

---

---

# **Cálculo de fuerzas internas en cables de sustentación vertical del puente colgante Golden Gate**

---

---

# Identificación del problema

Las tensiones en los cables de sustentación vertical de un puente colgante no están uniformemente distribuidas en el estado final del puente, por lo que estas tensiones no son iguales a la carga muerta de la sección del puente entre dos cables adyacentes (Zhang et al., 2018).



Por lo tanto, se requieren de otros métodos para lograr un cálculo correcto de la tensión de los cables de sustentación vertical.

# Objetivos

## Objetivo general

Determinar el valor de la tensión en los cables de sustentación vertical del área principal del puente Golden Gate.

## Objetivos específicos

1. Modelar el cable principal del puente Golden Gate como una serie de segmentos catenarios unidos.
2. Calcular los parámetros de la ecuación catenaria mediante una aproximación parabólica.
3. Hallar la tensión en los cables de sustentación vertical del área principal del puente.
4. Comparar el valor hallado con lo propuesto por la literatura.
5. Analizar los materiales empleados en la construcción del puente colgante.

# Justificación

Actualmente, existe un gran interés en los puentes colgantes para la construcción de puentes largos, dado que optimizan la utilización de materiales sin sacrificar la integridad de la estructura (Zhang et al., 2018).



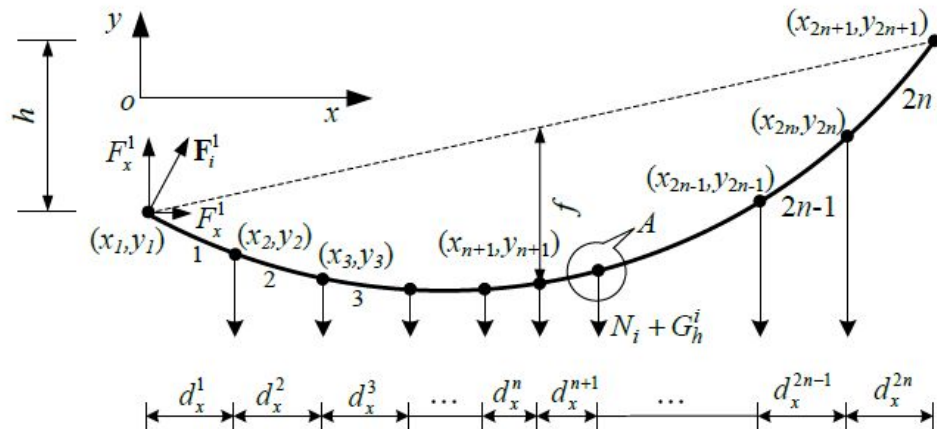
Por lo tanto, es necesario tener una medida precisa del valor de la tensión en los cables de sustentación vertical de los puentes colgantes, pues es un factor crítico para el equilibrio general de la estructura.

# Marco teórico - Antecedentes

*Form-finding analysis of suspension bridges using an explicit iterative approach (Cao et al., 2017):*

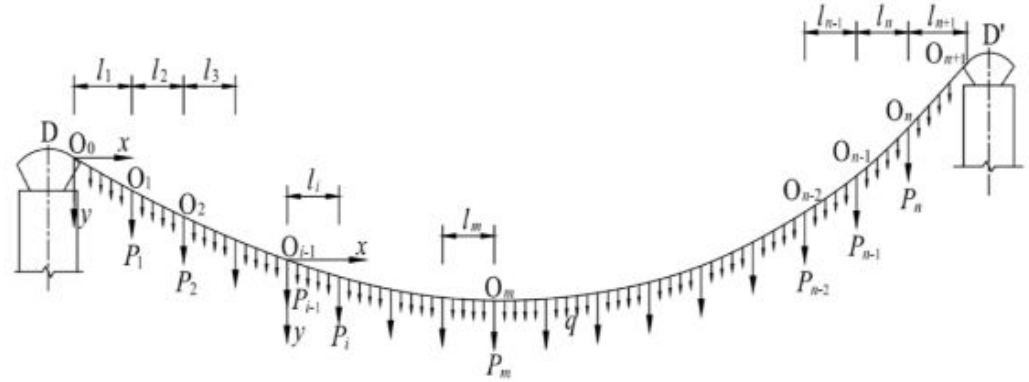
Se plantean dos ecuaciones no lineales para calcular las longitudes del cable principal y los cables de sustentación vertical.

$$\left[ \sum_{i=1}^n \varphi_y \left( F_x^i, F_y^i, \varphi_x^{-1} \left( F_x^i, F_y^i, d_x^i \right) \right), \sum_{i=1}^{2n} \varphi_y \left( F_x^i, F_y^i, \varphi_x^{-1} \left( F_x^i, F_y^i, d_x^i \right) \right) \right]^T \\ = \left[ d_y^{n+1}, d_y^{2n+1} \right]^T = [h/2 - f, h]^T$$



*An iterative calculation method for hanger tensions and the cable shape of a suspension bridge based on the catenary theory and finite element method (Zhang et al., 2018):*

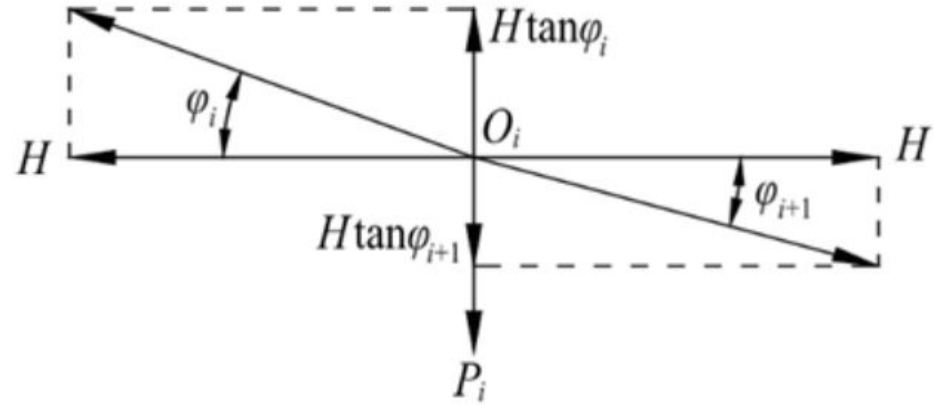
Como podemos observar en la figura, se establecen varios sistemas de coordenadas, con su origen en el punto tangente izquierdo,  $O_0$ , y los puntos de suspensión,  $O_1 - O_n$ , a lo largo del cable, el eje  $x$  positivo apuntando hacia la derecha, y el eje  $y$  positivo apuntando hacia abajo (Zhang et al., 2018).



La forma de un segmento de cable arbitrario se deriva de la siguiente ecuación de catenaria:

$$y = c \left[ \cosh \left( \frac{x}{c} + a_i \right) - \cosh a_i \right]$$

En un punto de suspensión arbitrario del cable principal, la fuerza de tracción axial puede descomponerse en una componente vertical y otra horizontal, como podemos observar en la figura 4 (Zhang et al., 2018). A partir de la condición de equilibrio de fuerzas en la dirección vertical, podemos obtener



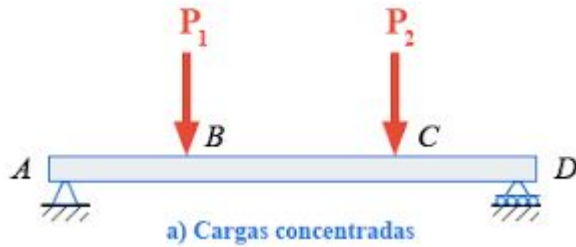
$$H \tan \varphi_i = H \tan \varphi_{i+1} + P_i$$

Reemplazando los términos, obtenemos:

$$P_i = H \left( \sinh \left( \frac{l_i}{c} + a_i \right) - \sinh(a_{i+1}) \right)$$

# Marco teórico - Conceptos Clave

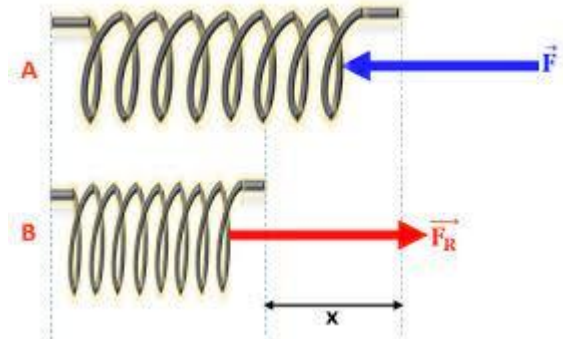
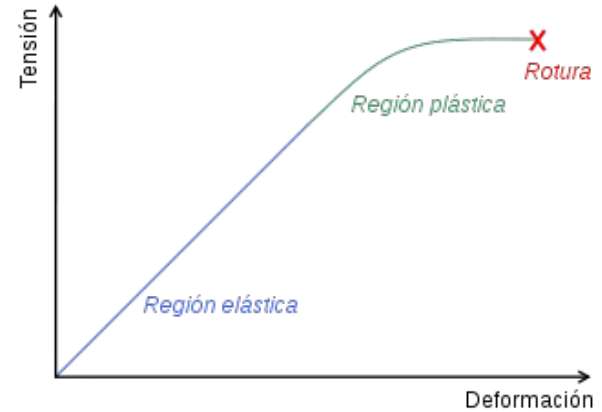
Fuerzas concentradas:



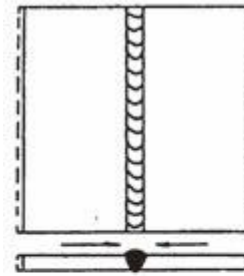
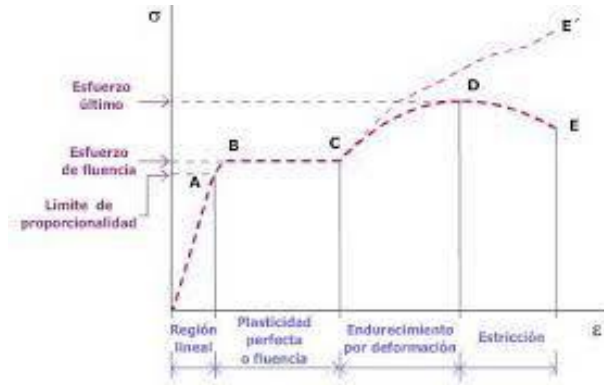
Catenaria:



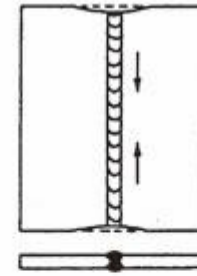
Ley de Hooke



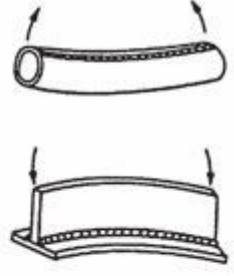




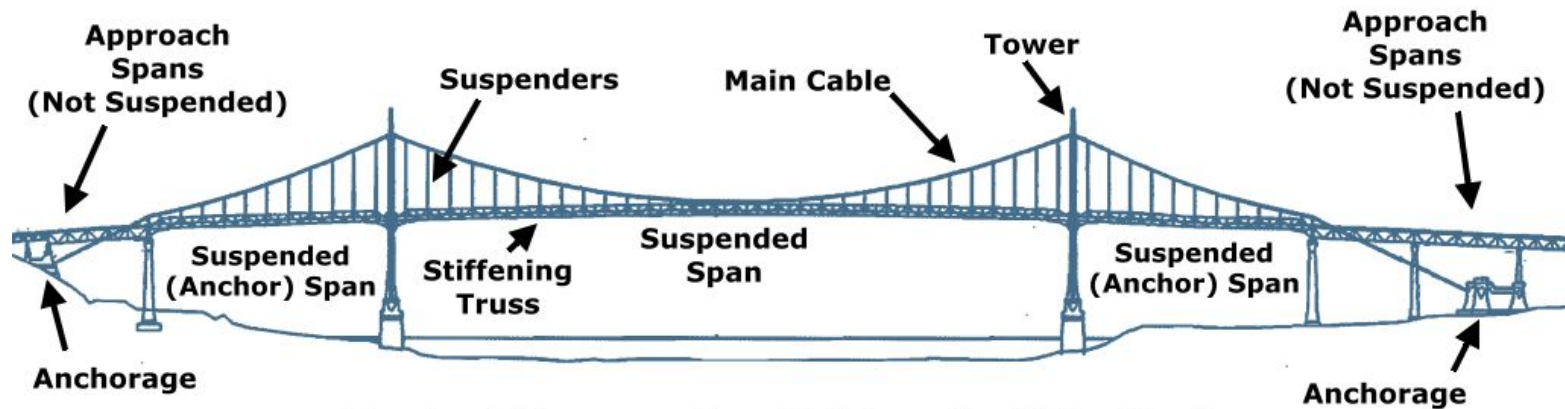
(A) Contracción transversal



(B) Contracción longitudinal



(C) Distorsión longitudinal



**Typical Suspension Bridge And Its Parts**

# Metodología

## Métodos de resolución

Se emplearon dos modelos matemáticos para operar.

### Interpolación de funciones

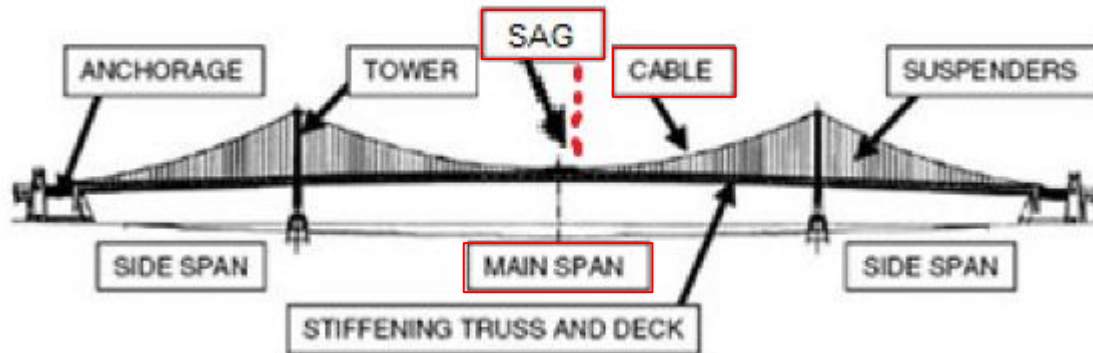
- Interpolación polinomial: Se utilizará para aproximar las catenarias sucesivas como un polinomio de grado 2 (parábola).

### Ecuaciones no lineales - Métodos iterativos

- Método de la Bisección: Es un método cerrado que se utilizará para hallar los coeficientes y que nos permitirá hacer un cálculo preciso.
- Método de Newton: Es un método abierto que se utilizará para hallar otra aproximación de los coeficientes y se espera que el cálculo sea de mayor precisión que el de la bisección.
- Método del Punto Fijo: Es otro método abierto que se utilizará para aproximar los coeficientes.

# Datos

Se estudiará el puente colgante Golden Gate. Para ello se necesita información de la estructura. *Ambient Vibration Studies of Golden Bridge: I. Suspended Structure* es una investigación de Abdel-Ghaffar, A. M., & Scanlan, R. H. (1985) que nos comparte una tabla con todas las propiedades estructurales.



# Desarrollo - Resultados

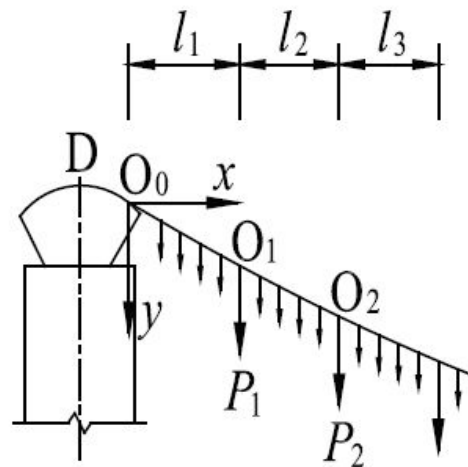
**Objetivo 1: Modelar el cable principal del puente Golden Gate como una serie de segmentos catenarios unidos.**

Los puntos de paso son  $(0,0)$ ,  $(2100,472.2)$ ,  $(4200,0)$ .

Utilizando interpolación polinomial, obtenemos:

$$P_{(x)} = -0.000107074829932x^2 + 0.449714285714286x + 0.0000000000000091$$

Con este polinomio, hallamos  $P_{(1)}$  y  $P_{(2)}$ .



# Desarrollo - Resultados

**Objetivo 2: Calcular los parámetros de la ecuación catenaria mediante una aproximación parabólica.**

Hallados los datos faltantes, procedemos a resolver la siguiente ecuación no lineal para  $a_i$ :

$$y(l_i) = -\frac{H}{w} \left[ \cosh\left(-\frac{w}{H} * l_i + a_i\right) - \cosh(a_i) \right]$$

Para esto aplicaremos 3 métodos numéricos. Los resultados obtenidos fueron los siguientes:

<u>a1</u>		
Bisección	Newton-Raphson	Punto Fijo
0.432463055849075	0.432463058418837	0.431817570908257

<u>a2</u>		
Bisección	Newton-Raphson	Punto Fijo
0.422658771276474	0.422658775643757	0.422234044797071

# Desarrollo - Resultados

**Objetivo 3: Hallar la tensión en los cables de sustentación vertical del área principal del puente.**

Con los valores de  $a_i$ , podemos hallar las tensiones en los cables de sustentación vertical ( $P_i$ ) mediante la siguiente ecuación:

$$P_i = H \left[ \sinh \left( -\frac{w}{H} * l_i + a_i \right) - \sinh(a_{i+1}) \right]$$

Cabe destacar que  $P_i$  es constante para cualquier nodo según la tabla de datos utilizada. A continuación se muestran los resultados según los parámetros calculados con cada método en kips:

<u>Pi</u>		
Bisección	Newton-Raphson	Punto Fijo
5.728569562310826e+02	5.728568520037547e+02	5.598373482665318e+02

# Desarrollo - Resultados

**Objetivo 4: Comparar el valor hallado con lo propuesto por la literatura.**

Se compararon los valores de  $P_i$  obtenidos con cada método con el valor exacto extraído de Abdel-Ghaffar, A. M. & Scanlan (1985) de 572.5 kips. A continuación se comparan los errores relativos de cada aproximación.

<u>Error relativo de <math>P_i</math></u>		
Bisección	Newton-Raphson	Punto Fijo
6.235043337686693e-04	6.233222773008537e-04	0.022118168966757

# Desarrollo - Resultados

## Objetivo 5: Analizar los materiales empleados en la construcción del puente colgante.

Se realizó un análisis del material del puente en base a esfuerzo (con área como dato) y en base al diámetro del cable.

Analizando el esfuerzo, se encontró un valor menor a los materiales a considerar. Por cuestiones de seguridad, se recomienda el acero.

En base al diámetro, se determinó que se podrían utilizar tubos ASTM A500 LAC Y GALV de Aceros Arequipa en lugar de cables.

```
% Convirtiendo el área a in^2
```

```
A = A*144
```

```
A =  
8.318880000000000e+02
```

```
% Calculamos el esfuerzo
```

```
E = PiNewtonRaphson/A % kips/in^2
```

```
E =  
0.688622569388854
```

Vemos que el esfuerzo nos da  $0.6886 \frac{\text{kips}}{\text{in}^2}$ .

Material	Módulo de elasticidad (psi)	Límite elástico (psi)	Resistencia a la tracción (psi)
Aleación de Aluminio	$10 \times 10^6$	37 000	61 000
Latón	$14.6 \times 10^6$	50 000	61 000
Cobre	$16 \times 10^6$	30 000	40 000
Acero	$30 \times 10^6$	65 000	80 000

```
sigma = 160 % kips/in^2
```

```
sigma =  
160
```

```
A = PiNewtonRaphson/sigma % in^2
```

```
A =  
3.580355325023467
```

Ahora calculamos el diámetro.

```
d = sqrt(4*A/pi) % in
```

```
d =  
2.135099525554487
```



# Discusión

Error relativo de Pi		
Bisección	Newton-Raphson	Punto Fijo
6.235043337686693e-04	6.233222773008537e-04	0.022118168966757

## Aproximación de $P_i$

$P_{i\text{NewtonRaphson}} = H * (\sinh((-W/H) * \theta + a_{1\text{NewtonRaphson}}) - \sinh(a_{2\text{NewtonRaphson}}))$

$P_{i\text{NewtonRaphson}} =$   
5.728568520037547e+02

% Calculamos el esfuerzo  
 $E = P_{i\text{NewtonRaphson}} / A$  % kips/in<sup>2</sup>

$E =$   
0.688622569388854

Convertido a libras/in<sup>2</sup> (psi) sería:  
688.622

Material	Módulo de elasticidad (psi)	Límite elástico (psi)	Resistencia a la tracción (psi)
Aleación de Aluminio	10 x 10 <sup>6</sup>	37 000	61 000
Latón	14.6 x 10 <sup>6</sup>	50 000	61 000
Cobre	16 x 10 <sup>6</sup>	30 000	40 000
Acero	30 x 10 <sup>6</sup>	65 000	80 000

# Conclusiones

- El valor de la tensión es cercano al real, pese a que se utilizó una aproximación parabólica para el cable principal, por lo que, este resultado podría ser útil en otros estudios.
- El análisis de los puentes colgantes es complejo, por lo que, emplear un método numérico efectivo es necesario para la precisión y exactitud de los resultados.
- Este valor nos permite realizar distintos análisis como cálculos de materiales en la construcción, hipotetizar la estabilidad del puente y determinar si existen otras fuerzas externas que afectan al puente.

# Referencias

1. Abdel-Ghaffar, A. M., & Scanlan, R. H. (1985). Ambient vibration studies of golden gate bridge: I. Suspended structure. *Journal of Engineering Mechanics*, 111(4), 463-482.
2. Cao, H., Zhou, Y. L., Chen, Z., & Abdel Wahab, M. (2017). Form-finding analysis of suspension bridges using an explicit iterative approach. *Structural Engineering and Mechanics*, 62(1), 85-95.
3. Cáceres, J., De Rojas, G., Huamaní, R., Torres, J., & Zuloeta, L. (2021). Ecuación de la catenaria para calcular las fuerzas internas de los cables verticales de un puente colgante.
4. Zhang, W. M., Li, T., Shi, L. Y., Liu, Z., & Qian, K. R. (2018). An iterative calculation method for hanger tensions and the cable shape of a suspension bridge based on the catenary theory and finite element method. *Advances in Structural Engineering*, 22(7), 1566-1578.