f2(xx);
plot(xx, yy, 'g', xx, yy2, 'm', xx, zeros(length(xx)), 'k')
xlabel("a")
ylabel("f")
title("Raíces de f1 y f2")
legend("f1", "f2", "y=0")
grid on
hold off
```

Como se observa, podemos encontrar las raíces de ambas ecuaciones en el intervalo [0.4, 0.45].

```
a = 0.4; b = 0.45;
```

Con esta información, se calculan los valores de a_1 y a_2. Se utilizarán 30 iteraciones, o una tolerancia de 10^{-8}, lo que ocurra antes y considerando que los cálculos son computacionalmente poco complejos.

```
tol = 1e-8; maxiter = 30;
```

Aproximación de a_1

```
[a1Biseccion, R1Biseccion] = biseccion(f1, a, b, tol, maxiter)
```

```
a1Biseccion =
   0.432463055849075
R1Biseccion = 23×8 table
```

	Iteration	a	b	c	f(a)	f(b)	f(c)	Ea
1	0	0.400000...	0.450000...	0.425000...	-1.76479...	0.962985...	-0.40772...	0.025000...
2	1	0.425000...	0.450000...	0.437500...	-0.40772...	0.962985...	0.275875...	0.012500...
3	2	0.425000...	0.437500...	0.431250...	-0.40772...	0.275875...	-0.06635...	0.006250...
4	3	0.431250...	0.437500...	0.434375...	-0.06635...	0.275875...	0.104651...	0.003125...
5	4	0.431250...	0.434375...	0.432812...	-0.06635...	0.104651...	0.019120...	0.001562...
6	5	0.431250...	0.432812...	0.432031...	-0.06635...	0.019120...	-0.02362...	0.000781...

	Iteration	a	b	c	f(a)	f(b)	f(c)	Ea
7	6	0.432031...	0.432812...	0.432421...	-0.02362...	0.019120...	-0.00225...	0.000390...
8	7	0.432421...	0.432812...	0.432617...	-0.00225...	0.019120...	0.008433...	0.000195...
9	8	0.432421...	0.432617...	0.432519...	-0.00225...	0.008433...	0.003089...	0.000097...
10	9	0.432421...	0.432519...	0.432470...	-0.00225...	0.003089...	0.000418...	0.000048...
11	10	0.432421...	0.432470...	0.432446...	-0.00225...	0.000418...	-0.00091...	0.000024...
12	11	0.432446...	0.432470...	0.432458...	-0.00091...	0.000418...	-0.00024...	0.000012...
13	12	0.432458...	0.432470...	0.432464...	-0.00024...	0.000418...	0.000084...	0.000006...
14	13	0.432458...	0.432464...	0.432461...	-0.00024...	0.000084...	-0.00008...	0.000003...
15	14	0.432461...	0.432464...	0.432463...	-0.00008...	0.000084...	0.000000...	0.000001...
16	15	0.432461...	0.432463...	0.432462...	-0.00008...	0.000000...	-0.00004...	0.000000...
17	16	0.432462...	0.432463...	0.432462...	-0.00004...	0.000000...	-0.00002...	0.000000...
18	17	0.432462...	0.432463...	0.432462...	-0.00002...	0.000000...	-0.00000...	0.000000...
19	18	0.432462...	0.432463...	0.432462...	-0.00000...	0.000000...	-0.00000...	0.000000...
20	19	0.432462...	0.432463...	0.432463...	-0.00000...	0.000000...	-0.00000...	0.000000...
21	20	0.432463...	0.432463...	0.432463...	-0.00000...	0.000000...	-0.00000...	0.000000...
22	21	0.432463...	0.432463...	0.432463...	-0.00000...	0.000000...	0.000000...	0.000000...
23	22	0.432463...	0.432463...	0.432463...	-0.00000...	0.000000...	-0.00000...	0.000000...

Aproximación de a_2

```
[a2Biseccion, R2Biseccion] = biseccion(f2, a, b, tol, maxiter)
```

```
a2Biseccion =
   0.422658771276474
R2Biseccion = 23×8 table
```

	Iteration	a	b	c	f(a)	f(b)	f(c)	Ea
1	0	0.400000...	0.450000...	0.425000...	-1.22941...	1.498359...	0.127653...	0.025000...
2	1	0.400000...	0.425000...	0.412500...	-1.22941...	0.127653...	-0.55253...	0.012500...
3	2	0.412500...	0.425000...	0.418750...	-0.55253...	0.127653...	-0.21285...	0.006250...
4	3	0.418750...	0.425000...	0.421875...	-0.21285...	0.127653...	-0.04270...	0.003125...
5	4	0.421875...	0.425000...	0.423437...	-0.04270...	0.127653...	0.042446...	0.001562...
6	5	0.421875...	0.423437...	0.422656...	-0.04270...	0.042446...	-0.00013...	0.000781...
7	6	0.422656...	0.423437...	0.423046...	-0.00013...	0.042446...	0.021152...	0.000390...
8	7	0.422656...	0.423046...	0.422851...	-0.00013...	0.021152...	0.010507...	0.000195...
9	8	0.422656...	0.422851...	0.422753...	-0.00013...	0.010507...	0.005184...	0.000097...
10	9	0.422656...	0.422753...	0.422705...	-0.00013...	0.005184...	0.002523...	0.000048...
11	10	0.422656...	0.422705...	0.422680...	-0.00013...	0.002523...	0.001192...	0.000024...

	Iteration	a	b	c	f(a)	f(b)	f(c)	Ea
12	11	0.422656...	0.422680...	0.422668...	-0.00013...	0.001192...	0.000527...	0.000012...
13	12	0.422656...	0.422668...	0.422662...	-0.00013...	0.000527...	0.000194...	0.000006...
14	13	0.422656...	0.422662...	0.422659...	-0.00013...	0.000194...	0.000028...	0.000003...
15	14	0.422656...	0.422659...	0.422657...	-0.00013...	0.000028...	-0.00005...	0.000001...
16	15	0.422657...	0.422659...	0.422658...	-0.00005...	0.000028...	-0.00001...	0.000000...
17	16	0.422658...	0.422659...	0.422658...	-0.00001...	0.000028...	0.000007...	0.000000...
18	17	0.422658...	0.422658...	0.422658...	-0.00001...	0.000007...	-0.00000...	0.000000...
19	18	0.422658...	0.422658...	0.422658...	-0.00000...	0.000007...	0.000002...	0.000000...
20	19	0.422658...	0.422658...	0.422658...	-0.00000...	0.000002...	0.000000...	0.000000...
21	20	0.422658...	0.422658...	0.422658...	-0.00000...	0.000000...	-0.00000...	0.000000...
22	21	0.422658...	0.422658...	0.422658...	-0.00000...	0.000000...	-0.00000...	0.000000...
23	22	0.422658...	0.422658...	0.422658...	-0.00000...	0.000000...	-0.00000...	0.000000...

Aproximación de P_i

```
PiBiseccion = H*(sinh((-W/H)*0 + a1Biseccion) - sinh(a2Biseccion))
```

```
PiBiseccion =
     5.728569562310826e+02
```

Método de Newton-Raphson

Haremos el mismo cálculo utilizando el método de Newton-Raphson con un valor inicial de 0.4, pues ya sabemos que la solución está próxima a este valor. Se utilizará la misma tolerancia y número de iteraciones que para el Método de la Bisección.

```
x0 = 0.4;
```

Aproximación de a_1

```
[a1NewtonRaphson, R1NewtonRaphson] = newtonraphson(f1, x0, tol, maxiter)
```

```
a1NewtonRaphson =
   0.432463058418837
R1NewtonRaphson = 5×3 table
```

	Iteration	x*	Er
1	0	0.400000...	1
2	1	0.432668...	1
3	2	0.432463...	0.075504...
4	3	0.432463...	0.000474...
5	4	0.432463...	0.000000...

Aproximación de a_2

```
[a2NewtonRaphson, R2NewtonRaphson] = newtonraphson(f2, x0, tol, maxiter)
```

```
a2NewtonRaphson =
   0.422658775643757
R2NewtonRaphson = 4×3 table
```

	Iteration	x*	Er
1	0	0.400000...	1
2	1	0.422757...	1
3	2	0.422658...	0.053832...
4	3	0.422658...	0.000234...

Aproximación de P_i

```
PiNewtonRaphson = H*(sinh((-W/H)*0 + a1NewtonRaphson) - sinh(a2NewtonRaphson))
```

```
PiNewtonRaphson =
     5.728568520037547e+02
```

Método del Punto Fijo

Para la aplicación de este método iterativo, se considerara el siguiente despeje:

$$y(l_i) = -\frac{H}{w}\left[\cosh\left(-\frac{w}{H} * l_i + a_i\right) - \cosh(a_i)\right]$$

$$-\frac{w}{H} * y(l_i) = \cosh\left(-\frac{w}{H} * l_i + a_i\right) - \cosh(a_i)$$

$$\cosh(a_i) = \cosh\left(-\frac{w}{H} * l_i + a_i\right) + \frac{w}{H} * y(l_i)$$

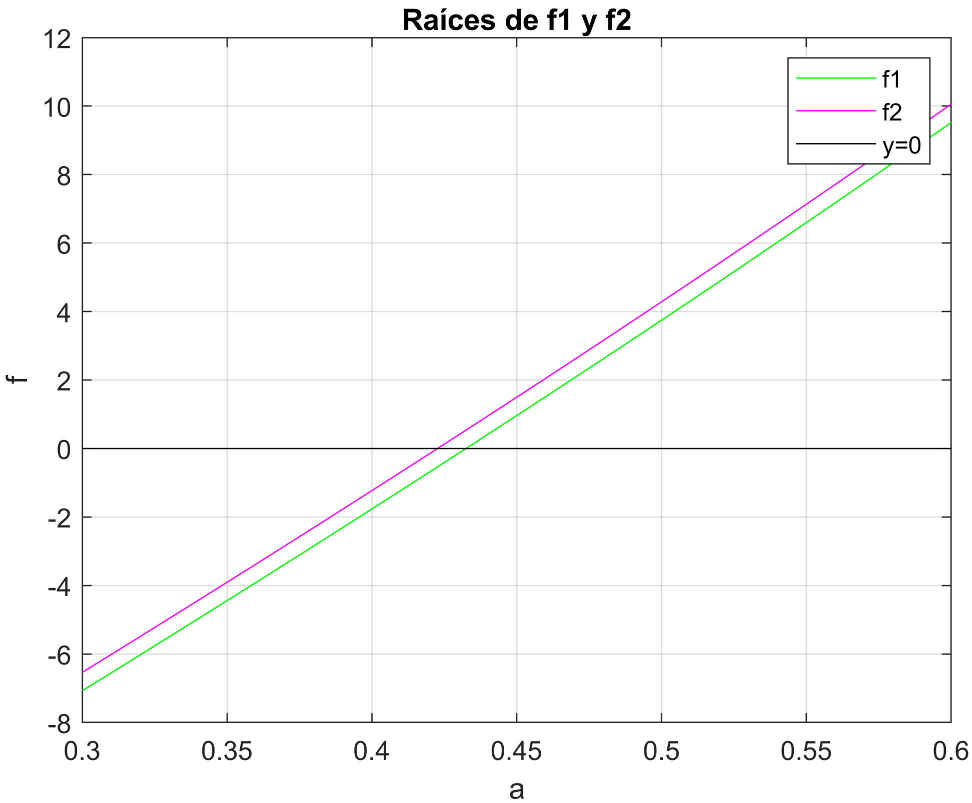
$$a_i = \cosh^{-1}\left(\cosh\left(-\frac{w}{H} * l_i + a_i\right) + \frac{w}{H} * y(l_i)\right)$$

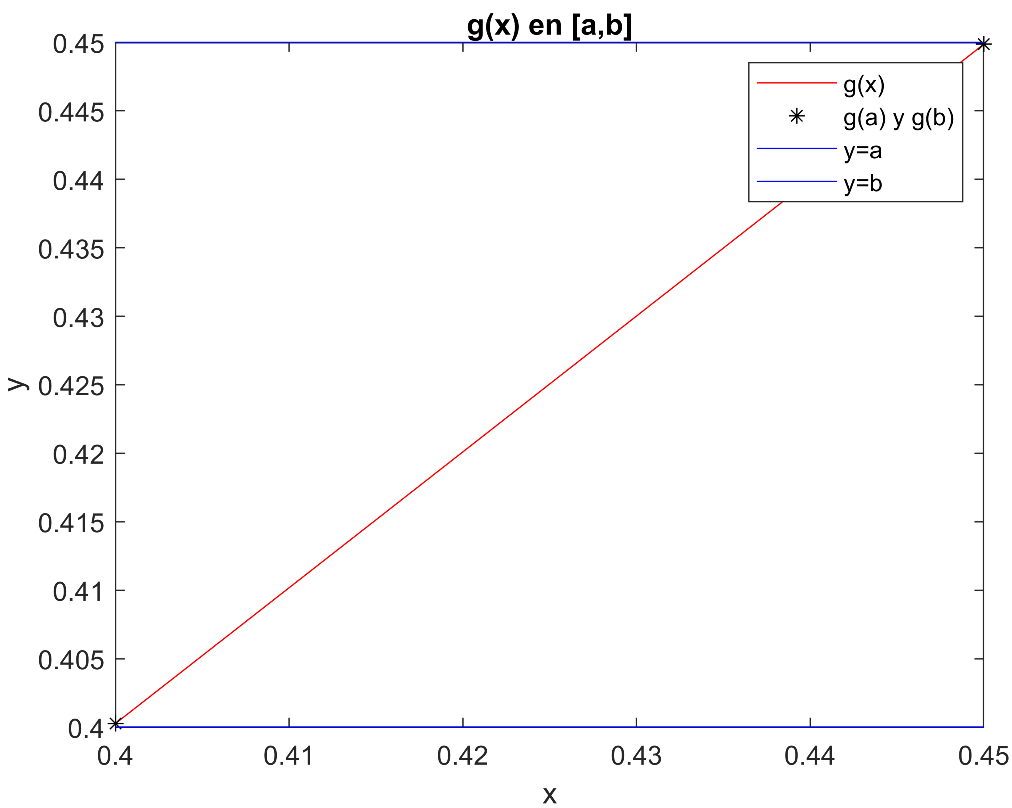
Donde $x = a_i$ para las funciones planteadas a continuación.

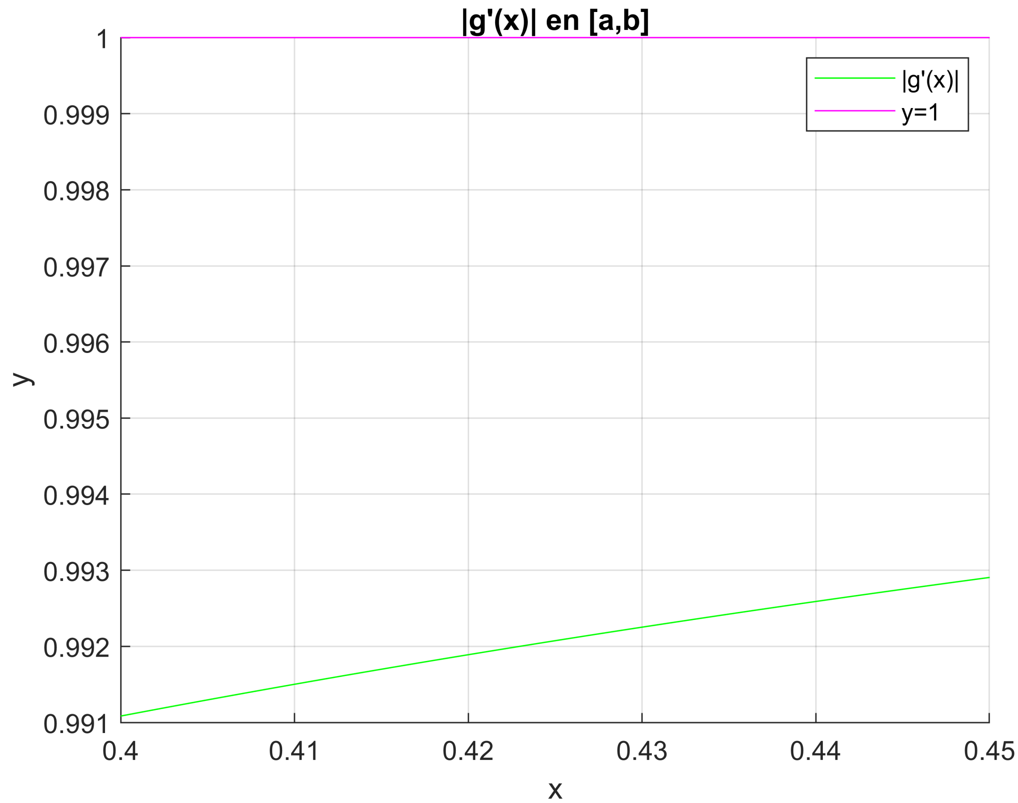
```
g1 = @(x) (acosh(cosh((-W/H)*li+x)+(W/H)*yl1));
g2 = @(x) (acosh(cosh((-W/H)*li+x)+(W/H)*yl2));
```

Primero, evaluaremos su convergencia. El intervalo escogido será el mismo que se utilizó para el Método de la Bisección.

```
convergenciapfijo(g1, a, b)
```


Raíces de f1 y f2
f1
f2
y=0
f
a
12
10
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
0.3
0.35
0.4
0.45
0.5
0.55
0.6


g(x) en [a,b]
g(x)
g(a) y g(b)
y=a
y=b
y
x
0.45
0.445
0.44
0.435
0.43
0.425
0.42
0.415
0.41
0.405
0.4
0.4
0.41
0.42
0.43
0.44
0.45



Analizando las gráficas, se determina que el método es convergente, pues $g([a,b]) \subseteq [a,b]$ y $|g'(x)| < 1, \forall x \in [a,b]$.

Por lo tanto, aplicamos el método a ambas ecuaciones, utilizando el mismo valor inicial que se utilizó para el Método de Newton-Raphson.

En este caso, se utilizará un valor mayor para maxiter, pues puede que el método tarde en converger.

```
maxiter = 500;
```

Aproximación de a_1

```
[a1PFijo, R1PFijo] = pfijo(g1, x0, tol, maxiter)
```

```
a1PFijo = 
   0.431817570908257
R1PFijo = 501×3 table
```

	Iteration	x*	Er
1	0	0.400000...	1
2	1	0.400268...	1
3	2	0.400534...	0.000670...
4	3	0.400797...	0.000663...
5	4	0.401058...	0.000657...
6	5	0.401317...	0.000651...

	Iteration	x*	Er
7	6	0.401574...	0.000645...
8	7	0.401828...	0.000638...
9	8	0.402080...	0.000632...
10	9	0.402330...	0.000626...
11	10	0.402578...	0.000620...
12	11	0.402823...	0.000615...
13	12	0.403067...	0.000609...
14	13	0.403308...	0.000603...
15	14	0.403547...	0.000597...
16	15	0.403784...	0.000592...
17	16	0.404019...	0.000586...
18	17	0.404251...	0.000581...
19	18	0.404482...	0.000575...
20	19	0.404711...	0.000570...
21	20	0.404938...	0.000565...
22	21	0.405162...	0.000560...
23	22	0.405385...	0.000554...
24	23	0.405606...	0.000549...
25	24	0.405825...	0.000544...
26	25	0.406042...	0.000539...
27	26	0.406257...	0.000534...
28	27	0.406471...	0.000529...
29	28	0.406682...	0.000524...
30	29	0.406892...	0.000520...
31	30	0.407100...	0.000515...
32	31	0.407306...	0.000510...
33	32	0.407510...	0.000505...
34	33	0.407713...	0.000501...
35	34	0.407914...	0.000496...
36	35	0.408113...	0.000492...
37	36	0.408310...	0.000487...
38	37	0.408506...	0.000483...
39	38	0.408700...	0.000478...

	Iteration	x*	Er
40	39	0.408892...	0.000474...
41	40	0.409083...	0.000470...
42	41	0.409272...	0.000466...
43	42	0.409459...	0.000461...
44	43	0.409645...	0.000457...
45	44	0.409829...	0.000453...
46	45	0.410012...	0.000449...
47	46	0.410193...	0.000445...
48	47	0.410373...	0.000441...
49	48	0.410551...	0.000437...
50	49	0.410727...	0.000433...
51	50	0.410903...	0.000429...
52	51	0.411076...	0.000426...
53	52	0.411248...	0.000422...
54	53	0.411419...	0.000418...
55	54	0.411588...	0.000414...
56	55	0.411756...	0.000411...
57	56	0.411922...	0.000407...
58	57	0.412087...	0.000403...
59	58	0.412251...	0.000400...
60	59	0.412413...	0.000396...
61	60	0.412574...	0.000393...
62	61	0.412734...	0.000389...
63	62	0.412892...	0.000386...
64	63	0.413049...	0.000383...
65	64	0.413204...	0.000379...
66	65	0.413358...	0.000376...
67	66	0.413511...	0.000373...
68	67	0.413663...	0.000369...
69	68	0.413813...	0.000366...
70	69	0.413962...	0.000363...
71	70	0.414110...	0.000360...
72	71	0.414257...	0.000357...

	Iteration	x*	Er
73	72	0.414402...	0.000354...
74	73	0.414547...	0.000350...
75	74	0.414690...	0.000347...
76	75	0.414832...	0.000344...
77	76	0.414972...	0.000341...
78	77	0.415112...	0.000338...
79	78	0.415250...	0.000336...
80	79	0.415387...	0.000333...
81	80	0.415523...	0.000330...
82	81	0.415658...	0.000327...
83	82	0.415792...	0.000324...
84	83	0.415925...	0.000321...
85	84	0.416056...	0.000319...
86	85	0.416187...	0.000316...
87	86	0.416316...	0.000313...
88	87	0.416445...	0.000310...
89	88	0.416572...	0.000308...
90	89	0.416698...	0.000305...
91	90	0.416823...	0.000303...
92	91	0.416948...	0.000300...
93	92	0.417071...	0.000297...
94	93	0.417193...	0.000295...
95	94	0.417314...	0.000292...
96	95	0.417434...	0.000290...
97	96	0.417553...	0.000287...
98	97	0.417672...	0.000285...
99	98	0.417789...	0.000282...
100	99	0.417905...	0.000280...

⋮

Aproximación de a_2

```
[a2PFijo, R2PFijo] = pfijo(g2, x0, tol, maxiter)
```

```
a2PFijo =
   0.422234044797071
```

R2PFijo = 501×3 table

	Iteration	x*	Er
1	0	0.400000...	1
2	1	0.400186...	1
3	2	0.400372...	0.000467...
4	3	0.400555...	0.000462...
5	4	0.400738...	0.000458...
6	5	0.400918...	0.000454...
7	6	0.401097...	0.000450...
8	7	0.401274...	0.000446...
9	8	0.401450...	0.000442...
10	9	0.401625...	0.000438...
11	10	0.401797...	0.000434...
12	11	0.401969...	0.000430...
13	12	0.402139...	0.000426...
14	13	0.402307...	0.000422...
15	14	0.402474...	0.000418...
16	15	0.402640...	0.000414...
17	16	0.402804...	0.000411...
18	17	0.402966...	0.000407...
19	18	0.403128...	0.000403...
20	19	0.403288...	0.000400...
21	20	0.403446...	0.000396...
22	21	0.403603...	0.000392...
23	22	0.403759...	0.000389...
24	23	0.403914...	0.000385...
25	24	0.404067...	0.000382...
26	25	0.404219...	0.000379...
27	26	0.404369...	0.000375...
28	27	0.404519...	0.000372...
29	28	0.404667...	0.000369...
30	29	0.404813...	0.000365...
31	30	0.404959...	0.000362...
32	31	0.405103...	0.000359...
33	32	0.405246...	0.000356...

	Iteration	x*	Er
34	33	0.405388...	0.000353...
35	34	0.405529...	0.000349...
36	35	0.405668...	0.000346...
37	36	0.405806...	0.000343...
38	37	0.405943...	0.000340...
39	38	0.406079...	0.000337...
40	39	0.406214...	0.000334...
41	40	0.406348...	0.000331...
42	41	0.406480...	0.000328...
43	42	0.406612...	0.000326...
44	43	0.406742...	0.000323...
45	44	0.406871...	0.000320...
46	45	0.406999...	0.000317...
47	46	0.407126...	0.000314...
48	47	0.407252...	0.000312...
49	48	0.407377...	0.000309...
50	49	0.407501...	0.000306...
51	50	0.407624...	0.000303...
52	51	0.407746...	0.000301...
53	52	0.407866...	0.000298...
54	53	0.407986...	0.000296...
55	54	0.408105...	0.000293...
56	55	0.408223...	0.000290...
57	56	0.408339...	0.000288...
58	57	0.408455...	0.000285...
59	58	0.408570...	0.000283...
60	59	0.408684...	0.000281...
61	60	0.408797...	0.000278...
62	61	0.408909...	0.000276...
63	62	0.409020...	0.000273...
64	63	0.409130...	0.000271...
65	64	0.409239...	0.000269...
66	65	0.409347...	0.000266...

	Iteration	x*	Er
67	66	0.409455...	0.000264...
68	67	0.409561...	0.000262...
69	68	0.409667...	0.000259...
70	69	0.409771...	0.000257...
71	70	0.409875...	0.000255...
72	71	0.409978...	0.000253...
73	72	0.410080...	0.000251...
74	73	0.410182...	0.000249...
75	74	0.410282...	0.000246...
76	75	0.410382...	0.000244...
77	76	0.410481...	0.000242...
78	77	0.410578...	0.000240...
79	78	0.410676...	0.000238...
80	79	0.410772...	0.000236...
81	80	0.410868...	0.000234...
82	81	0.410962...	0.000232...
83	82	0.411056...	0.000230...
84	83	0.411150...	0.000228...
85	84	0.411242...	0.000226...
86	85	0.411334...	0.000224...
87	86	0.411425...	0.000222...
88	87	0.411515...	0.000220...
89	88	0.411604...	0.000219...
90	89	0.411693...	0.000217...
91	90	0.411781...	0.000215...
92	91	0.411868...	0.000213...
93	92	0.411955...	0.000211...
94	93	0.412040...	0.000210...
95	94	0.412126...	0.000208...
96	95	0.412210...	0.000206...
97	96	0.412294...	0.000204...
98	97	0.412377...	0.000203...
99	98	0.412459...	0.000201...

	Iteration	x*	Er
100	99	0.412541...	0.000199...

⋮

Objetivo 3

A continuación, hallaremos las tensiones en cada cable de sustentación vertical para cumplir con el objetivo de hallar la tensión en los cables de sustentación vertical del área principal del puente.

Aproximación de P_i

```
PiPFijo = H*(sinh((-W/H)*0 + a1PFijo) - sinh(a2PFijo))
```

```
PiPFijo =
     5.598373482665318e+02
```

Objetivo 4

Finalmente, para cumplir el objetivo de comparar el valor hallado con lo propuesto por la literatura, se comparará el valor hallado en cada uno de los métodos con el valor esperado. Se hará uso del error relativo para lograr este propósito.

Resultado esperado

El resultado esperado para el valor de la tensión, que se asumirá como valor exacto, es el extraído del documento de Abdel-Ghaffar & Scanlan (1985): $P_i = 572.5\ \mathrm{kips}$.

```
PiExacto = 572.5;
```

Método de la Bisección

```
ErBiseccion = errorrelativo(PiExacto, PiBiseccion)
```

```
ErBiseccion =
     6.235043337686693e-04
```

Se observa que el resultado aproxima al valor exacto con 3 cifras significativas.

Método de Newton-Raphson

```
ErNewtonRaphson = errorrelativo(PiExacto, PiNewtonRaphson)
```

```
ErNewtonRaphson =
     6.233222773008537e-04
```

Se obtiene un error similar al del Método de la Bisección. Igualmente, el resultado aproxima al valor exacto con 3 cifras significativas.

Método del Punto Fijo

```
ErPFijo = errorrelativo(PiExacto, PiPFijo)
```

```
ErPFijo =
   0.022118168966757
```

A pesar de tener más de 10 veces el número de iteraciones que los otros métodos, el Método del Punto Fijo con el despeje utilizado da tan solo 2 cifras significativas, por lo que es una aproximación poco confiable.

Objetivo 5

Para empezar, necesitamos el dato del área de un cable presente en el Anexo 1.

```
A = 5.777 % ft^2
```

```
A =
   5.777000000000000
```

Luego, para determinar el esfuerzo de los cables, necesitaremos de la fórmula $\sigma = \frac{F}{A}$ presente en nuestro marco teórico. Para el cálculo del esfuerzo usaremos el área junto con la fuerza vertical hallada anteriomente.

```
% Convirtiendo el área a in^2
A = A*144
```

```
A =
     8.318880000000000e+02
```

```
% Calculamos el esfuerzo
E = PiNewtonRaphson/A % kips/in^2
```

```
E =
   0.688622569388854
```

Vemos que el esfuerzo nos da 0.6886 $\frac{kips}{in^2}$.

Luego calculamos el diámetro del cable usando el esfuerzo de afluencia como dato y la tensión del cable calculada anteriomente. Por lo tanto, el diámetro hallado debe ser el mínimo necesario para no causar deformaciones al cable, porque si tuviera menor diametro, el mismo se deformaría permanente.

```
sigma = 160 % kips/in^2
```

```
sigma =
   160
```

```
A = PiNewtonRaphson/sigma % in^2
```

```
A =
   3.580355325023467
```

Ahora calculamos el diámetro.

```
d = sqrt(4*A/pi) % in
```

```
d =
   2.135099525554487
```

Con un error relativo

```
valor_real = 2.688
```

```
valor_real =
   2.688000000000000
```

```
error_r = abs(d-valor_real)/abs(valor_real)
```

```
error_r =
   0.205692140790742
```

Para determinar el material de los cables a utilizados en la construcción del puente hemos usado el resultado anterior y para ello vamos a emplear la tabla 2 donde se muestran las distintas opciones.

Material	Módulo de elasticidad (psi)	Límite elástico (psi)	Resistencia a la tracción (psi)
Aleación de Aluminio	10×10^6	37 000	61 000
Latón	14.6×10^6	50 000	61 000
Cobre	16×10^6	30 000	40 000
Acero	30×10^6	65 000	80 000

Tabla 2: Propiedades de los materiales

Notemos que el esfuerzo obtenido es menor a lo mostrado en la tabla de materiales, por lo tanto, se podría usar cualquiera de estos materiales para los cables, teniendo en cuenta solo el peso del puente. Sin embargo, dado que los cables estarán sometidos a cargas variables, se escoge el material con mayor esfuerzo de fluencia que es el acero y hemos encontrado un tipo de acero llamado Tubo ASTM A500 LAC Y GALV de Aceros Arequipa.

Resumen de resultados

A continuación, un resumen de los resultados hallados en los objetivos 2, 3.

a1		
Bisección	**Newton-Raphson**	**Punto Fijo**
0.432463055849075	0.432463058418837	0.431817570908257

Tabla 3: Resultados del coeficiente a_1

a2		
Bisección	**Newton-Raphson**	**Punto Fijo**
0.422658771276474	0.422658775643757	0.422234044797071

Tabla 4: Resultados del coeficiente a_2

Pi		
Bisección	Newton-Raphson	Punto Fijo
5.728569562310826e+02	5.728568520037547e+02	5.598373482665318e+02

Tabla 5: Resultados de la fuerza vertical de tensión de los cables

Error relativo de Pi		
Bisección	Newton-Raphson	Punto Fijo
6.235043337686693e-04	6.233222773008537e-04	0.022118168966757

Tabla 5: Resultados del error relativo de la fuerza vertical de tensión

Discusión

1. Como se pudo observar, el valor de la tensión calculado es bastante bueno y cercano al valor exacto que se provee en el anexo 1, considerando que se utilizó una aproximación parabólica para el cable principal.
2. Al aproximar la tensión de los cables (P_i), nos dimos cuenta de que el valor exacto de P_i se encuentra cuando $l_i = 0$, lo cual no es coherente sabiendo que l_i es la distancia horizontal entre 2 nodos O_i y O_{i+1}. Por lo que en la ecuación $H\left(\sinh\left(\left(-\frac{W}{H}\right) * l_i + a_1\right) - \sinh(a_2)\right)$, partiendo de que nuestro cálculo de los coeficientes a_i y a_{i+1} es correcto, $-\frac{W}{H}$, debe ser un valor cercano a cero, según los datos del anexo 1 el valor de $-\frac{W}{H}$ es $-6.2468 * 10^{-5}$, por lo que discutimos que este valor debe estar aún más cerca de cero. Como el peso por pie horizontal (W) es un valor estático, la fuerza horizontal en cada cable (H) puede variar por fuerzas externas y depende de las condiciones del entorno como fuertes vientos, sismos, paso de carros, etc., por lo que posiblemente H debió haber sido más grande.
3. A partir del resultado del objetivo 4, se puede calcular el esfuerzo de los cables para luego determinar el material para la formación de los cables que sostienen al puente colgante.como se menciona en el objetivo 5; finalmente llegamos a la conclusión que el material óptimo para los cables es el acero, mismo que usa el puente real en sus cables.

Conclusiones

El análisis del comportamiento de los puentes colgantes es muy exhaustivo; sin embargo, es de mucha importancia para evitar accidentes como derrumbamientos. Existen muchos factores a considerar al realizar un estudio de este tipo, por lo que emplear un método numérico efectivo es necesario para la precisión y exactitud de los resultados. Al culminar los cálculos, el valor de la tensión calculado es bastante bueno y se puede utilizar el resultado en otros estudios, considerando que se utilizó una aproximación parabólica para el cable principal. Este valor nos permite realizar distintos análisis como cálculos de materiales en la construcción y costos, hipotetizar la efectividad en la estabilidad del puente colgante y determinar si existen otras fuerzas externas que afectan tanto a la tensión de los cables como al material empleado en la construcción.

En un contexto cercano a la realidad, en el actual estudio no se consideraron otras anomalías como lo son desastres naturales, durabilidad de los materiales empleados en la construcción del puente y fuerza ejercida por la circulación masiva en el puente.

Bibliografía

1. Abdel-Ghaffar, A. M., & Scanlan, R. H. (1985). Ambient vibration studies of golden gate bridge: I. Suspended structure. *Journal of Engineering Mechanics*, *111*(4), 463-482.
2. Cao, H., Zhou, Y. L., Chen, Z., & Abdel Wahab, M. (2017). Form-finding analysis of suspension bridges using an explicit iterative approach. *Structural Engineering and Mechanics*, *62*(1), 85-95.
3. Cáceres, J., De Rojas, G., Huamaní, R., Torres, J., & Zuloeta, L. (2021). Ecuación de la catenaria para calcular las fuerzas internas de los cables verticales de un puente colgante.
4. Zhang, W. M., Li, T., Shi, L. Y., Liu, Z., & Qian, K. R. (2018). An iterative calculation method for hanger tensions and the cable shape of a suspension bridge based on the catenary theory and finite element method. *Advances in Structural Engineering*, *22*(7), 1566-1578.

Anexos

Anexo 1: Datos estructurales del puente Golden Gate (Abdel-Ghaffar & Scanlan, 1985)

TABLE 1.—Structural Properties of Golden Gate Bridge

Structural property (1)	Quantity (2)
SUSPENDED STRUCTURE (STIFFENING TRUSS)	
Length of suspended structure	6,450 ft
Total length of bridge including approach structure	8,981 ft
Length of main span	4,200 ft
Length of each side span	1,125 ft
Width of bridge	90 ft
Width of roadway between curbs	60 ft
Clearance above mean higher high water	220 ft
Depth of truss (for all spans)	25 ft
Moment of inertia for one truss (center span)	300.2 ft^4
Moment of inertia for one truss (side span)	194.7 ft^4
Axial area for one truss (center span)	1.92 ft^2
Axial area for one truss (side span)	1.24 ft^2
Equivalent shear area (for all spans)	0.179 ft^2
Width of wind truss	90 ft
Moment of inertia of wind truss	7,639 ft^4
Total dead load (center span)	22.90 kips/ft
Total dead load (side span)	23.10 kips/ft
Design live load per lineal foot of bridge	4 kips/ft
Wind load on floor and vehicles	1.13 kips/ft
Maximum transverse deflection (center span)	27.7 ft
Maximum downward deflection (center span)	10.8 ft
Maximum upward deflection (center span)	5.8 ft
Young's modulus of elasticity	29,000 kips/in.^{2}
Yield strength	45 kips/in.^{2}
Ultimate strength	60 kips/in.^{2}
Torsional rigidity of roadway near towers (present condition)	425.86 ft^4
Torsional rigidity of roadway near center (present condition)	332.22 ft^4
Torsional rigidity before addition of bottom bracing	7.5 ft^4
Area of one diagonal of lateral bracing	0.09194 ft^2
CABLES AND SUSPENDERS	
Width C.C. cables	90 ft
Diameter of cables over wrapping	36.375 in.
Length of one cable	7,650 ft
Maximum cable sag	472.2 ft
Number of wires in each cable	27,572
Number of strands in each cable	61
Size of wire (No. 6) diameter	0.196 in.
Weight of one cable per horizontal foot	3.34 kips/ft
Weight of cables, suspenders and accessories	24,500 tons
Net area of one cable	5.777 ft^2
Diameter of one suspender rope	2.688 in.
Net area of each suspender (4 ropes)	0.1576 ft^2
Young's modulus of elasticity	29,000 kips/in^2
Yield strength (cables and suspenders)	160 kips/in.^{3}
Ultimate strength (cables and suspenders)	220 kips/in.^{2}
Horizontal component of force in each cable	53,467 kips
Force in each suspender (center span)	572.5 kips
Force in each suspender (side span)	577.5 kips
Hanger spacing	50 ft

Note: 1 ft = 0.305 m; 1 lb = 4.45 N.

Funciones Matlab

```
function [R, z]=biseccion(f, a, b, tol, maxiter)
    if f(a) * f(b) > 0
        z = [];
        fprintf("No se puede asegurar que existe una raíz en este intervalo.");
        return;
    end
    c = (a + b) / 2;
    error = (b - a) / 2;
    n = 0;
    z = [n a b c f(a) f(b) f(c) error];
```

```
    while error > tol && n < maxiter
        n = n + 1;
        if f(a) * f(c) <= 0
            b = c;
        else
            a = c;
        end
        c = (a + b) / 2;
        error = (b - a) / 2;
        z = [z; n a b c f(a) f(b) f(c) error];
    end
    z = array2table(z, 'VariableNames', {'Iteration', 'a', 'b', 'c', 'f(a)', 'f(b)', 'f(c)', 'E
    R = z.c(end);
end
function [R,z]=newtonraphson(f, x0, tol, maxiter)
    syms x;
    df = diff(f(x));
    f_prim = inline(subs(df), 'x');
    n = 0;
    error = 1;
    z = [n x0 error];
    while error > tol && n < maxiter
        n = n + 1;
        x1 = x0 - (f(x0) / f_prim(x0));
        z = [z; n x1 error];
        error = abs(x1 - x0) / abs(x1);
        x0 = x1;
    end
    z = array2table(z, 'VariableNames', {'Iteration', 'x*', 'Er'});
    R = z.("x*")(end);
end
function [R,z]=pfijo(g, x0, tol, maxiter)
    k = 0;
    error = 1;
    z = [k x0 error];
    while k < maxiter && error > tol
        k = k + 1;
        x1 = g(x0);
        z = [z; k x1 error];
        error = abs(x1 - x0) / abs(x1);
        x0 = x1;
    end
    z = array2table(z, 'VariableNames', {'Iteration', 'x*', 'Er'});
    R = z.("x*")(end);
end
function convergenciapfijo(g, a, b)
    % se asume continua en [a,b] y derivable en (a,b)

    % g([a,b]) C [a,b]
    figure(1)
    grid on;
    hold off;
    xs = linspace(a, b, 100);
    plot(xs, g(xs), 'r', [a b], [g(a) g(b)], '*k');
```

```
    hold on;
    y1 = @(x) (a .* x.^0);
    y2 = @(x) (b .* x.^0);
    plot(xs, y1(xs), 'b');
    plot(xs, y2(xs), 'b');
    title("g(x) en [a,b]");
    xlabel("x");
    ylabel("y");
    legend("g(x)", "g(a) y g(b)", "y=a", "y=b");

    % |g'(x)| < 1 para x in [a,b]
    figure(2)
    grid on;
    hold on;
    syms x;
    g_diff = diff(g(x));
    g_diff_fun = inline(subs(g_diff), 'x');
    plot(xs, abs(g_diff_fun(xs)), 'g');
    y3 = @(x) (1 .* x.^0);
    plot(xs, y3(xs), 'm');
    legend("|g'(x)|", "y=1");
    xlabel("x");
    ylabel("y");
    title("|g'(x)| en [a,b]");
end
function E=errorrelativo(A, a)
    E = abs(A-a)/abs(A);
end
```